

**UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA**  
**Faculte des Sciences et Technologie et des Sciences de la Matiere**  
**Département Génie Mécanique**



**Mémoire**

**MASTER PROFESSIONNEL**

Domaine : Sciences Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Maintenance Industrielle

Présenté par : CHAAL Merouane

**Thème**

**Modélisation cinématique d'un robot  
manipulateur à chaîne continue ouverte**

Le : 27/06/2013

Devant le jury :

Mr	R. MAKHLOUFI	MA(B)	Président	UKM Ouargla
Mr	A. BELLOUFI	MA(A)	Encadreur	UKM Ouargla
Mr	M. BOUKHATEM	MA(A)	Examineur	UKM Ouargla

**Année Universitaires : 2012/2013**

# ***DEDICACE***

*Je dédie ce travail*

*A ma mère qui a soufferte.*

*A mon père lui je tant adoré.*

*A ma sœur et mes frères.*

*A toute la famille CHAAL.*

*A mes collègues de l'université.*

*A mes enseignants et professeurs.*

*A tous mes amies.*

# *Remerciements*

*Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour terminer mon travail.*

*Je souhaite tout d'abord remercier mon encadreur Monsieur BELLOUFI Abderrahim enseignant à l'université de Kasdi Merbah Ouargla, pour avoir accepté de diriger ce mémoire et de sa patiente durant la période de l'encadrement.*

*Je tiens à remercier : MM : R. MAKHLOUFI, M. BOUKHATEM, pour nous avoir fait l'honneur d'être membres de jury. Ainsi que pour avoir consacré une partie de leur temps précieux pour lire et corriger cette mémoire.*

*Et Enfin, je m'excuse a tout les personne qui j'oublier ses noms et qui ne sont pas été citées.*

# Table des matières

Introduction générale .....	3
-----------------------------	---

---

## Chapitre I Généralités

---

I.1	Introduction .....	5
I.2	Définitions .....	5
I.2.1	Robot Institute of America.....	5
I.2.2	Association Japonaise de Robotique Industrielle .....	5
I.2.3	L'association Française de Robotique Industrielle (AFRI) .....	5
I.2.4	International Standard Organization (ISO).....	5
I.3	Les éléments constitutifs d'un robot .....	5
I.3.1	Unité informationnelle .....	6
I.3.2	Unité opérationnelle .....	6
I.3.3	La structure mécanique articulée.....	6
I.4	Architecture des robots .....	8
I.4.1	Vocabulaire.....	8
I.5	Classification des robots .....	10
I.5.1	Classification géométrique.....	10
I.6	Caractéristiques d'un robot .....	12
I.7	Conclusion .....	13

---

## Chapitre II Modélisation géométrique et cinématique des robots manipulateurs sériels

---

II.1	Introduction .....	14
II.2	Modélisation géométrique.....	14
II.2.1	Description géométrique: .....	14

---

II.2.2	Méthode de Denavit-Hartenberg .....	14
II.2.3	Modèle géométrique direct .....	16
II.2.4	Modèle géométrique inverse : .....	17
II.2.5	Principe de la méthode de Paul .....	18
II.3	Modélisation cinématique .....	19
II.3.1	Etude cinématique des chaînes cinématiques simples ouvertes .....	19
II.3.2	Modèle cinématique direct : .....	19
II.4	Conclusion .....	22

---

Chapitre III  
**Application et étude de cas**

---

III.1	Introduction .....	24
III.2	Description du robot .....	24
III.3	Modélisation du bras manipulateur .....	25
III.3.1	Calcul du modèle géométrique direct .....	26
III.3.2	Le modèle géométrique inverse .....	28
III.4	Etude cinématique du robot .....	33
III.4.1	Les matrices de changement de base .....	33
III.4.2	Les torseurs cinématique associé à chaque liaison : .....	33
III.4.3	Torseur cinématique équivalent .....	35
III.4.4	Calcul de la matrice Jacobienne : .....	45
III.4.5	Trajectoire du robot à l'aide de solidworks : .....	48
III.5	Conclusion .....	51
	Conclusion Générale .....	53
	Bibliographie .....	53

# Liste des figures

Figure I.1 : Structure fonctionnelle d'un robot.....	6
Figure I.2 : Structure sériel .....	7
Figure I.3 : Structure fermée.....	7
Figure I.4 : Représentation d'une articulation rotoïde. ....	8
Figure I.5 : Représentation d'une articulation prismatique. ....	9
Figure I.6 : Architecture d'un robot .....	10
Figure I.7 : Robot cartésien. ....	10
Figure I.8 : Robot cylindrique .....	11
Figure I.9 : Robot sphérique .....	11
Figure I.10 : Robot SCARA .....	11
Figure I.11 : Robot 3R. ....	12
Figure II.1 : Robot à structure ouverte simple.....	14
Figure II.2 : Paramètres géométriques dans le cas d'une structure ouverte simple.....	15
Figure III.1 : Les dimensions du robot VP-5243.....	244
Figure III.2 : Sens positives de rotations .....	25
Figure III.3 : Une des solutions pour les référentiels DH. ....	26
Figure III.4 : Singularité d'épaule .....	30
Figure III.5: Shéma cinématique du robot .....	34
Figure III.6 : Graphe des liaisons du robot .....	34
Figure III.7 : Trajectoire linéaire de l'outil.....	48
Figure III.8 : moteur 2 et 3 en rotation.....	49
Figure III.9 : Déplacement angulaire du moteur 2 suivant Z ...	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure III.10 : vitesse angulaire du moteur 2 suivant Z.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure III.11 : Déplacement angulaire du moteur 3 suivant Z.	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
Figure III.12: vitesse angulaire du moteur 3 suivant Z.....	51

# Introduction générale

Depuis la révolution industrielle, une discipline à marqué l'évolution du monde technologique : la Robotique. L'avènement des robots dans l'industrie à permis de soulager l'homme des travaux répétitifs et difficiles tels que : le déplacement d'objets lourds, les taches d'assemblages, les microsoudures... etc. Ceci avec plus d'efficacité et de précision.

La compétition incessante dans l'industrie conduit à une nécessaire augmentation de la productivité en préservant la qualité et en diminuant le coût de revient des produits. Cependant, les robots manipulateurs existants souffrent encore de faiblesses qui les empêchent de mener à bien certaines tâches et limitent leurs champs d'action [1].

Ces robots sont en effet rigides, lourds et encombrants ce qui se traduit par une grande énergie consommé et une vitesse d'exécution lente. La consommation peut constituer un point crucial quand l'énergie est limitée, comme c'est le cas dans les applications spatiales [2].

A cet effet, des recherches universitaires et laboratoires de recherche tentent de développer de nouvelles méthodes et algorithmes de manière à libérer les résultats pour des usages industriels après validation. Les recherches sont appliqués à différents domaines tels que la planification de mouvement, la manipulation, et le contrôle de la position, etc. mais, les robots réels sont inaccessible à cause des prix élevés, donc des modèles simulés sont largement demandés par les laboratoires de recherche [2].

Les simulations et les modélisations sont plus faciles à installer, moins cher, plus rapide et plus pratique à utiliser. La construction de nouveaux modèles de robots et la mise en place d'expériences ne prend que quelques heures. Une simulation de configuration robotique est moins chère que de vrais robots (configurations du monde réel), permettant ainsi une meilleure exploration de la conception [1].

La possibilité d'effectuer des simulations en temps réel devient particulièrement importante dans les derniers stades de la conception processus. La conception finale peut être vérifiée avant que l'on se lance dans le processus coûteux de la construction d'un prototype.

La modélisation et la simulation des systèmes robotiques à l'aide de divers logiciels du programme seront faciliter le processus de conception, de construction et inspectant les robots dans le monde réel. Une simulation est importante pour les programmeurs de robot dans leur permettant d'évaluer et de prédire le comportement d'un robot, et en outre de vérifier et

d'optimiser la planification de trajectoire de leur processus. En outre, cela permettra d'économiser le temps et l'argent, et jouer un rôle important dans l'évaluation de la fabrication d'automatisation. Être capable de simuler ouvre une large gamme d'options, en aidant à résoudre de nombreux problèmes créative. On peut étudier, concevoir, visualiser et tester un objet avant de faire une réalité.

Cette simulation ne peut être atteinte qu'avec la présence des modèles mathématique : le modèle géométrique et le modèle cinématique qui présentent les principales notions de modélisation et de commande liées aux robots.

Le travail réalisé et présenté dans ce mémoire s'articule de la façon suivante :

L'objet du premier chapitre est d'apportera quelques définitions de base et décrire les constituants technologiques d'un robot et définir les principaux termes du domaine.

Dans le deuxième chapitre en présente quelques méthodes permettant d'établir les modèles géométriques et cinématiques pour le cas des robots à structure ouverte simple, ces méthodes sont basées sur la détermination des paramètres de Denavit-Hartenberg.

Dans le chapitre III, j'utilise les modèles présentés dans le chapitre II pour l'étude géométrique et cinématique d'un robot sériel à cinq articulations rotoïde, et plus précisément du robot de la compagnie japonaise de portée internationale spécialisée principalement dans les équipements industriels et systèmes pour le marché automobile DENSO.



Chapitre I

# *Généralités*

## **I.1 Introduction :**

Dans ce premier chapitre nous commençons par quelques définitions de base pour faciliter la lecture de mémoire. Ensuite nous présentons Les constituants technologique d'un robot ainsi que la classification des robots et en terminera ce chapitre par la présentation des différentes caractéristiques qu'on trouve dans la littérature.

## **I.2 Définitions :**

La définition que l'on donne actuellement du robot industriel diffère quelque peu selon les pays :

### **I.2.1 Robot Institute of America :**

« Un robot est un manipulateur reprogrammable à fonctions multiples. Il est conçu pour déplacer des matériaux, des pièces, des outils ou des instruments spécialisés suivant des trajectoires variables programmées, en vue d'accomplir des tâches très diverses » [3].

### **I.2.2 Association Japonaise de Robotique Industrielle :**

« Tout mécanisme permettant d'effectuer, en tout ou en partie, une tâche normalement réalisée par l'homme » [3].

### **I.2.3 L'association Française de Robotique Industrielle (AFRI) :**

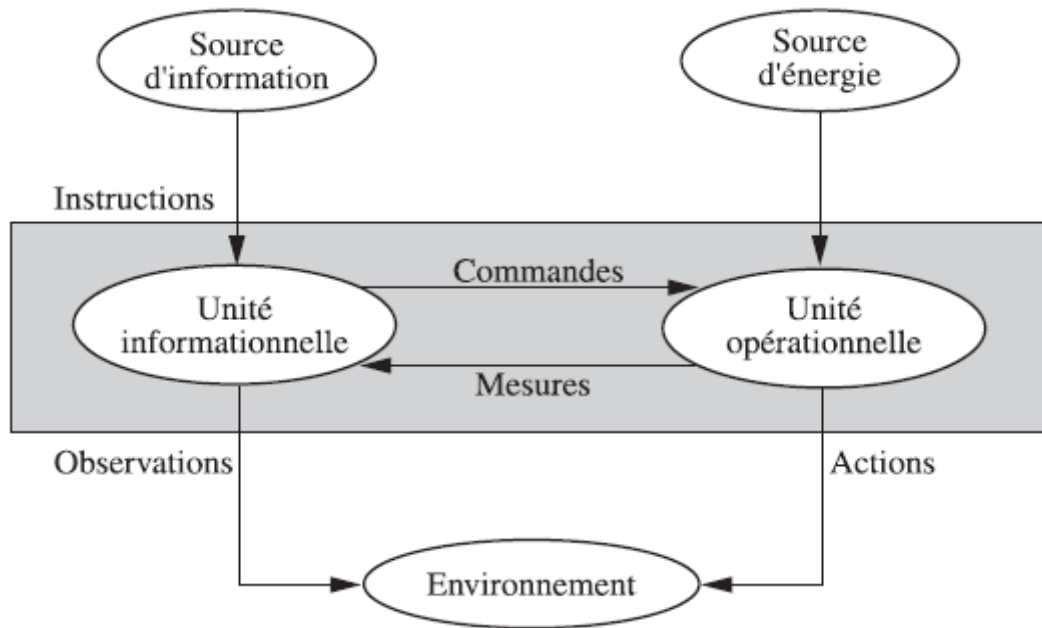
« Un robot industriel est une machine formée de divers mécanismes comportant divers degrés de liberté, ayant souvent l'apparence d'un ou de plusieurs bras se terminant par un poignet capable de maintenir un outil, une pièce ou un instrument de contrôle. En particulier, son unité de contrôle doit contenir un système de mémorisation, et il peut parfois utiliser des accessoires sensitifs et adaptables qui tiennent compte de l'environnement et des circonstances. Ces machines, ayant un rôle pluridisciplinaire, sont généralement conçues pour effectuer des fonctions répétitives, mais sont adaptables à d'autres fonctions » [3].

### **I.2.4 International Standard Organization (ISO) :**

« Une machine formée par un mécanisme incluant plusieurs degrés de libertés, ayant souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet capable de tenir des outils, des pièces ou un dispositif d'inspection » [4].

## **I.3 Les éléments constitutifs d'un robot :**

« De même qu'un trou n'est défini que par ce qui l'entoure, un robot n'a de sens que dans un environnement qu'il modifie ». [5]. C'est pourquoi on peut distinguer les ensembles interactifs dans un robot en fonctionnement [6].



**Figure I.1** Structure fonctionnelle d'un robot. [7]

### **I.3.1 Unité informationnelle :**

Reçoit les instructions décrivant la tâche à accomplir, les mesures relatives à l'état interne de la structure mécanique qui constitue le bras manipulateur et les observations concernant son environnement. Elle élabore en conséquence les commandes de ses différentes articulations en vue de l'exécution de ses tâches. Les systèmes actuels fonctionnent en interaction permanentent selon le cycle information-décision-action [7].

### **I.3.2 Unité opérationnelle :**

Exerce les actions commandées en empruntant la puissance nécessaire à la source d'énergie. Cette partie, qui constitue le robot physique, intègre la structure mécanique (segments, articulations, architecture,...), les modules d'énergie (amplificateurs, variateurs, servovalves...), les convertisseurs d'énergie (moteurs, vérins...), les chaînes cinématiques de transmission mécanique ( réducteurs, vis à billes, courroies crantées ...), les capteurs de proprioceptifs placés sur chaque axe pour mesurer en permanence leur position et leur vitesse, et enfin l'effecteur, ou organe terminal, qui est en interaction avec l'environnement [7].

### **I.3.3 La structure mécanique articulée :**

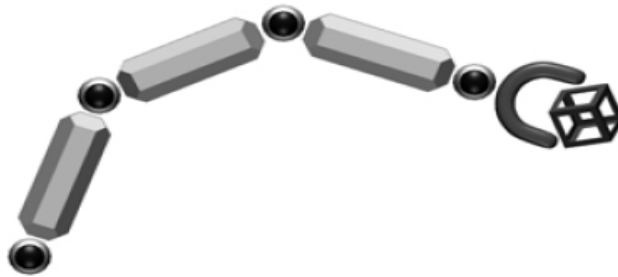
Un robot manipulateur est constitué généralement par deux sous-ensembles distincts : un organe terminal qui est le dispositif destiné à manipuler des objets, et une structure mécanique articulée (SMA), constituée d'un ensemble de solides reliés entre eux, généralement les uns à la suite des autres où chaque solide est mobile par rapport au précédent. Cette mobilité

s'exprime en termes de degrés de liberté (d.d.l) qui est par définition le nombre de mouvements indépendants possibles d'un solide  $C_1$  par rapport au solide qui lui est directement relié  $C_2$ .

Une structure mécanique articulée peut être représentée par une architecture composée de plusieurs chaînes de corps rigides assemblés par des liaisons appelées articulations. Les chaînes peuvent être dites soit ouvertes ou en série dans les quelles tous les corps ont au plus deux liaisons, ou bien arborescentes où au moins l'un des corps a plus de deux liaisons. Les chaînes peuvent aussi être fermées dans les quelles l'organe terminal est relié à la base du mécanisme par l'intermédiaire de plusieurs chaînes [8].

▪ **Structure mécanique articulée à chaîne cinématique simple :**

C'est une chaîne cinématique dont chaque membre possède un degré de connexion (nombre de liaisons mécaniques) inférieur ou égal à deux. Un robot sériel est formé d'une chaîne cinématique simple dont la base et l'organe effecteur possèdent un degré de connexion de un (c'est-à-dire qu'il n'est relié qu'à un seul corps) et les autres éléments un degré de connexion de deux.



**Figure I.2** Structure sériel.

▪ **Structure mécanique articulée à chaîne cinématiques fermée :**

C'est une chaîne cinématique dont l'un des membres, différent de la base, possède un degré de connexion supérieur ou égal à trois.



**Figure I.3** Structure fermée.

## I.4 Architecture des robots :

### I.4.1 Vocabulaire :

#### ▪ La base :

La base du manipulateur est fixée sur le lieu du travail. Ceci est le cas de la quasi-totalité des robots industriels.

#### ▪ Le porteur :

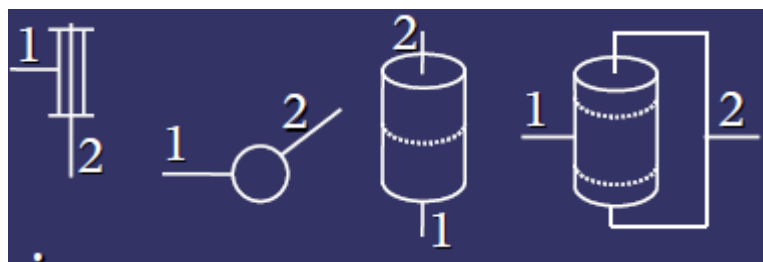
Le porteur représente l'essentiel du système mécanique articulé, il a pour rôle d'amener l'organe terminal dans une situation donnée imposée par la tâche (la situation d'un corps peut être définie comme la position et l'orientation d'un repère attaché à ce corps par rapport à un repère de référence). Il est constitué de :

- Segment : corps solides rigides susceptibles d'être en mouvement par rapport à la base du porteur, et les uns par rapport aux autres,
- Articulation : Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degré de liberté, de l'un par rapport à l'autre. Soit  $m$  le nombre de degré de liberté résultant, encore appelé mobilité de l'articulation. La mobilité d'une articulation est telle que :

$$0 \leq m \leq 6 \quad (\text{I.1})$$

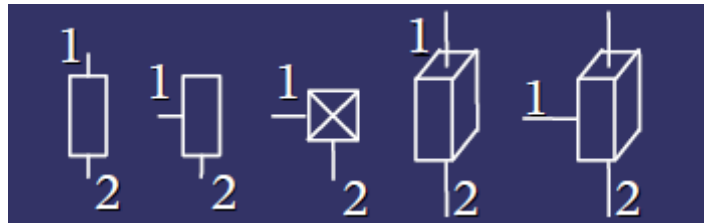
Lorsque  $m = 1$ , ce qui est fréquemment le cas en robotique, l'articulation est dite simple : soit rotoïde, soit prismatique.

- Articulation rotoïde : Il s'agit d'une articulation de type pivot, notée R, réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe (voir la figure I.4).



**Figure I.4** Représentation d'une articulation rotoïde.

- Articulation prismatique : Il s'agit d'une articulation de type glissière, notée P, réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe (voir la figure I.5).



**Figure I.5** Représentation d'une articulation prismatique.

▪ **L'actionneur :**

Pour être animé, la structure mécanique articulée comporte des moteurs le plus souvent associés à des transmissions (courroies crantées), l'ensemble constitue les actionneurs. Les actionneurs utilisent fréquemment des moteurs électriques à aimant permanent, à courant continu, à commande par l'induit. On trouve de plus en plus de moteurs à commutation électronique (sans balais), ou, pour de petits robots, des moteurs pas à pas.

Pour les robots devant manipuler de très lourdes charges (par exemple, une pelle mécanique), les actionneurs sont le plus souvent hydrauliques, agissant en translation (vérin hydraulique) ou en rotation (moteur hydraulique).

Les actionneurs pneumatiques sont d'un usage général pour les manipulateurs à cycles (robots tout ou rien). Un manipulateur à cycles est une structure mécanique articulée avec un nombre limité de degrés de liberté permettant une succession de mouvements contrôlés uniquement par des capteurs de fin de course réglables manuellement à la course désirée (asservissement en position difficile dû à la compressibilité de l'air [9]).

▪ **L'organe terminal :**

On regroupe tout dispositif destiné à manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs magnétiques, à dépression, ...), ou à les transformer (outils, torche de soudage, pistolet de peinture, ...). En d'autres termes, il s'agit d'une interface permettant au robot d'interagir avec son environnement. Un organe terminal peut être multifonctionnel, au sens où il peut être équipé de plusieurs dispositifs ayant des fonctionnalités différentes. Il peut aussi être monofonctionnel, mais interchangeable. Un robot, enfin, peut-être multi-bras, chacun des bras portant un organe terminal différent. On utilisera indifféremment le terme organe terminal, préhenseur, outil ou effecteur pour nommer le dispositif d'interaction fixé à l'extrémité mobile de la structure mécanique [9].



Figure I.6 Architecture d'un robot.

## I.5 Classification des robots :

On peut classer les robots d'un point de vue fonctionnel ou d'après leur structure géométrique.

### I.5.1 Classification géométrique :

On peut aussi classer les robots suivant leur configuration géométrique, autrement dit l'architecture de leur porteur.

#### ▪ Structure cartésienne (PPP) :

A trois liaisons prismatiques, est la plus ancienne, historiquement, elle découle logiquement de la conception traditionnelle d'une machine-outil à trois axes, type rectifieuse ou fraiseuse par exemple. Cette structure est relativement peu utilisée, sauf dans quelques applications particulières, robots pratiques, robots de magasinage, par exemple [7].

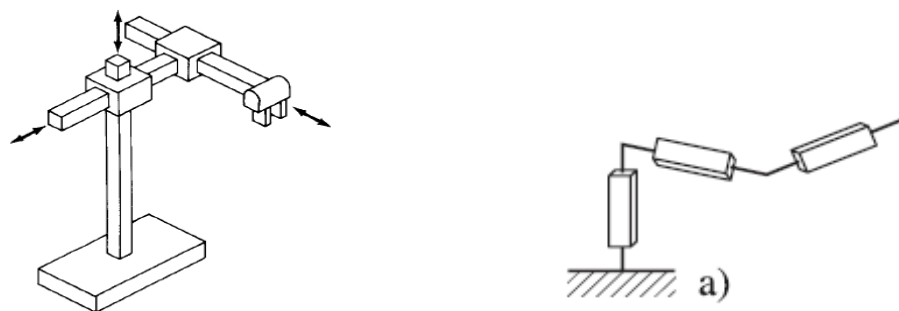


Figure I.7 Robot cartésien. [10]

- **La structure cylindrique (RPP) ou (PRP) :**

Associe une rotation et deux translations. Elle présente l'inconvénient d'offrir un volume de travail faible devant un encombrement total important. Elle n'est pratiquement plus utilisée [7].

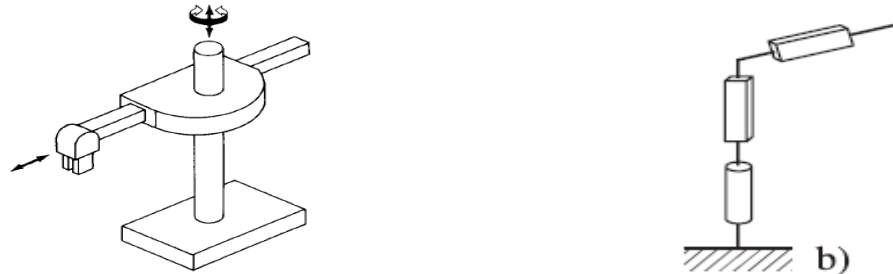


Figure I.8 Robot cylindrique. [10]

- **La structure sphérique ou polaire à axe de rotation orthogonale :**

Est une structure quasiment abandonnée pour des raisons similaires à l'abandon de la structure cylindrique [7].



Figure I.9 Robot sphérique. [10]

- **La structure dite SCARA :**

A axes de rotation parallèles est l'une des plus utilisées, en particulier pour des tâches de manutention ou d'assemblages très fréquents dans l'industrie. Ce succès commercial est lié au fait que le ratio entre le volume de travail et l'encombrement est très favorable et aussi que la structure SCARA est très adaptée à ce type de tâches [7].

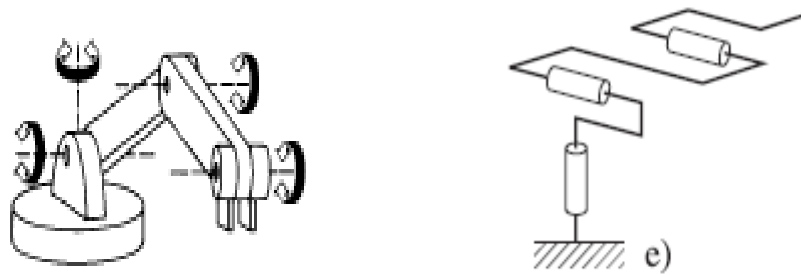


Figure I.10 Robot SCARA. [10]



▪ **La structure 3R (anthropomorphe) :**

Permet d'amener un solide en un point de l'espace par trois rotations, généralement une à axe vertical et deux à axes horizontaux et parallèles c'est le porteur « généraliste par excellence, pouvant se programmer facilement pour différent types de tâches et disposant d'un volume de travail conséquent [7].



**Figure I.11** Robot 3R. [10]

**I.6 Caractéristiques d'un robot :**

Un robot doit être choisi en fonction de l'application qu'on lui réserve. Voici quelques paramètres à prendre, éventuellement, en compte :

- La charge maximum transportable (de quelques kilos à quelques tonnes), à déterminer dans les conditions les plus défavorables (en élongation maximum).

- L'architecture du structure mécanique articulée, le choix est guidé par la tâche à réaliser.

- Le volume de travail, défini comme l'ensemble des points atteignables par l'organe terminal. Tous les mouvements ne sont pas possibles en tout point du volume de travail. L'espace de travail (reachable workspace), également appelé espace de travail maximal, est le volume de l'espace que le robot peut atteindre via au moins une orientation de l'organe terminal. L'espace de travail est le volume de l'espace que le robot peut atteindre avec toutes les orientations possibles de l'organe terminal. Cet espace de travail est un sous-ensemble de l'espace de travail maximal.

- Le positionnement absolu, correspondant à l'erreur entre un point souhaité (réel) – défini par une position et une orientation dans l'espace cartésien – et le point atteint et calculé via le modèle géométrique inverse du robot. Cette erreur est due au modèle utilisé, à la quantification de la mesure de position, à la flexibilité du système mécanique. En général, l'erreur de positionnement absolu, également appelée précision, est de l'ordre de 1 mm.

- La répétabilité, ce paramètre caractérise la capacité que le robot à retourner vers un point (position, orientation) donné. La répétabilité correspond à l'erreur maximum de

positionnement sur un point prédéfini dans le cas de trajectoires répétitives. En général, la répétabilité est de l'ordre de 0,1 mm.

- La vitesse de déplacement (vitesse maximum en élongation maximum), accélération.
- La masse du robot.
- Le coût du robot.
- La maintenance.

### **I.7 Conclusion :**

La structure mécanique d'un robot manipulateur est composée de plusieurs corps connectés les uns aux autres par des liaisons appelées articulations, à un seul degré de liberté de translation ou de rotation, cette structure mécanique peut constituer une chaîne cinématique continue ouverte simple, une chaîne arborescente ou une chaîne complexe.

Chapitre II

*Modélisation géométrique et  
cinématique des robots manipulateurs  
sérialés*

## II.1 Introduction :

La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :

- les modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire (dans lequel est définie la configuration du robot). On distingue :

- les modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement.

- les modèles cinématiques direct et inverse qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement.

On présente dans ce chapitre quelques méthodes permettant d'établir ces modèles. On se limitera au cas des robots à structure ouverte simple.

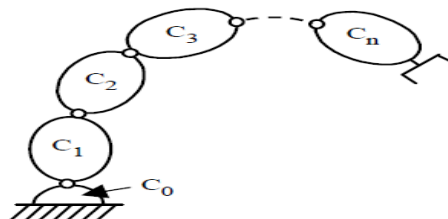
## II.2 Modélisation géométrique :

### II.2.1 Description géométrique:

La modélisation des robots de façon systématique et automatique exige une méthode adéquate pour la description de leur morphologie. Plusieurs méthodes et notations ont été proposées. La plus répandue est celle de Denavit-Hartenberg [11]. Dans les années 1950s, les messieurs Jacques Denavit and Richard Hartenberg ont eu l'excellente idée de proposer une méthode simple et systématique pour placer des référentiels sur chaque lien d'un mécanisme sériel qui facilite énormément le calcul des matrices de transformation homogène [12].

### II.2.2 Méthode de Denavit-Hartenberg :

Une structure ouverte simple est composée de  $n+1$  corps notés  $C_0, \dots, C_n$  et de  $n$  articulations. Le corps  $C_0$  désigne la base du robot et le corps  $C_n$  le corps qui porte l'organe terminal. L'articulation  $I$  connecte le corps  $C_i$  au corps  $C_{i-1}$  :



**Figure II.1** Robot à structure ouverte simple.

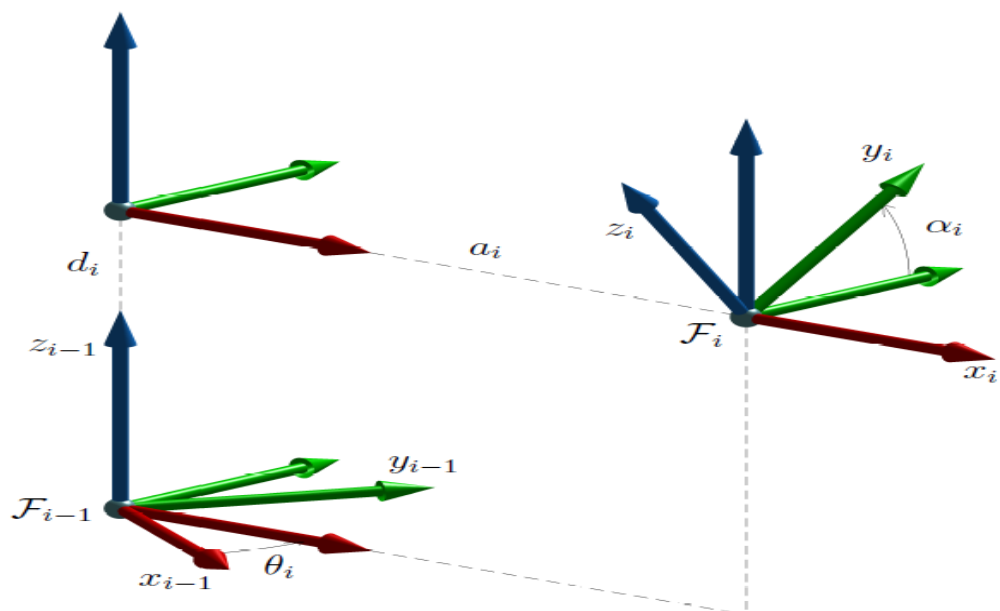
La méthode de description est fondée sur les règles et conventions suivantes :

- les corps sont supposés parfaitement rigides. Ils sont connectés par des articulations considérées comme idéales (pas de jeu mécanique, pas d'élasticité), soit rotoïdes, soit prismatiques ;
- le repère  $F_i$  est lié au corps  $C_i$  ;
- l'axe  $Z_{i-1}$  est porté par l'axe de l'articulation  $i$  ;
- l'axe  $X_i$  est porté par la perpendiculaire commune aux axes  $Z_i$  et  $Z_{i+1}$ . Si les axes  $Z_i$  et  $Z_{i+1}$  sont parallèles ou colinéaires, le choix de  $X_i$  n'est pas unique : des considérations de symétrie ou de simplicité permettent alors un choix rationnel.

### ▪ Les paramètres de Denavit-Hartenberg :

Le passage du repère  $F_{i-1}$  au repère  $F_i$  s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques suivants (figure II.2) :

- $\alpha_i$  : angle entre les axes  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$  correspondant à une rotation autour de  $X_i$  ;
- $d_i$  : Distance entre  $X_{i-1}$  et  $X_i$  le long de  $Z_i$  ;
- $\theta_i$  : Angle entre les axes  $X_{i-1}$  et  $X_i$  correspondant à une rotation autour de  $Z_i$  ;
- $a_i$  : Distance entre  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$  le long de  $X_i$  .



**Figure II.2** Paramètres géométriques dans le cas d'une structure ouverte simple. [12]

La variable articulaire  $q_j$  associée à la  $i^{ème}$  articulation est soit  $\theta_i$ , soit  $r_i$ , selon que cette articulation est de type rotoïde ou prismatique, ce qui se traduit par la relation [11] :

$$q_i = \bar{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i r_i \tag{II.1}$$

Avec :

- $\sigma_i = 0$  si l'articulation  $j$  est rotoïde ;
- $\sigma_i = 1$  si l'articulation  $j$  est prismatique ;
- $\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$

La matrice de transformation définissant le repère  $F_i$  dans le repère  $F_{i-1}$  est donnée par (figure II.2) :

$$T_i^{i-1} = Rot(z, \theta_i) Trans(0, 0, d_i) Rot(x, \alpha_i) Trans(a_i, 0, 0) \tag{II.2}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i C \theta_i & -\cos \theta_i S \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II.3}$$

### II.2.3 Modèle géométrique direct :

▪ **Définition :**

Le modèle géométrique direct (MGD) est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, c'est-à-dire les coordonnées opérationnelles du robot, en fonction de ses coordonnées articulaires. Dans le cas d'une chaîne ouverte simple, il peut être représenté par la matrice de transformation  $T_n^0$  [11] :

$$T_n^0 = T_1^0(q_1) T_2^1(q_2) \dots T_n^{n-1}(q_n) \tag{II.4}$$

Le modèle géométrique direct du robot peut aussi être représenté par la relation :

$$X = F(q) \tag{II.5}$$

$q$  : Étant le vecteur des variables articulaires tel que:

$$q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \tag{II.6}$$

Les coordonnées opérationnelles sont définies par :

$$X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_m]^T \quad (\text{II.7})$$

Plusieurs possibilités existent pour la définition du vecteur  $X$ . Par exemple, avec les éléments de la matrice  $T_n^0$ :

$$X = [n_x \ n_y \ n_z \ o_x \ o_y \ o_z \ a_x \ a_y \ a_z \ p_x \ p_y \ p_z]^T \quad (\text{II.8})$$

Enfin, si nous avons un référentiel outil, et un référentiel atelier, la pose du premier par rapport au dernier est définie par l'équation suivante:

$$T_{outil}^{atelier} = T_0^{atelier} T_n^0 T_{outil}^n \quad (\text{II.9})$$

#### II.2.4 Modèle géométrique inverse :

On a vu que le modèle géométrique direct d'un robot permettait de calculer les coordonnées opérationnelles donnant la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires. Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal. Lorsqu'elle existe, la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles (il y a rarement unicité de solution) constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse. On peut distinguer trois méthodes de calcul du MGI [11] :

- la méthode de Paul qui traite séparément chaque cas particulier et convient pour la plupart des robots industriels,
- la méthode de Pieper qui permet de résoudre le problème pour les robots à six degrés de liberté possédant trois articulations rotoïdes d'axes concourants ou trois articulations prismatiques,
- la méthode générale de Raghavan et Roth, donnant la solution générale des robots à six articulations à partir d'un polynôme de degré au plus égal à 16.

Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une forme explicite du modèle géométrique inverse, on peut calculer une solution particulière par des procédures numériques, Whitney, Ournier, Featherstone, Wolovich, Goldenberg, Sciavicco. On ne présente dans ce paragraphe que la méthode de Paul [11].

Dans le calcul du MGI, trois cas se présentent :

- a) ( $n < 6$ ) absence de solution lorsque la situation désirée est en dehors de la zone accessible du robot. Celle-ci est limitée par le nombre de degrés de liberté, les débattements articulaires et la dimension des segments ;
- b) ( $n > 6$ ) infinité de solution lorsque :
  - le robot est redondant vis-à-vis de la tâche ;

- le robot se trouve dans certaines configurations singulières ;

c) ( $n = 6$ ) solutions en nombre fini, exprimées par un ensemble de vecteurs  $\{q^1, \dots, q^r\}$ . On dit qu'un robot manipulateur est résoluble lorsqu'il est possible de calculer toutes les configurations permettant d'atteindre une situation donnée.

Aujourd'hui, tous les manipulateurs série ayant jusqu'à six degrés de liberté et qui ne sont pas redondants peuvent être considérés comme résolubles. Le nombre de solutions dépend de l'architecture du robot manipulateur [11].

### II.2.5 Principe de la méthode de Paul :

Considérons un robot manipulateur dont la matrice de transformation homogène a pour expression :

$$T_n^0 = T_1^0(q_1)T_2^1(q_2) \dots T_n^{n-1}(q_n) \quad (\text{II.10})$$

Soit  $U_0$  la situation désirée telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$U_0 = T_1^0(q_1)T_2^1(q_2) \dots T_n^{n-1}(q_n) \quad (\text{II.12})$$

Pour trouver les solutions de l'équation (II.12), Paul a proposé une méthode qui consiste à pré multiplier successivement les deux membres de l'équation (II.12) par les matrices  $T_{i-1}^i$  pour  $i$  variant de 1 à  $n-1$ , opérations qui permettent d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on recherche.

$${}^1T_0(q_1)U_0 = {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (\text{II.13})$$

Le terme de droite est fonction des variables  $q_2 \dots q_n$ . Le terme de gauche n'est fonction que des éléments de  $U_0$  et de la variable  $q_0$  ;

- identification terme à terme des deux membres de l'équation (II.12). On se ramène à un système d'une ou de deux équations fonction de  $q_1$  uniquement, dont la structure appartient à un type particulier parmi une dizaine de types possibles ;

La succession des équations permettant le calcul de tous les  $q_i$  est la suivante :

$$U_i = T_n^i = T_{i-1}^i U_{i-1} \quad (\text{II.14})$$



### II.3 Modélisation cinématique :

#### II.3.1 Etude cinématique des chaînes cinématiques simples ouvertes :

L'étude cinématique des chaînes cinématiques simples ouvertes constitue dans la recherche du torseur cinématique équivalent  $\{\tau_c^{eq}(n/0)\}$  exprimée dans le référentiel  $F(0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ . Ce torseur définit le mouvement général de l'organe terminal en fonction des mouvements élémentaires  $\{\tau_{ci/i-1}^{eq}\}$  autorisés par les liaisons intermédiaires  $L_{i-1,i}$  ( $i=1, \dots, n$ ) [13].

Pour effectuer l'étude cinématique on applique la loi de la composition des mouvements :

$$\{\tau_c(n/n-1)\} + \{\tau_c(n-1/n-2)\} \dots \dots + \{\tau_c(2/1)\} + \{\tau_c(1/0)\} = \{\tau_c^{eq}(n/0)\} \quad (\text{II.15})$$

$$\sum_{i=1}^n \{\tau_c(i/i-1)\} = \{\tau_c^{eq}(n/0)\} \quad (\text{II.16})$$

#### Remarque :

Il est très important de noter que l'écriture de l'équation (II.16) doit se faire dans le même point et le même repère, la résolution de l'équation (II.16) permet de trouver  $\{\tau_c^{eq}(n/0)\}$  et par la suite déduire la nature de la liaison  $L_{eq}$  de  $(n/0)$  [13].

#### II.3.2 Modèle cinématique direct :

Le modèle cinématique direct d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires. Il est noté :

$$\dot{X} = J(q) \dot{q} \quad (\text{II.17})$$

où  $J(q)$  désigne la matrice jacobéenne de dimension  $(m \times n)$  du mécanisme, égale à  $\frac{\partial X}{\partial q}$  et fonction de la configuration articulaire  $q$ . La matrice jacobienne intervient dans le calcul du modèle différentiel direct qui donne les variations élémentaires  $dX$  des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires  $dq$ , soit :

$$dX = J(q) dq \quad (\text{II.18})$$

L'intérêt de la matrice jacobienne est multiple [11]:

– elle est à la base du modèle différentiel inverse, permettant de calculer une solution locale des variables articulaires  $q$  connaissant les coordonnées opérationnelles  $X$  ;

- en statique, on utilise le jacobien pour établir la relation liant les efforts exercés par l'organe terminal sur l'environnement aux forces et couples des actionneurs ;
- elle facilite le calcul des singularités et de la dimension de l'espace opérationnel accessible du robot.

▪ **Calcul de la matrice jacobienne par dérivation du MGD :**

Le calcul de la matrice jacobienne peut se faire en dérivant le MGD,  $X = F(q)$  à partir de la relation suivante :

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i(q)}{\partial q_j} \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n \quad (\text{II.19})$$

Où  $J_{ij}$  l'élément  $(i, j)$  de la matrice Jacobienne  $J$ .

▪ **Matrice jacobienne cinématique :**

On peut obtenir la matrice jacobienne par une méthode de calcul direct, fondée sur la relation entre les vecteurs des vitesses de translation et de rotation  $V_n$  et  $\omega_n$  du repère  $F_n$ , et les vitesses articulaires  $\dot{q}$  :

$$\begin{bmatrix} V_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = J_n \dot{q} \quad (\text{II.20})$$

Cette équation peut être exprimée comme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{l,1} & j_{l,2} & \dots & j_{l,n} \\ j_{A,1} & j_{A,2} & \dots & j_{A,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Où  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$  sont les dérivés par rapport au temps des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  de l'origine du référentiel de l'outil par rapport au référentiel de l'atelier, et  $w_x$ ,  $w_y$  et  $w_z$  ne sont pas les dérivées d'une représentation quelconque de l'orientation.

Les vecteurs  $j_{L,i}$  et  $j_{A,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sont  $3 \times 1$ . Le vecteur  $j_{L,i}$  multiplié à la vitesse articulaire  $\dot{q}$ , représente la contribution de l'articulation  $i$  à la vitesse linéaire de l'outil. De même, le vecteur  $j_{A,i}$ , multiplié à la vitesse articulaire  $\dot{q}$  représente la contribution de l'articulation  $i$  à la vitesse angulaire de l'outil. C'est grâce à ces deux observations que nous pourrions trouver des formules pour ces vecteurs. Cependant, nous devons considérer les articulations rotoïde et prismatiques séparément.

### ▪ Articulation prismatique :

Nous cherchons d'abord la contribution de l'articulation prismatique  $i$  à la vitesse angulaire de l'outil, soit  $j_{A,i}d_i$  afin de trouver l'expression générique pour  $j_{A,i}$ . Si toutes les articulations restent immobiles, à l'exception de l'articulation prismatique  $i-1$ , l'orientation de l'outil du robot restera la même. En autres mots, la contribution de l'articulation prismatique  $i$  à la vitesse angulaire de l'outil est nulle.

$$j_{A,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

De même, si toutes les articulations restent immobiles, sauf l'articulation prismatique  $i$ , l'outil du robot se déplacera dans la direction de l'articulation prismatique  $i$ , soit le long de l'axe  $z_{i-1}$  du référentiel  $F_{i-1}$ , et avec la même vitesse, soit  $d_i$ . En autre mots, nous avons :

$$j_{L,i} = e_{i-1}^{atelier} \quad (\text{II.23})$$

Où  $e_{i-1}^{atelier}$  est le vecteur unitaire le long de l'axe  $z_{i-1}$ , exprimé dans le référentiel  $F_{atelier}$ .

$$e_{i-1}^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T_{i-1}^{atelier} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

### ▪ Articulation rotoïde :

Nous cherchons maintenant la contribution de l'articulation rotoïde  $i$  à la vitesse angulaire de l'outil, soit  $j_{A,i}\theta_i$ , afin de trouver l'expression pour  $j_{A,i}$ . Si toutes les articulations restent immobiles, sauf l'articulation rotoïde  $i$ , l'outil du robot tournera autour de l'axe de cette articulation, soit l'axe  $z_{i-1}$ . Ainsi, le vecteur de la vitesse angulaire de l'outil sera  $e_{i-1}\dot{\theta}_i$  et nous aurons :

$$j_{A,i} = e_{i-1}^{atelier} \quad (\text{II.24})$$

De même, si toutes les articulations du robot restent immobiles, à l'exception de l'articulation rotoïde  $i$ , l'origine du référentiel de l'outil suivra le même mouvement circulaire qu'un pendule, dans un plan normal à l'axe  $z_{i-1}$ . Ainsi, le vecteur de la vitesse linéaire sera dans le même plan, tangent à la trajectoire circulaire et défini par l'expression  $e_{i-1}^{atelier} \times p_{i-1,outil}^{atelier} \dot{\theta}_i$ , ou  $p_{i-1,outil}^{atelier}$  est le vecteur qui relie l'origine du référentiel  $F_{i-1}$  avec l'origine du référentiel  $F_{outil}$ . Ainsi, nous avons :

$$J_{L,i} = e_{i-1}^{atelier} \times P_{i-1,outil}^{atelier} \quad (II.25)$$

Il ne nous reste que de trouver une formule pour le vecteur  $P_{i-1,outil}^{atelier}$ . Ce vecteur peut être obtenu en soustrayant le vecteur de position de l'origine du référentiel  $F_{i-1}$  du vecteur de position de l'origine du référentiel  $F_{outil}$ . Le premier se trouve dans la quatrième colonne de la matrice  $T_{i-1}^{atelier}$ , alors que le deuxième est dans la quatrième colonne de la matrice  $T_{outil}^{atelier}$ . Ainsi, nous avons l'équation suivante :

$$P_{i-1,outil}^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (T_{outil}^{atelier} - T_{i-1}^{atelier}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (II.26)$$

#### ▪ Dimension de l'espace opérationnel d'un robot :

Pour une configuration articulaire  $q$  donnée, le rang  $r$  de la matrice jacobienne  ${}^i J_n$ , notée  $J$  dans la suite pour simplifier les notations, correspond au nombre de degrés de liberté du repère associé à l'organe terminal. Il définit la dimension de l'espace opérationnel accessible dans cette configuration. On appelle nombre de degrés de liberté  $M$  de l'espace opérationnel d'un robot, le rang maximal  $r_{max}$  que prend la matrice jacobienne dans toutes les configurations possibles. Deux cas sont à examiner [11] :

- si  $M$  est égal au nombre de degrés de liberté  $N$  du robot (égal à  $n$  dans le cas des robots en chaîne simple ou à structure arborescente), le robot est non redondant : il possède juste le nombre d'articulations lui permettant de donner le nombre  $M$  de degrés de liberté à son organe terminal ;
- si  $N > M$ , le robot est redondant d'ordre  $(N-M)$ . Il dispose de plus d'articulations qu'il n'en faut pour donner le nombre  $M$  de degrés de liberté à son organe terminal.

#### II.4 Conclusion :

Pour modéliser un robot sériel à  $n$  articulations, il faut représenter le comportement de ce robot sous la forme d'un modèle, une telle démarche s'appelle la modélisation, d'une manière générale, on recherche toujours le modèle le plus simple qui permet d'expliquer, de manière satisfaisante, le comportement du processus dans son domaine d'application; les modèles de transformation entre l'espace opérationnel et l'espace articulaire. On distingue :

- Les modèles géométriques qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction de la configuration du mécanisme.

- Les modèles cinématiques permettent de contrôler la vitesse de déplacement du robot afin de connaître la durée d'exécution d'une tâche.

Pour développer ces deux modèles il faut suivre une méthode systématique. Il s'agit de la méthode Denavit-Hartenberg qui reste toujours la méthode de long temps la plus utilisée en robotique sérielle.

Chapitre III

# *Application et étude de cas*

### III.1 Introduction :

Partant des fondements théoriques abordés dans le deuxième chapitre, qui consiste à la modélisation en robotique, la modélisation des robots qui comportent le modèle géométrique et cinématique pour décrire le comportement du robot dans une évolution connue.

Dans ce chapitre nous allons présenter la modélisation géométrique et cinématique d'un robot sériel à cinq articulations rotoïde, et plus précisément du robot de la compagnie DENSO Robotics.

### III.2 Description du robot :

Il s'agit d'un robot sériel à cinq articulations rotoïdes, et plus précisément du robot de la compagnie DENSO Robotics, destinés au transfert de matériel (Figure III.1).

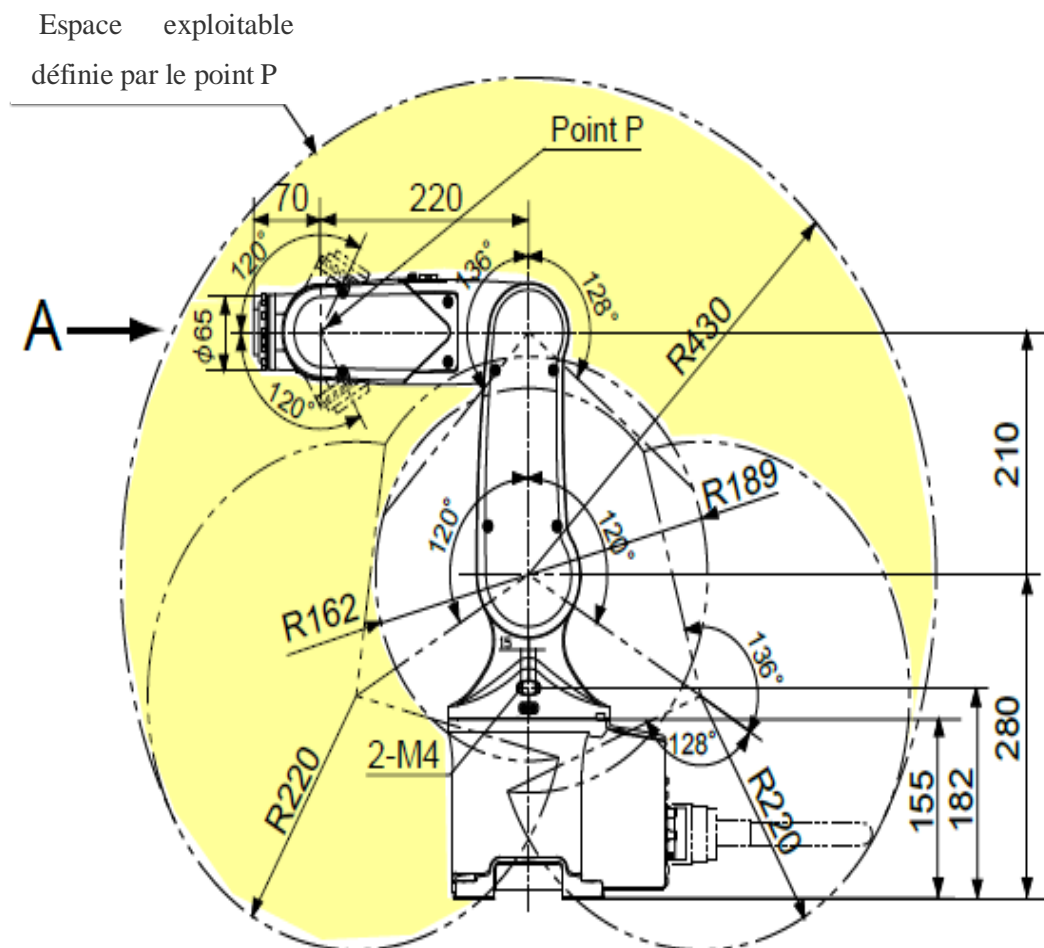
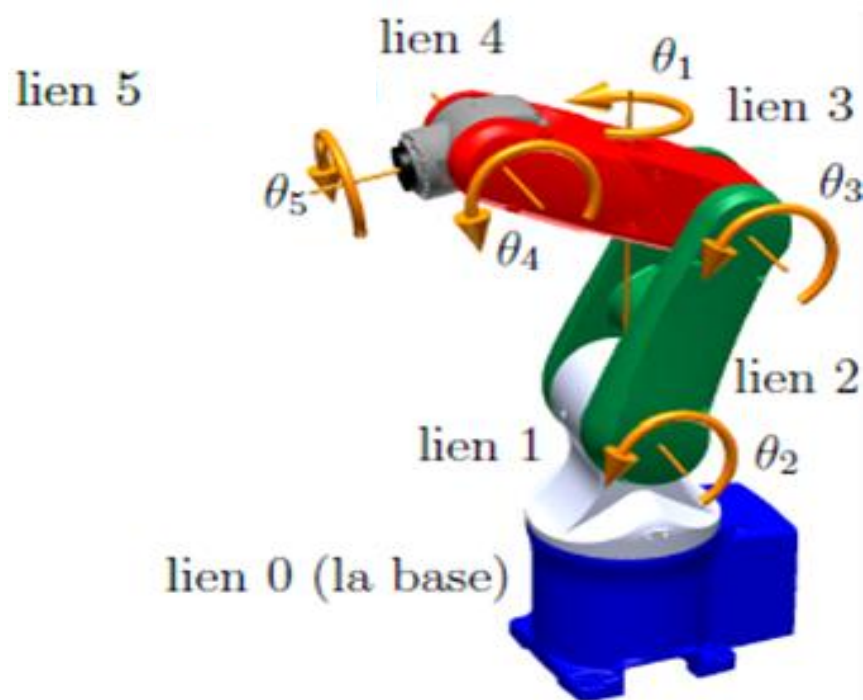


Figure III.1 Les dimensions du robot.

**Tableau III. 1:** Caractéristique du robot

Objet	Spécifications
Longueur du bras L.	210 (bras 1) + 220 (bras 2) = 430 mm
Zone de mouvement maximal $R_{\max}$	$R_{\max} = 500mm$
Gamme de mouvement $\theta_i$	$\theta_1 = \pm 160^\circ$ , $\theta_2 = \pm 120^\circ$ , $\theta_3 = +136^\circ, -128^\circ$ $\theta_4 = \pm 120^\circ$ , $\theta_5 = \pm 360^\circ$
Charge utile maximal m.	2,5 Kg
Vitesse maximal $V_{\max}$	3900 mm/s

**Figure 12.2** Sens positives de rotations.

### III.3 Modélisation du bras manipulateur :

La réalisation d'un simulateur permettant de décrire l'état et le comportement global d'une structure mécanique articulée comme tous autres systèmes. Nécessite de combiner plusieurs concepts mathématique.

Le problème principale dans la modélisation est de trouver une relation entre les consignes données dans l'espace opérationnel de la tâche et des postures des éléments du robot dans l'espace articulaire : cette relation permet de fournir une interface masquant.

Vu la complexité et la non linéarité des problèmes, un modèle complet du comportement réel d'un robot n'est pas réalisable, l'étude cinématique et dynamique des robots se fait



généralement sur des modèles simplifiés. Obtenus en introduisant des hypothèses simplificatrices qui permettent de résoudre les équations qui représentent ces modèles.

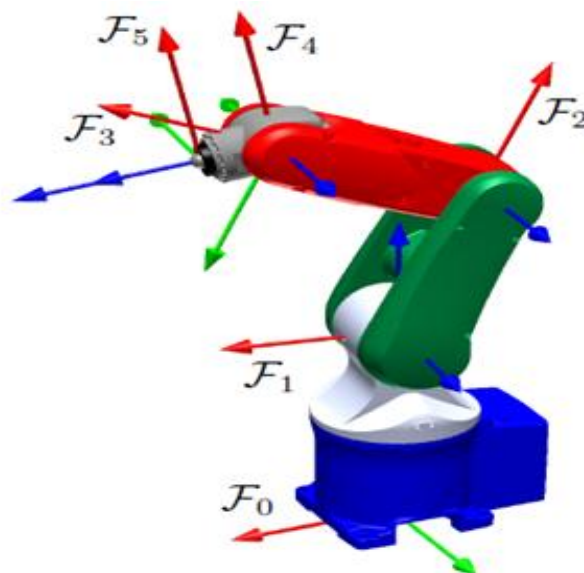
Dans ce chapitre nous allons décrire la théorie sous-jacente aux problèmes de modélisation des robots tout en posant les hypothèses suivantes :

- chaque corps composant le robot est assimilé à un solide indéformable.
- chaque articulation ne possède qu'un seul degré de liberté.

### III.3.1 Calcul du modèle géométrique direct :

Ayant les variables articulaires d'un robot, nous pouvons déterminer la position et l'orientation de chaque lien du robot, grâce à un ensemble donné de caractéristiques géométriques du robot. Nous attachons les coordonnées de chaque lien et déterminons sa configuration dans les liens voisins suivre la méthode de mouvement rigide. Une telle analyse s'appelle la géométrie directe.

#### ▪ Les paramètres de (D-H) du robot :



**Figure 13** Une des solutions pour les référentiels DH.

Tel que :  $F_i(x_i, y_i, z_i)$  est le repère liés à chaque lien.

i	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1$	$d_1$	0 mm	$-90^\circ$
2	$\theta_2 - 90$	0 mm	$a_2$	$0^\circ$
3	$\theta_3$	0 mm	$a_3$	$0^\circ$
4	$\theta_4 - 90$	0 mm	0 mm	$-90^\circ$
5	$\theta_5$	$d_5$	0 mm	$0^\circ$

Tableau III.2 : DH paramètres du robot.

▪ **Calcul des matrices de transformation homogène :**

$$T_1^0 = T_{rot,z}(\theta_1)T_{trans}(0,0,d_1)T_{trans}(0,0,0)T_{rot,x}(-90^\circ)$$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.1)$$

$$T_2^1 = T_{rot,z}(\theta_2 - 90)T_{trans}(0,0,0)T_{trans}(a_2,0,0)T_{rot,x}(0^\circ)$$

$$= \begin{bmatrix} s\theta_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ -c\theta_2 & s_2 & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.2)$$

$$T_3^2 = T_{rot,z}(\theta_3)T_{trans}(0,0,0)T_{trans}(a_3,0,0)T_{rot,x}(0^\circ)$$

$$= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.3)$$

$$T_4^3 = T_{rot,z}(\theta_4 - 90)T_{trans}(0,0,0)T_{trans}(0,0,0)T_{rot,x}(-90^\circ)$$

$$= \begin{bmatrix} s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ -c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.4)$$

$$T_5^4 = T_{rot,z}(\theta_5)T_{trans}(0,0,d_5)T_{trans}(0,0,0)T_{rot,x}(0^\circ)$$

$$= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.5}$$

Don le modèle géométrique direct est décrit par :

$$T_5^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4$$

$$= \begin{bmatrix} -c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5 & c_1 c_{234} s_5 + s_1 c_5 & c_1 s_{234} & c_1 (d_5 s_{234} + a_3 s_{23} + a_2 s_2) \\ -s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5 & s_1 c_{234} s_5 - c_1 c_5 & s_1 s_{234} & s_1 (d_5 s_{234} + a_3 s_{23} + a_2 s_2) \\ s_{234} c_5 & -s_{234} s_5 & c_{234} & d_1 + d_5 c_{234} + a_3 c_{23} + a_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.6}$$

Sachant que :

$$\cos \theta_1 = c_1$$

$$\sin \theta_1 = s_1$$

$$\cos \theta_2 = c_2$$

$$\sin \theta_5 = s_5$$

$$\cos(\theta_2 + \theta_3) = c_{23}$$

$$\cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = c_{234}$$

$$\sin(\theta_2 + \theta_3) = s_{23}$$

$$\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = s_{234}$$

### III.3.2 Le modèle géométrique inverse :

Pour résoudre la géométrie inverse d'un robot à  $n$  articulation, il faut généralement résoudre sa géométrie directe et poser l'équation suivante :

$$T_n^0 = T_1^0(q_1) T_2^1(q_2) \dots T_n^{n-1}(q_n)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme suivante :

$$T_n^0 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.7}$$

#### ▪ Détermination des variables articulaires du robot :

Pour résoudre la cinématique inverse du robot, il faut résoudre l'équation matricielle ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} -c_1c_{234}c_5 + s_1s_5 & c_1c_{234}s_5 + s_1c_5 & c_1s_{234} & c_1(d_5s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2) \\ -s_1c_{234}c_5 - c_1s_5 & s_1c_{234}s_5 - c_1c_5 & s_1s_{234} & s_1(d_5s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2) \\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & c_{234} & d_1 + d_5c_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

▪ **Calcul de  $\theta_1$  :**

On pré-multiplier les deux cotées de l'équation matricielle (III.8) par  $(T_n^0)^{-1}$ . Cette opération va nous débarrasser des expressions en  $\theta_1$  dans la matrice à gauche.

$$\begin{bmatrix} -c_{234}c_5 & c_{234}s_5 & s_{234} & d_5s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2 \\ -s_{234}c_5 & s_{234}s_5 & -c_{234} & -d_5c_{234} - a_3c_{23} - a_2c_2 \\ s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x c_1 + n_y s_1 & o_x c_1 + o_y s_1 & a_x c_1 + a_y s_1 & p_x c_1 + p_y s_1 \\ -n_z & -o_z & -a_z & d_1 - p_z \\ -n_x s_1 + n_y c_1 & -o_x s_1 + o_y c_1 & -a_x s_1 + a_y c_1 & -p_x s_1 + p_y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

On tire de l'équation matricielle (III.9) les deux équations suivantes :

$$-a_x \sin \theta_1 + a_y \cos \theta_1 = 0. \quad (\text{III.10})$$

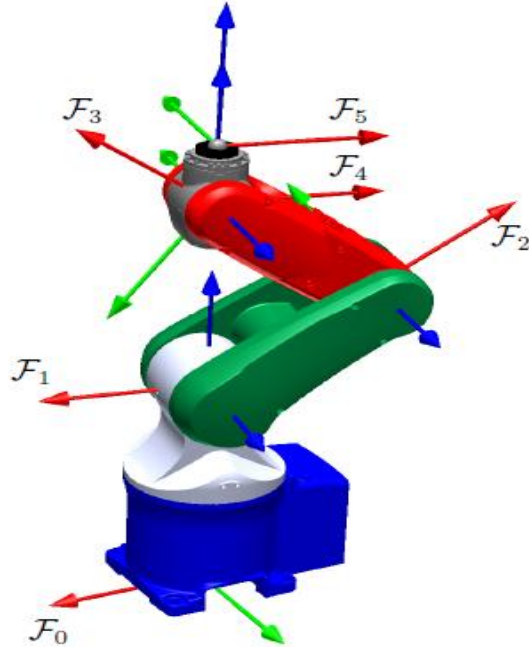
$$-p_x \sin \theta_1 + p_y \cos \theta_1 = 0. \quad (\text{III.11})$$

On doit réaliser que le vecteur  $\begin{bmatrix} a_x & a_y \end{bmatrix}^T$  est la projection du vecteur unitaire le long de l'axe  $Z_5$  du référentiel  $F_5$  sur le plan  $x_0y_0$  du référentiel  $F_0$ . De façon similaire, le vecteur  $\begin{bmatrix} p_x & p_y \end{bmatrix}^T$  est la projection du vecteur qui relie l'origine du référentiel  $F_0$  avec l'origine du référentiel  $F_5$  sur le plan  $x_0y_0$  du référentiel  $F_0$ . Il est facile de voir que, en général, ces deux projections sont colinéaires (c'est à dire que le ratio  $a_x : a_y$  est égale au ratio  $p_x : p_y$ ). Ceci veut dire que les deux équations ci-dessus sont dépendantes et que nous ne pouvons pas les considérer simultanément.

Si l'axe  $Z_5$  pointe vers le haut (c'est à dire que  $a_x = a_y = 0$ ), Notre équation aura la forme  $0=0$ . De façon similaire, si l'origine du référentiel  $F_5$  se trouve sur l'axe 1 du robot,  $p_x = p_y = 0$  et l'équation (III.11) dégénère (aura la forme  $0 = 0$ ). Voici pourquoi, la solution pour la variable articulaire devra prendre en compte les deux équations :

$$\theta_1 = \begin{cases} a \tan 2(a_y, a_x) \text{ et } a \tan 2(-a_y, -a_x), & \text{Si } a_x^2 + a_y^2 \neq 0 \\ a \tan 2(p_y, p_x) \text{ et } a \tan 2(-p_y, -p_x), & \text{Si } a_x^2 + a_y^2 = 0 \text{ et } p_x^2 + p_y^2 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

D'autre part, si  $a_x = a_y = p_x = p_y = 0$ , c'est à dire si l'axe 5 du robot coïncide avec l'axe 1, voire (la figure III.4).



**Figure 14** Singularité d'épaule.

Ce type de configuration s'appelle une singularité d'épaule. Dans une telle configuration, nous pouvons varier  $\theta_1$  et  $\theta_5$  avec la même vitesse mais en sens inverse, sans que la pose de la bride (du référentiel  $F_5$ ) change par rapport à la base du robot (référentiel  $F_0$ ).

Ainsi, la solution complète pour  $\theta_1$  sera :

$$\theta_1 = \begin{cases} a \tan 2(a_y, a_x) \text{ et } a \tan 2(-a_y, -a_x), & \text{Si } a_x^2 + a_y^2 \neq 0 \\ a \tan 2(p_y, p_x) \text{ et } a \tan 2(-p_y, -p_x), & \text{Si } a_x^2 + a_y^2 = 0 \text{ et } p_x^2 + p_y^2 \neq 0 \\ \text{arbitraire} & , \text{ Si } a_x^2 + a_y^2 = 0 \text{ et } p_x^2 + p_y^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

#### ▪ Calcul de $\theta_5$ :

Une fois les valeurs de  $\theta_1$  obtenues, nous pouvons maintenant trouver  $\theta_5$  à partir des deux équations suivantes tirées de l'équation matricielle (III.9) :

$$-\sin \theta_5 = -n_x \sin \theta_1 + n_y \cos \theta_1 \quad (\text{III.14})$$

$$-\cos \theta_5 = -o_x \sin \theta_1 + o_y \cos \theta_1 \quad (\text{III.15})$$

Ainsi pour chaque solution de  $\theta_1$ , nous pouvons trouver une seule solution pour  $\theta_5$  :

$$\theta_5 = a \tan 2(n_x \sin \theta_1 - n_y \cos \theta_1, o_x \sin \theta_1 - o_y \cos \theta_1) \quad (\text{III.16})$$

▪ **Calcul de  $\theta_{234}$  :**

De façon similaire, nous pouvons trouver  $\theta_{234}$  ( $\theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ ) à partir des deux équations suivantes tirées de l'équation matricielle (III.9) :

$$\sin \theta_{234} = a_x \cos \theta_1 + a_y \sin \theta_1 \quad (\text{III.17})$$

$$-\cos \theta_{234} = -a_z \quad (\text{III.18})$$

Ainsi pour chaque solution de  $\theta_1$ , nous pouvons trouver une seule solution pour  $\theta_{234}$  :

$$\theta_{234} = a \tan 2(a_x \cos \theta_1 + a_y \sin \theta_1, a_z) \quad (\text{III.19})$$

▪ **Calcul de  $\theta_3$  :**

Pour trouver  $\theta_{23}$  et  $\theta_3$  Nous allons post-multiplier les deux cotés de l'équation matricielle (III.9) par la matrice  $(T_5^4)^{-1}$ , pour nous débarrasser de  $\theta_5$  du coté gauche :

$$\begin{bmatrix} -c_{234} & 0 & s_{234} & a_3 s_{23} + a_2 s_2 \\ -s_{234} & 0 & -c_{234} & -a_3 c_{23} - a_2 c_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 s_5 + l_1 c_5 & l_1 s_5 + l_2 c_5 & a_y s_1 + a_x c_1 & -d_5 a_x c_1 - d_5 a_y s_1 + p_x c_1 + p_y s_1 \\ o_2 s_5 - n_2 c_5 & -n_2 s_5 - o_2 c_5 & -a_z & d_1 + d_5 a_z - p_z \\ l_3 s_5 + l_4 c_5 & l_4 s_5 - l_3 c_5 & -a_x s_1 + a_y c_1 & d_5 a_x s_1 - d_5 a_y c_1 + p_x s_1 + p_y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Où :  $l_1 = n_y s_1 + n_x c_1$ ,  $l_2 = o_y s_1 + o_x c_1$ ,  $l_3 = o_x s_1 - o_y c_1$  et  $l_4 = -n_x s_1 + n_y c_1$

Pour obtenir une équation en  $\theta_3$  seulement, nous allons mettre au carré les composantes en position de l'équation matricielle (III.20) et prendre leur somme :

$$(a_3 s_{23} + a_2 s_2)^2 + (a_3 c_{23} - a_2 c_2)^2 + 0^2 = (-d_5 a_x c_1 - d_5 a_y s_1 + p_x c_1 + p_y s_1)^2 + (d_1 + d_5 a_z - p_z)^2 + (d_5 a_x s_1 - d_5 a_y c_1 - p_x s_1 + p_y c_1)^2. \quad (\text{III.21})$$

$$a_3^2 s_{23}^2 + a_2^2 s_2^2 + 2a_3 a_2 s_{23} s_2 + a_3^2 c_{23}^2 + a_2^2 c_2^2 - 2a_3 a_2 c_{23} c_2 =$$

$$d_5^2 a_x^2 + d_5^2 a_y^2 + d_5^2 a_z^2 + d_1^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 2d_5 a_x p_x - 2d_5 a_y p_y + 2d_5 d_1 a_z - 2d_1 p_z - 2d_5 a_z p_z.$$

$$2a_3 a_2 (s_{23} s_2 - c_{23} c_2) = (p_x - d_5 a_x)^2 + (p_y - d_5 a_y)^2 + (p_z - d_1 - d_5 a_z)^2. \quad (\text{III.22})$$

Sachant que :

$$c_2^2 + s_2^2 = 1$$

$$c_{23}^2 + s_{23}^2 = 1$$

On utilise les relations trigonométriques :

$$s_{23} = s_2 c_3 + c_2 s_3$$

$$c_{23} = c_2 c_3 + s_2 s_3$$

On remplace ces équation dans (III.22) on obtient :

$$a_3^2 + a_2^2 + 2 a_2 a_3 \cos \theta_3 = (p_x - d_5 a_x)^2 + (p_y - d_5 a_y)^2 + (p_z - d_1 - d_5 a_z)^2$$

On peut tirer  $\theta_3$  :

$$\theta_3 = \pm \arccos \left( \frac{(p_x - d_5 a_x)^2 + (p_y - d_5 a_y)^2 + (p_z - d_1 - d_5 a_z)^2 - a_3^2 + a_2^2}{a_3^2 + a_2^2} \right) \quad (\text{III.23})$$

#### ▪ Calcul de $\theta_2$ :

Pour trouver  $\theta_2$ . On tire les deux équations suivantes de l'équation matricielle (III.20) :

$$a_3 \sin \theta_{23} + a_2 \sin \theta_2 = -d_5 a_x \cos \theta_1 - d_5 a_y \sin \theta_1 + p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1 \quad (\text{III.24})$$

$$a_3 \cos \theta_{23} - a_2 \cos \theta_2 = d_1 + d_5 a_z - p_z \quad (\text{III.25})$$

alors :

$$(a_3 \cos \theta_3 + a_2) \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3 \cos \theta_2 = -d_5 a_x \cos \theta_1 - d_5 a_y \sin \theta_1 + p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1$$

Donc :

$$a_3 \sin \theta_3 \sin \theta_2 - (a_3 \cos \theta_3 + a_2) \cos \theta_2 = d_1 + d_5 a_z - p_z$$

La solution de ce système de deux équations linéaires en  $\sin \theta_2$  et  $\cos \theta_2$  est :

$$\sin \theta_2 = \frac{a_3 r_2 \sin \theta_3 + a_3 r_1 \cos \theta_3 + a_2 r_1}{(a_3^2 + a_2^2) + (a_3^2 + a_2^2) \cos \theta_3} \quad (\text{III.26})$$

$$\cos \theta_2 = \frac{-a_3 r_2 \cos \theta_3 + a_3 r_1 \sin \theta_3 - a_2 r_1}{(a_3^2 + a_2^2) + (a_3^2 + a_2^2) \cos \theta_3} \quad (\text{III.27})$$

Ou :

$$r_1 = -d_5 a_x \cos \theta_1 - d_5 a_y \sin \theta_1 + p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1 \text{ et } r_2 = d_1 + d_5 a_z - p_z.$$

La solution pour  $\theta_2$  est :

$$\theta_2 = a \tan 2(a_3 r_2 \sin \theta_3 + a_3 r_1 \cos \theta_3 + a_1 r_1, -a_3 r_2 \cos \theta_3 + a_3 r_1 \sin \theta_3 - a_2 r_2). \quad (\text{III.28})$$

#### ▪ Calcul de $\theta_4$ :

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3. \quad (\text{III.29})$$

### III.4 Etude cinématique du robot :

Le modèle cinématique direct d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires.

#### III.4.1 Les matrices de changement de base :

$$[R_{0,1}] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

$$[R_{1,2}] = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

$$[R_{2,3}] = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

$$[R_{3,4}] = \begin{bmatrix} s_4 & 0 & c_4 \\ -c_4 & 0 & s_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

$$[R_{4,5}] = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

#### III.4.2 Les torseurs cinématique associé à chaque liaison :

$$\tau_c(1/0) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(1/0) & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} \quad (\text{III.35})$$

$$\tau_c(2/1) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(2/1) & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)} \quad (\text{III.36})$$

$$\tau_c(3/2) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(3/2) & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)} \quad (\text{III.37})$$

$$\tau_c(4/3) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(4/3) & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)} \quad (\text{III.38})$$



$$\tau_c(5/4) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z(5/4) \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_5, \bar{y}_5, \bar{z}_5)} \quad (III.39)$$

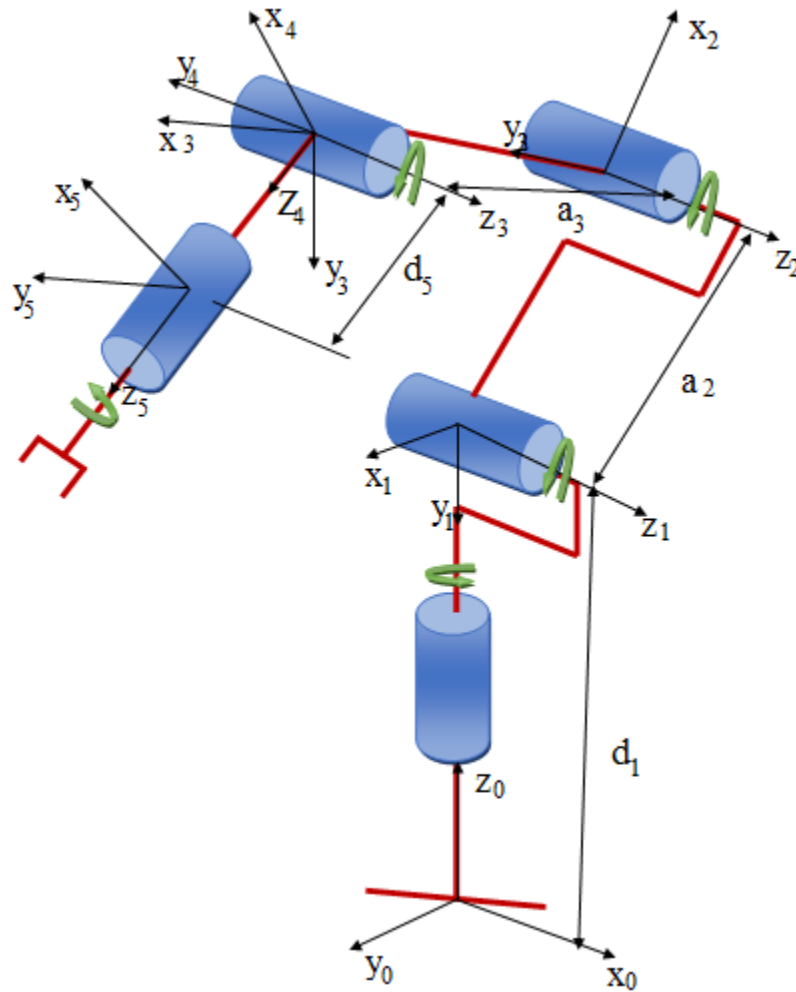


Figure III.5 : Schéma cinématique du robot.

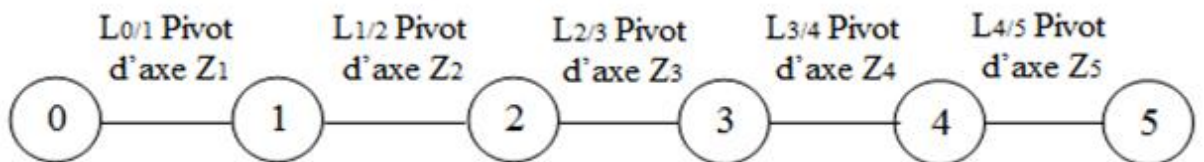


Figure III .6 : Graphe des liaisons du robot.

### III.4.3 Torseur cinématique équivalent

▪ **Etude de torseur cinématique  $\tau_c(1/0)$  :**

$$\tau_c(1/0) = \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(1/0) & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}_A$$

• Changement de centre dans la base  $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

$$\tau_c(1/0) = \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(1/0) & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}_o + \left. \begin{array}{c} \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{AO} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

$$\vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{AO} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & w_z(1/0) \\ 0 & 0 & -d_0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Donc :

$$\tau_c(1/0) = \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(1/0) & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}_o \quad (\text{III.40})$$

▪ **Etude de torseur cinématique  $\tau_c(2/1)$  :**

$$\tau_c(2/1) = \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(2/1) & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}_B$$

• Changement de centre dans la base  $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  :

$$\tau_c(2/1) = \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(2/1) & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}_A + \left. \begin{array}{c} \vec{\Omega}(2/1) \wedge \overline{BA} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

$$\vec{\Omega}(2/1) \wedge \overline{BA} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & w_z(2/1) \\ 0 & d_1 & 0 \end{vmatrix} = -d_1 w_z(2/1) \vec{x}_1$$

$$\tau_c(2/1) = \left. \begin{array}{cc} 0 & -d_1 w_z(2/1) \\ 0 & 0 \\ w_z(2/1) & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}_A$$

• Changement de base de  $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  à  $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

$$\begin{aligned} [\vec{\Omega}(2/1)]_0 &= [R_{0,1}] [\vec{\Omega}(2/1)]_1 \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z(2/1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -s_1 w_z(2/1) \\ c_1 w_z(2/1) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\vec{V}(2/1)]_0 &= [R_{0,1}] [\vec{V}(2/1)]_1 \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -d_1 w_z(2/1) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -d_1 c_1 w_z(2/1) \\ -d_1 s_1 w_z(2/1) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\tau_c(2/1) = \begin{Bmatrix} -s_1 w_z(2/1) & -d_1 c_1 w_z(2/1) \\ c_1 w_z(2/1) & -d_1 s_1 w_z(2/1) \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

- Changement de centre dans la base  $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

$$\tau_c(2/1) = \begin{Bmatrix} -s_1 w_z(2/1) & -d_1 c_1 w_z(2/1) \\ c_1 w_z(2/1) & -d_1 s_1 w_z(2/1) \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{AO} \Bigg\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{AO} &= \begin{vmatrix} -s_1 w_z(2/1) & c_1 w_z(2/1) & 0 \\ 0 & 0 & -d_0 \end{vmatrix} \\ &= -d_0 c_1 w_z(2/1) \vec{x}_0 + d_0 s_1 w_z(2/1) \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\tau_c(2/1) = \begin{Bmatrix} -s_1 w_z(2/1) & (-d_0 - d_1) c_1 w_z(2/1) \\ c_1 w_z(2/1) & (d_0 - d_1) s_1 w_z(2/1) \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \quad (\text{III.41})$$

- Etude de torseur cinématique  $\tau_c(3/2)$  :

$$\tau_c(3/2) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(3/2) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

- Changement de centre dans la base  $R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  :

$$\tau_c(3/2) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(3/2) & 0 \end{Bmatrix} + \vec{\Omega}(3/2) \wedge \overrightarrow{CB} \Bigg\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

$$\vec{\Omega}(3/2) \wedge \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & w_z(3/2) \\ -a_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_2 w_z(3/2) \vec{y}_2$$

$$\tau_c(3/2) = \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & a_2 w_z(3/2) \\ w_z(3/2) & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)}$$

- Changement de base de  $R_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$  à  $R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  :

$$\begin{aligned} [\bar{\Omega}(3/2)]_0 &= [R_{1,2}] [\bar{\Omega}(3/2)]_2 \\ &= \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ w_z(3/2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ w_z(3/2) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\bar{V}(3/2)]_0 &= [R_{1,2}] [\bar{V}(3/2)]_2 \\ &= \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ a_2 w_z(3/2) \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} a_2 c_2 w_z(3/2) \\ a_2 s_2 w_z(3/2) \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\tau_c(3/2) = \left. \begin{array}{cc} 0 & a_2 c_2 w_z(3/2) \\ 0 & a_2 s_2 w_z(3/2) \\ w_z(3/2) & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

- Changement de centre dans la base  $R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  :

$$\tau_c(3/2) = \left. \begin{array}{cc} 0 & a_2 c_2 w_z(3/2) \\ 0 & a_2 s_2 w_z(3/2) \\ w_z(3/2) & 0 \end{array} + \bar{\Omega}(3/2) \wedge \overline{BA} \right\}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

$$\bar{\Omega}(3/2) \wedge \overline{BA} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & w_z(3/2) \\ 0 & d_1 & 0 \end{vmatrix} = -d_1 w_z(3/2) \bar{x}_1$$

$$\tau_c(3/2) = \left. \begin{array}{cc} 0 & (a_2 c_2 - d_1) w_z(3/2) \\ 0 & a_2 s_2 w_z(3/2) \\ w_z(3/2) & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

- Changement de base de  $R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  à  $R_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  :

$$\begin{aligned} [\bar{\Omega}(3/2)]_0 &= [R_{1,0}] [\bar{\Omega}(3/2)]_1 \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ w_z(3/2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -s_1 w_z(3/2) \\ c_1 w_z(3/2) \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$[\bar{V}(3/2)]_0 = [R_{0,1}] [\bar{V}(3/2)]_2$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (a_2 c_2 - d_1) w_z(3/2) \\ a_2 s_2 w_z(3/2) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (a_2 c_2 - d_1) c_1 w_z(3/2) \\ (a_2 c_2 - d_1) s_1 w_z(3/2) \\ -a_2 s_2 w_z(3/2) \end{Bmatrix}$$

$$\tau_c(3/2) = \begin{Bmatrix} -s_1 w_z(3/2) & (a_2 c_2 - d_1) c_1 w_z(3/2) \\ c_1 w_z(3/2) & (a_2 c_2 - d_1) s_1 w_z(3/2) \\ 0 & -a_2 s_2 w_z(3/2) \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)}$$

- Changement de centre dans la base  $R_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$

$$\tau_c(3/2) = \begin{Bmatrix} -s_1 w_z(3/2) & (a_2 c_2 - d_1) c_1 w_z(3/2) \\ c_1 w_z(3/2) & (a_2 c_2 - d_1) s_1 w_z(3/2) \\ 0 & -a_2 s_2 w_z(3/2) \end{Bmatrix} + \left. \vec{\Omega}(3/2) \wedge \overline{AO} \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)}$$

$$\vec{\Omega}(3/2) \wedge \overline{AO} = \begin{vmatrix} -s_1 w_z(3/2) & c_1 w_z(3/2) & 0 \\ 0 & 0 & d_0 \end{vmatrix} = d_0 c_1 w_z(3/2) \bar{x}_0 + d_0 s_1 w_z(3/2) \bar{y}_0$$

$$\tau_c(3/2) = \begin{Bmatrix} -s_1 w_z(3/2) & [(a_2 c_2 - d_1 + d_0) c_1] w_z(3/2) \\ c_1 w_z(3/2) & [(a_2 c_2 - d_1 + d_0) s_1] w_z(3/2) \\ 0 & -a_2 s_2 w_z(3/2) \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)} \quad (\text{III.42})$$

- **Etude de torseur cinématique  $\tau_c(4/3)$  :**

$$\tau_c(4/3) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(4/3) & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

- Changement de centre dans la base  $R_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$  :

$$\tau_c(4/3) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(4/3) & 0 \end{Bmatrix} + \left. \vec{\Omega}(4/3) \wedge \overline{DC} \right\}_{(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

$$\vec{\Omega}(4/3) \wedge \overline{DC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & w_z(4/3) \\ -a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 w_z(4/3) \bar{y}_3$$

$$\tau_c(4/3) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_3 w_z(4/3) \\ w_z(4/3) & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

- Changement de base de  $R_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$  à  $R_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$  :

$$\left[ \vec{\Omega}(4/3) \right]_B = \left[ R_{2,3} \right] \left[ \vec{\Omega}(4/3) \right]_2$$

$$= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z(4/3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z(4/3) \end{Bmatrix}$$

$$[\vec{V}(4/3)]_0 = [R_{2,3}] [\vec{V}(4/3)]_2$$

$$= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ a_3 w_z(4/3) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a_3 s_3 w_z(4/3) \\ a_3 c_3 w_z(4/3) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_c(4/3) = \begin{Bmatrix} 0 & -a_3 s_3 w_z(4/3) \\ 0 & a_3 c_3 w_z(4/3) \\ w_z(4/3) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

- Changement de centre dans la base  $R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  :

$$\tau_c(4/3) = \begin{Bmatrix} 0 & -a_3 s_3 w_z(4/3) \\ 0 & a_3 c_3 w_z(4/3) \\ w_z(4/3) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} + \left. \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(4/3) \wedge \overline{CB} \end{Bmatrix} \right\}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

$$\vec{\Omega}(4/3) \wedge \overline{CB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & w_z(4/3) \\ -a_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_2 w_z(4/3) \vec{y}_2$$

$$\tau_c(4/3) = \begin{Bmatrix} 0 & a_3 s_3 w_z(4/3) \\ 0 & (a_2 - a_3 c_3) w_z(4/3) \\ w_z(4/3) & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

- Changement de base de  $R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  à  $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  :

$$[\vec{\Omega}(4/3)]_1 = [R_{1,2}] [\vec{\Omega}(4/3)]_2$$

$$= \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z(3/4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z(3/4) \end{Bmatrix}$$

$$[\vec{V}(4/3)]_1 = [R_{1,2}] [\vec{V}(4/3)]_2$$

$$= \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 s_3 w_z(4/3) \\ (a_2 - a_3 c_3) w_z(4/3) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} [a_3 s_2 s_3 + (a_2 - a_3 c_3) c_2] w_z(4/3) \\ [-a_3 c_2 s_3 + (a_2 - a_3 c_3) s_2] w_z(4/3) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_c(4/3) = \left. \begin{array}{cc} 0 & [a_3 s_2 s_3 + (a_2 - a_3 c_3) c_2] w_z(4/3) \\ 0 & [-a_3 c_2 s_3 + (a_2 - a_3 c_3) s_2] w_z(4/3) \\ w_z(4/3) & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

- Changement de centre dans la base  $R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  :

$$\tau_c(4/3) = \left. \begin{array}{cc} 0 & [a_3 s_2 s_3 + (a_2 - a_3 c_3) c_2] w_z(4/3) \\ 0 & [-a_3 c_2 s_3 + (a_2 - a_3 c_3) s_2] w_z(4/3) + \vec{\Omega}(4/3) \wedge \overline{BA} \\ w_z(4/3) & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

$$\Omega(4/3) \wedge \overline{BA} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & w_z(4/3) \\ 0 & d_1 & 0 \end{vmatrix} = -d_1 w_z(4/3) \bar{x}_1$$

$$\tau_c(4/3) = \left. \begin{array}{cc} 0 & [a_3 s_2 s_3 + (a_2 - a_3 c_3) c_2 - d_1] w_z(4/3) \\ 0 & [-a_3 c_2 s_3 + (a_2 - a_3 c_3) s_2] w_z(4/3) \\ w_z(4/3) & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

- Changement de base de  $R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  à  $R_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  :

$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z(4/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 w_z(4/3) \\ c_1 w_z(4/3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{V}(4/3)]_0 = [R_{0,1}] [\vec{V}(4/3)]_1$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [a_3 s_2 s_3 + (a_2 - a_3 c_3) c_2 - d_1] w_z(4/3) \\ [-a_3 c_2 s_3 + (a_2 - a_3 c_3) s_2] w_z(4/3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [a_3 s_2 s_3 c_1 + (a_2 - a_3 c_3) c_2 c_1 - d_1 c_1] w_z(4/3) \\ [a_3 s_2 s_3 s_1 + (a_2 - a_3 c_3) c_2 s_1 - d_1 s_1] w_z(4/3) \\ [a_3 c_2 s_3 - (a_2 - a_3 c_3) s_2] w_z(4/3) \end{bmatrix}$$

$$\tau_c(4/3) = \left. \begin{array}{cc} -s_1 w_z(4/3) & [a_3 s_2 s_3 c_1 + (a_2 - a_3 c_3) c_2 c_1 - d_1 c_1] w_z(4/3) \\ c_1 w_z(4/3) & [a_3 s_2 s_3 s_1 + (a_2 - a_3 c_3) c_2 s_1 - d_1 s_1] w_z(4/3) \\ 0 & [a_3 c_2 s_3 - (a_2 - a_3 c_3) s_2] w_z(4/3) \end{array} \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)}$$

- Changement de centre dans la base  $R_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$

$$\tau_c(4/3) = \left. \begin{array}{cc} -s_1 w_z(4/3) & [a_3 s_2 s_3 c_1 + (a_2 - a_3 c_3) c_2 c_1 - d_1 c_1] w_z(4/3) \\ c_1 w_z(4/3) & [a_3 s_2 s_3 s_1 + (a_2 - a_3 c_3) c_2 s_1 - d_1 s_1] w_z(4/3) \\ 0 & [a_3 c_2 s_3 - (a_2 - a_3 c_3) s_2] w_z(4/3) \end{array} \right\} + \vec{\Omega}(4/3) \wedge \overline{AO} \left. \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)}$$

$$\vec{\Omega}(4/3) \wedge \overline{AO} = \begin{vmatrix} -s_1 w_z(4/3) & c_1 w_z(4/3) & 0 \\ 0 & 0 & -d_0 \end{vmatrix} = -c_1 d_0 w_z(4/3) \bar{x}_0 + s_1 d_0 w_z(4/3) \bar{y}_0$$

$$\tau_c(4/3) = \left. \begin{array}{cc} -s_1 w_z(4/3) & [a_3 s_2 s_3 c_1 + (a_2 - a_3 c_3) c_2 c_1 - (d_1 + d_0) c_1] w_z(4/3) \\ c_1 w_z(4/3) & [a_3 s_2 s_3 s_1 + (a_2 - a_3 c_3) c_2 s_1 - (d_1 - d_0) s_1] w_z(4/3) \\ 0 & [a_3 c_2 s_3 - (a_2 - a_3 c_3) s_2] w_z(4/3) \end{array} \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)} \quad (\text{III.43})$$

▪ **Etude de torseur cinématique  $\tau_c(5/4)$  :**

$$\zeta_c(5/4) \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(5/4) & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)}$$

• Changement de centre dans la base  $R_4(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$  :

$$\tau_c(5/4) = \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(5/4) & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)} + \vec{\Omega}(5/4) \wedge \overline{ED}$$

$$\Omega(5/4) \wedge \overline{ED} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & w_z(5/4) \\ 0 & 0 & d_5 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\tau_c(5/4) = \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ w_z(4/3) & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)}$$

• Changement de base de  $R_4(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$  à  $R_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$  :

$$\begin{aligned} [\vec{\Omega}(5/4)]_C &= [R_{3,4}] [\vec{\Omega}(5/4)]_3 \\ &= \begin{bmatrix} s_4 & 0 & c_4 \\ -c_4 & 0 & s_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z(5/4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_4 w_z(5/4) \\ s_4 w_z(5/4) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\vec{V}(5/4)]_C &= [R_{3,4}] [\vec{V}(5/4)]_3 \\ &= \begin{bmatrix} s_4 & 0 & c_4 \\ -c_4 & 0 & s_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\tau_c(5/4) = \left. \begin{array}{cc} c_4 w_z(5/4) & 0 \\ s_4 w_z(5/4) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

• Changement de centre dans la base  $R_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$  :



$$\tau_c(5/4) = \left. \begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{cc} c_4 w_z(5/4) & 0 \\ s_4 w_z(5/4) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} & + \quad \Omega(5/4) \wedge \overrightarrow{DC} \end{array} \right\}_{(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

$$\Omega(5/4) \wedge \overrightarrow{DC} = \begin{vmatrix} c_4 w_z(5/4) & s_4 w_z(5/4) & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 s_4 w_z(5/4) \bar{z}_3$$

$$\tau_c(5/4) \left. \begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{cc} c_4 w_z(5/4) & 0 \\ s_4 w_z(5/4) & 0 \\ 0 & a_3 s_4 w_z(5/4) \end{array} \right\} & \end{array} \right\}_{(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

- Changement de base de  $R_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$  à  $R_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$  :

$$[\vec{\Omega}(5/4)]_2 = [R_{2,3}] [\vec{\Omega}(5/4)]_3$$

$$= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_4 w_z(5/4) \\ s_4 w_z(5/4) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{34} w_z(5/4) \\ s_{34} w_z(5/4) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[\vec{V}(5/4)]_2 = [R_{2,3}] [\vec{V}(5/4)]_3$$

$$= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 s_4 w_z(5/4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 s_4 w_z(5/4) \end{Bmatrix}$$

$$\tau_c(5/4) = \left. \begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{cc} c_{34} w_z(5/4) & 0 \\ s_{34} w_z(5/4) & 0 \\ 0 & a_3 s_4 w_z(5/4) \end{array} \right\} & \end{array} \right\}_{(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)}$$

- Changement de centre dans la base  $R_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$  :

$$\tau_c(5/4) = \left. \begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{cc} c_{34} w_z(5/4) & 0 \\ s_{34} w_z(5/4) & 0 \\ 0 & a_3 s_4 w_z(5/4) \end{array} \right\} & + \quad \Omega(5/4) \wedge \overrightarrow{CB} \end{array} \right\}_{(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)}$$

$$\Omega(5/4) \wedge \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} c_{34} w_z(5/4) & s_{34} w_z(5/4) & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_2 s_{34} w_z(5/4) \bar{z}_2$$

$$\tau_c(5/4) = \left. \begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{cc} c_{34} w_z(5/4) & 0 \\ s_{34} w_z(5/4) & 0 \\ 0 & (a_3 s_4 + a_2 s_{34}) w_z(5/4) \end{array} \right\} & \end{array} \right\}_{(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)}$$

- Changement de base de  $R_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$  à  $R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  :

$$[\vec{\Omega}(5/4)]_1 = [R_{1,2}] [\vec{\Omega}(5/4)]_2$$

$$= \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{34} w_z(5/4) \\ s_{34} w_z(5/4) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} [c_{34} s_2 + s_{34} c_2] w_z(5/4) \\ [-c_{34} c_2 + s_{34} s_2] w_z(5/4) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[\vec{V}(5/4)]_0 = [R_{0,1}] [\vec{V}(5/4)]_1$$

$$= \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (a_3 s_4 + a_2 s_{34}) w_z(5/4) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (a_3 s_4 + a_2 s_{34}) w_z(5/4) \end{Bmatrix}$$

$$\tau_c(5/4) = \begin{Bmatrix} [c_{34} s_2 + s_{34} c_2] w_z(5/4) & 0 \\ [-c_{34} c_2 + s_{34} s_2] w_z(5/4) & 0 \\ 0 & (a_3 s_4 + a_2 s_{34}) w_z(5/4) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

- Changement de centre dans la base  $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  :

$$\tau_c(5/4) = \begin{Bmatrix} [c_{34} s_2 + s_{34} c_2] w_z(5/4) & 0 \\ [-c_{34} c_2 + s_{34} s_2] w_z(5/4) & 0 \\ 0 & (a_3 s_4 + a_2 s_{34}) w_z(5/4) \end{Bmatrix} + \vec{\Omega}(5/4) \wedge \overline{BA} \Bigg\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

$$\vec{\Omega}(5/4) \wedge \overline{BA} = \begin{vmatrix} [c_{34} s_2 + s_{34} c_2] w_z(5/4) & [-c_{34} c_2 + s_{34} s_2] w_z(5/4) & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= d_1 [c_{34} s_2 + s_{34} c_2] w_z(5/4) \vec{z}_1$$

$$\tau_c(5/4) = \begin{Bmatrix} [c_{34} s_2 + s_{34} c_2] w_z(5/4) & 0 \\ [-c_{34} c_2 + s_{34} s_2] w_z(5/4) & 0 \\ 0 & d_1 [c_{34} s_2 + s_{34} c_2] w_z(5/4) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

- Changement de base de  $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  à  $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

$$[\vec{\Omega}(5/4)]_0 = [R_{0,1}] [\vec{\Omega}(5/4)]_1$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} [c_{34} s_2 + s_{34} c_2] w_z(5/4) \\ [-c_{34} c_2 + s_{34} s_2] w_z(5/4) \\ 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} [c_{34} s_2 c_1 + s_{34} c_2 c_1] w_z(5/4) \\ [-c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) \\ [c_{34} c_2 - s_{34} s_2] w_z(5/4) \end{array} \right\} \\
[\vec{V}(5/4)]_0 &= [R_{0,1}] [\vec{V}(5/4)]_1 \\
&= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ d_1 [c_{34} s_2 + s_{34} c_2] w_z(5/4) \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} -d_1 [c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) \\ d_1 [c_{34} c_1 s_2 + s_{34} c_1 c_2] w_z(5/4) \\ 0 \end{array} \right\} \\
\tau_c(5/4) &= \left. \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} [c_{34} s_2 c_1 + s_{34} c_2 c_1] w_z(5/4) & -d_1 [c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) \\ [-c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) & d_1 [c_{34} c_1 s_2 + s_{34} c_1 c_2] w_z(5/4) \\ [c_{34} c_2 - s_{34} s_2] w_z(5/4) & 0 \end{bmatrix} & \end{array} \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)}
\end{aligned}$$

- Changement de centre dans la base  $R_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$

$$\begin{aligned}
\zeta_c(5/4) &= \left. \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} [c_{34} s_2 c_1 + s_{34} c_2 c_1] w_z(5/4) & -d_1 [c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) \\ [-c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) & d_1 [c_{34} c_1 s_2 + s_{34} c_1 c_2] w_z(5/4) \\ [c_{34} c_2 - s_{34} s_2] w_z(5/4) & 0 \end{bmatrix} & \\ & + \vec{\Omega}(5/4) \wedge \vec{AO} \end{array} \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega(5/4) \wedge \vec{AO} &= \begin{vmatrix} [c_{34} s_2 c_1 + s_{34} c_2 c_1] w_z(5/4) & [-c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) & [c_{34} c_2 - s_{34} s_2] w_z(5/4) \\ 0 & 0 & -d_0 \\ -d_0 [-c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) & -d_0 [c_{34} s_2 c_1 + s_{34} c_2 c_1] w_z(5/4) & 0 \end{vmatrix} \\
&= -d_0 [-c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) \bar{x}_0 - d_0 [c_{34} s_2 c_1 + s_{34} c_2 c_1] w_z(5/4) \bar{y}_0
\end{aligned}$$

$$\tau_c(5/4) = \left. \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} [c_{34} s_2 c_1 + s_{34} c_2 c_1] w_z(5/4) & (-d_1 - d_0) [c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) \\ [-c_{34} s_2 s_1 + s_{34} c_2 s_1] w_z(5/4) & (d_1 - d_0) [c_{34} c_1 s_2 + s_{34} c_1 c_2] w_z(5/4) \\ [c_{34} c_2 - s_{34} s_2] w_z(5/4) & 0 \end{bmatrix} & \end{array} \right\}_{(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)} \quad (\text{III.44})$$

Par addition d'équations matricielles (III.40), (III.41), (III.42), (III.43), (III.44) :

$${}_0 \{ \tau_c(5/0) \}_{R_0} = {}_0 \{ \tau_c(1/0) \}_{R_0} + {}_0 \{ \tau_c(2/1) \}_{R_0} + {}_0 \{ \tau_c(3/2) \}_{R_0} + {}_0 \{ \tau_c(4/3) \}_{R_0} + {}_0 \{ \tau_c(5/4) \}_{R_0}$$

$$\begin{cases}
w_x(5/0) = w_x(2/1) + w_x(3/2) + w_x(4/3) + w_x(5/4) \\
w_y(5/0) = w_y(1/0) + w_y(2/1) + w_y(3/2) + w_y(4/3) + w_y(5/4) \\
w_z(5/0) = w_z(1/0) \\
V_x(5/0) = V_x(2/1) + V_x(3/2) + V_x(4/3) + V_x(5/4) \\
V_y(5/0) = V_y(2/1) + V_y(3/2) + V_y(4/3) + V_y(5/4) \\
V_z(5/0) = V_z(3/2) + V_z(4/3) \\
w_x(5/0) = -s_1 w_z(2/1) - s_1 w_z(3/2) - s_1 w_z(4/3) + [c_{34}s_2c_1 + s_{34}c_2c_1]w_z(5/4) \\
w_y(5/0) = c_1 w_z(2/1) + c_1 w_z(3/2) + c_1 w_z(4/3) + [-c_{34}s_2s_1 + s_{34}c_2s_1]w_z(5/4) \\
w_z(5/0) = w_z(1/0) + [c_{34}c_2 - s_{34}s_2]w_z(5/4) \\
V_x(5/0) = (-d_0 - d_1) c_1 w_z(2/1) + [(a_2c_2 - d_1 + d_0)c_1]w_z(3/2) \\
\quad + [a_3s_2s_3c_1 + (a_2 - a_3c_3)c_2c_1 - (d_1 + d_0)c_1]w_z(4/3) + (-d_1 - d_0)[c_{34}s_2s_1 + s_{34}c_2s_1]w_z(5/4) \\
V_y(5/0) = (d_0 - d_1) s_1 w_z(2/1) + [(a_2c_2 - d_1 + d_0)s_1]w_z(3/2) \\
\quad + [a_3s_2s_3s_1 + (a_2 - a_3c_3)c_2s_1 - (d_1 - d_0)s_1]w_z(4/3) + (d_1 - d_0)[c_{34}c_1s_2 + s_{34}c_1c_2]w_z(5/4) \\
V_z(5/0) = -a_2s_2w_z(3/2) + [a_3c_2s_3 - (a_2 - a_3c_3)s_2]w_z(4/3)
\end{cases}$$

(III.45).

### III.4.4 Calcul de la matrice Jacobienne :

#### ▪ Calcul de $e_{i-1}^{atelier}$ :

Nous allons d'abord calculer les vecteurs  $e_{i-1}^{atelier}$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ), en utilisant les expressions pour  $T_{i-1}^{i-2}$  ( $i = 2; 3; 4; 5$ ). Sachant que :

$$T_0^{atelier} = T_{outil}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.46)$$

$$e_0^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T_0^{atelier} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_0^{atelier} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (III.47)$$

$$e_1^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T_0^{atelier} T_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1^{atelier} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (III.48)$$

$$e_2^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}_0^{atelier} \mathbf{T}_1^0 \mathbf{T}_2^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_2^{atelier} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (III.49)$$

$$e_3^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}_0^{atelier} \mathbf{T}_1^0 \mathbf{T}_2^1 \mathbf{T}_3^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_3^{atelier} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (III.50)$$

$$e_4^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}_0^{atelier} \mathbf{T}_1^0 \mathbf{T}_2^1 \mathbf{T}_3^2 \mathbf{T}_4^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_4^{atelier} = \begin{bmatrix} c_1 s_{234} \\ s_1 s_{234} \\ c_{234} \end{bmatrix} \quad (III.51)$$

$e_1^{atelier} = e_2^{atelier} = e_3^{atelier}$  Puisque les axes  $z_1, z_2$  et  $z_3$  ont toujours la même direction.

▪ **Calcul de  $p_{i-1, outil}^{atelier}$  :**

Puisque toutes les cinq articulations du robot VP-5243 sont rotoïde, nous allons calculer maintenant les vecteurs  $p_{i-1, outil}^{atelier}$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ) :

$$\mathbf{T}_{outil}^{atelier} = \mathbf{T}_5^0 \quad (III.52)$$

$$p_{0, outil}^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{T}_{outil}^{atelier} - \mathbf{T}_0^{atelier}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_{0,outil}^{atelier} = \begin{bmatrix} c_1(d_5s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2) \\ s_1(d_5s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2) \\ d_1 + d_5c_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2 \end{bmatrix} \quad (III.53)$$

$$p_{1,outil}^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (T_{outil}^{atelier} - T_0^{atelier} T_1^0) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_{1,outil}^{atelier} = \begin{bmatrix} c_1(d_5s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2) \\ s_1(d_5s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2) \\ d_5c_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2 \end{bmatrix} \quad (III.54)$$

$$p_{2,outil}^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (T_{outil}^{atelier} - T_0^{atelier} T_1^0 T_2^1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_{2,outil}^{atelier} = \begin{bmatrix} c_1(d_5s_{234} + a_3s_{23}) \\ s_1(d_5s_{234} + a_3s_{23}) \\ d_5c_{234} + a_3c_{23} \end{bmatrix} \quad (III.55)$$

$$p_{3,outil}^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (T_{outil}^{atelier} - T_0^{atelier} T_1^0 T_2^1 T_3^2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 d_5 s_{234} \\ s_1 d_5 s_{234} \\ d_5 c_{234} \end{bmatrix} \quad (III.56)$$

$$p_{4,outil}^{atelier} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (T_{outil}^{atelier} - T_0^{atelier} T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 d_5 s_{234} \\ s_1 d_5 s_{234} \\ d_5 c_{234} \end{bmatrix} \quad (III.57)$$

$p_{4,outil}^{atelier} = p_{3,outil}^{atelier}$  Puisque les origines des référentiels  $F_4$  et  $F_3$  coïncident toujours.

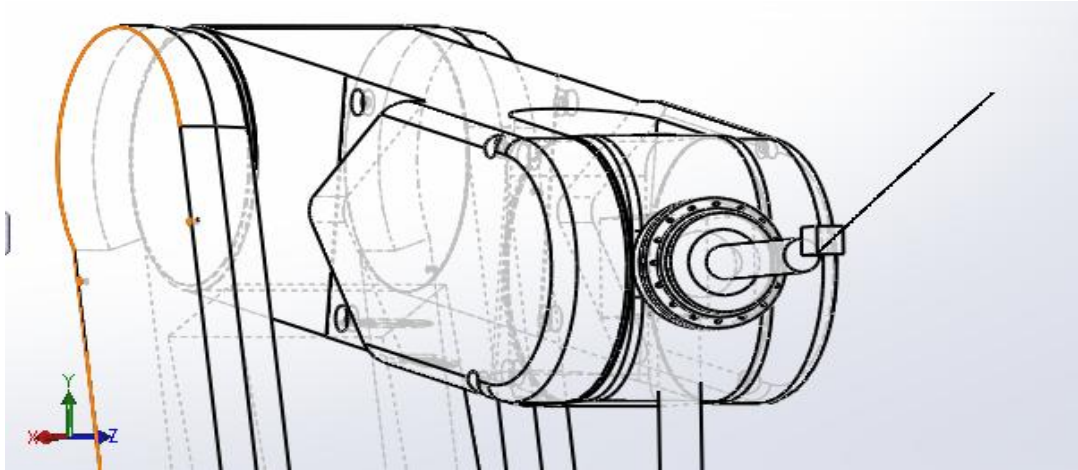
Enfin, la réponse finale pour la matrice jacobienne du robot est :

$$J = \begin{bmatrix} -s_1(d_5s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2) & c_1(d_5c_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2) & c_1(d_5c_{234} + a_3c_{23}) & d_5c_1c_{234} & 0 \\ c_1(d_5s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2) & s_1(d_5c_{234} + a_3c_{23} + a_2c_2) & s_1(d_5c_{234} + a_3c_{23}) & d_5s_1c_{234} & 0 \\ 0 & -(d_5s_{234} + a_3s_{23} + a_2s_2) & -(d_5s_{234} + a_3s_{23}) & -d_5s_{234} & 0 \\ 0 & -s_1 & -s_1 & -s_1 & c_1s_{234} \\ 0 & c_1 & c_1 & c_1 & s_1s_{234} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c_{234} \end{bmatrix}$$

(III.58)

### III.4.5 Trajectoire du robot à l'aide de solidworks :

Généralement, le trajet de l'organe terminal dans un atelier est linéaire pour le but de simplifier les tâches à réaliser. Dans ce travail une trajectoire est obtenue lors d'un déplacement linéaire quelconque dans l'espace de l'organe terminal d'un point A à un autre point B.



**Figure 15 :** Trajectoire linéaire de l'outil.

Notre objectif est de savoir comment on obtient un mouvement linéaire de l'organe terminal, sachant que ce mouvement dépend des mouvements intermédiaires (mouvements rotatifs des Cinq moteurs).

#### ▪ Etape 1 :

Il faut faire une sélection des moteurs qui fonctionnent durant le mouvement souhaités. Notons bien que lors de ce déplacement seuls le moteur 2 et le moteur 3 fonctionnent, les moteur 3, 4 et 5 ne fonctionnent plus à cause de la linéarité de la trajectoire.

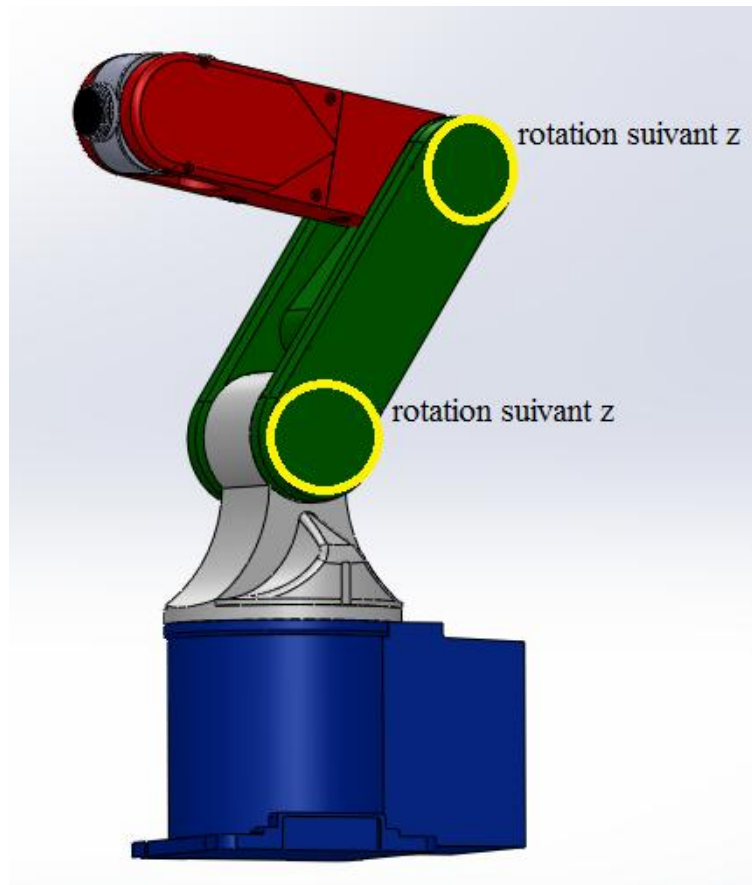


Figure III.8 Moteur 2 et 3 en rotation.

▪ **Etape 2 :**

A cette étape on définit les caractéristiques du mouvement de chaque un des deux moteurs (déplacement et vitesse) en fonction du temps:

Mouvement du Moteur 2 :

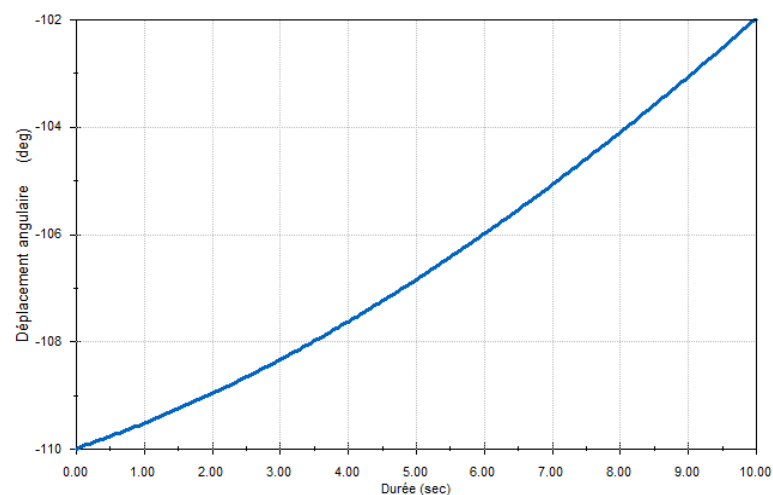
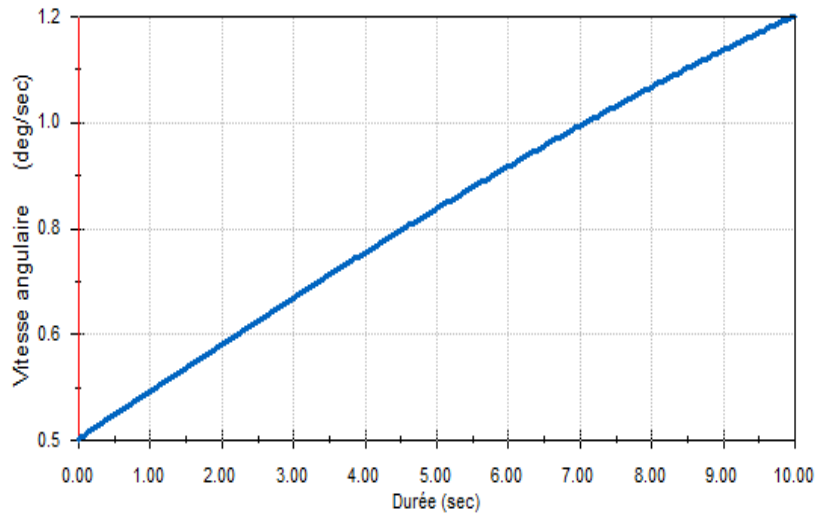


Figure III.9 Déplacement angulaire du moteur 2 autour de l'axe Z.

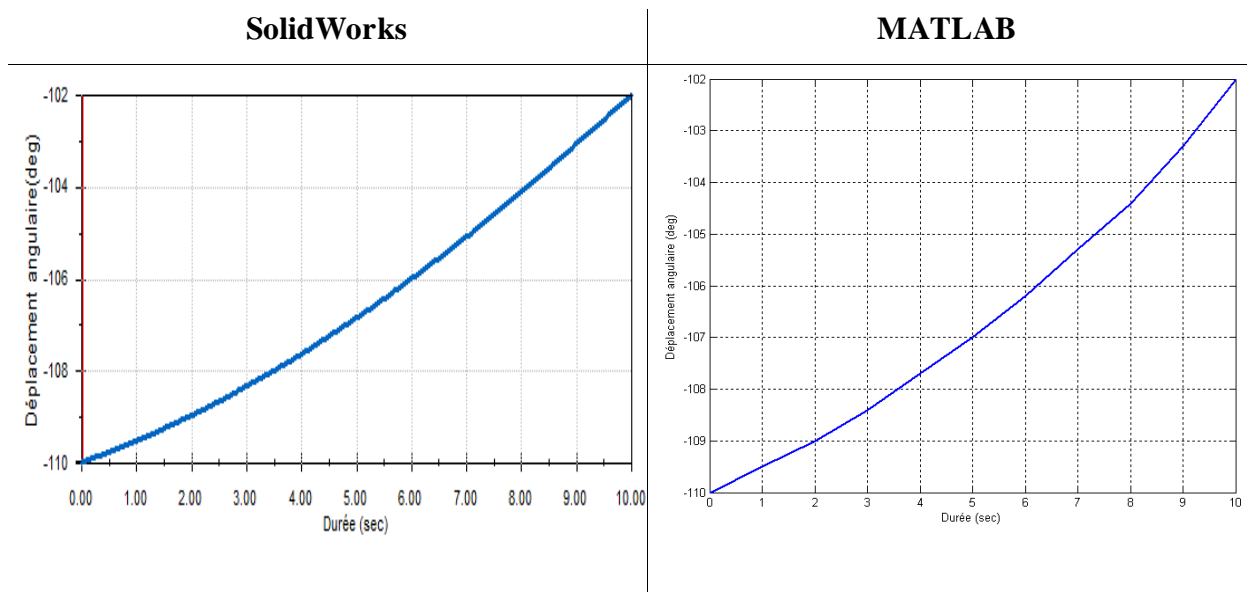




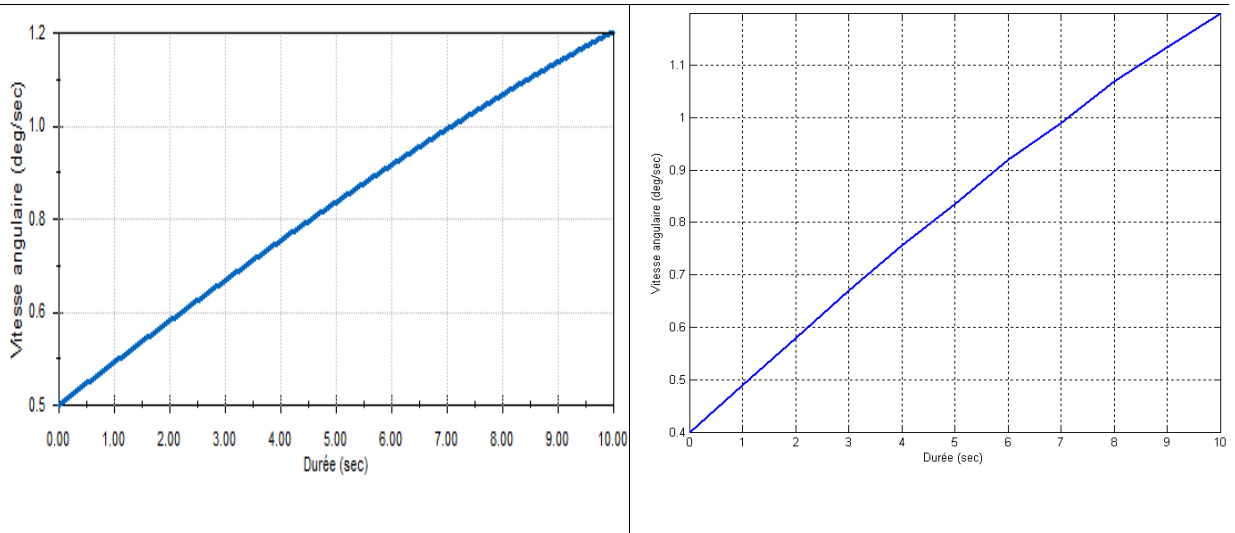
**Figure III.10** vitesse angulaire du moteur 2 autour de l'axe Z.

Mouvement du Moteur 3 :

Pour prouver l'efficacité des modèles géométrique et cinématique nous présentons une comparaison entre le déplacement et la vitesse trouvés par les modèles précédents (et représentés par MATLAB) et le déplacement et la vitesse de la simulation avec SolidWorks.



**Figure III.11** Déplacement angulaire du moteur 3 autour de l'axe Z.



**Figure III.12** vitesse angulaire du moteur 3 autour de l'axe Z

On constate que les courbes obtenues par simulation et celles obtenues à partir des modèles élaborés ont la même allure. Ce qui prouve l'efficacité des modèles géométrique et cinématique particulièrement pour le moteur 3.

En utilisant la même démarche on peut vérifier les équations du mouvement des autres moteurs.

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre la modélisation cinématique d'un robot à cinq axes a été faite par l'obtention des modèles géométriques directs et inverses qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement, ainsi que le modèle cinématique direct qui exprime la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires, et le torseur cinématique équivalent qui définit le mouvement général de l'organe terminal en fonction des mouvements élémentaires.

## Conclusion général

Le travail que nous avons présenté porte sur la modélisation des robots industriel et plus spécifiquement la modélisation cinématique d'un robot manipulateur à chaîne continue ouverte.

On abordait la modélisation en appliquant la convention de Denavit-Hartenberg pour le calcul du modèle géométrique qui nous a permis la localisation de l'effecteur à n'importe quel point de l'espace de travail.

La modélisation cinématique directe nous permet de déterminer la vitesse de l'organe terminal.

Le calcul du torseur cinématique équivalent nous aide à définir le mouvement général de l'organe terminal en fonction des mouvements élémentaires.

De la trajectoire obtenue lors d'un déplacement linéaire de l'organe terminal par le logiciel Solidworks, j'ai obtenu sur les graphes de l'évolution en fonction du temps des positions et des vitesses. Le travail effectué nous permet d'étudier n'importe quels robots industriels pour les différentes stations d'usinage dont le but est d'augmenter la productivité de n'importe quel atelier d'usinage.

## Perspectives

En ce qui concerne ses améliorations ultérieures pour un même travail, il est recommandé aux personnes devant poursuivre ce travail de : Faire une étude bien détaillée sur la modélisation dynamique en tenant compte des caractéristiques dynamiques et des erreurs statiques et dynamiques ainsi que la précision.

Il est à noter que le rapprochement entre l'université et l'industrie est le seul et unique moyen pour le développement industriel et avec le soutien de DIEU on peut résoudre les problèmes existants dans cet univers ou dans la vie.

---

# Bibliographie

- [1] **M. Gouasmi, M. Ouali, B. Fernini, M. Meghatria**, Kinematic Modelling and Simulation of a 2-R Robot Using SolidWorks and Verification by MATLAB/Simulink. Algeria Structural Mechanics Research Laboratory, Mechanical Engineering Department, Blida University, Algeria, 2011
- [2] **F. Cheraghpour, I. Membell, M. Vaezi, R. Shoori Jazeh, S. Ali, A. Moosavian**. Dynamic Modeling and Kinematic Simulation of Staubli© TX40 Robot Using MATLAB/ADAMS Co-simulation. Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Mechatronics. April 13-15, 2011, Istanbul, Turkey.
- [3] **P. Fisette, H. Buyse, J.C. Samin**, MECA 2732 : Introduction à la Robotique, 10 novembre 2004.
- [4] **A. Benali**, Robotique et Automatisation Industriel.
- [5] **P. Coiffet, Hermes**, La Robotique, principes et applications.
- [6] **H. Hamdi**, Introduction à la Robotique. Les éditons de l'université Mentouré Constantine 2002-2003.
- [7] **E. Dombre**, Analyse et Modélisation des Robots Manipulateurs, 22 janvier 2002.
- [8] **A. Chrifa**, Analyse Cinématique des Robots Parallèles. Thèse Docteur D'état. Université Mentouri Constantine 2007/2008.
- [9] **J.L. Boimond**, Robotique, Université Angers.
- [10] **R. Gourdeau**, ELE4203 — Robotique : Modélisation des Robots Manipulateurs, Département de génie électrique, Ecole Polytechnique de Montréal, 4 novembre 2010.
- [11] **W. Khalil, E. Dombre**, Bases de la Modélisation et de la Commande des Robots-Manipulateurs de type série, 22 janvier 2012.
- [12] **I. Bonev, Y. Noiseux**, Notes de cours GPA546. 27 mars 2013.
- [13] **A. Belloufi**, Cour Théorie de Machines et de Mécanismes, Université d'Ouargla, 2011/2012.
- [14] **J.W. Jeong, I.S. Kim, R.R. Chand, J.H. Lee**, A study on Simulation model and Kinematic Model of Welding Robot, Department of Mechanical Engineering, Mokpo NationalUniversity, 01 novembre 2012.

**Résumé :**

Le travail abordé dans ce mémoire comporte trois parties. L'objet de la première partie est de décrire les constituants technologiques d'un système robotique et de définir les principaux termes du domaine. La seconde donne au lecteur les outils de base qui lui permettront d'établir les modèles nécessaires pour simuler ou commander les robots à chaîne ouverte simple : modèles géométriques, cinématiques (direct et inverse). Ces modèles s'appuient sur une représentation unifiée des mécanismes. La troisième partie est consacrée à une application dans le cas d'un robot réel. Il s'agit d'un robot sériel à cinq articulations rotoïde. A fin de valider les modèles : géométrique et cinématique nous avons utilisé une simulation avec le logiciel SolidWorks.

**Mots clés :**

Robot-manipulateur sériel, Modélisation géométrique, Modélisation cinématique.

**Abstract:**

The work discussed in this paper has three parts. The purpose of the first part is to describe the technological components of a robotic system and define the key terms in the field. The second gives the reader the basic tools that will help to establish the necessary models to simulate or control robots to open chain simple (forward and reverse) geometric patterns, scenes. These models are based on unified representation mechanisms. The third part is devoted to an application in the case of a real robot. It is a serial five revolute joints robot. At the end validate models: geometric and kinematic simulation we used the SolidWorks software.

**Keywords:**

Serial robot manipulator, Geometric modeling, kinematics modeling.

**ملخص**

العمل المقدم في هذه المذكرة موزع على ثلاثة فصول، الهدف من الفصل الأول هو وصف المكونات الأساسية للروبوت وتعريف المصطلحات الأساسية في هذا المجال. الفصل الثاني يقدم للقارئ القواعد والأدوات الأساسية الضرورية لإقامة نماذج المحاكاة للسيطرة على الروبوتات ذات البنية المفتوحة. وهي النمذجة الهندسية و النمذجة الحركية. الفصل الثالث مكرس لتطبيق خاص بروبوت حقيقي متسلسل ذي خمسة مفاصل دورا نية خاص بشركة دنسو للروبوت.

**كلمات مفتاحية**

روبوت مناوّر متسلسل ، النمذجة الهندسية النمذجة الحركية ، سوليدوروكس.