

**UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA**  
**Faculté des Sciences et Technologie et Science de Matière**  
**Département Génie Mécanique**



**Mémoire**

**MASTER PROFESSIONNEL**

Domaine : Science Technique

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Maintenance Industrielle

Présente par : CHAUCHE Abdellah

**Thème**

**ANALYSE VIBRATOIRE DES PLAQUES MINCES  
SOUS DIFFÉRENTES CONDITIONS AUX LIMITES**

Soutenu publiquement

Le : 26/ 06/ 2013

Devant le jury :

M. BOUHAME Nasser	Pr.	Président	UKM Ouargla
M. MEBARKI Abdelyamine	MC	Encadreur	UKM Ouargla
M. HACINI Adel	Pr.	Examineur	UKM Ouargla

**Année Universitaire : 2012 / 2013**

# REMERCIEMENT

Première remerciement **MON DIEU** en succès mon travail.

Je remercie très chaleureusement **MON PÈRE ET MA MÈRE** et toute **LA FAMILLE**.

Je tiens à exprimer nos sincères remerciements à **TOUTE PERSONNE** qui a contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier **M. MEBARKI ABDELYAMINE**, enseignant au département de génie mécanique, Université KASDI MERBAH OUARGLA, encadreur de mon mémoire de Master, pour la confiance qu'il m'a accordé en me proposant ce mémoire. De plus, son enthousiasme et sa confiance qui m'ont donné les motivations nécessaires pour réaliser ce travail.

Je tiens particulièrement à remercier le enseignant **BOUHAME NASSER** de l'Université KASDI MERBAH OUARGLA de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier les autres membres de jury Monsieur le enseignant **HACINI ADEL** qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les examinateurs de mon travail et pour le temps qu'ils ont consacré à l'examen de ce mémoire.

Je n'oublie pas aussi de remercier tous **LES ENSEIGNANTS** de département de Génie mécanique qui ont contribué à ma formation et **MES COLLÈGUES** et tous **MES AMIS**.

**CHAUCHE ABDELLAH**



# Dédicace

*Je dédie ce travail de ma mère et mon père*

*A mes frères et sœurs ( TITI, KHADIDJA, HASSANNE, MERIAME,  
SAID, TAIABE, AICHA, ROMAÏSSA )*

*A ma grande famille (CHAOUCHE ET BECHIRI )*

*A mes frères et sœurs des toutes les entreprises étudiants*

*A mes amis ( MOSTAFA, OUSSAMA, BELBEL, HEDAIFA,  
SABRI, TITOU, A.ELRAHIM, **ELHADJA** )*

*A mes nièces: KHAWLA, SAMAH.*

*A mes amis des études ( HADJILANI, ABAIDI, MAHDADI, AISSA,  
AYOUBE )*

## Résumé

Les fréquences d'une plaque rectangulaire isotrope présentant différents cas de plaque fixité (AAAA, EEEE, AAEE, AEAE ) sont déterminées en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz. La solution du problème aux valeurs propres est obtenue en proposant une déformée de fonction forme de séries qui vérifie les conditions aux limites de la plaque. Les fréquences circulaires obtenues par l'approche énergétique en utilisant par éléments finis sous ANSYS, sont comparées avec celles obtenues par d'autres plaques ou d'autre new méthode. Ensuite, une étude paramétrique fréquentielle de la plaque est nécessaire afin de comprendre le comportement dynamique d'une plaque.

**Mots clés:** vibration libre, plaque, milieu isotrope, fréquence propre, méthode de Rayleigh-Ritz.

**La nomenclature :**

**L’insigne : Désignation**

- $A_{mn}$  : l’amplitude du mode  $(m, n)$ .
- W** : la flèche de déplacement vertical du feuillet moyen.
- Z** : la direction du feuillet moyen.
- $\lambda$  : modules d’élasticité.
- $\mu$  : coefficients de Lamé.
- E** : le module d’Young.
- $\nu$  : le coefficient de Poisson.
- G** : Le module d’élasticité au cisaillement ou le module de glissement.
- h** : l’épaisseur.
- $\sigma_x$  : Les contraintes dans la direction x.
- $\sigma_y$  : Les contraintes dans la direction y.
- $\sigma_{zz}$  : Les contraintes dans la direction z.
- $\tau_{xy}$  : Contrainte de Cisaillement.
- $\epsilon_x$  : la déformation dans la direction x.
- $\epsilon_y$  : la déformation dans la direction y.
- $\gamma_{xy}$  : déformation angulaire.
- $x, y, z$  : les coordonnées.
- $u, v, w$  : les composantes déplacement.
- $\rho$  : la masse volumique.
- $t$  : le temps.
- $\frac{a}{h}$  : facteur d’élancement.
- a, b** : la dimension de plaque.
- $\theta_x$  : La rotation des sections dans la direction x.
- $\theta_y$  : La rotation des sections dans la direction y.
- $[\sigma]$  : tenseurs de contraintes.
- $[\epsilon]$  : tenseurs de déformation.

$\bar{Q}$ :	efforts de tranchants.
$\bar{N}$ :	efforts de membrane.
$q(x, y)$ :	la charge extérieure.
$\nabla$ :	l'opérateur $\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)$
$\bar{M}$ :	moments de flexion.
$\bar{e}$ :	déformation dans le plan.
$\bar{\chi}$ :	courbures.
$\bar{\lambda}$ :	déformation de cisaillement.
<b>U</b> :	l'énergie de déformation.
<b>T</b> :	l'énergie cinétique.
<b>V</b> :	l'énergie potentielle des forces extérieures.
$(m, n)$ :	un mode d'une plaque.
$\omega$ :	la fréquence fondamentale.
$\lambda_R$ :	Le quotient de Rayleigh.

**Table des matières :**

<b>RMERCIEMENTS</b>	I
<b>DEDICACE</b>	II
<b>RESUME</b>	III
<b>LA NOMENCLATURE</b>	V
<b>TABLE DES MATIERES</b>	VII
<b>TABLE DES FIGURES</b>	IX
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	X
<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	2
<b>Chapitre 01 : généralité sur les plaques</b>	4
1 -Introduction	5
2 -Historique des plaques	6
3 -Mission des plaques	7
4 - Définition du plaque :	8
5 - Milieu isotrope :	8
5-1 - Milieu homogène:	8
5-2 - Matériau isotrope:	8
6 - Choix des théories	9
7 - Les plaques minces	10
8 - Le modèle classique Love- Kirchhoff	10
9 - Domaine de validité	12
10 - Les hypothèses de Love Kirchhoff	12
11-Le modèle classique de Reissner-Mindlin	12
12-Domaine de validité	14
13-Les hypothèses de Mindlin	14
14 - Lois de comportement	14
<b>Chapitre 02 : vibrations des plaques minces</b>	16
1 – Introduction	17
2- Vibration libre	18
3 - Charge répartie	18
4 - L'analyse vibratoire	18
5 - Equations d'équilibre	19
6 - Calcul des moments et des efforts	20

7 - Expressions des Conditions aux limites	21
7-1 - Type de support : Appui simple	22
7-2 - Type de support : Bord fixé	22
8 - Forme de la déflexion	23
9 - Energie d'une plaque	23
10 - Les méthodes énergétiques	24
10-1 – Généralités	24
10-2 - Expression de l'énergie potentielle pour les plaques minces isotropes	25
11 - La méthode de Rayleigh	25
12 - Méthode de Rayleigh-Ritz	27
12-1 - Introduction	27
12-2 - Equation du mouvement	27
12-3 - Formulation analytique	28
13 - Le quotient de Rayleigh	28
14 - Les différentes fonction de formes	29
15 - Validation du programme élaboré	30
15-1 - Modélisation par ANSYS	30
15-2 - Description de l'élément utilisé pour le maillage	31
15-3 - Analyse dynamique libre des plaques rectangulaires isotrope (Méthode qualitative)	31
<b>Chapitre 03 : résultat et discussion</b>	<b>32</b>
1 - Introduction	33
2 - Les plaques isotropes	34
3 - Calculs des fréquences propres sous simulation par ANSYS	34
4 - Présentation des lignes modales de dix (10) premiers modes de la plaque EEEE	35
5 - Résultats et discussion	36
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	<b>45</b>
<b>REFIRNCE</b>	<b>46</b>
<b>LES ANNEXES</b>	<b>48</b>
L'annexe(A) : tableaux résultats des plaques par l'ANSYS	49
L'annexe(B) : Programme du plaque rectangulaire encastré EEEE par l'ANSYS	52
L'annexe(C): Les quatre cas des plaques isotrope homogène et non homogène	56

**Table des figures :**

<b>Figure 1-1 .</b> Modèle d'une plaque	10
<b>Figure 1-2 .</b> Cinématique de Love Kirchhoff	11
<b>Figure 1-3.</b> Cinématique de Reissner-Mindlin	13
<b>Figure 2-1 .</b> Forces agissant sur l'élément plaque	19
<b>Figure 2-2 .</b> Plaque isotrope AAAA	29
<b>Figure 2-3 .</b> Plaque isotrope EEEE	29
<b>Figure 2-4 .</b> Plaque isotrope AAEE	30
<b>Figure 2-5 .</b> Plaque isotrope AEAE	30
<b>Figure 2-6 .</b> logiciel ANSYS.	30
<b>Figure 3 -1 .</b> Présentation des lignes modales de dix (10) premiers modes de la plaque EEEE	35
<b>Figure 3-2 .</b> Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et new Méthode de Hearmon	37
<b>Figure 3-3 .</b> comparaison les mode 1 et 2 par rapport le rapport $R=a/b$ dans le plaque AAAA	38
<b>Figure 3-4 .</b> Influence de dimensions (longueur, largeur) dans plaque EEEE	38
<b>Figure 3 -5 .</b> Comparaison deux plaques (EEEE, AAAA) par rapport le rapport $R=a/b$	39
<b>Figure 3 -6 .</b> deux plaques (EEEE, AAAA)	39
<b>Figure 3 -7 .</b> comparaison deux plaques (AAEE, AEAE) par rapport le rapport $R=a/b$	40
<b>Figure 3 -8 .</b> deux plaques (AAEE , AEAE )	40
<b>Figure 3-9 .</b> comparaison deux plaques ( AAEE, AEAE, EEEE, AAAA ) par rapport le rapport $R = a/b$	41
<b>Figure 3-10 .</b> Comparaison deux plaques (EEEE,AAAA) par rapport du numéro de mode	42
<b>Figure 3-11 .</b> Comparaison deux plaques (AAEE,AEAE) par rapport du numéro de mode	42
<b>Figure 3-12 .</b> comparaison les cas des modale des matériau ( acier ; Aluminium ; cuivre) par rapport le rapport $R = a/b$ dans le plaque EEEE	43
<b>Figure 1 [L'annexe(C) ]:</b> Plaque homogène encasté EEEE	56
<b>Figure 2 [L'annexe(C) ]:</b> Plaque homogène appui simple AAAA	56
<b>Figure 3 [L'annexe(C) ]:</b> Plaque non homogène AAEE	57
<b>Figure 4 [L'annexe(C) ]:</b> Plaque non homogène AEAE	57

**Liste des tableaux :**

<b>Table 3-1 :</b> Les propriétés mécaniques et physiques des matériaux	34
<b>Tableau 3.2.</b> Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement et en calcul de structure dans le cas de la plaque AAAA	36
<b>Tableau 3.3.</b> Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement et en calcul de structure dans le cas de la plaque EEEE	37
<b>Tableau 1 [L'annexe(A)] :</b> Comparaison deux plaques (EEEE, AAAA) par rapport le rapport $R=a/b$	49
<b>Tableau 2 [L'annexe(A)]:</b> comparaison deux plaques (AAEE , AEAE ) par rapport le rapport $R=a/b$	49
<b>Tableau 3 [L'annexe(A)] :</b> Comparaison deux plaques (EEEE, AAAA ) par rapport du numéro de mode	49
<b>Tableau 4 [L'annexe(A)]:</b> Comparaison deux plaques ( AAEE, AEAE ) par rapport du numéro de mode	49
<b>Tableau 5 [L'annexe(A)]:</b> comparaison les cas des modale des matériau ( acier ; alimunum ; cuivre ) par rapport le rapport $R = a/b$ dans le plaque EEEE	50
<b>Tableau 6 [L'annexe(A)]:</b> comparaison les mode 1 et 2 par rapport le rapport $R=a/b$ dans le plaque AAAA	50
<b>Tableau 7 [L'annexe(A)] :</b> comparaison deux plaques (SSEE , SESE , EEEE , SSSS ) par rapport le rapport $R = a/b$	50
<b>Tableau 8 [L'annexe(A)]:</b> Influence de dimensions (longueur, largeur) dans plaque EEEE	50
<b>Tableau 9 [L'annexe(A)] :</b> Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et new Méthode de Hearmon	51

A decorative graphic of a scroll with a marbled paper texture. The scroll is unrolled, showing the text. The marbling consists of intricate, swirling patterns in shades of blue, green, and brown on a light background. The scroll has a dark border and small circular details at the top and bottom left corners, suggesting the binding or the way the scroll is held.

# **Introduction générale**

### Introduction générale :

Les plaques rectangulaires font partie des éléments structurels les plus couramment utilisés. L'utilisation de plus en plus importante, montre la nécessité impérieuse de l'étude de leur comportement vibratoire et devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. L'analyse vibratoire est une thématique actuelle importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle. Cette dernière touche de nombreux domaines, comme les technologies spatiales, l'ingénierie navale et civile, l'automobile, aéronautique, ainsi les ponts, les bâtiments, ou encore le génie nucléaire.

Le contrôle des vibrations dans les éléments de structure comme les plaques est un problème épineux qui se pose fréquemment au chercheur qu'à l'ingénieur. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques des plaques est indispensable.

Durant ces décennies, le domaine des vibrations connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à des niveaux d'excitations importants. C'est pour cette raison que le comportement des plaques est, depuis plus de cent ans, le sujet de recherches exhaustives.

Les travaux réalisés dans ce mémoire, s'inscrivent dans cette thématique 'Homogénéisation et étude du comportement vibratoire libres des plaques minces isotropes par la méthode de Rayleigh Ritz .

Le calcul des planchers de machines vibratoires constitue l'une des applications les plus utiles de la théorie des vibrations. Dans cette étude, on voit intervenir des éléments primaires tels que masses, constantes élastiques et forces perturbatrices, ainsi que les grandeurs dont il faudra déterminer les valeurs, telles que les fréquences propres et les amplitudes des vibrations. En tenant compte des particularités des facteurs intervenant dans les calculs, la détermination des éléments primaires est plutôt difficile et c'est leur établissement qui fait le principal objet de la dynamique des planchers de machine. L'étude des vibrations des planchers de machines est fondée sur la théorie des vibrations des systèmes mécaniques.

Les vibrations produites par les machines peuvent avoir des causes assez variées, dont certaines sont inhérentes, au processus technologique ou au principe de fonctionnement de la machine.

L'idée générale pour traiter ces problèmes vibratoires consiste à exprimer la déflexion  $w$  de la plaque par une combinaison linéaire des modes propres. Tout le problème revient alors à exprimer les coefficients  $A_{mn}$  des fonctions formes proposées. Deux possibilités se présentent, soit on peut les exprimer de façon expérimentale en remplaçant dans l'expression théorique

w par la déflexion expérimentale. Soit essayer de les calculer de façon théorique en proposant des modèles mathématiques. Il ne restait plus qu'à calculer les matrices de masse et de rigidité de la plaque et à résoudre le problème aux valeurs propres pour obtenir les fréquences naturelles d'une plaque rectangulaire .

Cette étude porte sur l'investigation paramétrique fréquentielle du comportement des plaques en vibration libre, comportement qui, avec le développement des industries a été étudié par de nombreux chercheurs. Et ceux-ci, au fur et à mesure que leurs investigations devenaient de plus en plus fines et qu'ils s'attaquaient à des problèmes de plus en plus complexes.

Le travail réalisé est organisé en trois chapitres.

Dans un premier temps, le **chapitre 1** effectue une revue historique sur plaques, du fait de leur importance. Ensuite, en outre plus en détails sur les travaux faits sur les plaques isotropes, et présente des rappels théoriques sur la loi du comportement dans l'élasticité linéaire, la théorie des plaques minces .

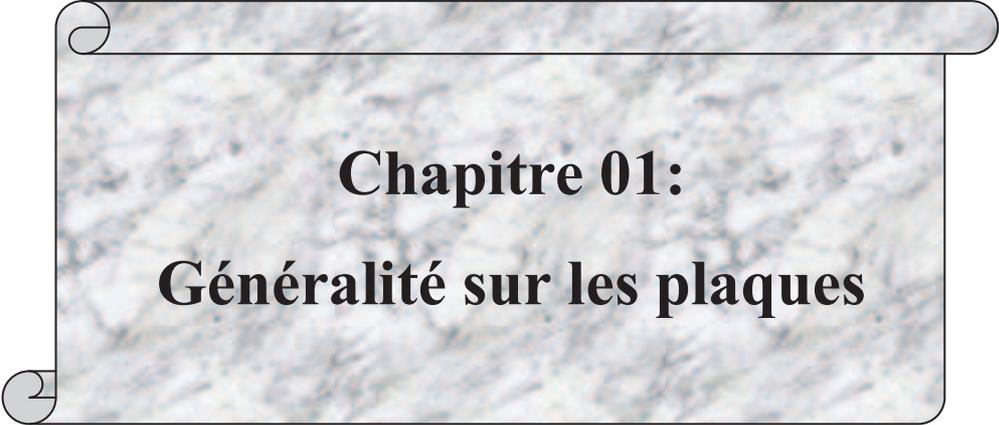
Dans le **chapitre 2**, effectue une revue vibration libre avec une charge répartie et présente Equations d'équilibre, nous devons avoir recours à des méthodes numériques approchées, parmi les méthodes existantes nous avons plusieurs méthodes. Ce sont la méthode énergétique, la méthode itérative, la méthode avec équations transcendantes, la méthode de Rayleigh, Rayleigh Ritz...

Une fois présentées ces méthodes, on peut en déduire les fréquences et les modes propres de vibrations. Mais on ne connaît de solutions exactes satisfaisant à la fois les conditions aux limites et les équations différentielles des différentes théories des plaques que dans de très rares cas particuliers.

En conclusion, Parmi toutes les méthodes numériques existantes, nous en avons choisi celle de la méthode énergétique Rayleigh Ritz pour les plaques isotropes.

Pour en finir et pour être complet, le dernier **chapitre 3** , montre les résultats de tous les travaux, ensuite une discussion générale et enfin une conclusion suivie de recommandations.

Les résultats seront validés par la littérature de rigueur et montre une bonne concordance .



**Chapitre 01:**  
**Généralité sur les plaques**

### 1 – Introduction :

Les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement ou de contrôle des vibrations. Pour mieux connaître, la réponse du comportement dynamique de la structure, il est impératif d'approcher de la manière la plus correcte possible les phénomènes mis en jeu par les plaques qui sont plus ou moins complexes. Ainsi, un tablier d'un pont, un bâtiment, une caisse de voiture, une aile d'avion, un bateau... Parmi tous ces domaines d'application, on peut distinguer plusieurs types de plaques : des plaques membranaires, des plaques minces, modérées et épaisses. Dans cette étude nous nous occuperons que de plaques minces homogènes et non homogènes, isotropes .

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. [1]

### 2 - Historique des plaques:

Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés dans différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique d'analyse: (a) les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée; (b) les plaques minces avec de grandes flèches (Karman); (c) plaques modérées ou épaisses (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.

En général diverses forces de différentes natures (volumiques, surfaciques, ponctuelles) peuvent se présenter comme source génératrice d'excitation. Les réponses conséquentes peuvent être exprimées en terme de mouvement que l'on peut décrire par des déplacements, des vitesses ou des accélérations.

Dans le cas de l'analyse libre, on s'intéresse aux paramètres dynamiques naturels, afin de caractériser le comportement propre inhérent à la structure d'intérêt indépendamment des sollicitations extérieures. [2]

D'un point de vue historique, Euler fut l'un des premiers, en 1766, à formuler le premier modèle mathématique du problème représentant le comportement d'une plaque assimilée à une membrane en vibration libre. Puis, le physicien allemand Chladni [3] (1787) découvrit les premiers modes propres de vibrations d'une plaque carrée horizontale, C'est ensuite Lagrange qui développa en 1811 la première équation différentielle correcte pour décrire les vibrations d'une plaque libre d'épaisseur constante, à laquelle doit satisfaire la flexion  $w$ , mais sans démonstration ni explication. Pour les mathématiciens, la détermination des fréquences naturelles fût une grande priorité. Sophie Germain a été récompensé en 1816 pour sa contribution au développement de l'équation de la plaque mince. Quelques temps après, Navier (1785-1836) introduit la méthode pour calculer les modes et les fréquences propres d'une plaque pour certaines conditions aux frontières. Ce dernier utilisa les fonctions trigonométriques découvertes par Fourier pour représenter la déformation d'une plaque.

Ce n'est qu'en 1850 que Kirchhoff [4] (1824-1887) a établi de façon correcte pour la première fois des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque.

Lord Rayleigh [5] (1877) ou encore Ritz [6] (1909), furent parmi les premiers à formuler la théorie qu'on connaît aujourd'hui. Ritz, a amélioré la procédure de Rayleigh en se basant sur les fonctions de forme qui caractérisent le mouvement dynamique propre, chacune avec un coefficient d'amplitude indépendant. Cette procédure est appelée « Méthode de Rayleigh-

Ritz ou Méthode de Ritz ». C'est la méthode approximative la plus populaire et la plus utilisée dans l'analyse des structures en vibrations.

En 1921 Timoshenko[7,8] montre que la prise en compte des effets respectifs de l'inertie rotatoire et du cisaillement ont pour incidence de réduire sensiblement les fréquences propres de vibration des poutres. Dans le même contexte, l'étude vibratoire des plaques a évolué en injectant des hypothèses supplémentaires telles que la prise en compte de l'effet de cisaillement pour le cas des plaques épaisses. Ce qui a conduit à des modèles plus raffinés comme celui de Love[9](1944) qui appliqua les travaux de Kirchhoff aux plaque épaisses.[10]

Depuis lors, de très nombreuses études ont été menées, surtout avec le développement des industries navales et aéronautiques. C'est ainsi que dans les années de l'après guerre, de nouvelles théories des plaques minces élastiques furent élaborées par Reissner [11] (1945). [10] Reissner fut l'un des premiers à proposer une extension de la théorie des plaques avec cisaillement dans le cas statique. Ensuite, Uflyand [12] 1948 et Mindlin [13] (1951). C'est ainsi qu'ils proposèrent pour les plaques une nouvelle approche théorique rigoureuse Waburton [14] et essentiellement Leissa [15] (1969) ont contribué d'après plusieurs travaux de recherche contemporaines à mieux appréhender le problème de vibration des plaques en tenant compte des différentes hypothèses pour la prédiction sensiblement exacte du comportement dynamique inhérent aux vibrations des plaques[16]. En 1973 Leissa [17,18] proposa un catalogue élargi à différent cas d'hypothèse pour la solution des vibrations libres de plaques rectangulaires. En parallèle, Liew et al [19] (1995) fournissent une contribution effective pour les plaques épaisses.

### 3 - Mission des plaques :

Afin de traiter des problèmes de plaques élastiques, des hypothèses doivent être imposées afin de simplifier les équations générales de l'élasticité linéaire. Dans le cas d'un problème de plaques en flexion on applique des charges normales à la surface moyenne, dans la direction de  $z$ . Ces forces appliquées provoquent une flexion dans la plaque avec un déplacement du feuillet moyen dans la direction de  $z$ , ce déplacement vertical est habituellement appelé flèche et noté par  $w$ .

La première mission des plaques est de résister à l'environnement dynamique. Si l'environnement dépend du temps, il faut d'abord étudier le mouvement qui en résulte. C'est le comportement dynamique. Il importe donc de maîtriser la prévision de ces phénomènes pour comprendre, remédier, optimiser : C'est l'objet de la dynamique des structures. Lorsque qu'une plaque est soumise à un environnement dynamique donné, des forces de diverses

natures (volumiques, surfaciques, ponctuelles) s'appliquent sur elle et provoquant un mouvement que l'on peut décrire par des déplacements, des vitesses ou des accélérations en tous ses points.

#### 4 - Définition du plaque :

La plaque est un milieu continu ayant [20,21], structure tridimensionnelle solide limitée par deux plans parallèles les faces de la plaque et par un bord cylindrique perpendiculaire aux faces [10], c'est-à-dire le bord de la plaque. La surface moyenne située à mi-distance entre la peau inférieure et la peau supérieure de la plaque est connue sous le nom de la surface moyenne ou "feuillet moyen". La distance entre les faces est l'épaisseur de la plaque.

#### 5 - Milieu isotrope :

##### 5-1 - Milieu homogène:

Un milieu est dit homogène s'il existe une configuration particulière qu'on prend pour référence dans laquelle la masse volumique est constante et si les lois de comportement sont indépendantes de la particule considérée.

##### 5-2 - Matériau isotrope:

Un corps homogène est isotrope vis à vis d'une propriété mécanique si cette dernière est indépendante de la direction considérée dans le corps [22,23]. Un matériau est isotrope quand la matrice du tenseur d'élasticité reste identique à elle-même pour tout changement d'axes.

Les propriétés mécaniques des matériaux homogènes et isotropes peuvent être caractérisées par leur résistance et leur constante d'élasticité, le module de Young et le coefficient de Poisson. Pour un matériau isotrope, c'est-à-dire un matériau pour lequel les caractéristiques mécaniques sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace. Dans un milieu isotrope, toutes les directions sont équivalentes. Ce milieu est caractérisé par deux modules d'élasticité  $\lambda$  et  $\mu$  appelés coefficients de Lamé, ou bien par le module d'Young  $E$  et par le coefficient de Poisson  $\nu$ .

Dans toute la base, la matrice de rigidité s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Alors la matrice de souplesse d'un matériau de souplesse s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Dans le cas d'une plaque isotrope, deux coefficients seulement sont indispensables, le module de Young  $E$  appelé module d'élasticité et  $\nu$  coefficient de Poisson. Le module d'élasticité au cisaillement  $G$  ou le module de glissement relie les contraintes tangentielles aux déformations angulaires.

La matrice de rigidité s'écrit :

$$D = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

La relation entre les déformations et les contraintes seront :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

## 6 - Choix des théories :

Il est bien évident que nous n'avons pas considéré toutes les théories de plaques existantes : nous nous allons seulement s'intéresser à quelques méthodes principales, à savoir la théorie de Love- Kirchhoff. D'autre part, dans tout l'exposé qui suit nous adopterons les conventions et les notations suivantes : les coordonnées seront prises cartésiennes  $(x, y, z)$ , les composantes déplacement seront  $u, v$  et  $w$  ; les caractéristiques de la plaque :  $h$  l'épaisseur constante,  $\rho$  la masse volumique,  $E$  module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson. Quand à la rigidité en

flexion elle sera donnée par :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

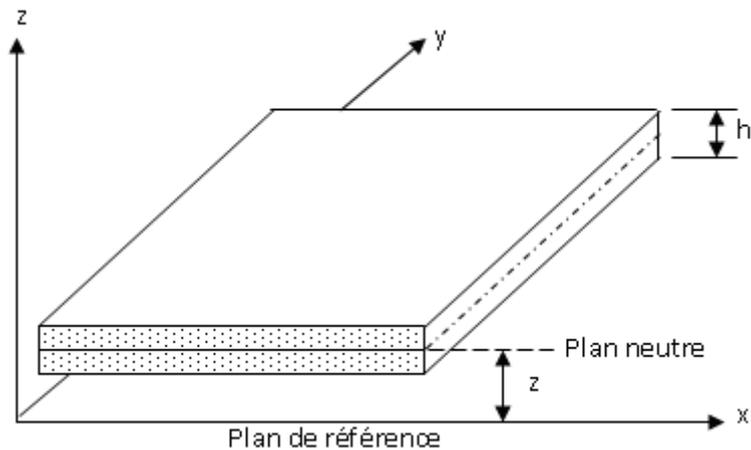


Figure 1-1 . Modèle d'une plaque

### 7 - Les plaques minces :

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés[24]. L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans de nombreux domaines, en particulier, les transports, le génie civil ou encore les instruments de musique. Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit...). En ingénierie ou en recherche, la plus part des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation, au premier ordre, du comportement vibratoire.

Les plaques ont des structures tridimensionnelles dont une dimension, l'épaisseur  $h$ . est très inférieure aux autres. [20,25,23]

### 8 - Le modèle classique Love- Kirchhoff :

Historiquement, le premier modèle des plaques minces a été développé par Lagrange, Poisson, et Kirchhoff. Aujourd'hui on l'appelle le modèle de Kirchhoff ou simplement plaque de Kirchhoff. Il est dépendant uniquement d'une seule variable: le déplacement vertical  $w(x, y, t)$  [20]. On qualifie ce modèle de "flexion pure". Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. L'hypothèse adoptée est celle de Love Kirchhoff [26] de contraintes planes, les déformations dues au cisaillement sont négligées. [10] C'est ainsi que les années 1950-1960 de nouvelles théories des plaques minces élastiques furent élaborées par Mindlin , Vlasov, Reissner en particulier et aujourd'hui encore

de nombreux chercheurs travaillent à l'élaboration de théories raffinées ( ainsi M. Levinson dont la théorie date de 1980, Méthode des éléments finis, Méthode des différences finies...).

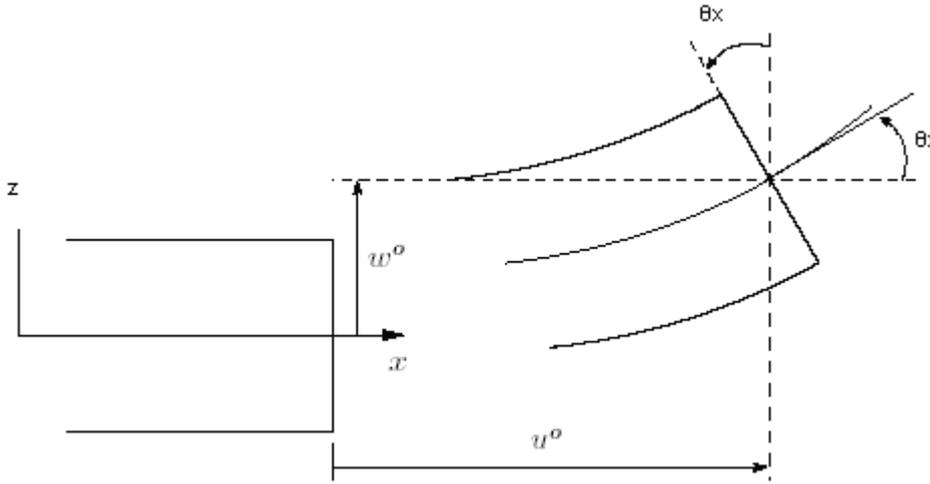


Figure 1-2 . Cinématique de Love Kirchhoff.

Les déplacements  $u_i = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$  s'écrivent:

$$u(x, y, z, t) = u_{\alpha=x}^0(x, y, t) - z \frac{\partial \omega(x, y, z, t)}{\partial x} \quad (1.5)$$

$$v(x, y, z, t) = v_{\beta=y}^0(x, y, t) - z \frac{\partial \omega(x, y, z, t)}{\partial y} \quad (1.6)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (1.7)$$

Ce champ de déplacement est tel qu'il vérifie déjà les conditions aux limites mécaniques sur les surfaces de la plaque  $z = \pm h/2$  puisque l'on a,

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} \quad (1.8)$$

De plus, les fonctions  $u^0$  et  $v^0$  sont arbitraires puisqu'elles n'apparaissent pas dans tous les calculs qui suivent, donc nous les prendrons nulles comme il est fait classiquement. Dès lors, à l'aide de la loi de Hooke et de  $u$  et  $v$ , on peut exprimer les équations d'équilibre uniquement en fonction de la déflexion  $w$ , et donc en combinant ces trois équations : on en déduit l'équation différentielle classique :

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9)$$

### 9 - Domaine de validité :

La théorie de Kirchhoff est généralement admise comme étant la théorie des plaques minces dont la caractéristique principale, est de permettre l'expression des déformation et des contraintes en fonction de la flèche  $w$  de la surface moyenne.

La validité de la théorie des plaques de Kirchhoff dépend du facteur de l'élancement de la plaque. Une plaque est dite mince si son facteur d'élancement est  $\frac{a}{h} \gg 20$  où  $a$  sont la dimension caractéristique dans le plan  $xy$  et  $h$  l'épaisseur de la plaque.

### 10 - Les hypothèses de Love Kirchhoff :

- 1- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions latérales. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan feuillet moyen.
  - 2- le matériau constituant la plaque est élastique, homogène et isotrope.
  - 3- La plaque est initialement horizontale.
  - 4- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Cette hypothèse permet de supposer que le mouvement de tous les point se trouvant sur la normale au feuillet moyen est le même, c'est-à-dire que :  $w(x, y, z) = w(x, y)$  (1.10)
- Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse. On a dans ce cas :  $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$
- 5- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
  - 6- Les contraintes  $\sigma_{zz}$  normales dans la direction transversale sont négligeables par rapport aux composantes de contraintes, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout point  $z$  donc  $\sigma_{zz} = 0$
  - 7- la plaque est symétrique durant par rapport à son feuillet moyen durant sa fabrication.
  - 8- L'épaisseur  $h$  de la plaque est petite comparée à ses autres dimensions en général, on doit avoir  $h \leq 0.1 \inf(a, b)$  [24,27,28]

### 11-Le modèle classique de Reissner-Mindlin :

Pour introduire l'effet de cisaillement transverse, l'hypothèse cinématique [10] est adoptée par Reissner et Mindlin. Ils ont proposé une théorie où les sections droites ne sont plus nécessairement normales au plan neutre dans la configuration. La rotation des sections est plutôt fonctions de deux variables  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Cette différence est illustrée à la figure 3. Ces

variables sont les rotations  $\theta_y(x, y, t)$  et  $\theta_x(x, y, t)$  des normales à la surface de la plaque par rapport aux axes  $x$  et  $y$ .

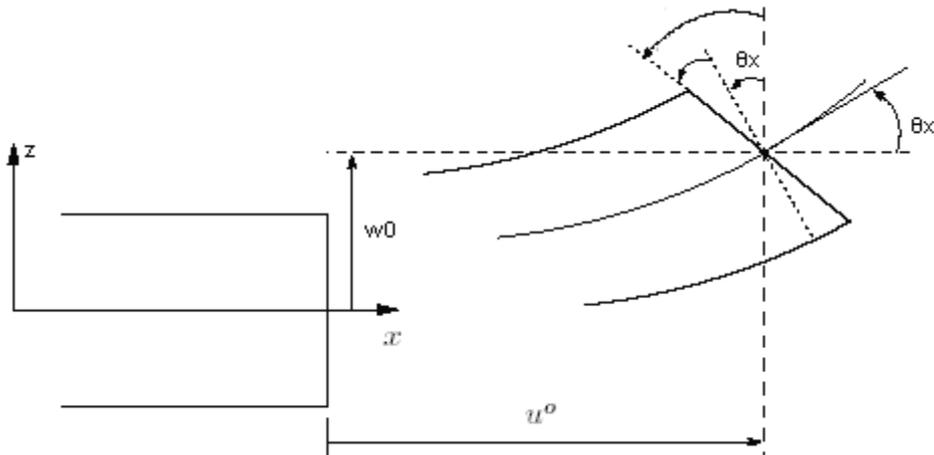


Figure 1-3. Cinématique de Reissner-Mindlin

Par conséquent, l'hypothèse fondamentale de Mindlin sur les déplacements consistera à écrire :

$$\begin{aligned} u &= u^0 + z\theta_x \\ v &= v^0 + z\theta_y \\ w &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Où  $u^0$  et  $v^0$  sont des fonctions arbitraires semblables à celles introduites précédemment.

Quant aux fonctions  $\theta_y(x, y, t)$  et  $\theta_x(x, y, t)$ , elle peuvent s'interpréter comme des rotations des normales à la surface de la plaque autour des axes  $ox$  et  $oy$ , et elles seront avec la déflexion  $w$  les inconnues du problème.

Mindlin et Reissner ont proposé une théorie où les sections droites ne sont plus nécessairement normales au plan neutre.

D'autre part, contrairement à ce que nous avons pour la théorie de Love –Kirchhoff, les conditions aux limites sur les surfaces de la plaque ne sont plus respectées, en effet :

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right) \neq 0 \quad \sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right) \neq 0$$

Et ceci quels que soient les points  $(x, y)$ .

### 12-Domaine de validité :

La validité de la théorie des plaques de Mindlin dépend du facteur de l'éclatement de la plaque. Une plaque est dite épaisse si son facteur d'éclatement est  $4 \leq \frac{a}{h} \leq 20$

### 13-Les hypothèses de Mindlin

La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.

L'hypothèse classique de plaque de Mindlin [10] permet de traiter le cas de plaques épaisses en tenant compte de l'effet de cisaillement transversal, qui consiste en la "déperpendicularisation" de la fibre et le plan tangent au cours de la déformation du surface moyenne, et qu'il est parfois important de savoir prendre en compte, par exemple dans le cas coques multicouches, les plaques épaisses...

Cette section traitera donc du cas bidimensionnel de la théorie de l'élasticité. Les hypothèses de Mindlin seront utilisées pour simplifier les équations présentées dans la section de la loi du comportement du matériau.

### 14 - Lois de comportement :

L'ensemble des éléments nécessaires à l'étude du comportement mécanique d'une plaque doit prendre en considération les propriétés mécaniques du matériau, tant sur le plan raideur que résistance. La loi de Hooke est une loi de dépendance entre les contrainte et les déformation donc c'est une proportionnalité entre les déplacements élastique d'un corps et les efforts aux quels il est soumis[29].

Les sollicitations d'origine dynamique, engendrent des vibrations qui créent des contraintes dynamiques dans les matériaux. Alors, il faut donner à la structure un dimensionnement adéquat . L'énergie de déformation due à au mouvement de flexion de la plaque est donnée en fonction des tenseurs de contraintes  $[\sigma]$  et de déformation  $[\varepsilon]$ , d'où la notion des tenseurs est nécessaire pour établir les relations entre effets physiques.

En conclusion, les effets phénomènes physiques sont décrits par des tenseurs.

Les lois de comportement expriment la relation qui existe entre les contraintes et les déformations d'un corps solide élastique (Loi de Hooke). Ces relations ont été obtenues à la suite de nombreuses observations expérimentales. Pour un corps isotrope se déformant linéairement, les lois de comportement sous forme matricielle s'expriment comme suit :

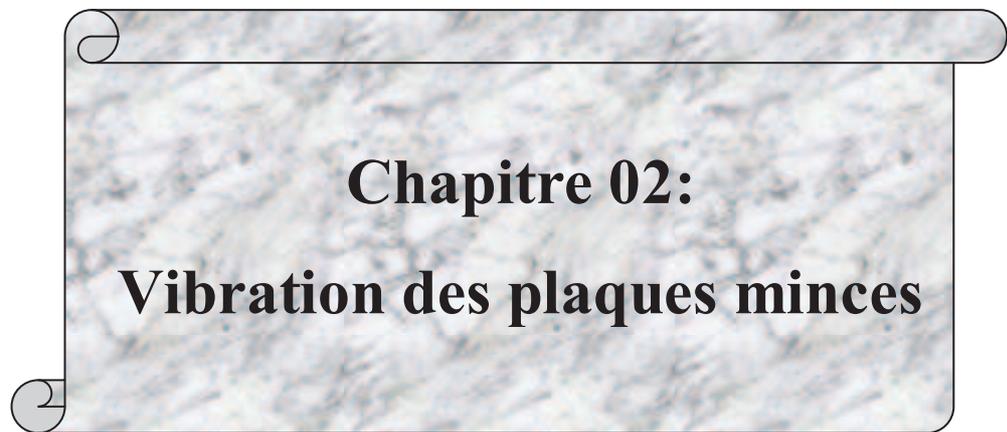
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

Afin de simplifier le problème tridimensionnel d'élasticité en un problème bidimensionnel, une hypothèse doit être adoptée: L'hypothèse de contrainte plane ( $\sigma_z = 0$ ) ou l'hypothèse de déformation plane ( $\varepsilon_z = 0$ ). Dans ce cas  $\sigma_z \ll \sigma_x, \sigma_y$ . Par conséquent, la contrainte dans la direction de l'épaisseur de la plaque sera supposée nulle.

La loi matricielle des lois devient alors:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

$$\text{Soit } \{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (1.14).$$



**Chapitre 02:**  
**Vibration des plaques minces**

### 1 – Introduction :

Les trois théories que nous présenterons nous conduisent toutes à la résolution d'une équation différentielle en  $w$  : mais cette résolution dépend très étroitement des conditions aux limites du problème de vibration, car comme nous l'avons déjà laissé entendre, la résolution 'exacte' avec des fonctions analytiques classiques n'est possible que si la plaque est rectangulaire et possède au moins deux bords opposés et simplement appuyée. Dans tous les autres cas, on ne peut à la fois respecter l'équation différentielle et ses conditions limites, on doit donc faire à des méthodes numériques approchées.

Il existe de nombreuses méthodes éprouvées pour estimer les fréquences propres et modes propres : comme mes méthodes matricielles ou des éléments finis... Mais nous avons tenu à choisir des méthodes très simples et d'une utilisation immédiate qui n'en constituent pas moins de remarquables approximations comme nous le verrons plus loin. Les choses ont beaucoup moins été établies en ce qui concerne l'étude paramétrique des plaques en vibration libre. Il existe des modèles mathématiques adaptés aux plaques, qui permettent de calculer les caractéristiques dynamiques. Les nombreux travaux visant à déterminer les caractéristiques dynamiques des plaques en vibration libre ont conduit à l'élaboration des différents modèles analytiques et numériques. Mais les modèles proposés jusqu'à ces dernières années sont soit limités à des analyses statiques, soit à des analyses dynamiques. Les rares études qui traitent les problèmes des vibrations des plaques avec les différentes conditions aux bords avec une étude paramétrique sont limitées.

Ce travail permet d'étudier plusieurs modèles avec des différentes combinaisons d'appuis aux bords en vue de calculer les fréquences des plaques et les modes propres en vibration libre. Les éléments de plaque en flexion jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures.

### 2- Vibration libre :

Les vibrations naturelles sont des vibrations inhérentes aux propriétés propres de la structure en l'absence des forces extérieures. Dans tous les cas, les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque. L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés. Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire.

La vibration des plaques est un cas particulier du problème plus général des vibrations mécaniques. Les équations régissant le mouvement des plaques sont plus.

### 3 - Charge répartie :

Les fréquences d'une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée sur les quatre bords avec une charge répartie en vibration libre sont déterminées en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz[30]. La solution du problème aux valeurs propres est obtenue en proposant une déformée de fonction forme de séries qui vérifie les conditions aux limites de la plaque. Les fréquences circulaires obtenues par l'approche énergétique en utilisant un programme, sont comparées avec celles obtenues par d'autres new méthode ou d'autres cas des plaques. Ensuite, une étude paramétrique fréquentielle de la plaque est nécessaire afin de comprendre le comportement dynamique d'une plaque.

### 4 - L'analyse vibratoire :

L'analyse vibratoire est une question d'actualité importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle. Cette thématique touche aussi d'autres domaines, tels que l'automobile, les ponts, les bâtiments, ou encore le génie nucléaire. Durant ces décennies, le domaine des vibrations connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à de différents niveaux d'excitations. D'une autre manière, la compréhension de l'identité vibratoire de plaque devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. Au final, les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions d'analyse des réponses dynamiques des plaques et leur dimensionnement. L'étude et l'analyse des vibrations ont pris au cours des dernières années, un essor considérable en raison du développement du comportement dynamique du matériau isotrope, orthotrope ou composite. Le contrôle des vibrations dans ces structures plaques est un problème épineux qui se pose fréquemment au chercheur qu'à l'ingénieur mécanicien. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques de la structure est indispensable.

### 5 - Equations d'équilibre :

Considérons des petites déflexion et écrivons l'équilibre des forces suivant l'axe  $x = 0$ , il vient d'après la figure 2-1.

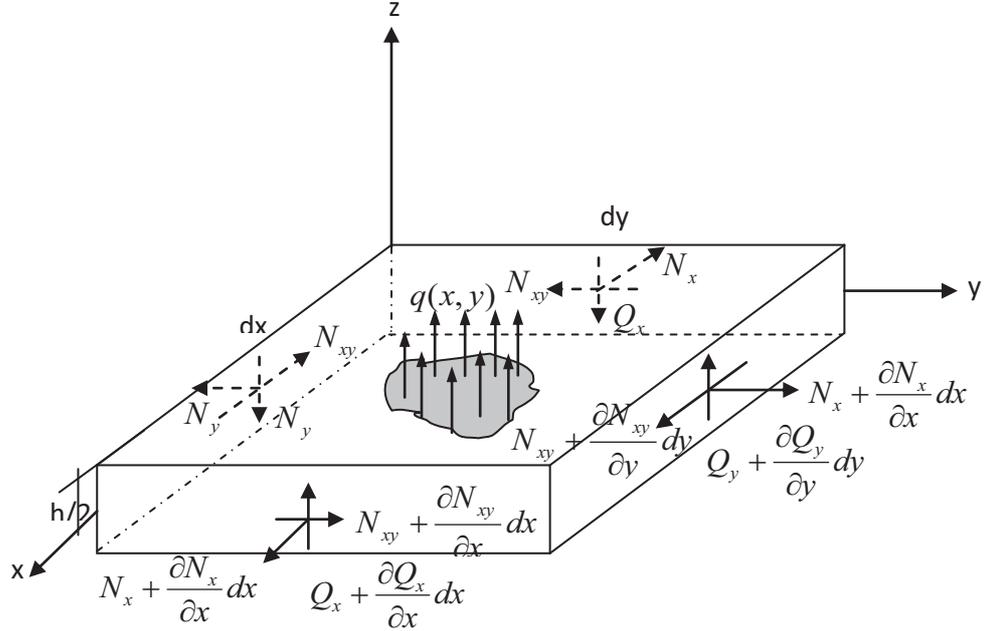


Figure 2-1 . Forces agissant sur l'élément plaque

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx - N_y dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left( N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x^2} dx \right) \\
 & - N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + \left( N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial y^2} dy \right) - N_{xy} dx \frac{\partial w}{\partial x} - N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} \\
 & + \left( N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} dy \right) + \left( N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} dx \right) + q dx dy = \rho h dx dy \frac{\partial w^2}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $\rho$  est la masse volumique, et  $\frac{\partial w^2}{\partial t^2}$  l'accélération suivant l'axe  $Oz$ .

En développant (2.1) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à  $dx dy$ , on obtient

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

Cette équation peut encore se simplifier si l'on considère les équations d'équilibre de l'élasticité tridimensionnelle.

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

Avec  $(u_i)_i = (u, v, w)$  et  $u, v$  les déplacements suivant les axes  $ox$  et  $oy$  respectivement. Quand les forces d'inertie dans le plan de la plaque sont négligées et que les contraintes  $\sigma_{yz}, \sigma_{zx}$  sont petites par rapport aux autres contraintes, alors :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Comme ces équations doivent être satisfaites pour toute épaisseur infinitésimale  $dz$  de l'élément de plaque, on peut intégrer ces deux équations suivant l'épaisseur  $h$  de la plaque, d'où

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

En utilisant (2.5), l'équation (2.2) devient

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial w^2}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial w^2}{\partial y \partial x} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

L'équilibre des forces suivant les deux axes  $ox$  et  $oy$  s'écrit

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( Q_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( Q_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( Q_x \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( Q_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Quand on néglige de nouveau les forces d'inertie suivant les axes  $ox$  et  $oy$ , et que les efforts tranchants sont négligeables devant les efforts normaux  $N_x, N_y$  et que les pentes devant l'unité, alors (2.7) équivaut à (2.5)

Il reste maintenant à écrire les équations d'équilibre des moments par rapport aux axes  $ox$  et  $oy$ , on obtient alors

$$Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{\rho h}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \quad (2.8)$$

$$Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{\rho h}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}$$

Où on a négligé les termes  $N_x, N_y$  et  $N_{xy}$  car ils conduisent à des différentielles d'ordre plus grand que les autres. Les termes de droite dans les équations (2.8) représentent l'inertie de rotation de l'élément de plaque.

## 6 - Calcul des moments et des efforts :

On suppose que les contraintes  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$  sont petites par rapport aux contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ . Par conséquent la loi de Hooke se résume aux équations:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \quad (2.9)$$

Les moments et les forces sont alors obtenus en intégrant les contraintes normales sur l'épaisseur de la plaque pour les efforts, et à intégrer ces contraintes multipliées par  $z$  pour les moments, soit

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (2.10)$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz$$

Sans remonter trop loin dans la théorie de la mécanique des milieux continus, et sans rentrer dans les détails des champs de déplacements et de contraintes, la loi de Hooke et les équations de Lamé-Navier permettent d'écrire les moments dans le plan de la plaque.

Ainsi l'expression des moments

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad M_{xy} = -2(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.11)$$

Où  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  le coefficient de rigidité en flexion de la plaque.

Remplaçons les moments dans (2.10) par leurs expressions données par (2.11) et on reportant dans (3.5)

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (2.12)$$

on obtient ainsi l'équation classique de la théorie des plaques qui pour la majorité des applications techniques est suffisante pour l'étude des problèmes de flexion.

$$-D \nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Si on ne s'intéresse qu'aux problèmes de flexion pure, en supposant les effets de tension et de flexions découplées, l'approximation de l'élasticité linéaire aboutit à l'équation suivante:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (2.14)$$

où  $\rho$  la masse volumique du matériau constituant la plaque,  $D$  le module de rigidité en flexion,  $h$  l'épaisseur de la plaque,  $q$  la force imposée et enfin  $\nabla$  l'opérateur  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)$ .

### 7 - Expressions des Conditions aux limites :

Ces conditions sont matérialisées par le blocage de certaines composantes (degrés de liberté) du déplacement. Les ouvrages reposent généralement sur des appuis (ou liaison externes) par l'intermédiaire d'appareils qui permettent de bloquer certains degrés de liberté du déplacement ou de la rotation. Ces appareils, conçus pour travailler dans les directions privilégiées, autorisent sélectivement le développement des effets structuraux dus aux charges statiques ou dynamiques.

Considérons une plaque homogène de dimensions  $a$ ,  $b$  et  $h$  et on suppose que ses cotés sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

Ces diverses conditions vont s'écrire sur les expressions des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$ , on aura ainsi d'abord pour la théorie classique de Love – Kirchhoff.

#### 7-1 - Type de support : Appui simple :

Si le bord  $x=a$  de la plaque est simplement appuyé, la flèche  $w$  le long de celui-ci est nulle. Et en même temps, ce bord peut tourner librement autour de l'axe  $x$ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de moments de flexion  $M_x$  le long de ce bord.  $(w)_{x=a} = 0$ ,

$$(M_x)_{x=a} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$$

#### 7-2 - Type de support : Bord fixé :

Si le bord  $x=a$  de la plaque est encastré, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent au feuillet moyen fléchi, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. En conséquence le déplacement vertical et la rotation sont nuls.

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0$$

### 8 - Forme de la déflexion :

Considérons donc une plaque rectangulaire, de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur constante  $h$ . Soit  $D$  son module de rigidité en flexion, et  $q(x,y,t)$  la charge extérieure appliquée par unité de surface, alors dans une première approximation l'équation du mouvement en flexion s'écrit:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,y,t) \quad (2.15)$$

### 9 - Energie d'une plaque :

Le problème de la flexion d'une plaque revient donc à chercher la fonction  $w(x,y)$  qui vérifie les conditions aux limites et qui rend minimale l'énergie totale qui la somme de l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle. On sera amené à distinguer localement :

L'énergie interne de déformation de la plaque est donnée par l'intégrale sur le feuillet moyen des produits des efforts généralisés par leur grandeur duale des déformations généralisées.

$$V = \frac{1}{2} \int_A (\bar{N} \cdot \bar{\epsilon} + \bar{M} \cdot \bar{\chi} + \bar{Q} \cdot \bar{\lambda}) dA \quad (2.16)$$

Les déformations généralisées associées au mouvement du feuillet moyen et de sa normale peuvent être écrites sous formes de vecteurs. [31]

**déformation dans le plan :**  $\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$  (2.17)

**courbures :**  $\bar{\chi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{bmatrix}$  (2.18)

$$\text{déformation de cisaillement : } \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Les contraintes dans la structure, peuvent être modélisés par des efforts généralisés résultants de membrane notés  $N_x, N_y, N_{xy}$

$$\text{- de membrane } \vec{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h}^{+h} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2.20)$$

Et trois moments de flexion notés  $M_x, M_y, M_{xy}$

$$\text{- de flexion } \vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h}^{+h} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2.21)$$

Deux efforts tranchants notés  $Q_x, Q_y$ .

$$\text{- de tranchants } \vec{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_x \\ \bar{Q}_y \end{bmatrix} = \int_{-h}^{+h} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (2.22)$$

La loi de comportement relie le vecteur des efforts généralisés  $[N \ M \ Q]^t$  au vecteur des déformations généralisées  $[e \ x \ \sigma]^t$ , [31,32]

## 10 - Les méthodes énergétiques :

### 10-1 – Généralités :

Ces méthodes donnent d'assez bons résultats de façon générale, même lorsque les conditions aux limites ne sont pas simples. Seulement la précision de la solution trouvée dépend pour beaucoup du choix des fonctions cinématiques admissibles, il faut que les fonctions satisfassent les conditions aux limites mais aussi respectent la géométrie et approchent les modes de vibrations[21]. Ce choix est fondamental, car il peut conduire à des erreurs très importantes sur les fréquences.

### 10-2 - Expression de l'énergie potentielle pour les plaques minces isotropes :

Elle s'exprime comme la somme:

$$\Pi = U + V + T \tag{2.23}$$

Où  $U$  est l'énergie de déformation

$V$  est l'énergie potentielle des forces extérieures

$T$  est l'énergie cinétique

Soit en théorie classique pour les plaques isotropes:

$$U_{\max} = \frac{D}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy \tag{2.24}$$

$$- \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} q w dx dy + \frac{1}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \rho h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dx dy$$

### 11 - La méthode de Rayleigh :

C'est sans aucun doute la méthode la plus simple puisqu'elle conduit à des formules polynomiales pour les fréquences propres. L'idée fondamentale de cette méthode est de donner une forme approchée de la déflexion  $w$  d'une plaque en utilisant des résultats des poutres. Ainsi, pour un mode  $(m,n)$  d'une plaque rectangulaire de dimensions  $a$  et  $b$ , soumise à des conditions aux limites quelconques ( les nombres  $m$  et  $n$  servant à distinguer les modes entre eux et correspondent aux nombres de lobes du mode dans les directions  $ox$  et  $oy$ , la déflexion  $w$  sera prise telle que :

$$w_{mn}(x, y) = X_n(x).Y_n(y). \sin \omega t \tag{2.25}$$

Où  $X(x)$  est le  $n_i^{\text{eme}}$  mode d'un poutre de longueur  $a$ .

$Y(y)$  est le  $n_i^{\text{eme}}$  mode d'un poutre de longueur  $b$ .

Il existe de nombreuses méthodes éprouvées pour estimer les fréquences propres et modes propres, mais les choses sont beaucoup moins établies en ce qui concerne l'effet de cisaillement. Il s'agit d'un problème difficile en raison de la complexité de la compréhension de la linéarité et la non linéarité de l'effet de cisaillement. Les nombreux travaux visant à caractériser le comportement des plaques en flexion ont conduit à l'élaboration de différents modèles analytique et numérique Pour les vibrations linéaires, la gamme de techniques ou de logiciels dédiés à l'étude expérimentale ou numérique est très large et permet de traiter un grand nombre de problèmes de structures telles que les plaques minces et épaisses.

Toute la difficulté de la méthode de Rayleigh est de bien choisir le vecteur ou la fonction de forme à tester. On se contraint en fait à rechercher la solution dans un espace des solutions à une dimension : Vecteurs proportionnels au vecteur choisi, des fonctions de formes proportionnelles à la fonction forme. La méthode de Rayleigh sert à calculer la plus petite fréquence.

La méthode de Rayleigh sert à calculer la plus petite fréquence appelée "Fréquence fondamentale". Pour cela on pose que le déplacement  $u$  ou  $v$  est égal au produit d'une fonction de déplacement. A noter que cette méthode donne une valeur un peu erronée Dans la pratique, il est souvent commode de recourir à la méthode de Rayleigh car, pour les systèmes un peu compliqués, le calcul exact des pulsations peu devenir très difficiles. On obtient alors une pulsation fondamentale avec une erreur admissible en pratique. On se place dans le cas des vibrations propres, c'est-à-dire que l'énergie potentielle des forces extérieures est nulle. Cette méthode consiste à calculer les expressions de l'énergie cinétique  $T$  et de l'énergie de déformation  $U$  pour  $w$  des fonctions de forme, vérifiant les conditions aux limites. En appliquant le théorème de conservations des énergies, le maximum de l'énergie cinétique doit être égal au maximum de l'énergie de déformation[21].

$$\text{Soit : } U_{\max} = T_{\max} \quad (2.26)$$

La déflexion  $w(x, y, t) = W(x, y) \sin \omega t$

où  $W(x, y)$  est la fonction de forme et  $\omega$  la pulsation inconnue.

Remplaçons  $W$  dans l'expression des énergies:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \cos^2 \omega t \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \rho h w^2(x, y) dx dy \quad (2.27)$$

L'énergie cinétique sera à son maximum lorsque la vitesse de la plaque sera 0 son maximum donc lorsque:  $\sin \omega t = 0$ , d'où son expression:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \rho h w^2(x, y) dx dy \quad (2.28)$$

D'autre part l'énergie de flexion  $U$  sera maximum quand la déflexion de la plaque sera maximale, donc lorsque:  $\sin \omega t = 1$  d'où son expression:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (2.29)$$

On déduit alors la fréquence fondamentale  $\omega$  d'après l'expression suivante:

$$\omega^2 = \frac{2U_{\max}}{\int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \rho h w^2(x, y) dx dy} \quad (2.30)$$

## 12 - Méthode de Rayleigh-Ritz :

### 12-1 - Introduction :

La méthode de Rayleigh-Ritz est une extension de la méthode de Rayleigh. C'est une méthode approchée également fondée sur des méthodes énergétiques. Le principe général consiste à ramener le problème à celui d'un système comportant un nombre fini de degrés de liberté [32]. Pour cela on fixe un modèle hypothétique de déformation de la structure, satisfaisant les conditions aux limites et dépendant de plusieurs (m) coordonnées généralisées. Cette méthode est utilisée pour calculer les m premiers modes. Son rôle n'est pas seulement de donner une solution plus exacte de la fréquence fondamentale mais aussi [21], elle donne des résultats approximatifs des hautes fréquences et des modes. Du moment que les fréquences obtenues, sont toujours plus grandes que les valeurs exactes en raison des termes utilisés dans la fonction de forme lesquels augmente la rigidité de la plaque. Toute la difficulté de cette méthode est de « bien choisir » la fonction forme à tester.

### 12-2 - Equation du mouvement :

L'étude de la vibration de la plaque passe par la connaissance de l'amplitude des ses déplacements en chaque point. Dans le cas de vibration libre, la méthode de Rayleigh-Ritz permet d'approcher ces fréquences propres. Afin de les déterminer, on établit l'équation du mouvement de la plaque en réalisant une étude énergétique, faisant intervenir les différentes énergies du système (énergie cinétique, énergie potentielle). Cette méthode est utilisée pour développer le déplacement de la plaque selon des bases sinusoïdales ou polynomiales :  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_i(x), \dots, \phi_n(x)$  Soit une classe de fonctions de la forme généralisée, On écrira

ainsi la déflexion sous forme de séries:  $w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y)$

Où les  $A_{mn}$  représentent l'amplitude du mode  $(m, n)$  à déterminer et les fonctions  $X_m$  et  $Y_n$  vérifient individuellement les conditions aux limites mais pas forcément l'équation différentielle du mouvement. Cette méthode due à Ritz généralise la méthode de Rayleigh en incluant plusieurs paramètres dans les fonctions de forme. Les coefficients  $A_{mn}$  sont obtenus en rendant minimum la quantité  $U_{\max} - T_{\max}$ , soit:

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} (U_{\max} - T_{\max}) = 0 \quad (2.31)$$

Les  $A_{mn}$  sont alors solutions du système.

$$\frac{\partial U_{\max}}{\partial A_{mn}} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial f}{\partial A_i} = 0 \quad (2.32)$$

Cette méthode conduit donc à un système linéaire homogène où les  $A_{mn}$  et  $\omega_{mn}$  sont les inconnues. Ce système peut également s'interpréter comme un problème de valeurs propres et de vecteurs propres, à chaque valeur  $\omega_{mn}$  solutions annulant le déterminant du système sera associé les coefficients  $A_{mn}$  qui détermineront alors les modes  $w_{mn}$ .

Tout repose maintenant sur le choix des fonctions de forme  $\phi_i$ , la précision sur les fréquences en dépend beaucoup. La solution approchée est recherchée sous la forme usuelle d'une série double. D'une façon générale, on recherchera les déplacements sous la forme

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (2.33)$$

### 12-3 - Formulation analytique:

L'équation de la fréquence peut être obtenue en utilisant la méthode approchée de Rayleigh-Ritz où l'énergie de déformation maximale d'une plaque isotrope est de la forme :

$$U_{\max} = \frac{D}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.34)$$

Avec : la rigidité de flexion  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

$\nu$  coefficient de Poisson

L'énergie maximale de la plaque en vibration libre avec une amplitude  $w$  et la fréquence naturelle  $\omega$  est donnée est :

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \gamma(x,y) w^2(x,y) dx dy \quad (2.35)$$

### 13 - Le quotient de Rayleigh :

Le quotient de Rayleigh est le rapport de l'énergie de déformation maximale et de l'énergie cinétique maximale.

Ce quotient est défini comme suit:

$$\lambda_R = \omega^2 = \frac{U_{\max}}{T_{\max}} = \frac{U_{\max}}{\frac{\omega^2}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \gamma(x,y) w^2(x,y) dx dy} \quad (2.36)$$

Où  $U_{\max}$  et  $T_{\max}$  sont donnés par les équations (2.34) et (2.35) respectivement. [32]

Basé sur le principe de l'énergie potentielle, et appliquant la méthode de Rayleigh –Ritz, l'équation (2.28) est minimisée par rapport aux coefficients inconnus  $A_{mn}$  pour donner des séries d'équations simultanées et homogènes

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial A_{mn}} = \frac{\partial (\omega^2)}{\partial A_{mn}} = 0 \quad m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

Substituant le quotient donné par Eq (2.36) dans Eq (2.37) nous mène à :

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial A_{mn}} = \frac{T_{\max} \frac{\partial U_{\max}}{\partial A_{mn}} - U_{\max} \frac{\partial T_{\max}}{\partial A_{mn}}}{T_{\max}^2} = 0 \quad (2.38)$$

#### 14 - Les différentes fonction de formes:

Le problème de la flexion d'une plaque revient à chercher la fonction  $w(x, y)$  qui vérifie les conditions aux limites et qui rend minimale l'énergie totale qui est la somme de l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle.

**Premier cas1 AAAA:**  $w(x, y) = A_{mn} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) xy \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$

**Deuxième cas EEEE:**  $w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

**Troisième cas AAEE:**  $w(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

**Quatrième cas AEAE:**  $w(x, y) = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} y \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

Figure 2-2 . Plaque isotrope AAAA	Figure 2-3 . Plaque isotrope EEEE
	

Figure 2-4 . Plaque isotrope AAEE	Figure 2-5 . Plaque isotrope AEAE
	

### 15 - Validation du programme élaboré :

Dans le but de valider le programme élaboré, les résultats issus de ce dernier sont confrontés aux fréquences et déformées propres d'une plaque rectangulaire symétrique, obtenues en calcul de structures par éléments finis sous logiciel ANSYS.

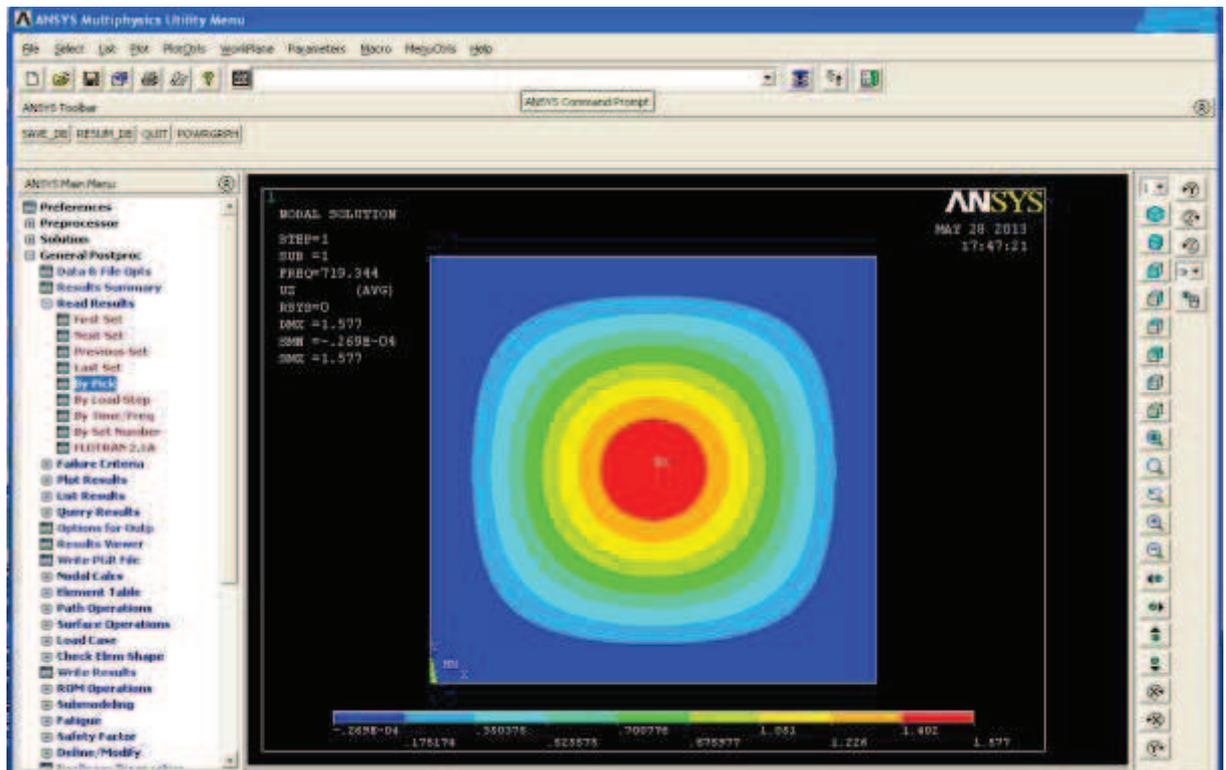


Figure 2-6 . logiciel ANSYS.

### 15-1 - Modélisation par ANSYS :

ANSYS, est l'un des plus grands développeur et fournisseur de logiciels de simulation numérique au monde. Ses produits majeurs sont des logiciels qui mettent en œuvre la méthode des éléments finis, afin de résoudre des modèles discrétisés [27].

Ce produit permet d'effectuer des simulations mécaniques. Ses principales capacités sont :  
 (1) l'analyse statique.

- (2) l'analyse modale
- (3) l'analyse harmonique (réponse forcée)
- (4) l'analyse temporelle ou transitoire
- (5) la gestion de différentes situations non linéaires (contacts, plasticité des matériaux, grands déplacements ou grandes déformations)
- (6) simulations en matière de mécanique des fluides
- (7) permet de résoudre des modélisations mettant en jeu des phénomènes électromagnétiques.

### 15-2 - Description de l'élément utilisé pour le maillage :

Pour faire les calculs par les éléments finis sous ANSYS en choisit l'élément de maillage SHELL 63.

L'élément SHELL 63 est conçu pour modéliser les structures en coques épaisses. Le nombre de nœud de cet élément est égal 80 .Chaque nœud a six degrés de liberté ( $U_x, V_y, W_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ ). L'élément SHELL63 est capable d'être utilisé pour les calculs des contraintes pour des grandes déformations, et peut être aussi utilisé pour les matériaux isotrope et orthotrope [ANSYS v 09].

### 15-3 - Analyse dynamique libre des plaques rectangulaires isotrope (Méthode qualitative) :

Notre contribution consiste à étendre cette investigation aux plaques isotropes allongées (longueur infinie), dont l'analyse est dominée par le comportement poutre , c'est-à-dire à confirmer la tendance à limiter l'analyse dynamique à l'étude de bandes unitaires ( $b=1$ ) de la plaque allongée, considérée suivant le petit sens. Les conditions de fixités de la plaque seront alors ceux des bords allongés.

Les plaques étudiées se distinguent par le type de condition de fixité:

#### Cas d'appuis homogène

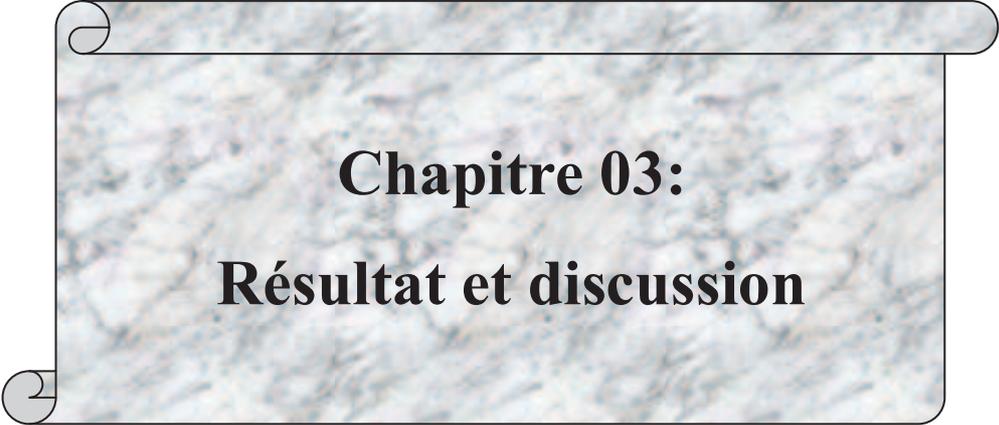
- Plaque rectangulaire simplement appuyée AAAA
- Plaque rectangulaire totalement encastree EEEE

Dans ces cas quelque soit le rapport des dimensions de la plaque rectangulaire ( $a/b$ ), on aboutis toujours à des bandes poutres de portée égale à la petite longueur, avec respectivement les conditions de fixité AA pour le premier cas, et EE pour le deuxième cas

#### Cas d'appuis non homogènes:

- Plaque rectangulaire AEAE

- Plaque rectangulaire AAEE



**Chapitre 03:**  
**Résultat et discussion**

### 1 - Introduction :

L'objectif de notre étude est l'identification des caractéristiques dynamiques (fréquences et modes propres,..) des plaques en vibration de flexion.

Lors de la recherche des fréquences et modes propres, les équations de mouvement sont résolues par la méthode de Rayleigh-Ritz.

Les fréquences propres de vibration d'une structure dépendant des rigidités des matériaux constitutif toutefois la recherche systématique des modes n'est pas aisée car la déformée d'une plaque résulte de la superposition des déformées de différentes modes.

Dans tous les cas les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque.

L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire.

Le but est consisté de calculer à investir l'analyse des paramètres fréquentiels naturelles d'une plaque rectangulaire à phase isotrope avec différente fixité sur les quatre bords.

Les fréquences propres des plaques sont déterminées par la méthode de Rayleigh Ritz, la solution du problème aux valeurs propres est obtenue d'après une déformé de fonction de forme qui vérifier les conditions aux limites de la plaque.

Dans ce chapitre nous étudions l'effet de certains paramètres fondamentaux tels que les conditions aux limites, les dimensions de la plaque, l'épaisseur de la plaque et des couches et la nature de matériau.

Les différents étapes de calcul des caractéristiques dynamiques d'une plaque travaillant en flexion et la recherche de l'influence de toutes ces derniers paramètres sur la fréquence propre des différents plaques sont illustrées par un programme de calcul ANSYS.

## 2 - Les plaques isotropes :

Les fréquences circulaires des plaques rectangulaires isotropes avec quatre combinaisons d'appuis simplement appuyés (A) et encastées (E) sont déterminées en utilisant la méthode de Rayleigh –Ritz soient : EEEE, AAAA, AEAE, AAEE.

La solution du problème aux valeurs propres est obtenue en proposant une déformée de fonction forme de séries qui vérifie les conditions aux limites de la plaque.

Le but de cette section est de développer une expression analytique de la fréquence fondamentale d'une plaque mince et d'analyser son comportement vibratoire en fonction des rapports ( $a/b$ ). Les fréquences sont obtenues en utilisant des modèles mathématiques "fonctions formes". Des séries de fonctions satisfaisant les conditions aux limites sont substituées dans la formulation analytique. La formulation est programmée en utilisant le ANSYS pour calculer les fréquences de la plaque mince.

Considérons à titre d'exemple une plaque rectangulaire de longueur  $a=0.25$  m, de largeur  $b=0.25$ m et d'épaisseur  $h= 0.005$ m.

**Table 3-1 :** Les propriétés mécaniques et physiques des matériaux :

Type de Matériau	Masse volumique $\rho(\text{Kg/m}^3)$	Module de Young E $10^7 (\text{kg/m}^2)$	Coefficient de Poisson $\nu$
<b>Acier</b>	7800	210	0,3
<b>Cuivre</b>	2930	1200	0,3
<b>Aluminium</b>	2700	720	0,3

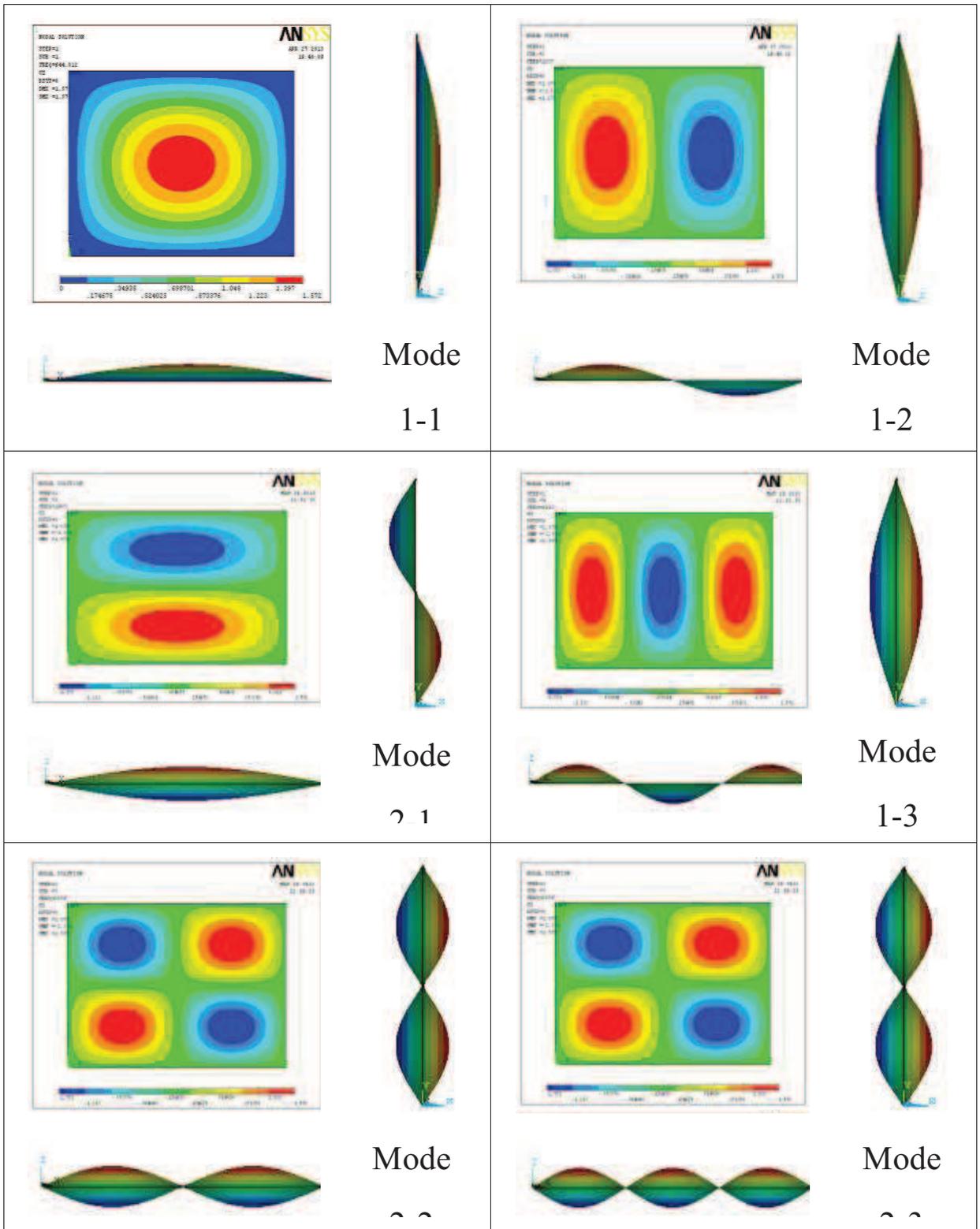
L'élément plaque est considéré, la discrétisation de la plaque est réalisée avec un maillage de  $80 \times 80$ . Plusieurs cas d'études ont investigués pour les plaques isotropes rectangulaires avec différents rapports ( $R = a/b = 0.4, 2/3, 1, 1.5, 2.5$ ).

## 3 - Calculs des fréquences propres sous simulation par ANSYS:

Pour faire les calculs par la méthode des éléments finies sous ANSYS en choisit l'élément de maillage SHELL 63 (coque élastique) avec 10 élément et en utilise comme exemple une plaque rectangulaire mince.

Chaque fois changé la géométrie du plaque  $R=a/b$  et les conditions aux limites et calculé les fréquences et les déformés propre.

4 - Présentation des lignes modales de dix (10) premiers modes de la plaque EEEE:



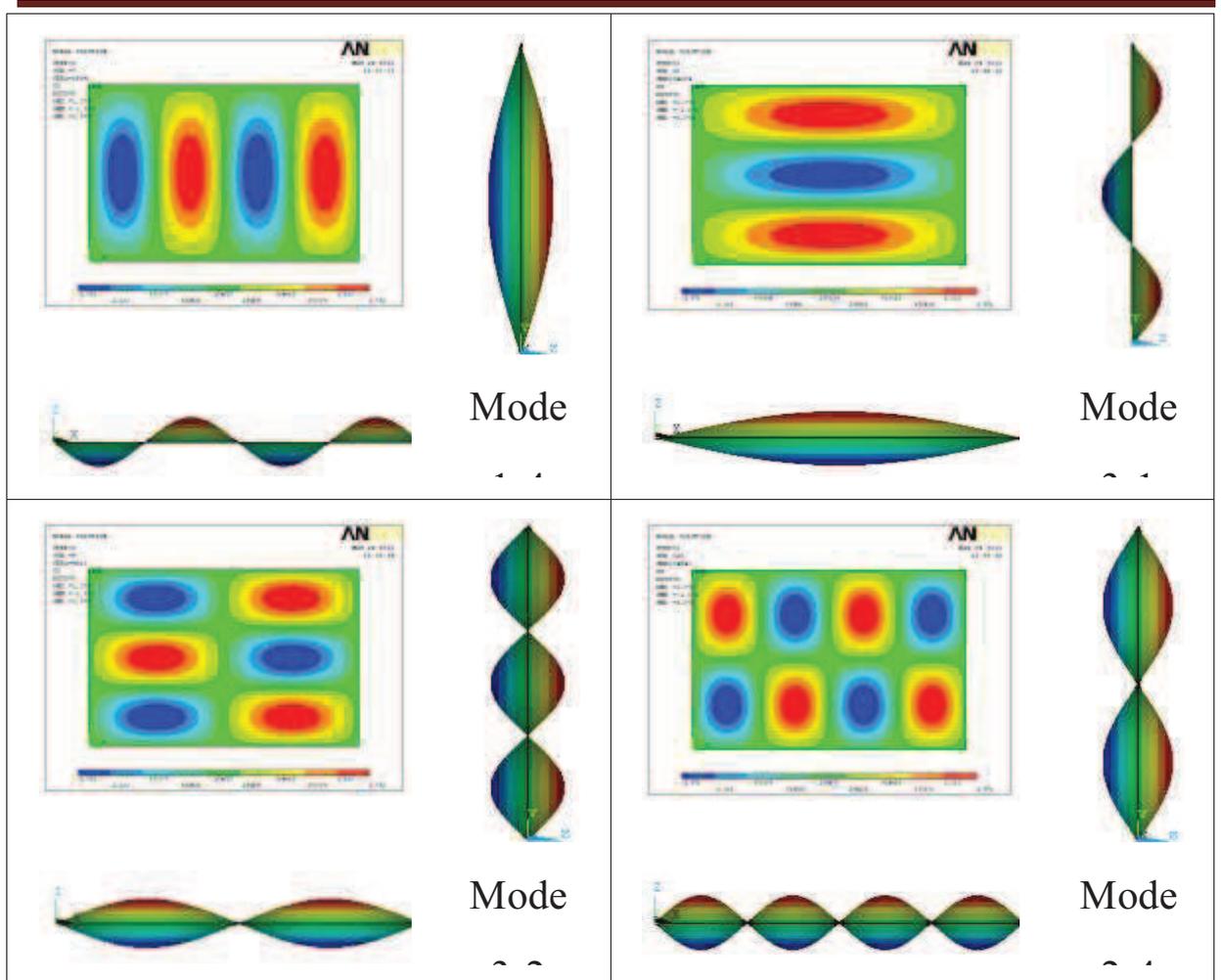


Figure 3 -1 . Présentation des lignes modales de dix (10) premiers modes de la plaque EEEE.

**5 - Résultats et discussion:**

**1- Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement et en calcul de structure par les éléments finis :**

Sur les tableaux (3.2) et (3.3) sont reportées les valeurs des fréquences propres obtenues par deux méthodes considérées, analytique et calcul de structures par les éléments finis, respectivement pour les configurations (AAAA) et (EEEE). La plaque choisie  $R=a/b > 1$  ( $R=1.5$ ) et  $h=2\text{mm}$  est constante de chaque couche de la plaque.

modes	Déformées	R=1.5 ou a=3 et b=2 plaque AAAA		Ecart(Hz)	Ecart relatif $\Delta(\%) = \frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$
		Fréquences Propres obtenues par MEF	Fréquences Propres calculées par méthode de Rayleigh-Ritz		
1	1-1	9,4749	10,3681	0.8932	0.0861
2	2-1	15.071	15,976	0.9050	0.0566
3	1-2	24.405	26,0817	1.6767	0.0642
4	2-2	32.038	33,336	1.2980	0.0389
5	3-1	37.496	41,7157	4.2197	0.1011
6	3-2	37.611	41,0809	3.4699	0.0844

Tableau 3.2. Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement et en calcul de structure dans le cas de la plaque AAAA

modes	Déformées	R=1.5 ou a=3 et b=2 plaque EEEE		Ecart(Hz)	Ecart relatif $\Delta(\%) = \frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$
		Fréquences Propres obtenues par MEF	Fréquences Propres calculées par méthode de Rayleigh-Ritz		
1	1-1	5,1565	5,5969	0,4404	0,078686
2	2-1	7,9489	8,841	0,8921	0,100905
3	1-2	12,526	14,419	1,893	0,131285
4	2-2	12,714	14,5567	1,8427	0,126588
5	3-1	15,028	18,1762	3,1482	0,173205
6	3-2	19,313	23,5334	4,2204	0,179337

Tableau 3.3. Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement et en calcul de structure dans le cas de la plaque EEEE

## 2- Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et new Méthode de Hearmon:

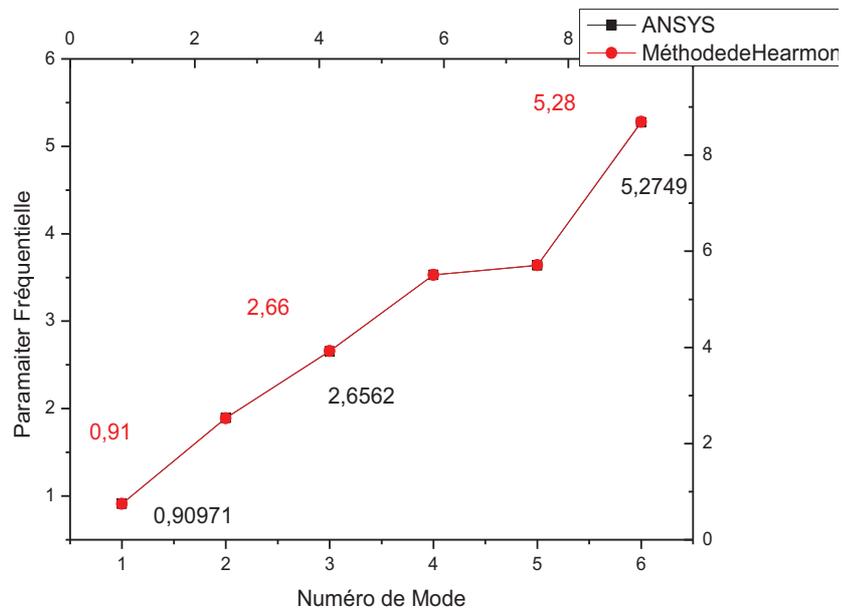
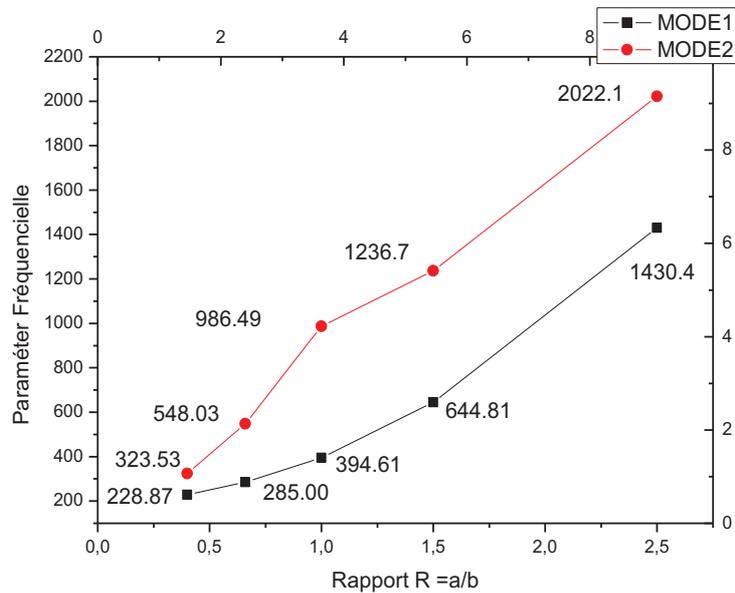


Figure 3-2 . Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et new Méthode de Hearmon

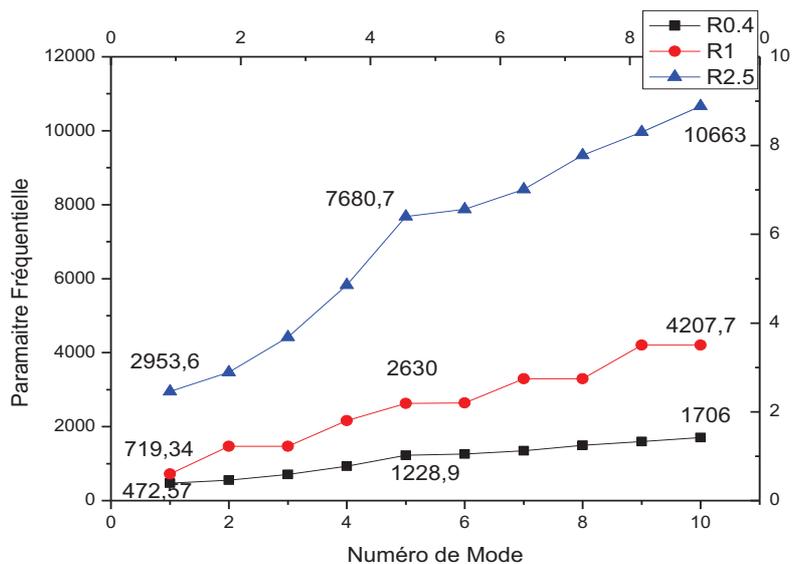
Dans ce graphe on voit comparait croissante du résultat par l'ANSYS sur l'accroissement des courbes pour le résultat de new méthode de Hearmon sur la plaque AAAA, Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative les résultats est congruent.

3- comparaison les mode 1 et 2 par rapport le rapport  $R=a/b$  dans le plaque AAAA:



**Figure 3-3** . comparaison les mode 1 et 2 par rapport le rapport  $R=a/b$  dans le plaque AAAA  
 Dans ce graphe on voit l'influence croissante du rapport des dimensions sur l'accroissement des courbes pour les deux premier mode 1 et 2 dans mémé plaque AAAA, Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative le mode 2 est plus supérieure des fréquences par rapport à le mode 1.

4- Influence de dimensions (longueur, largeur) dans plaque EEEE:



**Figure 3-4** . Influence de dimensions (longueur, largeur) dans plaque EEEE

Dans ce graphe on voit l'influence croissante du Numéro des modes sur l'accroissement des courbes pour les différents rapport ( $R < 1$ ,  $R = 1$ ,  $R > 1$ ) dans la plaque EEEE, Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative les rapports  $R > 1$  est plus supérieure des fréquences par rapport à les autres rapports, et plus rigide.

**5- Comparaison deux plaques (EEEE, AAAA) par rapport le rapport  $R = a/b$ :**

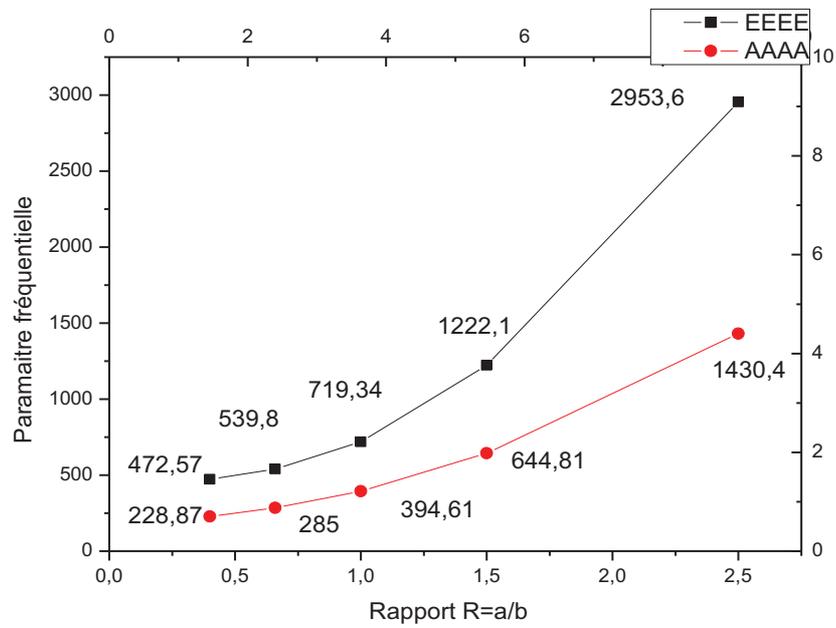


Figure 3 - 5 . Comparaison deux plaques (EEEE, AAAA) par rapport le rapport  $R = a/b$

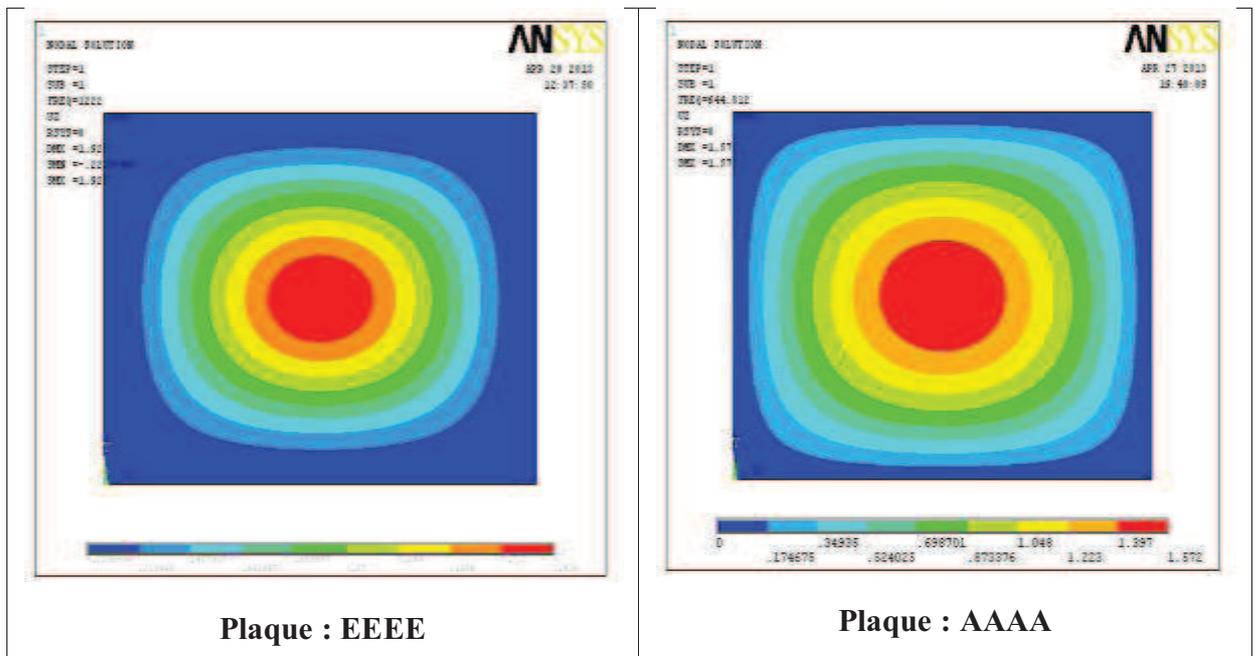


Figure 3 -6 . deux plaques (EEEE, AAAA)

Dans ce graphe on voit l'influence croissante du rapport des dimensions sur l'accroissement des courbes pour les deux cas de fixités AAAA et EEEE, Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative la plaque encastree EEEE est plus rigide par rapport à la plaque simplement appuyée.

**6- comparaison deux plaques (AAEE , AEAE ) par rapport le rapport R = a/b:**

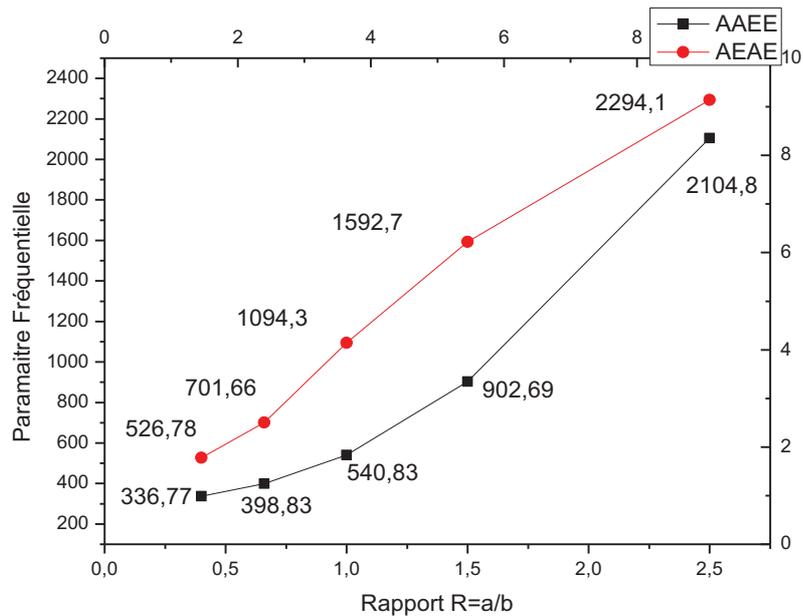


Figure 3 - 7 . comparaison deux plaques (AAEE, AEAE) par rapport le rapport R=a/b

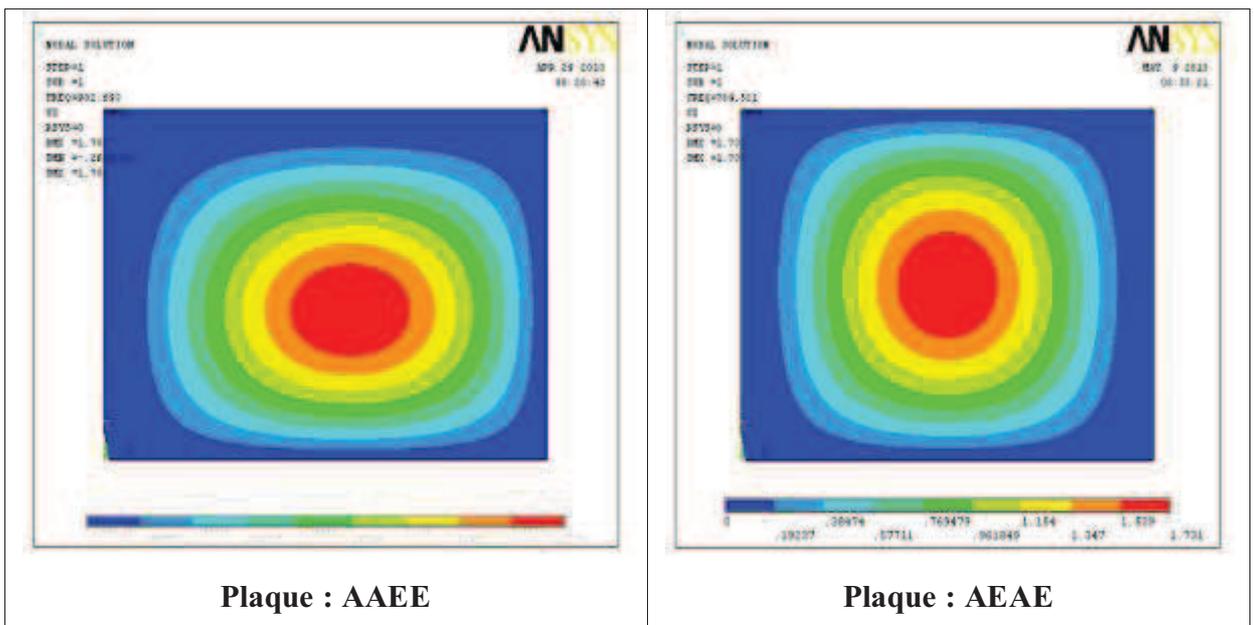
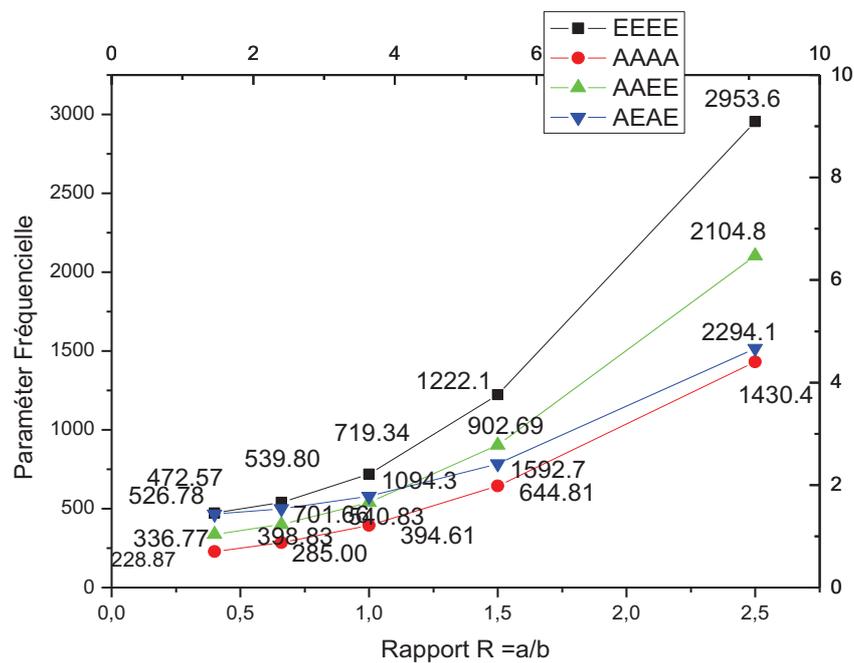


Figure 3 -8 . deux plaques (AAEE , AEAE )

Dans ces graphes on voit l'influence croissante du rapport de dimensions sur l'accroissements des courbes pour les deux cas de fixités AAEE et AEAE, d'autre part l'influence des conditions aux limites est observée en comparant dans le sens vertical la dispersion des deux courbes .cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative car la plaque évolue dans le petit sens du comportement poutre (AAEE→EA) et (AEAE→AA),la rigidité de la poutre EA étant plus grande que celle de la poutre AA, explique l'écart supérieure des fréquences  $\omega$  AAEE Par rapport à  $\omega$ AEAE.

**7- comparaison deux plaques (AAEE , AEAE , EEEE , AAAA ) par rapport le rapport  $R = a/b$ :**



**Figure 3-9 . comparaison des plaques ( AAEE, AEAE, EEEE, AAAA ) par rapport le rapport  $R = a/b$**

Dans ce graphe on voit l'influence croissante du rapport des dimensions sur l'accroissement des courbes pour les quatre cas des plaques (AAAA, EEEE, AAEE, AEAE) Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative la plaque EEEE est plus supérieure des fréquences par rapport à les autre cas des plaques, et plus rigide.

8- Comparaison deux plaques ( EEEE , AAAA ) par rapport du numéro de mode:

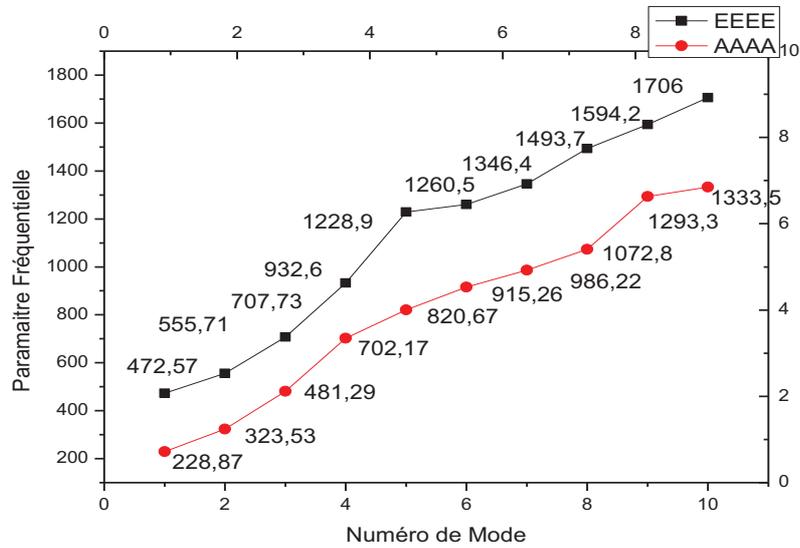


Figure 3-10 . Comparaison deux plaques (EEEE,AAAA) par rapport du numéro de mode

Dans ce graphe on voit l'influence croissante des Numéro de Mode sur l'accroissement des courbes pour les deux cas des plaques (AAAA, EEEE). Cette constatation est confirmée par l'analyse qualitative la plaque EEEE est plus supérieure des fréquences dans toutes les modes par rapport à la plaque AAAA, et plus rigide.

9- Comparaison deux plaques ( AAEE , AEAE ) par rapport du numéro de mode:

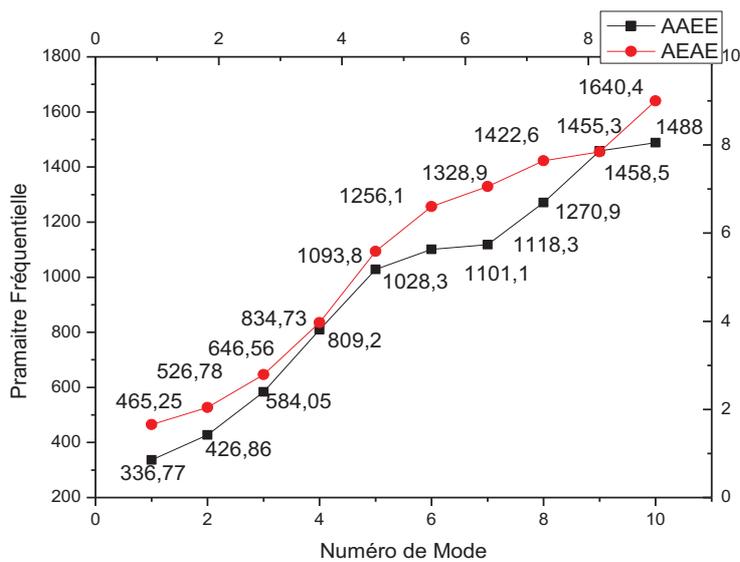


Figure 3-11 . Comparaison deux plaques (AAEE,AEAE) par rapport du numéro de mode

10-comparaison les cas des modale des matériau ( acier ; Aluminium ; cuivre )  
par rapport le rapport  $R = a/b$  dans le plaque EEEE :

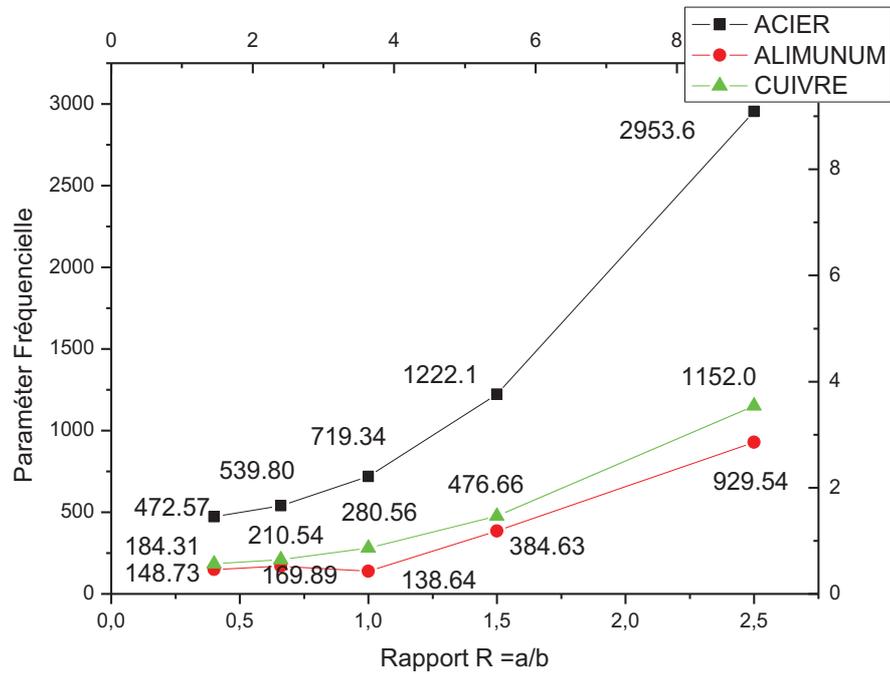


Figure 3-12 . comparaison les cas des modale des matériau ( acier ; Aluminium ;  
cuivre) par rapport le rapport  $R = a/b$  dans le plaque EEEE



## **Conclusion générale**

### Conclusion générale:

Cette étude consiste à décrire le comportement vibratoire des plaques mince isotrope. Afin d'aboutir à notre objectif, on a suppose que la flèche (déformée) peut être approchée qui doit satisfaire aux conditions aux frontières. En connaissant l'équation permet de définir le mouvement de la plaque, les fréquences propres qui caractérisent les modes de vibrations dépend des matrices de rigidité du stratifié.

L'objectif assigné à ce travail est l'étude du comportement vibratoire, Analytique et numérique de plaques mince isotrope. Pour atteindre cet objectif nous avons commencé par une étude bibliographique détaillée sur les plaques mince isotrope. De nombreux travaux sont consacrés à l'étude du comportement dynamique des structures dans le souci d'une meilleure compréhension et maîtrise des problèmes vibratoires.

L'approximation par la théorie classique des stratifiés permet une application aisée de la méthode analytique de Rayleigh-Ritz basée sur la modélisation du déplacement transversal de la plaque par les fonctions caractéristiques de vibrations des plaques homogènes et non homogènes. Cette approximation a permis de traiter la totalité des combinaisons de conditions aux limites standards sur les bords d'une plaque rectangulaire.

La programmation de la méthode sous ANSYS à permis une fréquence fondamentale plus exacte et étudier le déplacement et la fréquence propre. Ainsi on résoudre l'équation du mouvement libre pour déterminer les fréquences propres et pour éviter le phénomène de la résonance. Ainsi L'analyse des plaques isotropes minces dépend de 03 paramètres :

- 1- condition en limite
- 2- matériau en lui même (caractéristique du matériaux s'il est isotrope ou orthotrope)
- 3- la géométrie de la structure (plaque avec leur dimension)

La méthode de Ritz est utilisée pour l'investigation de l'analyse vibratoire d'une plaque rectangulaire présentant différents cas de fixité (AAAA, EEEE, AAEE, AEAE). Les réponses obtenues comparait avec autre plaque ou autre new méthode, montrent une bonne concordance. Les conditions de fixité et leur emplacement imposent une grande influence sur le comportement vibratoire des plaques minces.

**Référence :**

- [1]: article: Kirchhoff–Love plate theory, Note: the Einstein summation convention of summing on repeated indices is used below.
- [2] : Thèse T. Zarza étude paramétrique fréquentielle pour l’analyse libre d’une plaque rectangulaire mince isotrope avec différentes combinaisons d’appuis en utilisant la méthode de Ritz. 2007 Université Mentouri Constantine - Algérie
- [3] : E.F.F.Chladni, "Entdeckung Über die Théorie des Klanges", Leipzig, (1787).
- [4] : Kirchhoff. G. "Vorlesungen uber Mathematics he Physik", Vol.1 B.G. Teubner Leipzig, Germany (1876).
- [5] : Lord Rayleigh, "The theory of sound", The Macmillan Company (1877).
- [6] : W. Ritz, "Theory Dertransversals Chwingungen einer Quadrastische Platte Mit Freien"
- [7]: S.Timoshenko" On the Correction of Transverse Shear Deformation of the Differential Equations for Transverse Vibration of Prismatic Bars " Philosophical Magazine, 41 (series 6) 744 -746 (1921).
- [8]: S.Timoshenko "On the Transverse Vibration of Bars of Uniform. Cross Section " Philosophical Magazine, 43 series (6) 125-131 (1922).
- [9] : A.E.H. Love, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity ", Dover, New York. Randern, Annalen der physik 28 737-736 (1944).
- [10] : R.D. Mindlin. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", Journal of applied mechanics, 18 31-38 (1951).
- [11] : Reissner E. " The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates". J. of appl. Mech., (12) A69-A77 (1945).
- [12] : Uflyand Y.S " The Propagation of Waves in the Transverse Vibrations of Bars and Plates" Akad.Nauk.SSSR, Prikl. Mat. Mech., 12 287-300 (1948).
- [13] : R.D. Mindlin. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", Journal of applied mechanics, 18 31-38 (1951).
- [14] : Warburton, G .B. "The vibration of Rectangular Plates". Proceeding of the Institute of Mechanical engineers, Series A 168, 371-384 (1954).
- [15] : A.W. Leissa " Vibration of Plates", NASA SP-160, Scientific and technical Information Division of NASA, Washinton, US, DC, 1969.
- [16] :Arthur Lebéé,«THÈSE Doctorat homogénéisation de plaques périodiques épaisses, application aux panneaux sandwichs à âme pliable en chevrons» UNIVERSITÉ PARIS -EST 2010

- [17] : A.W. Leissa " The Free Vibration of Rectangular Plate". The journal of sound and Vibration, 31 257-293 (1973).
- [18] : A.W. Leissa" Recent Research in Plate Vibration". The shock and vibration Digest sound and Vibration, Part II: Complicated effects 19(3). 10-24. (1981-1985).
- [19] : K.M. Liew et al " Reasearch on Thick Plate Vibration: A literature survey" The journal Of sound and Vibration, 180(1), 163-176 (1995).
- [20] : Luc Jaouen , cour « Vibrations des milieux discrets et continus », avril 2005 Université du Maine, F rance
- [21] : MEMOIRE DE MAGISTER « Analyse dynamique des plaques minces et épaisses: Application aux matériaux homogènes et non homogènes » CHERIDI HOUDA Université MENTOURI–CONSTANTINE 2012
- [22] : Edward L. Wilson “Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures isotropic materials” January 2002
- [23] : university press This book mechanic of composite structures combridge 2003
- [24] : N.BOUHADDI « vibrations en flexion des plaques minces »
- [25] : Marc Thomas, ing., Ph.D. « cour VIBROACOUSTIQUE Chapitre 3 Les vibrations des systèmes » continus Montréal, février 2003
- [26] : G. Kirchhoff. "Uber das Gleichewitch und die Bewegung einer Elastishen Scheibe" Journal fur reine und angewandte Mathematic, 40 51-88 (1850)
- [27] : Luc Jaouen « Vibrations de flexion des plaques » mars 2002 Université de Sherbrooke
- [28] : Mémoire Magister GOUDJIL FAYÇAL « analyse de la reponse dynamique des plaques orthotropes par la methode des elements finis » Université MENTOURI–CONSTANTINE En Génie Civil / 2004
- [29] :mémoire Sofiane Chorfi,«analyse des plaques orthotropes minces sous l’effet des conditions extérieures construction mécanique» Université MENTOURI–CONSTANTINE /GM/2010
- [30] : Ma’ en Sari, Morad Nazari, Eric A. Butcher“free vibration analysis of kirchhoff plates with damaged boundaries by the chebyshev collocation and perturbation methods” New Mexico State University 2010
- [31] : Jean-Michel Génevaux « Mécanique : modélisation » juillet 2011
- [32] : « mécanique des structure », MS3:PLAQUES: DU 3D au 2D 2004-2005

The image features a rectangular graphic with a marbled paper texture. The marbling consists of intricate, swirling patterns in shades of blue, grey, and white. The graphic has a thin black border and is styled to look like a page from a book, with small circular details at the top-left and bottom-left corners suggesting binding or stitching. Centered within this graphic is the text "Les Annexes" in a bold, black, serif font.

**Les Annexes**

**L'annexe(A) : tableaux résultats des plaques par l'ANSYS:**

**Tableau 1 :** Comparaison deux plaques (EEEE, AAAA) par rapport le rapport  $R=a/b$ :

Rapport $R=a/b$	EEEE	AAAA
0.4	472.57	228.87
0.66	539.80	285.00
1	719.34	394.61
1.5	1222.1	644.81
2.5	2953.6	1430.4

**Tableau 2 :** comparaison deux plaques (AAEE , AEAE ) par rapport le rapport  $R=a/b$ :

Rapport $R=a/b$	AAEE	AEAE
0.4	336.77	526.78
0.66	398.83	701.66
1	540.83	1094.3
1.5	902.69	1592.7
2.5	2104.8	2294.1

**Tableau 3 :** Comparaison deux plaques (EEEE, AAAA ) par rapport du numéro de mode:

numéro de mode	EEEE	AAAA
1	472.57	228.87
2	555.71	323.53
3	707.73	481.29
4	932.60	702.17
5	1228.9	820.67
6	1260.5	915.26
7	1346.4	986.22
8	1493.7	1072.8
9	1594.2	1293.3
10	1706.0	1333.5

**Tableau 4 :** Comparaison deux plaques ( AAEE, AEAE ) par rapport du numéro de mode:

numéro de mode	EEAA	AEAE
1	336.77	465.25
2	426.86	526.78
3	584.05	646.56
4	809.20	834.73
5	1028.3	1093.8
6	1101.1	1256.1
7	1118.3	1328.9
8	1270.9	1422.6
9	1458.5	1455.3
10	1488.0	1640.4

**Tableau 5 :** comparaison les cas des modale des matériau ( acier ; alimunum ; cuivre ) par rapport le rapport  $R = a/b$  dans le plaque EEEE :

Rapport $R=a/b$	ACIER	CUIVER	ALIMINUM
0.4	472.57	184.31	148.73
0.66	539.80	210.54	169.89
1	719.34	280.56	138.64
1.5	1222.1	476.66	384.63
2.5	2953.6	1152.0	929.54

**Tableau 6 :** comparaison les mode 1 et 2 par rapport le rapport  $R=a/b$  dans le plaque AAAA :

Rapport $R=a/b$	Mode 1	Mode 2
0.4	336.77	426.86
0.66	398.83	680.03
1	540.83	1210.1
1.5	902.69	1534.9
2.5	2104.8	2667.9

**Tableau 7 :** comparaison deux plaques (SSEE , SESE , EEEE , SSSS ) par rapport le rapport  $R = a/b$ :

Rapport $R=a/b$	EEEE	SSSS	EESS	ESES
0.4	472.57	228.87	336.77	526.78
0.66	539.80	285.00	398.83	701.66
1	719.34	394.61	540.83	1094.3
1.5	1222.1	644.81	902.69	1592.7
2.5	2953.6	1430.4	2104.8	2294.1

**Tableau 8 :** Influence de dimensions (longueur, largeur) dans plaque EEEE:

Numéro de Mode	R=0.4	R=1	R=2.5
1	472.57	719.34	2953.6
2	555.71	1467.1	3473.2
3	707.73	1467.1	4423.3
4	932.60	2162.8	5828.7
5	1228.9	2630.0	7680.7
6	1260.5	2642.5	7878.2
7	1346.4	3297.3	8415.1
8	1493.7	3297.3	9335.7
9	1594.2	4207.7	9963.8
10	1706.0	4207.7	10663

**Tableau 9 :** Comparaison entre les fréquences obtenues par ANSYS et new Méthode de Hearmon:

<b>Numéro de Mode</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Méthode de Hearmon</b>
1	0.90971	0.91
2	1.8921	1.89
3	2.6562	2.66
4	3.5295	3.53
5	3.6383	3.64
6	5.2749	5.28

**L'annexe(B) : Programme du plaque rectangulaire encastré EEEE par l'ANSYS :**

```
/NOPR ! Suppress printing of UNDO process
/PMACRO ! Echo following commands to log
FINISH ! Make sure we are at BEGIN level
/CLEAR,NOSTART ! Clear model since no SAVE found
! WE SUGGEST YOU REMOVE THIS LINE AND THE FOLLOWING STARTUP LINES
/input,menust,tmp,",,,,,,,,,,,,,1
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,,0
/REPLOT,RESIZE
!*
/NOPR
/PMETH,OFF,0
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,PR_CFD,0
/GO
!*
!*
```

```
/PREP7
!*
ET,1,SHELL63
!*
R,1,0.005,,,,,
RMORE,,,
RMORE
RMORE,
!*
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,210e9
MPDATA,PRXY,1,,0.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7800
RECTNG,0,0.25,0,0.25,
ESIZE,0,80,
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,0
!*
CM,_Y,AREA
ASEL,,,, 1
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
!*
AMESH,_Y1
!*
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
```

```
!*  
FINISH  
/SOL  
!*  
ANTYPE,2  
!*  
!*  
MODOPT,LANB,10  
EQSLV,SPAR  
MXPAND,10,,0  
LUMPM,0  
PSTRES,0  
!*  
MODOPT,LANB,10,0,0,OFF  
NSEL,S,LOC,X,0  
FLST,2,81,1,ORDE,4  
FITEM,2,1  
FITEM,2,162  
FITEM,2,242  
FITEM,2,-320  
!*  
/GO  
D,P51X,,,,,ALL,,,,,  
NSEL,ALL  
NSEL,S,LOC,X,0.25  
FLST,2,81,1,ORDE,3  
FITEM,2,2  
FITEM,2,82  
FITEM,2,-161  
!*  
/GO  
D,P51X,,,,,ALL,,,,,  
NSEL,ALL
```

```
NSEL,S,LOC,Y,0
FLST,2,81,1,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-81
!*
/GO
D,P51X,,,,,ALL,,,,
NSEL,ALL
NSEL,S,LOC,Y,0.25
FLST,2,81,1,ORDE,3
FITEM,2,82
FITEM,2,162
FITEM,2,-241
!*
/GO
D,P51X,,,,,ALL,,,,
NSEL,ALL
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LIST
)/GOP ! Resume printing after UNDO process
)! We suggest a save at this point
```

L'annexe(C): Les quatre cas des plaques isotrope homogène et non homogène:

Figure 1 : Plaque homogène encastré EEEE :

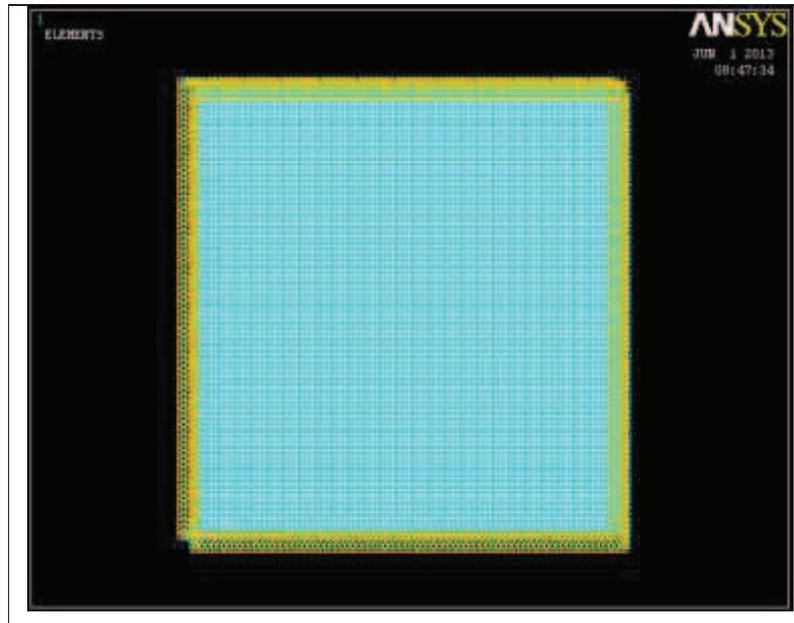


Figure 2 : Plaque homogène appui simple AAAA :

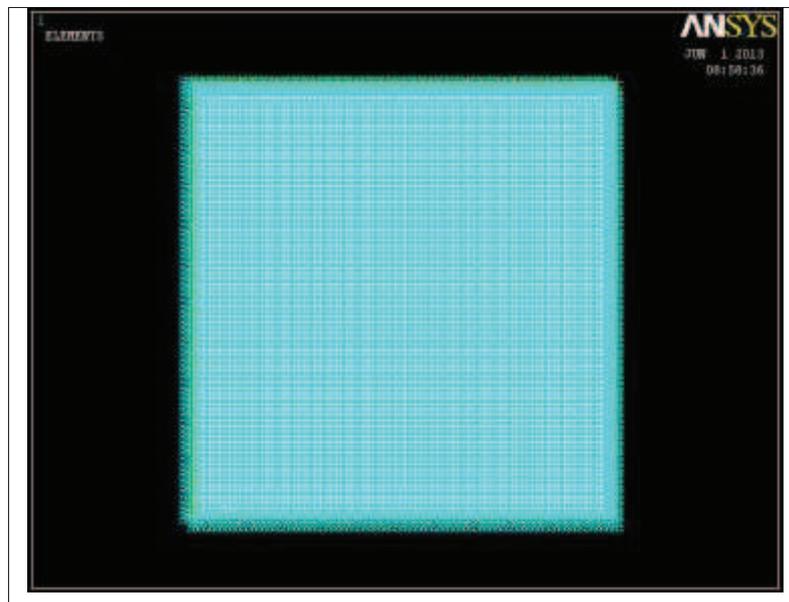


Figure 3 : Plaque non homogène AAEE :

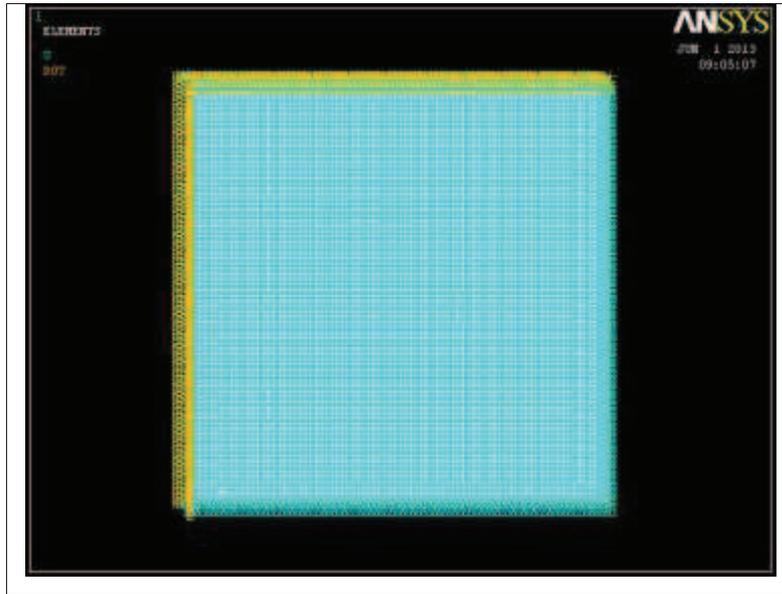


Figure 4 : Plaque non homogène AEAE :

