

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Sciences et de la Technologies et Sciences de la Matière

Département d'Hydraulique et Génie Civil



Mémoire

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologie

Filière: Génie Civil

Spécialité : C.C.I

Présenté par : DOKMA Latra

Thème

Mesure Des Contraintes Dans Le Domaine Elastostatique

Soutenu publiquement

Le : 17/09/2013

Devant le Jury:

Mr. LOGBI A.

Mr. ELABADI M .S

Mr. ROUAG Liamine.

M.C «A » Président

M.A «B » Examineur

M.A « A » Encadreur

UKM Ouargla

UKM Ouargla

UKM Ouargla

Année Universitaire : 2012/2013

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



إهداء

أهدي مسيرة جهدي و عملي إلى األى ما في الوجود إلى ملاك
الحياة، إلى بسمتي و سر وجودي إلى من كان دعاؤهم سر نجاحي....

إلى نور الدنيا أمي وأبي إلى مربيتي و حبيبتي جدتي الغالية.

إلى القلوب الطاهرة والرقيقة والنفوس البريئة إلى رياحين حياتي:
أحلام، سميحة، مراد والغالي بالخير.

كما أأترف بالجميل إلى من كان لي سند و مشير في جهدي هذا
خالي العزيز تجاني زوجته أم محمد أولاده (محمد، رانيا، جهينة
والكتكوة نسرين).

إلى خالي علي وزوجته أم سعيد أولاده (سعيد، يوسف والكتكوة
ملاك) وخالي عيدي وزوجته أم أميمة وإبنته الغالية أميمة.

إلى الصديقة الغالية رقية مسعودي (توأم القدر) إلى عمتي الغالية
(زهرة) وكافة أسرتها الكريمة.

إلى كل عائلة دكمة وإلى كل من اتسع لهم قلبي ولم تتسع لهم ورقتي.

نكمة العطرة

الهدايا

أهدي مسيرة جهدي و عملي إلى األى ما في الوجود إلى ملاك الحياة، إلى بسمتي و سر وجودي إلى من كان دعاؤهم سر نجاحي.... إلى نور الدنيا أمي وأبي إلى مربيتي و حبيبتي جدتي الغالية. إلى القلوب الطاهرة والرقيقة والنفوس البريئة إلى رياحين حياتي: أحلام، سميحة، مراد والغالي بالخير.

كما أأترف بالجميل إلى من كان لي سند و مشير في جهدي هذا خالي العزيز تجاني زوجته أم محمد أولاده (محمد، رانيا، جهينة والكتكوة نسرين).

إلى خالي علي وزوجته أم سعيد أولاده (سعيد، يوسف والكتكوة ملاك) وخالي عيدي وزوجته أم أميمة وإبنته الغالية أميمة.

إلى الصديقة الغالية رقية مسعودي (توأم القدر) إلى عمتي الغالية (زهرة) وكافة أسرتها الكريمة.

إلى كل عائلة دكمة وإلى كل من اتسع لهم قلبي ولم تتسع لهم ورقتي.

دكمة العطرة

Sommaire

Remerciement

Dédicace

Liste des figures

Résumé

Sommaire

Introduction générale

CHAPITRE I : Tenseur De Contrainte Et Tenseur De Déformation

I.1. Tenseur des contraintes	(10)
I.1.1. Hypothèses de base	(10)
I.1.2. Contrainte normal	(10)
I.1.3. Contrainte oblique	(11)
I.1.4. Signification physique des contraintes	(14)
1.4.1. Contraintes normale et tangentielle.....	(14)
1.4.2. Conditions aux limites en pression ?.....	(15)
1.4.3. Contraintes dans un repère orthonormé.....	(15)
I.1.5. Utilisation du tenseur des contraintes	(16)
1.5.1. Contraintes principales.....	(16)
1.5.2. Contrainte moyenne et déviateur	(16)
1.5.3. Contraintes équivalentes	(16)
5.3.1. La contrainte équivalente de von Mises.....	(17)
5.3.2. La contrainte équivalente de Tresca	(17)

I.2. Théorie de l'élasticité	(18)
I.2.1. Présentation	(18)
I.2.2. Décomposition de la contrainte	(18)
2.2.1. Contrainte normale et contrainte tangentielle.....	(18)
2.2.2. Formule de Cauchy (tenseur des contraintes).....	(19)
2.2.3. Changement de repère.....	(21)
2.2.4. Equations d'équilibre	(22)
2.2.4.1. Equilibre en translation.....	(22)
2.2.4.2. Equilibre en rotation.....	(23)
2.2.5. Directions et contraintes principales.....	(24)
I.3. Tenseur des Déformations	(27)
I.3.1. Configuration, vecteur déplacement	(27)
I.3.2. Tenseur des dilatations	(28)
I.3.3. Tenseur des déformations de Green-Lagrange	(28)
I.3.4. Repère principal, dilatations et déformations principales	(30)
I.3.5. Tenseur des déformations linéarité	(31)
 CHAPITRE II : Lio De Comportement Elastique	
II.1. Introduction	(33)
II.2. Loi de Hook généralisée	(34)
2.1. Cas de chargement (charge normale).....	(34)
2.2. Cas de chargement de cisaillement	(36)
2.3. Etat quelconque de contrainte	(37)

II.3. Elasticite plane	(39)
II.3.1. Déformation plan	(39)
3.1.1.Conséquence de la déformation.....	(39)
II.3.2. Contraintes plan	(40)
3.2.1.Conséquence de la définition.....	(41)
II.4. Solution du problème elastostatique	(41)
4.1. Résolution en déplacement ou solution de lamé.....	(41)
4.2. Résolution en contraintes ou solution de Beltrami-Michel.....	(42)
II.5. Fonction de contraintes ou fonction d' Airy	(45)

CHAPITRE III : Exemples D'application

III.1. Problèmes classiques d'élasticité	(48)
III.1.1. Cylindre sou pression	(48)
III.2. Traction d'un barreau prismatique	(51)

CHAPITRE IV : Mesure Expérimentale

IV.1. Grandeurs mécaniques	(55)
IV.2. Principes généraux	(55)
IV.3. Les jauges de déformation	(56)
IV.3.1. Différent types de jauges de déformation	(56)
3.1.1 Types de Jauges résistives.....	(56)
3.1.2 Types de jauges métalliques.....	(56)
IV.3.2. Caractéristiques principales des jauges métalliques	(57)
III.3.3. Caractéristiques Principales De Jauges Semi-conductrices	(58)
III.3.4. Disposition en rosettes	(59)
III.3.5. Méthodes de mesure	(60)

Conclusion générale.

Références bibliographiques

Resumé:

Le but de ce travail est de familiariser les étudiants avec le calcul mathématique des structures en génie civil.

Dans le chapitre (I) un développement d'équation, de l'élasticité est présenté pour aboutir à un système d'équations différentielles d'inconnus, les fonctions :

$$\sigma = \sigma(x,y,z) \quad , \quad \epsilon = \epsilon(x,y,z) \quad \text{et} \quad u = u(x,y,z).$$

La relation entre la déformation et le déplacement n'est pas linéaire, mais plutôt quadratique, ce qui permet de traiter à la fois le comportement linéaire et non linéaire du matériau du point de vue géométrique (grand déplacement, grand déformation).

Pour traiter le comportement non linéaire du matériau, on doit prendre une relation non linéaire entre la contrainte et la déformation $\sigma = f(\epsilon)$ où f : est une fonction non linéaire.

Le traitement de problèmes de génie civil en utilisant la théorie d'élasticité est très complexe voir impossible dans certains cas. Heureusement dans la pratique, la forme de certaines structures permet de faire des hypothèses simplificatrices et rendre la solution d'un problème tridimensionnel en la résolution d'un problème bidimensionnel (contrainte plane, déformation plane).

Le chapitre (III) deux cas de sollicitations les plus fréquentes sont traités : traction d'une barre, cylindre sous pression.

Dans le chapitre (IV) présente une des méthodes de calcul empirique de σ , ϵ et u : mesure des déformations par jauge de déformation.

Mots clés: (Elasticité, contrainte, déformation, jauge).

Resumé:

Le but de ce travail est de familiariser les étudiants avec le calcul mathématique des structure en génie civil.

Dans le chapitre (I et II) un développement d'équation, de l'élasticité est présenté pour aboutir au système des équations dont le résolution est le système de constante mécanique recherché σ , ϵ et u .

Le chapitre (III) on a traite deux cas de sollicitations les plus fréquente: traction, cylindre sous pression.

Dans e chapitre (IV) présente une des méthodes de calcul empirique de σ , ϵ et u: mesure des déformation par jauge de déformation.

Mots clés: (Elasticité, contrainte, déformation, jauge).

Introduction :

L'objectif de toute analyse de structure, tout domaine confondu (habitation, administratif, ouvrage d'arts, voie été ...) est de dimensionner tout éléments de structure, a fin de remplir la fonction pour laquelle l'ouvrage est destine.

Ceci passe obligatoirement par la vérification de résistance et stabilité par vérification des contraintes maximales.

Dans une première partie (chapitre I et II) nous présenterons le développement d'équation mathématique de la théorie d'élastostatique que s'intéresse à ce qui se passe en tous points de la structure (à l'intérieur du volume V et à la surface S), contrairement à la théorie de résistance des matériaux qui s'intéresse à la section.

Pour les constantes mécaniques σ , ε , U nous parlerons alors de champs.

L'analyse elastoplastique aboutit en général à un système de (15) équation différentielles dont les inconnues sont les fonctions:

$$\sigma = \sigma (x,y,z) ; \varepsilon = \varepsilon (x,y,z) ; U = U (x,y,z) .$$

La résolution de ce système est très complexe, voir impossible sauf dans certains cas d'élasticité plan. La résolution par méthodes numérique (éléments finis, différences finis) ou méthode expérimentales s'impose.

Dans la deuxième partie, nous présenterons la méthode la plus utilisé dans l'expérimentation qui est celle de mesure des déformations par jauge de déformations.

La connaissance du tenseur de déformation permet de remonter au calcul du tenseur des contraintes et vecteur de déplacement par la loi de Hook et son inverse :

$$\{ U \} \leftrightarrow \{ \varepsilon \} \leftrightarrow \{ \sigma \} .$$

En dernier partie nous traiterons deux exemples d'illustration, barre en traction et cylindre sous pression en utilisant l'équation d'élasticité.

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu tout puissant qui nous a donné la santé, le courage et la patience pour mener à bien ce modeste travail.

Nous exprimons toutes nos profondes reconnaissances à notre encadreur Mr. ROUAG LIAMINE d'avoir accepté d'être notre encadreur, pour ces conseils et son soutien et le temps consacré pour nous orienter et corriger tout au long de notre projet.

Nous souhaiterions exprimer nos profondes gratitudee à tous les enseignants du génie civil à l'université de Kasdi Merbah.

A tous les étudiants du département de Génie Civil spécialement la promotion 2^{eme} Master VOA & CCI

En fin nous remercions tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de ce modeste travail, et que j'ai pour eux de la sympathie et que j'ai oublié de les citer.

CHAPITER I:

Tenseur de contrainte et Tenseur de déformation

CHAPTER II:

Lio de comportement

CHAPTER III:

Exemples D'application

CHAPITER IV:

Mesure Expérimentale

I.1. Tenseur des contraintes :

I.1.1. Hypothèses de base :

Nous considérons un solide Ω en cours de déformation, nous isolons une partie Ω_A de ce solide, et nous analysons les efforts agissant sur cette partie (figure1). [1]

Nous sommes donc en configuration eulérienne.

Hypothèse de calcul :

- 1- Milieu homogène, isotrope.
- 2- Comportement linéaire élastique du milieu.

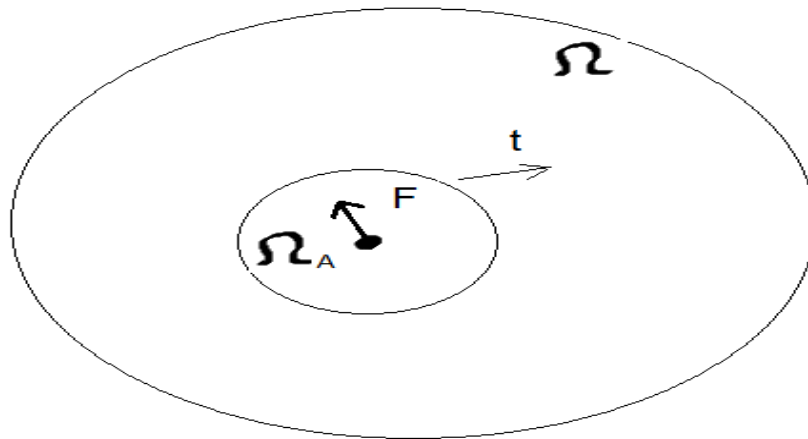


Fig.(1-1): Hypothèses de base pour la définition des contraintes

Une contrainte s'exerce toujours sur une surface

I.1 .2. – Contrainte normal :

La contrainte est normale à la surface, sera notée σ_n . [1]

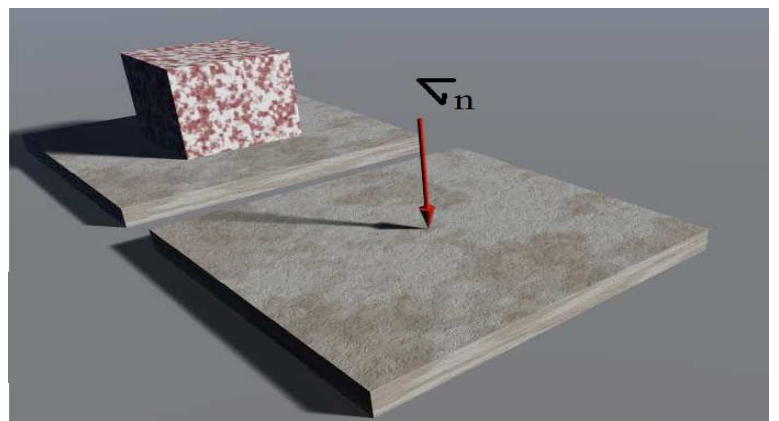


Fig.(1.2) - la contrainte normale.

CHAPITER I : Tenseur De Contrainte Et Tenseur De Déformation

Dans la réalité, la contrainte s'exerce sur toute la surface de contact :

Par convention :

Une compression est positive une extension est négative. [1]

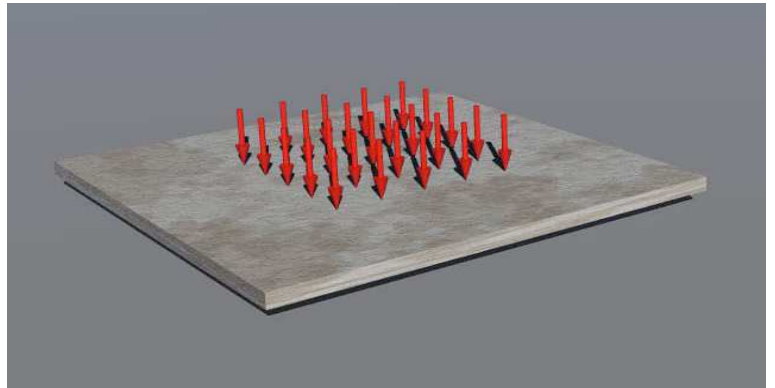


Fig. (1.3) - la contrainte sur la surface de contact

I.1.3- Contrainte oblique:

La contrainte se décompose alors en une contrainte normale, notée σ_n , et une composante tangentielle, dite contrainte cisailant, notée τ . [1]

C'est le cas le plus général, il y a des contraintes à l'intérieur d'un milieu continu.

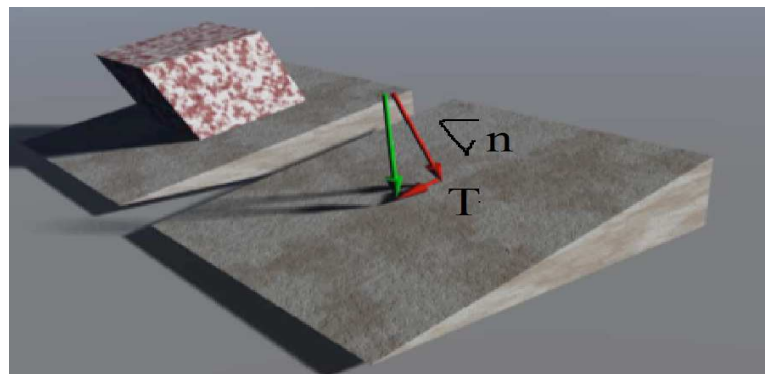


Fig.(1.4) - la contrainte normale et tangentielle.

Il y a rupture lorsque la contrainte normale sur la surface fictive devient supérieure à la contrainte admissible. [1]

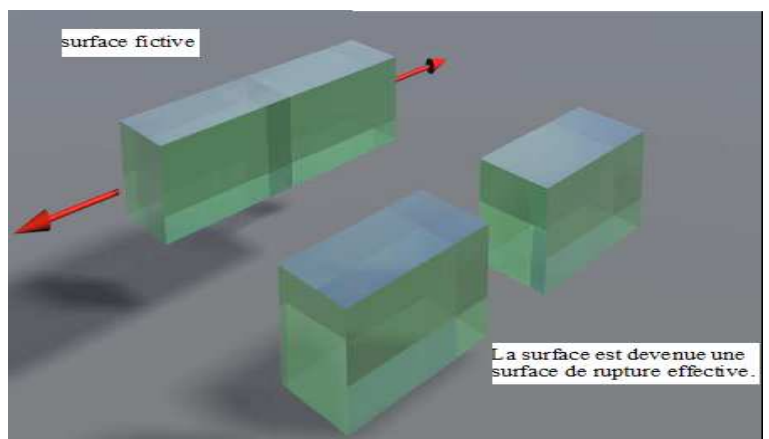


Fig.(1.5) - la contrainte normale à l'intérieur.

Autre exemple :

Il y a rupture lorsque la contrainte de cisaillement sur la surface fictive devient supérieure à la contrainte admissible. [1]

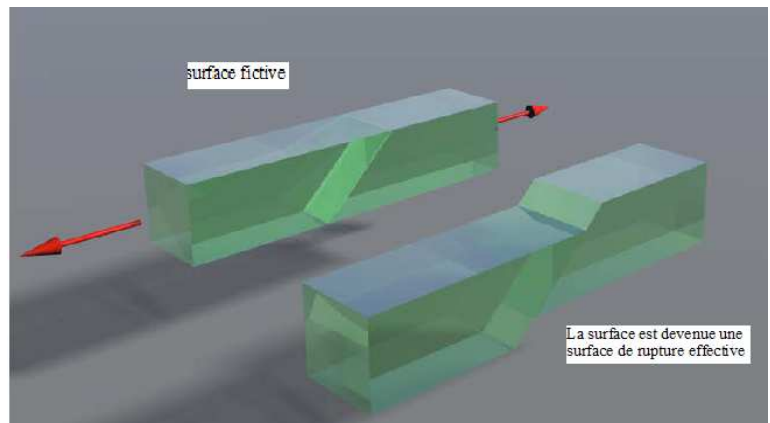


Fig. (1.6) - la contrainte de cisaillement.

Origine des contraintes :

Dès qu'un milieu continu est soumis à des forces extérieures (forces de surface, forces de volume), il est soumis à des contraintes.

Connaître les contraintes à l'intérieur d'un milieu continu signifie pouvoir les calculer en chaque point et pour toutes les orientations de surface possible. Cela revient à calculer 9 fonctions scalaires (tenseur).

On peut montrer que, pour chaque point, il existe 3 plans perpendiculaires 2 à 2 sur lesquels la contrainte est normale. Ces plans sont appelés plans principaux.

Si on connaît ces 3 contraintes normales (σ_1 , σ_2 , σ_3), appelées contraintes principales, alors on peut calculer les contraintes pour n'importe quelle orientation. [1]

Par convention : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

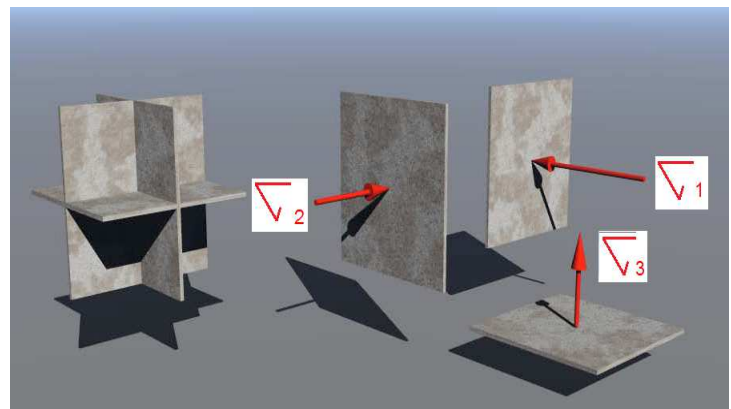


Fig. (1.7) - les contraintes principales.

CHAPITER I : Tenseur De Contrainte Et Tenseur De Déformation

Il faut les préciser toutes les trois pour décrire complètement l'état de contrainte :

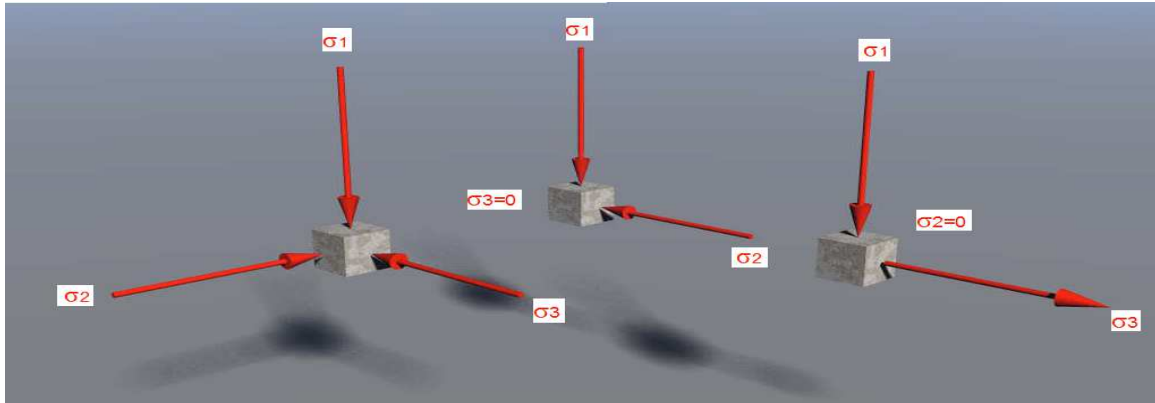


Fig. (1.8) - Etats des contraintes différents.

Dans le cas général, l'orientation des plans principaux, celle des contraintes principales correspondantes et l'amplitude de ces contraintes peut varier d'un endroit à l'autre. Dans la pratique, on fera l'hypothèse que les directions ne changent pas sur une région suffisamment grande. [1]

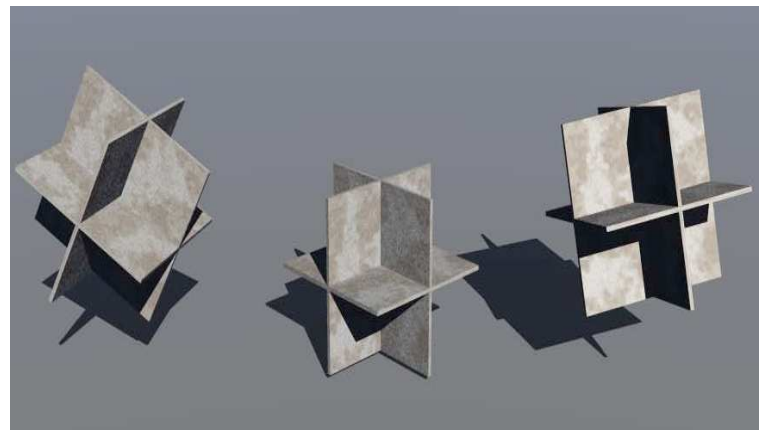


Fig. (1.9) - différents états des contraintes.

Quelques exemples d'états des contraintes :

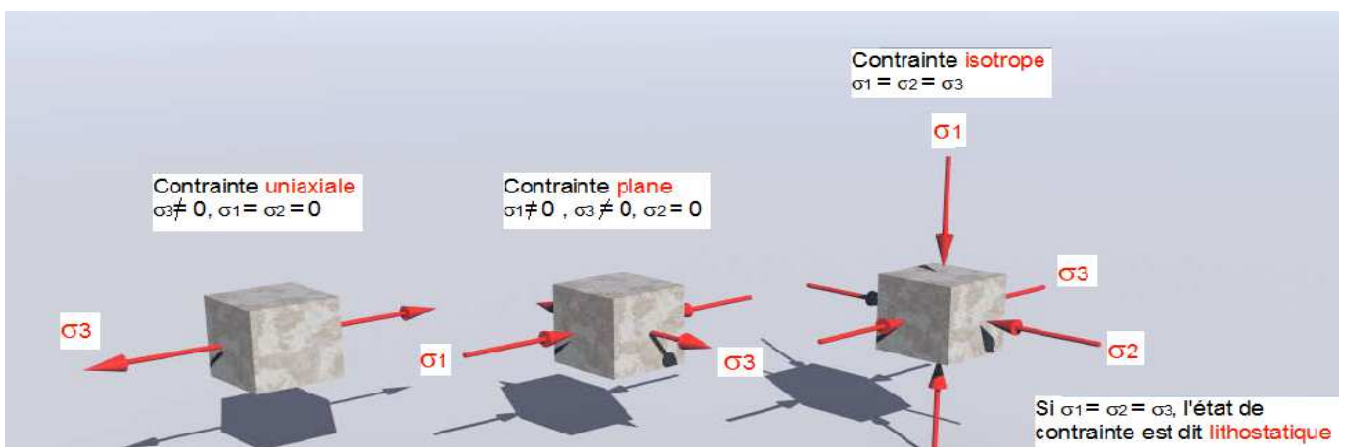


Fig. (1.10) - Exemple d'états des contraintes.

I.1.4. Signification physique des contraintes :

I.1.4.1. Contraintes normale et tangentielle :

Le tenseur des contraintes permet de définir une contrainte normale σ_n et une contrainte tangentielle σ_t s'exerçant sur une facette (figure 1.11). [3]

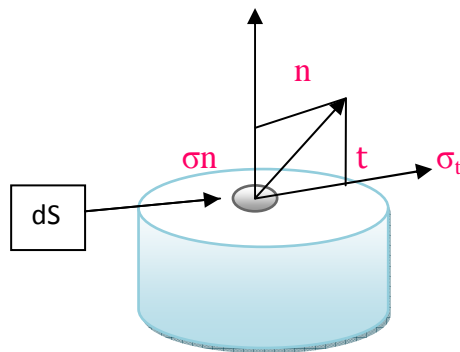


Fig. (1.11) - Contraintes normale et tangentielle.

La contrainte normale σ_n est la projection du vecteur contrainte sur la normale à cette facette. Elle s'exprime sous la forme : [3]

$$\sigma_n(M, \vec{n}) = \vec{t}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad (1.1)$$

La contrainte tangentielle σ_t s'exerçant sur une facette est la projection du vecteur contrainte sur cette facette, c'est-à-dire sur le plan de normale \vec{n} .

Elle peut également être définie comme le complément de la contrainte normale (Portée par \vec{n}) dans le vecteur contraint.

En notant \vec{b} le vecteur unitaire du plan de normale \vec{n} portant la contrainte tangentielle, on peut écrire : [3]

$$\sigma_t \vec{b} = \vec{t} - \sigma_n \text{ ou } \sigma_t = \vec{t} \cdot \vec{b} \quad (1.2)$$

Les contraintes normale et tangentielle sont d'une grande importance en mécanique des milieux continus.

Elles permettent en particulier de définir les conditions aux limites en pression (contrainte normale sur une face), les conditions d'interface (lois de frottement reliant les contraintes normale et tangentielle), ...

I.1.4.2. Conditions aux limites en pression :

D'une façon générale, des conditions de pression peuvent être appliquées à la frontière d'un solide (zone de chargement, face libre, ...). [3]

Ces conditions sont alors dites "aux limites". Elles se traduisent par des relations du type :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T} \quad (1.3)$$

Où \vec{T} est un vecteur contrainte représentant les pressions imposées sur la surface de normale unitaire \vec{n} .

Comme dans le cas des déplacements, il se peut que l'on ne connaisse que certaines composantes du vecteur \vec{T} .

La condition porte alors sur ces composantes connues, et pas sur les autres.

I.1.4.3. Contraintes dans un repère orthonormé :

Considérons maintenant un cube dont les arêtes sont portées par les vecteurs de référence d'un système de coordonnées orthonormé (figure 12). [3]

Il est alors possible de donner une signification plus "physique" aux différentes composantes du tenseur des contraintes.

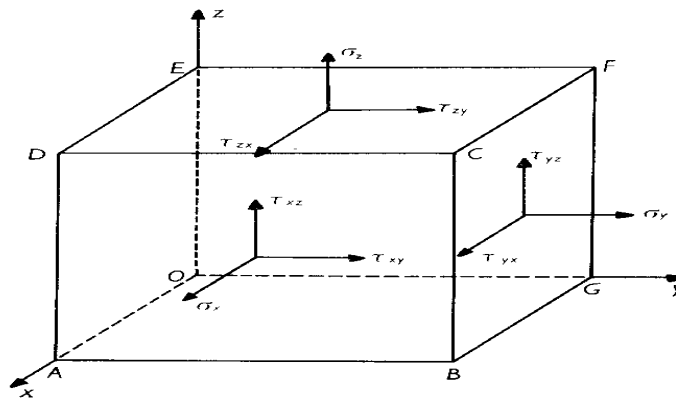


Fig. (1.12) - Contraintes s'appliquant sur les facettes d'un cube.

En effet, σ_{xx} représente la contrainte normale appliquée au solide dans la direction x , tandis que σ_{xy} et σ_{xz} sont les composantes de la contrainte tangentielle agissant sur cette même facette. D'une façon plus générale, on voit donc que les composantes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} sont des contraintes normales tandis que les autres sont des contraintes tangentielles, lorsque l'on raisonne par rapport aux facettes orthogonales aux vecteurs de référence.

Une facette quelconque de normale unitaire \vec{n} (l'extrémité de \vec{n} peut être située partout sur la sphère unité), alors les contraintes normale et tangentielle sont obtenues par l'équation 1 et 2.

I.1.5. Utilisation du tenseur des contraintes :

I.1.5.1. Contraintes principales :

Le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique, il est donc diagonalisable dans un repère orthonormé.

Dans ce repère, dit principal, les trois valeurs propres du tenseur des contraintes sont souvent notées σ_I , σ_{II} et σ_{III} , Ce sont les contraintes principales du tenseur σ qui s'écrit : [3]

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sigma_{III} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

I.1.5.2. Contrainte moyenne et déviateur:

Il est courant de décomposer le tenseur des contraintes de Cauchy en une Partie dite sphérique et une partie dite dévia torique sous la forme : [3]

$$\sigma = \mathbf{S} + \sigma_m \mathbf{I} \quad \text{avec} \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \quad (1.5)$$

Où \mathbf{I} est la tenseur identité. σ_m est appelée contrainte moyenne et \mathbf{S} le tenseur déviateur des contraintes.

On peut remarquer que le tenseur déviateur des contraintes \mathbf{S}^{\rightarrow} est symétrique et de trace nulle.

I.1.5.3. Contraintes équivalentes :

Il est très intéressant, en résistance des matériaux, de comparer les contraintes obtenues sur une structure (après mesures ou par le calcul) aux caractéristiques du ou des matériaux qui la constituent.

Pour cela, il est commode d'utiliser des scalaires représentatifs du tenseur des contraintes, qui sont indépendants du repère dans lequel on travaille.

Le tenseur déviateur des contraintes de Cauchy possède trois invariants souvent notés \mathbf{J}_1 , \mathbf{J}_2 et \mathbf{J}_3 qui sont : [3]

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J}_1 = \text{tr}(\mathbf{S}) \\ \mathbf{J}_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}) \\ \mathbf{J}_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

CHAPITER I : Tenseur De Contrainte Et Tenseur De Déformation

Dans le cas du tenseur des contraintes (et non du déviateur), ces invariants sont notes I_1 , I_2 et I_3 :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\sigma) \\ I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma \cdot \sigma) \\ I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma \cdot \sigma \cdot \sigma) \end{cases} \quad (1.7)$$

Un scalaire représentatif du tenseur des contraintes, et indépendant du repère, est appelé contrainte équivalente.

Il est souvent note σ . Il sert à comparer les contraintes dans la structure étudiée aux caractéristiques du matériau (par exemple sa limite d'élasticité).

Les deux contraintes équivalentes les plus utilisées sont celles de Von Mises et de Tresca.

I.1.5.3.1. La contrainte équivalente de von Mises :

La contrainte équivalente de von Mises est fonction uniquement du second invariant du déviateur des contraintes :

$$\sigma = \sqrt{(3J_2)} \quad (1.8)$$

Dans un repère orthonormé, elle s'écrit directement en fonction des composantes du déviateur ou du tenseur des contraintes sous la forme : [3]

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2} \sum S_{ij} \cdot S_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij} - \frac{1}{2} (\sum \sigma_{kk})^2} \quad (1.9)$$

I.1.5.3.2. La contrainte équivalente de Tresca :

La contrainte équivalente de Tresca est définie en fonction des contraintes principales sous la forme:

$$\sigma = \sup (|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|, |\sigma_{III} - \sigma_I|) \quad (1.10)$$

Elle présente l'inconvénient de ne pas pouvoir s'écire simplement en fonction des composantes du tenseur des contraintes. Pour l'obtenir, il faut diagonaliser ce tenseur.

I.2. Théorie de l'élasticité

I.2.1. Présentation :

La théorie de l'élasticité étudie les déplacements, les déformations et les contraintes dans un solide soumis à des forces extérieures.

Nous adopterons les hypothèses suivantes :

- Le matériau est homogène, isotrope, linéaire et élastique

Le repère $\{O; x, y, z\}$ est un repère orthonormé. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont les vecteurs unitaires. [1]

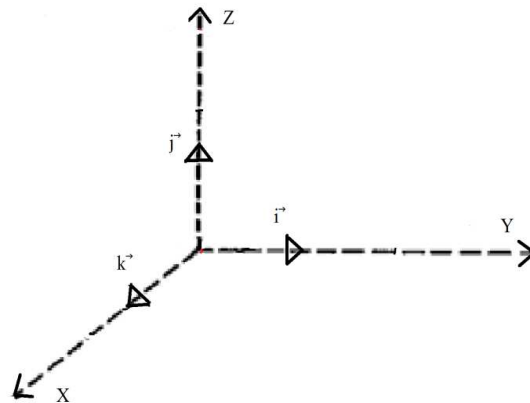


Fig. (1.13) - Repère orthonormé $\{O; x, y, z\}$ et vecteurs unitaires $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

I.2.2. Décomposition de la contrainte :

II.2.2.1. Contrainte normale et contrainte tangentielle :

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant \vec{n} et sa projection : [1]

$$\mathbf{T}(\mathbf{M}, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \boldsymbol{\tau}_n \quad (1.11)$$

Avec :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{M}, \vec{n}) \quad (1.12)$$

σ_n est la contrainte normale et $\boldsymbol{\tau}_n$ est le vecteur cisaillement ou contrainte tangentielle.

σ_n est une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

Remarque : on a la relation (théorème de Pythagore) : [1]

$$\|\mathbf{T}\|^2 = \sigma_n^2 + \|\boldsymbol{\tau}_n\|^2 \quad (1.13)$$

II.2.2.2. Formule de Cauchy : (tenseur des contraintes)

Considérons le tétraèdre infiniment petit MABC construit sur les axes x, y et z (figure 1.14). Soit \vec{n} de composantes (n_x, n_y, n_z) , la normale unitaire au plan ABC dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et ds l'aire du triangle ABC. [1]

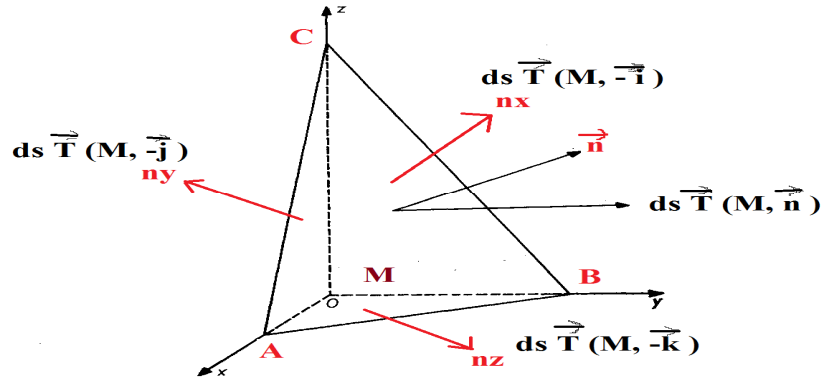


Fig. (1.14) - Equilibre du tétraèdre (Cauchy)

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} \wedge \vec{AC} &= 2 \, ds \, \vec{n} \\
 &= 2 \, ds \, n_x \, \vec{i} + 2 \, ds \, n_y \, \vec{j} + 2 \, ds \, n_z \, \vec{k} \\
 &= (\vec{MB} - \vec{MC}) \wedge (\vec{MC} - \vec{MA}) \\
 &= (\vec{MB} \wedge \vec{MC}) - (\vec{MA} \wedge \vec{MC}) - (\vec{MB} \wedge \vec{MA}) + (\vec{MA} \wedge \vec{MA}) \\
 &= (\vec{MB} \wedge \vec{MC}) + (\vec{MC} \wedge \vec{MA}) + (\vec{MA} \wedge \vec{MB}) + 0 \\
 &= 2 \, \text{aire}(\text{MBC}) \, \vec{i} + 2 \, \text{aire}(\text{MAC}) \, \vec{j} + 2 \, \text{aire}(\text{MAB}) \, \vec{k}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

On en déduit par identification :

$$\text{aire}(\text{MBC}) = n_x \, ds \quad , \quad \text{aire}(\text{MAC}) = n_y \, ds \quad , \quad \text{aire}(\text{MAB}) = n_z \, ds \tag{1.15}$$

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces (les forces de volume sont des infiniment petits d'ordre supérieur) :

$$ds \, \vec{T}(\vec{M}, \vec{n}) + n_x \, ds \, \vec{T}(\vec{M}, -\vec{i}) + n_y \, ds \, \vec{T}(\vec{M}, -\vec{j}) + n_z \, ds \, \vec{T}(\vec{M}, -\vec{k}) = 0 \tag{1.16}$$

Il vient après simplification :

$$\vec{T}(\vec{M}, \vec{n}) = n_x \, \vec{T}(\vec{M}, \vec{i}) + n_y \, \vec{T}(\vec{M}, \vec{j}) + n_z \, \vec{T}(\vec{M}, \vec{k}) \tag{1.17}$$

Cette équation s'écrit sous forme matricielle :

$$\vec{T}(\vec{M}, \vec{n}) = \{ \vec{T}(\vec{M}, \vec{i}) + \vec{T}(\vec{M}, \vec{j}) + \vec{T}(\vec{M}, \vec{k}) \} \cdot (\vec{n}) \tag{1.18}$$

CHAPITER I : Tenseur De Contrainte Et Tenseur De Déformation

Soit :

$$\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}^{\rightarrow}) = \{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) \} \cdot (\mathbf{n}) \quad (\text{formule de cauchy}) \quad (1.19)$$

ou $[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M})]$ est le tenseur des contraintes (1) de Cauchy (2) en M. Les composantes du tenseur des contraintes (figure 1.14) dans le repère $\{\mathbf{i}^{\rightarrow}, \mathbf{j}^{\rightarrow}, \mathbf{k}^{\rightarrow}\}$ sont : [1]

$$\text{Composantes sur : } \begin{cases} \mathbf{i}^{\rightarrow} \\ \mathbf{j}^{\rightarrow} \\ \mathbf{k}^{\rightarrow} \end{cases} \begin{matrix} \mathbf{T}^{\rightarrow}(\mathbf{M}, \mathbf{i}^{\rightarrow}) & \mathbf{T}^{\rightarrow}(\mathbf{M}, \mathbf{j}^{\rightarrow}) & \mathbf{T}^{\rightarrow}(\mathbf{M}, \mathbf{k}^{\rightarrow}) \\ \left(\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{array} \right) \end{matrix} \quad (1.20)$$

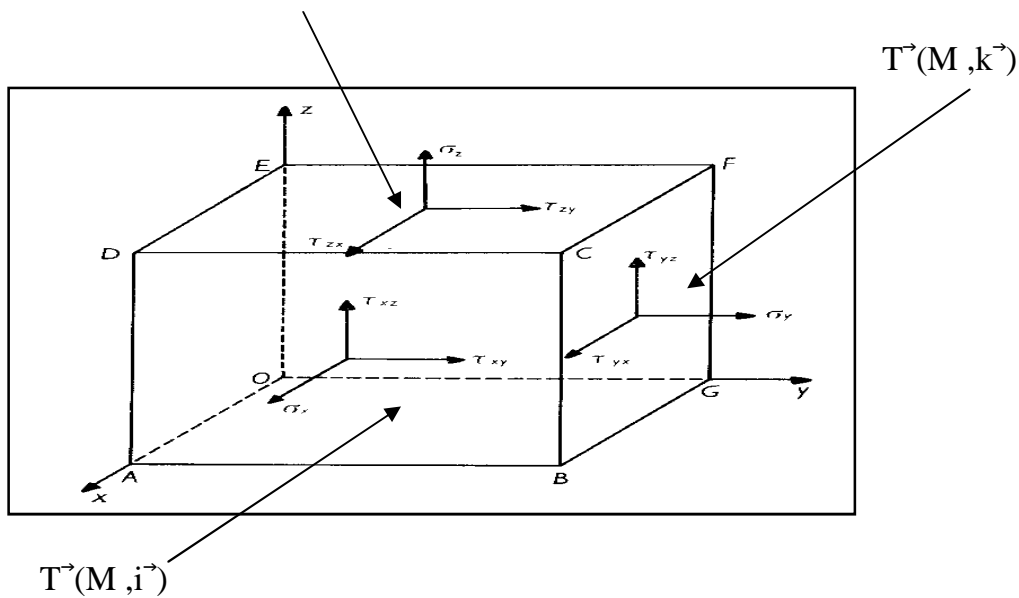


Fig. (1.15) - Vecteur contrainte sur les facettes \mathbf{i}^{\rightarrow} , \mathbf{j}^{\rightarrow} et \mathbf{k}^{\rightarrow} en M

La contrainte normale sur la facette \mathbf{n}^{\rightarrow} en M est égale à :

$$\sigma_n = \mathbf{n}^{\rightarrow} \cdot \mathbf{T}^{\rightarrow}(\mathbf{M}, \mathbf{n}^{\rightarrow}) = (\mathbf{n})^T \{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) \} \cdot (\mathbf{n}) \quad (1.21)$$

Remarque : sur la facette \mathbf{i}^{\rightarrow} (figure 1.15), le vecteur contraint est :

$$\mathbf{T}^{\rightarrow}(\mathbf{M}, \mathbf{i}^{\rightarrow}) = \sigma_{xx} \mathbf{i}^{\rightarrow} + \sigma_{xy} \mathbf{j}^{\rightarrow} + \sigma_{xz} \mathbf{k}^{\rightarrow} \quad (1.22)$$

D'où la contrainte normale et le vecteur cisaillement : [1]

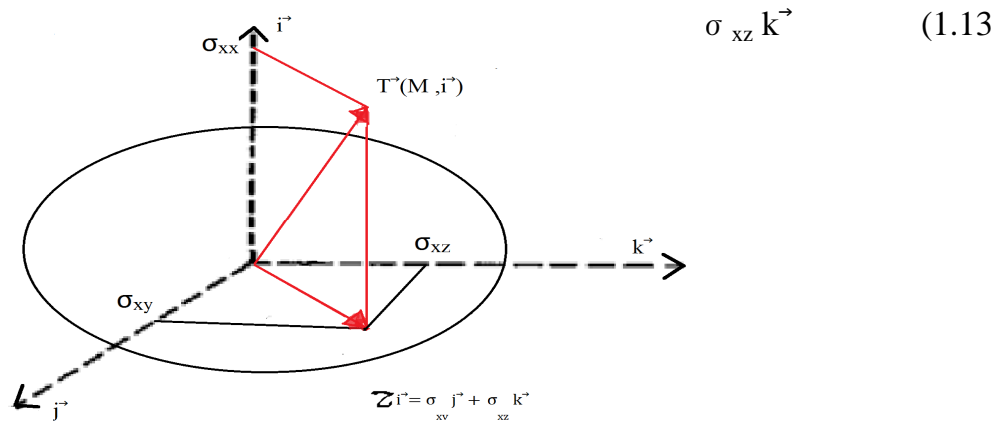


Fig. (1.16) - Vecteur contrainte sur la facette \vec{i} en M

II.2.2.3. Changement de repère : considérons le repère orthonormé $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ avec : [1]

$$[\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'] = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] \underbrace{\begin{pmatrix} i'.i & j'.i & k'.i \\ i'.j & j'.j & k'.j \\ i'.k & j'.k & k'.k \end{pmatrix}}_{[R]} \quad (1.23)$$

$$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = [\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'] \cdot [R]^{-1} \quad \text{avec : } [R]^{-1} = [R]^T, \quad \det [R] = 1 \quad (1.24)$$

$$\{V\} = \{V_x; V_y; V_z\} \quad \text{dans la repère } \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \quad (1.25)$$

$$\{V'\} = \{V_x'; V_y'; V_z'\} \quad \text{dans la repère } \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\} \quad (1.26)$$

On a les relations :

$$\begin{aligned} V \vec{=} V_x' \vec{i}' + V_y' \vec{j}' + V_z' \vec{k}' &= [\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'] \{V'\} = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] [R] \{V'\} \\ &= [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] \{V\} \end{aligned} \quad (1.27)$$

On en déduit :

$$\{V\} = [R] \{V'\} \quad ; \quad \{V'\} = [R]^{-1} \{V\} = [R]^T \{V\} \quad (1.28)$$

De la formule de Cauchy (1.19) et des relations :

$$\{T\} = [R] \{T'\} \quad ; \quad \{n\} = [R] \{n'\} \quad (1.29)$$

On déduit :

$$[R]\{T'\} = [\sigma] [R]\{n'\} \quad (1.30)$$

D'où :

$$\{T'\} = [R]^T [\sigma] [R]\{n'\} \quad (1.31)$$

et la formule de transformation pour la matrice des contraintes :

$$[\sigma'] = [R]^T [\sigma] [R] \quad (1.32)$$

II.2.2.4. Equations d'équilibre :

Soit \vec{f} la force par unité de volume appliquée au point de coordonnées (x, y, z) du solide.

Soient $\vec{\gamma}$ l'accélération du point de coordonnées (x, y, z) et ρ la masse volumique du matériau.

II.2.2.4.1. Equilibre en translation :

Ecrivons que la projection sur x de la somme des forces appliquées au parallélépipède rectangle infiniment petit, de centre M et de cotes dx, dy et dz, est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (1.16)) : [1]

$$\begin{aligned} & - \sigma_{xx}(x, y, z) dydz + \sigma_{xx}(x + dx, y, z) dy dz \\ & - \sigma_{xy}(x, y, z) dx dz + \sigma_{xy}(x, y + dy, z) dx dz \\ & - \sigma_{xz}(x, y, z) dx dy + \sigma_{xz}(x, y, z + dz) dx dy + f_x dx dy dz \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dv + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dv + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dv + f_x dv = \rho dv \gamma_x$$

Ou $dV = dx dy dz$. Il vient après simplification :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = \rho \gamma_x \quad (1.34)$$

De même :

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = \rho \gamma_y \quad (1.35)$$

et

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \gamma_z \quad (1.36)$$

II.2.2.4.2. Equilibre en rotation : réciprocity des contraintes tangentielles. [1]

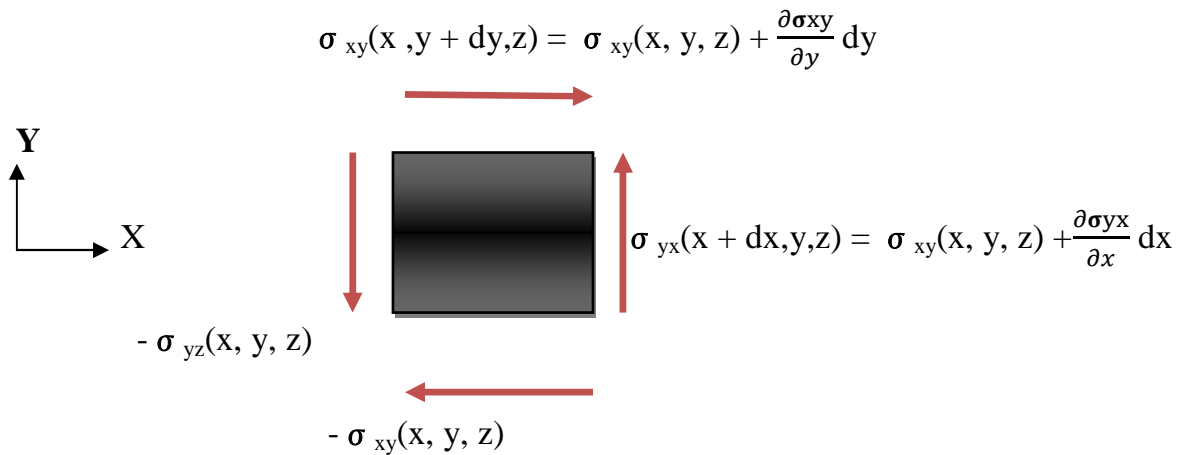


Fig. (1.17) - Equilibre du parallélépipède en rotation suivant z

Ecrivons que la projection sur Mz de la somme des moments des forces appliquées au parallélépipède est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (1.17)).[1]

Il vient, en négligeant infiniment petits d'ordre supérieurs à 3 :

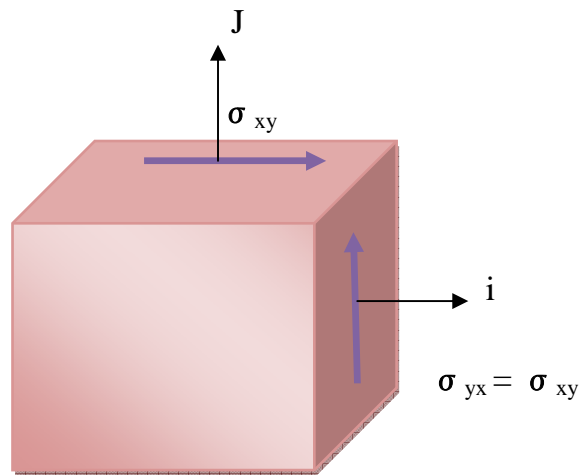


Fig. (1.18) - Réciprocity des contraintes tangentielles

De même :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \tag{1.37}$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique :

$$[\sigma] = [\sigma]^T \tag{1.38}$$

Remarque :

- Si \vec{n} et \vec{n}' sont deux facettes en M, on déduit de l'équation (1.38) :

$$\vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{\vec{n}\}^T [\sigma(M)] \{\vec{n}'\} = \{\vec{n}'\}^T [\sigma(M)] \{\vec{n}\} = \vec{n}' \cdot \vec{T}(M, \vec{n}') \quad \forall \vec{n}, \vec{n}' .$$

La contrainte normale sur la facette \vec{n} est :

$$\sigma_n = \{\vec{n}\}^T [\sigma] \{\vec{n}\} \quad (1.39)$$

II.2.2.5. Directions et contraintes principales :

Existe-t-il en M une facette \vec{n} telle que le vecteur contrainte soit colinéaire avec \vec{n} (figure 1.18). [1]

Dans ce cas, le vecteur cisaillement est nul sur cette facette et le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$

satisfait la relation :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \cdot \vec{n} \quad (1.40)$$

soit :

$$[\sigma(M)] \{\vec{n}\} = \sigma_n \{\vec{n}\} \quad (1.41)$$

σ_n est alors valeur propre du tenseur des contraintes et \vec{n} est le vecteur propre associé. [1]

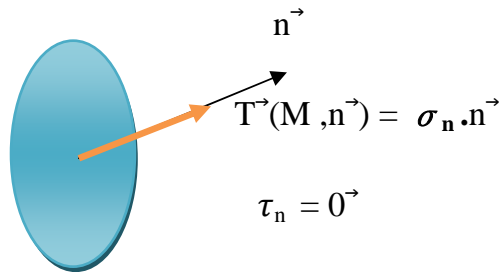


Fig. (1.19) - Contrainte principale en un point.

$[\sigma(M)]$ est une matrice symétrique à coefficients réels.

Elle a trois valeurs propres réelles (distinctes ou confondues). Si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres associés sont perpendiculaires entre eux.

Il existe donc en M un repère orthonormé $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ tel que sur les facettes \vec{n}_1, \vec{n}_2 et \vec{n}_3 le vecteur cisaillement soit nul (figure.1.19).

Les directions \vec{n}_1, \vec{n}_2 et \vec{n}_3 sont les directions principales.

CHAPITER I : Tenseur De Contrainte Et Tenseur De Déformation

Dans le repère principal $\{M; n_1^{\rightarrow}, n_2^{\rightarrow}, n_3^{\rightarrow}\}$, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma]_{\{M; n_1^{\rightarrow}, n_2^{\rightarrow}, n_3^{\rightarrow}\}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Où les contraintes normales σ_1 , σ_2 et σ_3 sont les contraintes principales ($n_1^{\rightarrow}, n_2^{\rightarrow}, n_3^{\rightarrow}$). [1]

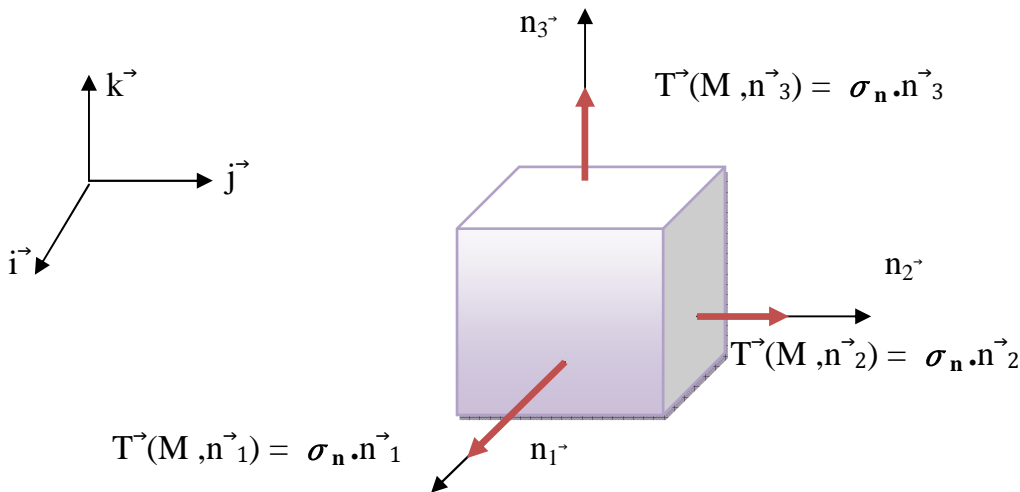


Fig. (1.20) - Faces et contraintes principales en M.

Les trois contraintes principales sont les racines de l'équation caractéristique :

$$P(\sigma_n) = \det([\sigma(M)] - \sigma_n[I]) \text{ est la matrice unité de dimension 3} \quad (1.43)$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{pmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n + I_3 = 0 \quad (1.44)$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère $\{i^{\rightarrow}, j^{\rightarrow}, k^{\rightarrow}\}$ I_1, I_2 et I_3 sont des invariants:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.45)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}[\sigma]^2) = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \\ = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \quad (1.46)$$

$$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{xy}^2 \\ = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (1.47)$$

CHAPITER I : Tenseur De Contrainte Et Tenseur De Déformation

Dans le repère principal $\{M; n_1^{\rightarrow}, n_2^{\rightarrow}, n_3^{\rightarrow}\}$, les composantes du vecteur contrainte sur la facette n^{\rightarrow} sont :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix} \quad (1.48)$$

Où n_1, n_2 et n_3 sont les composantes de n^{\rightarrow} . Compte-tenu de la relation :

$$\mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{n}_3^2 = \mathbf{1}$$

on en déduit :

$$\mathbf{T}_1^2 / \sigma_1^2 + \mathbf{T}_2^2 / \sigma_2^2 + \mathbf{T}_3^2 / \sigma_3^2 = \mathbf{1} \quad (1.49)$$

Quand n^{\rightarrow} varie, l'extrémité du vecteur $T^{\rightarrow}(M, n^{\rightarrow})$ se déplace sur l'ellipsoïde de Lamé dont les axes sont les directions principales et les demi axes sont σ_1, σ_2 et σ_3 .

I.3. Tenseur des Déformations :

Sous l'action des forces appliquées, les points d'un solide se déplacent. Il en résulte, pour des fibres infinitésimales de matière, des variations de longueur et des variations d'angle appelées déformations. [2]

I.3.1. Configuration, vecteur déplacement :

Le volume occupé par le solide à l' instant t est note C_t et appelé configuration courante.

La configuration initiale C_0 est la configuration de référence.

Le point M_0 de la configuration initiale devient le point M de la configuration courante

(figure1.20) : [2]

$$OM_0^{\vec{}} = x_0^{\vec{}} = x_0 i^{\vec{}} + y_0 j^{\vec{}} + z_0 k^{\vec{}} \quad , \quad OM^{\vec{}} = x^{\vec{}} = x i^{\vec{}} + y j^{\vec{}} + z k^{\vec{}} \quad (1 .50)$$

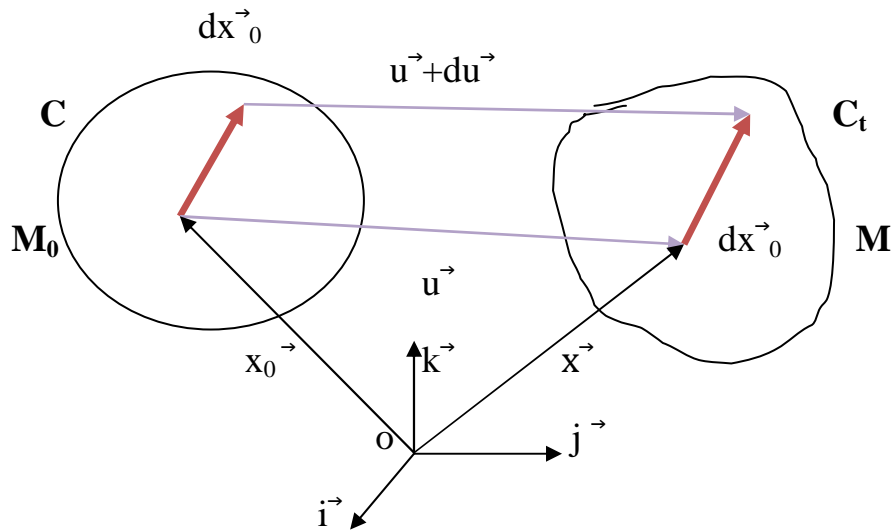


Fig. (1.21) - Transformation d'un point et d'un vecteur.

On appelle vecteur déplacement du point M_0 le vecteur :

$$u^{\vec{}}(M_0, t) = M_0M^{\vec{}} = OM^{\vec{}} - OM_0^{\vec{}} = u i^{\vec{}} + v j^{\vec{}} + w k^{\vec{}} \quad (1 .51)$$

Où u, v et w sont des fonctions continues et dérivables de x_0, y_0 et z_0 , d'où :

$$x(M_0, t) = x_0 + u^{\vec{}}(M_0, t) \quad (1 .52)$$

Les coordonnées du point M s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} X(x_0, y_0, z_0, t) \\ Y(x_0, y_0, z_0, t) \\ Z(x_0, y_0, z_0, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U(x_0, y_0, z_0, t) \\ V(x_0, y_0, z_0, t) \\ W(x_0, y_0, z_0, t) \end{Bmatrix} \quad (1 .53)$$

I.3.2. Tenseur des dilatations :

Considérons en M_0 deux vecteurs infiniment petits dx_0^{\rightarrow} et dx'_0^{\rightarrow} (figure 1.21). [2]

Ces vecteurs deviennent dx^{\rightarrow} et dx'^{\rightarrow} dans la configuration C_t :

$$\{dx\} = [F]\{dx_0\} \qquad \{dx'\} = [F]\{dx'_0\} \qquad (1.54)$$

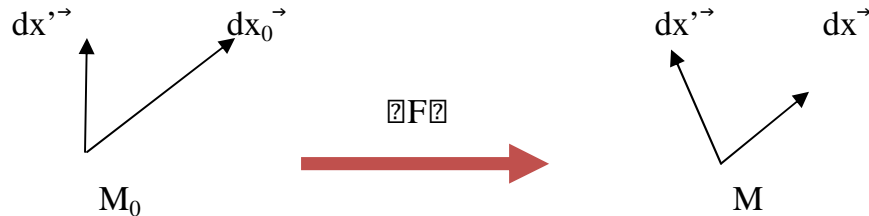


Fig. (1.22) - Transformation des vecteurs dx_0^{\rightarrow} et dx'_0^{\rightarrow} .

Le produit scalaire des deux vecteurs dx^{\rightarrow} et dx'^{\rightarrow} s'écrit :

$$dx^{\rightarrow} dx'^{\rightarrow} = \{dx\}^T \{dx'\} = \{dx_0\}^T [F]^T [F] \{dx'_0\} = \{dx_0\}^T [C] \{dx'_0\} \qquad (1.55)$$

Où :

$$[C] = [F]^T [F] = ([I][L]^T)([I]+[L]) = [L]+[L]^T+[L]+[L]^T+[L] \qquad (1.56)$$

est le tenseur des dilatations.

Si $d^{\rightarrow}x'0 = d^{\rightarrow}x0$, il vient :

$$ds^2 = dx^{\rightarrow} dx^{\rightarrow} = \{dx_0\}^T [C] \{dx_0\} > 0 \qquad \forall dx_0^{\rightarrow} \neq 0. \qquad (1.57)$$

Où ds est la longueur du vecteur dx^{\rightarrow} : la matrice $[C]$ est définie positive.

I.3.3. Tenseur des déformations de Green-Lagrange :

Soit ds_0 la longueur du vecteur dx_0^{\rightarrow} et ds celle du vecteur dx^{\rightarrow} ; la différence $ds^2 - ds_0^2$ s'écrit : [2]

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= dx^{\rightarrow} dx^{\rightarrow} - dx_0^{\rightarrow} dx_0^{\rightarrow} \\ &= \{dx\}^T \{dx\} - \{dx_0\}^T \{dx_0\} \\ &= \{dx_0\}^T ([C] - [I]) \{dx_0\} \\ &= 2\{dx_0\}^T [E] \{dx_0\} \end{aligned} \qquad (1.58)$$

$$[E] = \frac{1}{2}([C] - [I]) = \underbrace{\frac{1}{2}([L]^T - [L])}_{\text{Termes linéaires}} = \underbrace{\frac{1}{2}([L]^T - [L])}_{\text{Termes non linéaires}} \qquad (1.59)$$

est le tenseur des déformations de Green-Lagrange .

CHAPITER I : Tenseur De Contrainte Et Tenseur De Déformation

Remarque : si $[E] = [0]$, on a :

$$ds^2 = ds_0^2 \quad \forall dx_0^{\vec{}} \quad (1.60)$$

Le voisinage du point M_0 subit un mouvement de corps rigide (translation et/ou rotation) entre les configurations C_0 et C_t .

La condition $[E] = [0]$ implique pour le tenseur des dilatations :

$$[C] = [F]^T [F] = [I] \quad \text{d'où : } [F]^T = [F]^{-1} \quad (1.61)$$

Dans le repère $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange sont:

$$[E] = \begin{pmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ & E_{yy} & E_{yz} \\ \text{sym} & & E_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

avec (notation de Voigt) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{xy} = E_{yx} \\ E_{xz} = E_{zx} \\ E_{yz} = E_{zy} \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v}{\partial y_0} \\ \frac{\partial w}{\partial z_0} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \end{array} \right\}}_{\text{Termes linéaires}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_0} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y_0} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z_0} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial y_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial z_0} \\ \frac{\partial u}{\partial y_0} \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{array} \right\}}_{\text{Termes non linéaires}} \quad (1.63)$$

Remarque:

– Le tenseur des dilatations s'écrit en fonction du tenseur des déformations:

$$[C] = [I] + 2 [E] \quad (1.64)$$

– Les composantes du tenseur des déformations sont sans dimension.

I.3.4. Repère principal, dilatations et déformations principales :

En M, dans le repère principal $\{M; n_1^{\rightarrow}, n_2^{\rightarrow}, n_3^{\rightarrow}\}$, le tenseur des déformations se réduit à : [2]

$$[\varepsilon]_{\{M; n_1^{\rightarrow}, n_2^{\rightarrow}, n_3^{\rightarrow}\}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

où ε_1 , ε_2 et ε_3 sont les déformations principales.

Remarque : les dilatations principales sont : [2]

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon_1, \lambda_2 = 1 + \varepsilon_2, \lambda_3 = 1 + \varepsilon_3 \quad (1.66)$$

La matrice [C] est symétrique, à coefficients réels et définie positive.

Ses valeurs Propres (ou valeurs principales) sont positives. Il existe en M_0 un repère orthonormé (ou repère principal) $\{M_0; n_{01}^{\rightarrow}, n_{02}^{\rightarrow}, n_{03}^{\rightarrow}\}$ tel que :

$$[C]\{n_{0i}\} = \lambda_i^2 \{n_{0i}\} \quad i = 1,2,3. \quad (1.67)$$

Où λ_i est la dilatation principale en M_0 dans la direction principale n_{0i}^{\rightarrow} .

De la relation :

$$\det [C] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = \det [F]^T [F] = (\det [F])^2. \quad (1.68)$$

On déduit l'expression de la dilatation volumique en fonction des dilatations principales:

$$\det [F] = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (1.69)$$

Le tenseur des déformations [E] a les mêmes directions principales que [C].

En effet, des équations (2.14) et (2.15) on déduit :

$$([\mathbf{I}] + 2 [\mathbf{E}])\{n_{0i}\} = \lambda_i^2 \{n_{0i}\} \quad (1.70)$$

D'où :

$$[\mathbf{E}]\{n_{0i}\} = E_i \{n_{0i}\} \quad \text{avec } E_i = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) \quad (1.71)$$

Soit $\{dx_0\}$ un vecteur infiniment petit porte par la direction principale $\{n_{0i}\}$:

$$[C]\{dx_0\} = [F]^T [F]\{dx_0\} = \lambda_i^2 \{dx_0\} \quad (1.72)$$

On en déduit :

$$[F]^T \{ dx_0 \} = \lambda_i^2 \{ dx_0 \} \quad (1.73)$$

ou $\{ dx \} = [F] \{ dx_0 \}$, puis en multipliant les deux membres de cette équation par $[F]$:

$$[F] [F]^T \{ dx \} = \lambda_i^2 [F] \{ dx_0 \} = \lambda_i^2 \{ dx \} \quad (1.74)$$

Et $[F] [F]^T \{ ni \} = \lambda^2 \{ ni \} \quad (1.75)$

ou $\{ ni \}$ est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\{ dx \}$:

$$\{ ni \} = \frac{1}{\lambda_i} [F] \{ n_{0i} \} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.76)$$

Le repère $\{ M_0; n_{01}, n_{02}, n_{03} \}$ est le repère principal de la transformation en M_0 .

Le repère $\{ M; n_1, n_2, n_3 \}$ est le repère principal de la transformation en M .

I.3.5. Tenseur des déformations linéarité :

Le tenseur des déformations (équation 1.59) se réduit à : [2]

$$[E] \approx \frac{1}{2} ([L]^T + [L]) = [\varepsilon] = \begin{pmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ & E_{yy} & E_{yz} \\ \text{sym} & & E_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ & E_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \text{sym} & & E_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

où :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2 \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, 2 \varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, 2 \varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases}$$

Le tenseur $[E]$ est appelé tenseur des déformations linéarité.

Le tenseur des dilatations (équation 1.64) se réduit à :

$$[C] \approx [I] + 2 [E] \quad (1.78)$$

III. Problèmes classiques d'élasticité:

Les problèmes résolus dans cette section permettent d'illustrer les techniques de résolution présentées au chapitre précédent.

III.1. Cylindre sous pression:

On considère un cylindre circulaire de rayon intérieur a et de rayon extérieur b , figure (7.1).

Il est soumis à l'action de pressions interne p_i et externe p_e uniformément réparties.

Résolution : Si le cylindre est suffisamment long, il est raisonnable de faire l'hypothèse de l'état plan de déformation. Il est également tout indiqué de choisir des coordonnées cylindriques, le vecteur e_z coïncidant avec celui du cylindre. Par raison de symétrie, le déplacement d'un point quelconque ne peut être que radial et indépendant de θ et z :

$$\mathbf{u} = u_r(r) \mathbf{e}_r \quad (7.1)$$

On en déduit par la formule du rotationnel en coordonnées cylindriques que $\text{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Les équations d'équilibre en termes de déplacements (Lamé-Navier), donnent :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} \left[r \frac{du_r}{dr} \right] + f_r = 0 \quad (7.1)$$

En l'absence de force de volume cette équation s'intègre facilement. On obtient

$$\sigma_{rr} = C_1 r + C_2/r \quad ; \quad u_\theta = 0 \quad ; \quad u_z = 0 \quad (7.1)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Pour les déterminer, il nous reste à imposer les conditions limites en contrainte. Pour cela, il faut d'abord calculer les déformations puis les contraintes associées au champ de déplacement. Les déformations sont la partie symétrique du gradient des déplacements. En utilisant la formule du gradient d'un vecteur en cylindrique, on obtient

$$\epsilon_{rr} = C_1 + C_2/r \quad ; \quad \epsilon_{\theta\theta} = C_1 r + C_2/r \quad ; \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_r = \epsilon_z = 0 \quad (7.1)$$

Il n'y a donc pas de déformation de cisaillement, ce qui était évident a priori, vu la symétrie du problème. En appliquant la loi de Hooke, (6.58), il vient

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1+2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (7.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1+2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (7.1)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1+2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (7.1)$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_r = \sigma_z = 0 \quad (7.1)$$

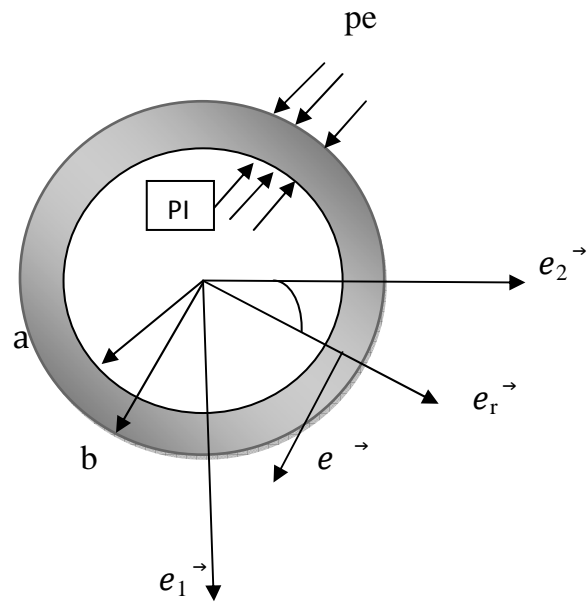


Fig.(3.1) –

La condition limite en contrainte s'exprime par :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{\rightarrow} = \mathbf{T}_d^{\rightarrow} \quad (3.1)$$

Avec sur la face intérieure :

$$\mathbf{n}^{\rightarrow} = -\mathbf{e}_r^{\rightarrow}, \mathbf{T}_d^{\rightarrow} = \mathbf{pi} \mathbf{e}_r^{\rightarrow} \quad (3.1)$$

En utilisant (7.10), la relation (7.9) s'écrit sous forme matricielle, en coordonnées cylindriques :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{rr} (r = a), C_2 = -\mathbf{pi} \quad (3.11)$$

Pour la face extérieure, on à :

$$\mathbf{n}^{\rightarrow} = \mathbf{e}_r^{\rightarrow}, \mathbf{T}_d^{\rightarrow} = -\mathbf{pe} \mathbf{e}_r^{\rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{rr} (r = a), C_2 = -\mathbf{pi} \quad (3.11)$$

Les deux conditions sur srr fournissent les deux constantes. Tous calculs faits, on obtient

$$\mathbf{C}_1 = \frac{(1-2\vartheta)}{E} \frac{(a^2 \text{pi} - b^2 \text{pe})}{b^2 - a^2} \quad ; \quad \mathbf{C}_1 = \frac{(1-\vartheta)}{E} \frac{(\text{pi} - \text{pe})}{1/a^2 - 1/b^2} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(a^2 \text{pi} - b^2 \text{pe})}{b^2 - a^2} - \frac{(\text{pi} - \text{pe})}{r^2/a^2 - r^2/b^2} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(a^2 \text{pi} - b^2 \text{pe})}{b^2 - a^2} + \frac{(\text{pi} - \text{pe})}{r^2/a^2 - r^2/b^2} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{rr} = 2\vartheta \frac{(a^2 \text{pi} - b^2 \text{pe})}{b^2 - a^2} \quad (3.11)$$

III.1. Problèmes classiques d'élasticité: [6]

Les problèmes résolus dans cette section permettent d'illustrer les techniques de résolution présentées au chapitre précédent.

III.1.1. Cylindre sous pression:

On considère un cylindre circulaire de rayon intérieur a et de rayon extérieur b , figure (3.1).

Il est soumis à l'action de pressions interne p_i et externe p_e uniformément réparties.

Résolution : Si le cylindre est suffisamment long, il est raisonnable de faire l'hypothèse de l'état plan de déformation. On choisit des coordonnées cylindriques, le vecteur e_z coïncidant avec celui du cylindre. Par raison de symétrie, le déplacement d'un point quelconque ne peut être que radial et indépendant de θ et z : [6]

$$\mathbf{u} = u_r(r) \mathbf{e}_r \quad (3.1)$$

On en déduit par la formule du rotationnel en coordonnées cylindriques que $\text{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Les équations d'équilibre en termes de déplacements (Lamé-Navier), donnent :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_r) \right) + f_r = 0 \quad (3.2)$$

En l'absence de force de volume cette équation s'intègre facilement. On obtient

$$u_r = C_1 r + C_2 / r \quad ; \quad u_\theta = 0 \quad ; \quad u_z = 0 \quad (3.3)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Pour les déterminer, il nous reste à imposer les conditions limites en contrainte. Pour cela, il faut d'abord calculer les déformations puis les contraintes associées au champ de déplacement.

Les déformations sont la partie symétrique du gradient des déplacements. En utilisant la formule du gradient d'un vecteur en cylindrique, on obtient : [6]

$$\varepsilon_{rr} = C_1 - C_2 / r^2 \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = C_1 r + C_2 / r^2 \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_r = \varepsilon_z = \varepsilon_{rz} = 0 \quad (3.4)$$

CHAPITER III : Exemples D'application

Il n'y a donc pas de déformation de cisaillement, ce qui était évident a priori, vu la symétrie du problème. En appliquant la loi de Hooke : [6]

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C1}{1-2\nu} - \frac{C2}{r^2} \right) \quad (3.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C1}{1-2\nu} + \frac{C2}{r^2} \right) \quad (3.6)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\nu E C1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.8)$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_r = \sigma_z = 0 \quad (3.9)$$

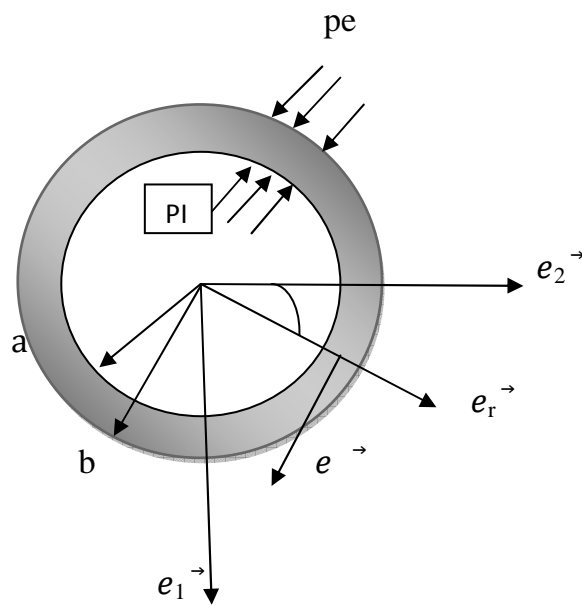


Fig.(3.1) – Section cylindrique.

La condition limite en contrainte s'exprime par : [6]

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{\rightarrow} = \mathbf{T}_d^{\rightarrow} \quad (3.10)$$

Avec sur la face intérieure :

$$\mathbf{n}^{\rightarrow} = -\mathbf{e}_r^{\rightarrow}, \mathbf{T}_d^{\rightarrow} = p_i \mathbf{e}_r^{\rightarrow} \quad (3.11)$$

En utilisant (3.11), la relation (3.10) s'écrit sous forme matricielle, en coordonnées cylindriques :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{rr}(\mathbf{r} = \mathbf{a}) = -p_i \quad (3.12)$$

CHAPITER III : Exemples D'application

Pour la face extérieure, on à :

$$\mathbf{n}^{\rightarrow} = \mathbf{e}_r^{\rightarrow}, \mathbf{T}_d^{\rightarrow} = -\mathbf{pe} \mathbf{e}_r^{\rightarrow} \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{rr} (\mathbf{r} = \mathbf{a}) = \mathbf{pe} \quad (3.14)$$

Les deux conditions sur σ_{rr} fournissent les deux constantes. Tous calculs faits, on obtient

$$\mathbf{C}_1 = \frac{(1-2\vartheta)(1+\vartheta)}{E} \frac{(a^2 \mathbf{pi} - b^2 \mathbf{pe})}{b^2 - a^2} \quad ; \quad \mathbf{C}_1 = \frac{(1+\vartheta)}{E} \frac{(\mathbf{pi} - \mathbf{pe})}{1/a^2 - 1/b^2} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(a^2 \mathbf{pi} - b^2 \mathbf{pe})}{b^2 - a^2} - \frac{(\mathbf{pi} - \mathbf{pe})}{r^2/a^2 - r^2/b^2} \quad (3.16)$$

$$\sigma = \frac{(a^2 \mathbf{pi} - b^2 \mathbf{pe})}{b^2 - a^2} + \frac{(\mathbf{pi} - \mathbf{pe})}{r^2/a^2 - r^2/b^2} \quad (3.17)$$

$$\sigma_{zz} = 2\vartheta \frac{(a^2 \mathbf{pi} - b^2 \mathbf{pe})}{b^2 - a^2} \quad (3.18)$$

Pour le déplacement u_r , on trouve enfin : [6]

$$u_r = \frac{1}{2\mu(b^2 - a^2)} \left[(1-2\vartheta)(a^2 \mathbf{pi} - b^2 \mathbf{pe}) r + a^2 b^2 (\mathbf{pi} - \mathbf{pe}) \frac{1}{r} \right] \quad (3.19)$$

Cette exemple a permis d'illustrer l'approche en déplacement qui part d'une forme du champ de déplacement et impose toutes les conditions sur champ.

Remarque :

-Les contraintes dans la section du cylindre, σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont indépendantes des constantes élastiques.

En clair, que le cylindre soit en plexiglas ou en acier ces contraintes seront les mêmes.

La contrainte σ_{zz} , les déformations et déplacements dépendant elles par contre des constantes élastique.

CHAPITER III : Exemples D'application

-Pour obtenir les résultats correspondants l'état plan de contrainte, il suffit de poser σ_{zz} .

Celles-ci ne modifient pas les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ puisqu'elles sont indépendantes des constantes élastique.

-Si l'épaisseur du cylindre est faible devant le rayon $R = (a+b) / 2$, on obtient au premier ordre les contraintes suivantes en état plan de déformation :

$$\sigma_{rr} \approx 0 ; \sigma_{\theta\theta} \approx pR/e ; \sigma_{zz} \approx pR/e \quad ; \quad u_r = (1-\nu) (1+\nu) pR^2 / (Ee) \quad (3.20)$$

Où $p = p_i - p_e$. Ces formules simplifiées permettent notamment de déterminer rapidement les contraintes dans la paroi d'une chaudière cylindrique sous pression.

III.1.2. Traction d'une barre prismatique : [6]

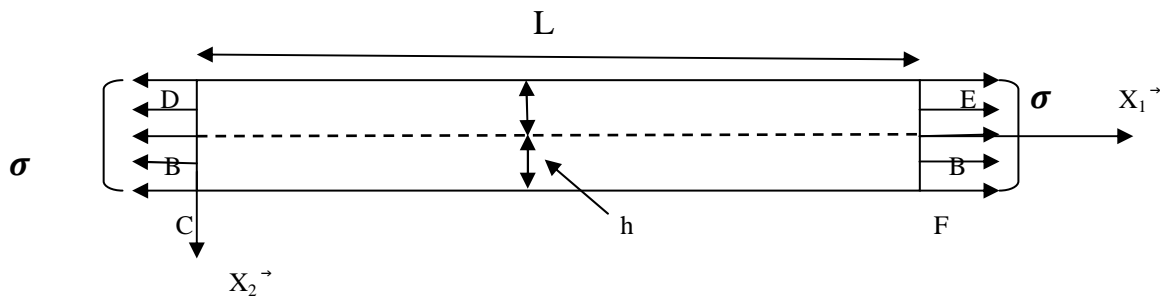


Fig .(3. 2) – Barre de traction.

Une barre de longueur L , largeur $2h$ et épaisseur unitaire faible devant h et l . Sa section droite

$A= 2h$. Elle est soumise des forces surfaciques d'intensité σ uniformément réparties sur ses sections extrémités.

Considérons une fonction d'Airy de la forme : [6]

$$\phi = C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 \quad (3.21)$$

Où C_1, C_2, C_3 sont des constantes à déterminer. Cette fonction d'Airy est biharmonique Les contraintes correspondantes valent :

$$\sigma_{xx} = 2C_3 ; \sigma_{yy} = 2C_1 ; \sigma_{xy} = - C_2 \quad (3.22)$$

CHAPITER III : Exemples D'application

Il reste à imposer les conditions limites en contraintes : $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{\rightarrow} = \mathbf{T}_d^{\rightarrow}$. [6]

- Sur la face EF: $\mathbf{n}^{\rightarrow} = \mathbf{e}_x^{\rightarrow}$, $\mathbf{T}_d^{\rightarrow} = \sigma \mathbf{e}_x^{\rightarrow}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_3 = \sigma/2, C_2 = 0 \quad (3.23)$$

- Sur la face CD: $\mathbf{n}^{\rightarrow} = -\mathbf{e}_x^{\rightarrow}$, $\mathbf{T}_d^{\rightarrow} = -\sigma \mathbf{e}_x^{\rightarrow}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_3 = \sigma/2, C_2 = 0 \quad (3.24)$$

- Sur la face DE: $\mathbf{n}^{\rightarrow} = -\mathbf{e}_y^{\rightarrow}$, $\mathbf{T}_d^{\rightarrow} = 0^{\rightarrow}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_3 = , C_2 = 0 \quad (3.25)$$

- Sur la face CF: $\mathbf{n}^{\rightarrow} = \mathbf{e}_y^{\rightarrow}$, $\mathbf{T}_d^{\rightarrow} = 0^{\rightarrow}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_2 = 0, C_1 = 0 \quad (3.26)$$

Si les faces avant et arrière la barre sont libres, on est en état plan de contrainte. Les déformations sont données:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xx} = \sigma/E ; \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} = \boldsymbol{\varepsilon}_{zz} = (-\nu\sigma/E)\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \quad (3.27)$$

Pour obtenir les déplacements, il faut intégrer les relations déformation-déplacements qui s'écrivent ici :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xx} = \mathbf{u}_{xx} ; \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} = \mathbf{u}_{yy} ; \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} = 1/2 (\mathbf{u}_{xy} + \mathbf{u}_{yx}) \quad (3.28)$$

Les deux premières donnent, respectivement :

$$\mathbf{u}_x = \frac{\sigma}{E} \mathbf{x} + f(y) ; \mathbf{u}_y = -\nu \frac{\sigma}{E} \mathbf{x} + g(x) \quad (3.29)$$

CHAPITER III : Exemples D'application

Où $f(y)$ et $g(x)$ sont des fonctions quelconques de x et y respectivement. En reportant (3.29) dans la troisième équation de (3.16) : [6]

$$f(y)_{,y} + g(x)_{,x} = 0 \quad (3.30)$$

D'où :

$$f(y)_{,y} = c \quad ; \quad g(x)_{,x} = -c \quad (3.31)$$

Où c est une constante arbitraire. Intégrant (3.31), et reportant dans (3.29), on trouve :

$$\mathbf{u}_x = \frac{\sigma}{E} \mathbf{x} + \mathbf{a} + c\mathbf{y} \quad ; \quad \mathbf{u}_y = -\nu \frac{\sigma}{E} \mathbf{x} + \mathbf{b} - c\mathbf{x} \quad (3.32)$$

Les constants a , b et c sont déterminés en fonction de ces conditions d'appuis.

conclusion:

A travers ce modeste travail, on espère avoir contribué, du moins de peu à lever ce handicap que rencontre les étudiants vis-à-vis au calcul mathématique de structure.

Il est impossible de pouvoir utiliser correction un logiciel d'éléments finis (introduction des données et analyse de résultats) sans connaître le fondement mathématique de ces programmes.

Ce qui explique l'exploitation par les étudiants de certains résultats faux. Des essentiellement au mauvais choix de modèle et incapacité d'analyser ces résultats.

La puissance de cette analyse par la méthode d'élasticité est de pouvoir déterminer les constantes mécaniques en tout points σ , ϵ et u , ainsi on ne parlera plus de contrainte mais plutôt de champs de contraintes. Comme on a pu montrer réussi la partie du tenseur de contrainte responsable de la variation du volume (tenseur sphérique) et la partie responsable du changement de forme (tenseur sphérique).

Pour la déformation, le développement de la relation entre la déformation et le déplacement nous a permis de démontrer que la relation $\epsilon = f(u)$ n'est pas linéaire, ce qui permet de traiter si on le veut le comportement non linéaire géométriquement.

La solution d'un problème d'élasticité est très complexe, on a présenté trois méthodes de résolution du système d'équations différentielles :

- Méthode de Lamé.
- Méthode Beltrami-Michel.
- Méthode d'Airy (fonction d'Airy): valable uniquement pour le cas bidimensionnel .

Pour les problèmes plus complexes on fait généralement recours aux méthodes numériques ou expérimentales.

La méthode de mesure des déformations par jauges extensométrique ainsi que le mode opératoire est présente dans le chapitre (IV).

Nous espérons qu'un travail futur se portera principalement sur la mesure expérimentale des constantes mécaniques par jauges et autres méthodes (photoélasticité).

A travers ce modeste travail, on espère avoir contribué, des mains de peu à lever cet handicap que rencontre les étudiants vis-à-vis au calcul mathématique de structure.

Il est impossible de pouvoir utiliser correction un logiciel d'éléments finis (introduction des données et analyse de résultats) sans connaître le fondement mathématique de ces programmes.

Ce qui explique l'exploitation par les étudiants de certains résultats faux. Des essentiellement au mauvais choix de modèle et incapacité d'analyser ces résultats.

Nous espérons qu'un travail futur se portera principalement sur la mesure expérimentale de des constants mécanique par jauges et autres méthodes (photoélasticité).

Dédicace :

Je dédie ce travail à :

*A celle qui a inséré le goût de la vie et le sens de la
Responsabilité....merci MÈRE.*

*A celui qui a été toujours la source d'inscription
et de couragemerci PÈRE.*

A mes frères et sœurs

A tout mes amis que j'ai connus dans ma vie.

A tous ceux qui sèment le Bonheur dans mon chemin.

A tous les enseignants et toutes les enseignantes de génie civil

-DOKMA LATRA-

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Hypothèses de base pour la définition des contraintes	10
Figure 1.2	la contrainte normale	10
Figure 1.3	la contrainte sur la surface de contact	11
Figure 1.4	la contrainte normale et tangentielle	11
Figure 1.5	la contrainte normale à l'intérieur	11
Figure 1.6	la contrainte de cisaillement	12
Figure 1.7	les contraintes principales	12
Figure 1.8	États des contraintes différents	13
Figure 1.9	Différents états de contrainte	13
Figure 1.10	Exemple d'états des contraintes	13
Figure 1.11	Contraintes normale et tangentielle	14
Figure 1.12	Contraintes s'appliquant sur les facettes d'un cube	18
Figure 1.13	Repère orthonormé $\{O; x, y, z\}$ et vecteurs unitaires $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$	18
Figure 1.14	Équilibre du tétraèdre (Cauchy)	19
Figure 1.15	Vecteur contrainte sur les facettes \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} en M	20
Figure 1.16	Vecteur contrainte sur la facette \vec{i} en M	21
Figure 1.17	Équilibre du parallélépipède en rotation suivant z	23
Figure 1.18	Réciprocité des contraintes tangentielles	23
Figure 1.19	Contrainte principale en un point	24
Figure 1.20	Faces et contraintes principales en M	25
Figure 1.21	Transformation d'un point et d'un vecteur	27
Figure 1.22	Transformation des vecteurs $dx_0 \vec{e}_i$ et $dx'_0 \vec{e}'_i$	28

Figure 2.1	loi de comportement.	33
Figure 2.2	Combinaison des trois chargements précédents (charge normale)	35
Figure 3.3	combinaison des trois chargements précédents (chargement cisaillement)	36
Figure 2.4	Etat quelconque de contrainte	37
Figure 3.1	Section cylindrique	49
Figure 3.2	Barre en traction.	51
Figure 4.1	Jauges résistives : - a) jauge à fil métallique - b) jauge semi-conductrice découpée - c) fixation de la jauge de la surface d'une structure	56
Figure 4.2	jauges métalliques : - a) jauge a fil - b) jauge à trame pelliculaire	56
Figure 4.3	Divers types de rosettes	59
Figure 4.4	Pont de Wheatstone a quatre jauges de mesure	60
Figure 4.5	Extensomètre à corde vibrante	60

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

II.1. Introduction :

L'essai de base pour la détermination des propriétés des matériaux de construction est l'essai de traction simple, caractérisé par : [5]

- une zone à déformation réversible.
- une zone à déformations irréversibles.

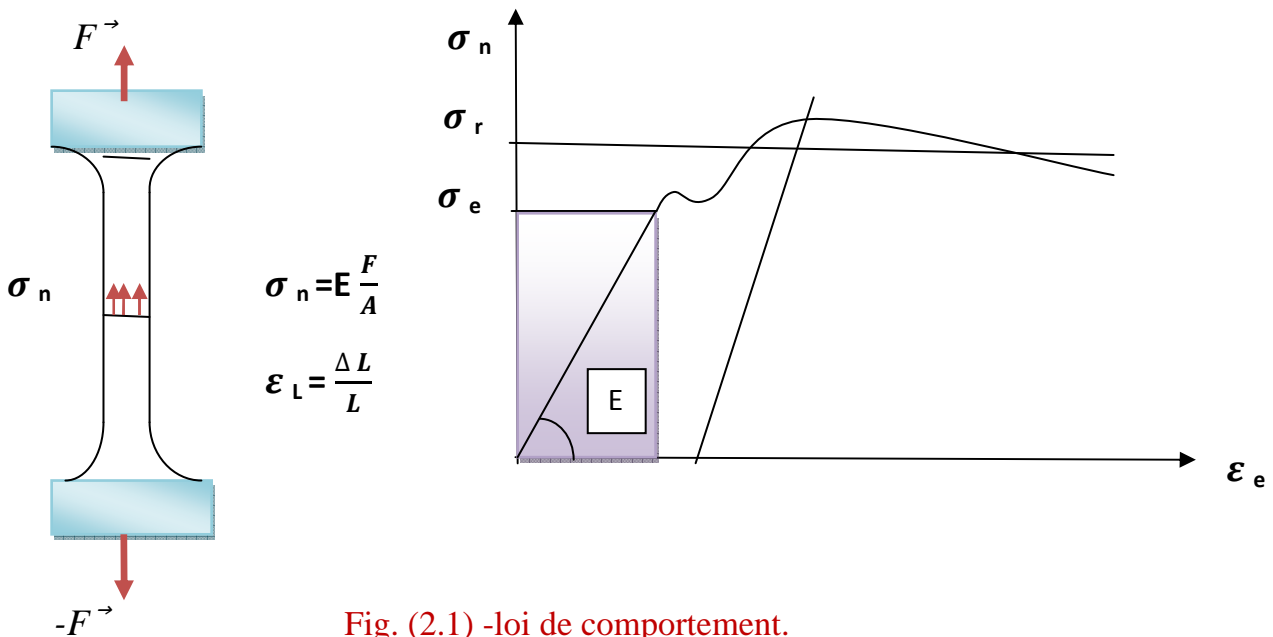


Fig. (2.1) -loi de comportement.

Les essais de base :

Matériaux dont le comportement est insensible à la vitesse de sollicitation :

- Essai de traction, ou essai d'écroutissage
- Essai sous chargement cyclique, ou essai de fatigue

Matériaux dont le comportement est sensible à la vitesse de sollicitation :

- Essai à contrainte constante, ou essai de fluage
- Essai à déformation constante, ou de relaxation

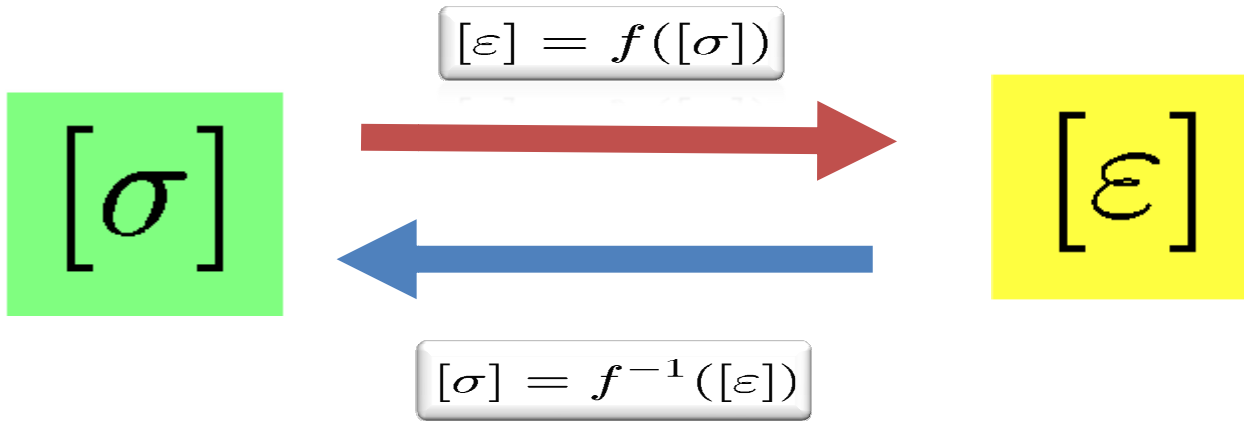
Autres essais :

- Essais sous chargement multiaxial
- Traction – torsion
- Pression interne ou externe
- Essais en flexion
- Essais de fissuration

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

La relation entre la matrice des contraintes et la matrice des déformations, appelée souvent loi de Hooke ou loi de lame : [5]

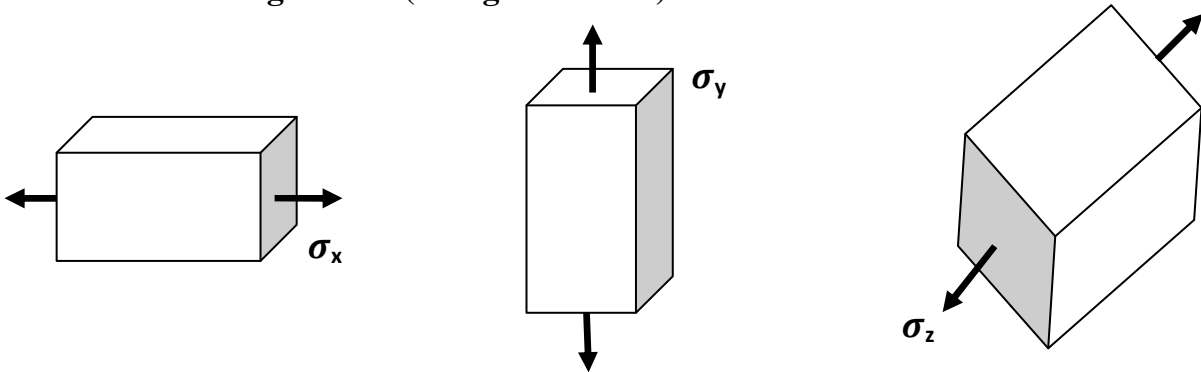
La relation ε en fonction de σ est appelée : (LOI DE HOOK).



La relation σ en fonction de ε est appelée : (LOI DE LAME).

II.2. Loi de Hook généralisée: [5]

II.2.1. Cas de chargement : (charge normale)



$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$	$\varepsilon_{xx} = -\nu \varepsilon_{yy} = -\frac{1}{E} \nu \sigma_{yy}$	$\varepsilon_{xx} = -\nu \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{E} \nu \sigma_{zz}$
$\varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{xx} = -\frac{1}{E} \nu \sigma_{xx}$	$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \sigma_{yy}$	$\varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{E} \nu \sigma_{zz}$
$\varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx} = -\frac{1}{E} \nu \sigma_{xx}$	$\varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{yy} = -\frac{1}{E} \nu \sigma_{yy}$	$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz}$

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

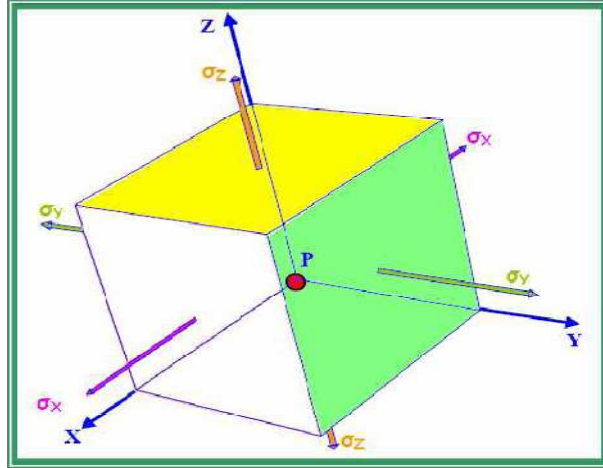


Fig. (2.2) - Combinaison des trois chargements normales.

Si maintenant le élément est soumis aux trois contraintes normales σ_x , σ_y et σ_z les composants de déformation sont déduits en appliquant le principe de superposition (hypothèses de petites déformations), on aura : [5]

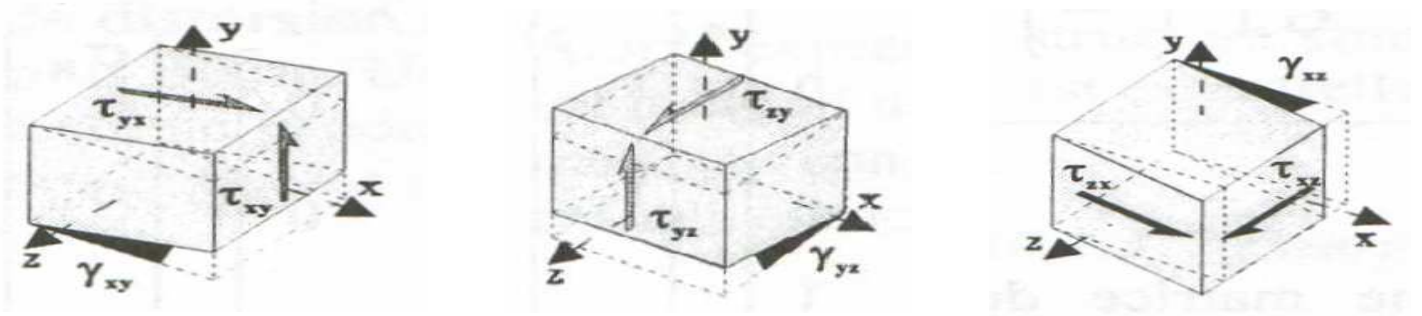
$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \\ \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} + \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} + \frac{1}{E} \sigma_{zz} \end{cases} \quad (2.1)$$

Sous forme matricielle le système d'équation (2.1) s'écrit : [5]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & +\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & +\frac{1}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

II.2.2. Cas de chargement de cisaillement : [5]



$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}$	0	0
0	$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz}$	0
0	0	$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \sigma_{xz}$

Ceci représente le cas de chargement par cisaillement.

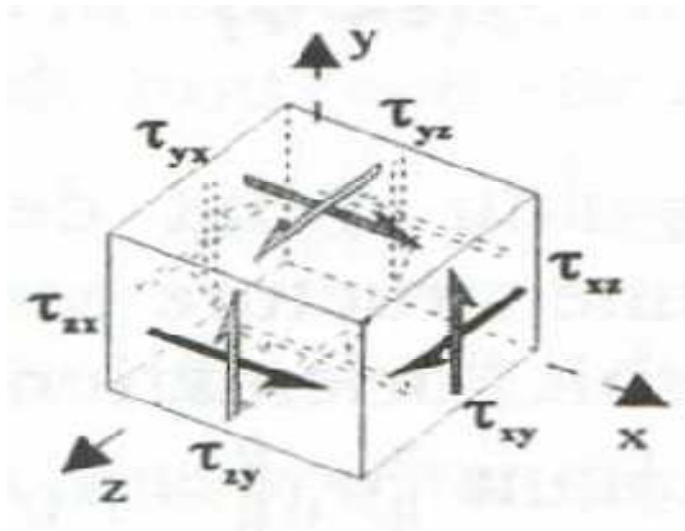


Fig.(2.3) - Combinaison des trois chargements de cisaillement.

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

De même une contrainte de cisaillement σ_{xy} , σ_{yz} et σ_{xz} qui agit seule sur une facette quelconque du corps, produira une déformation angulaire γ_{xy} , γ_{yz} et γ_{xz} reliée à cette contrainte de cisaillement par:[5]

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \sigma_{xz} \end{cases} \quad (2.3)$$

Sous forme matricielle le système d'équation (2.3) s'écrit : [5]

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

II.2.3. Etat quelconque de contrainte : [5]

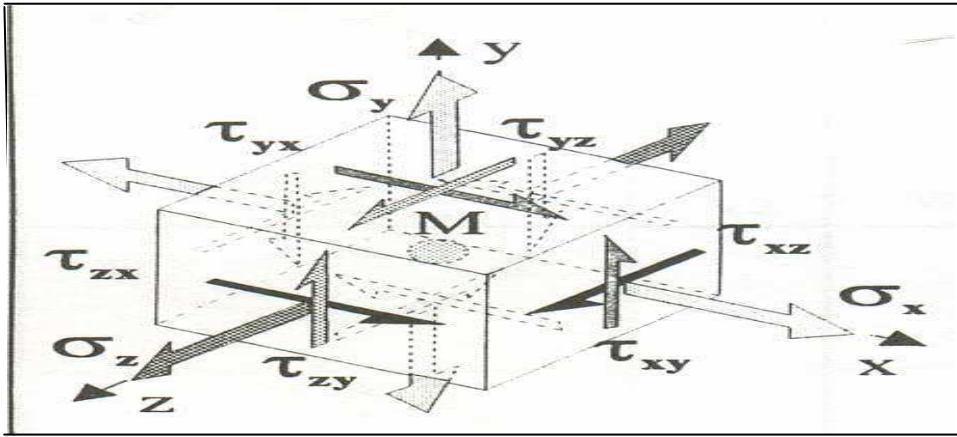


Fig.(2.4) – Etat quelconque de contrainte.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Ou G : module d'élasticité en cisaillement (module transversale).

G et E sont liés par la relation :

$$\mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.6)$$

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

En notation indicielle la loi de hook généralisée et son inverse s'écrivent : [5]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}_d \quad (2.7)$$

Et l'inverse de la relation (2.7) s'écrit :

$$\text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1+\nu}{E} \text{trace}(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\boldsymbol{\sigma}) \text{trace}(\mathbf{I}_d)$$

$$\text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1-2\nu}{E} \text{trace}(\boldsymbol{\sigma})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}_d$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}_d \quad (2.8)$$

C'est une loi indépendante du repère

E : module de Young (MPa,PA)

ν : Coefficient de poisson ; \mathbf{I}_d : matrice Identité

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

II.3. Elasticité plane: [7]

- Structure plane
- Structure chargée dans son plan
- Structure se déforme dans son plan

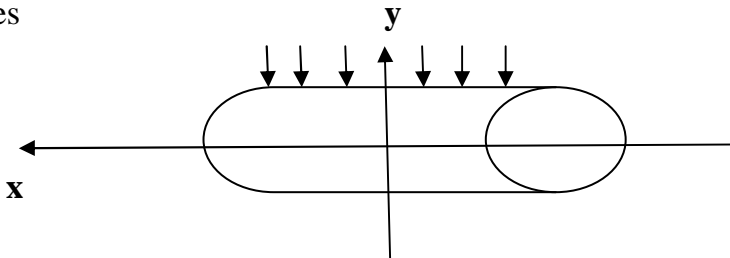
La matrice des contraintes est plane, mais celle des déformations ne l'est pas

Ce pendant selon la distribution des contraintes ou des déformations on par le **contrainte plane** ou **déformation plan**.

II.3.1. Déformation plan : [7]

Un état de déformation est plan lorsque la dimension d'un corps une direction est très étendue
faux 2 autres

Ex :



Le tenseur de déformation est indépendant de z et $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$.

Donc :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

II.3.1.1. Conséquence de la déformation : [7]

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (2.10)$$

ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} : fonction uniquement de x et y.

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

L'équation de compatibilité se réduit à 1 seule équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.11)$$

Des équation de hook, on remarque que les composantes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ et τ_{xz} sont fonction uniquement de x et y a lorsque τ_{yz} et τ_{zx} sont nulles, on a donc : [7]

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_x + \nu(1-\nu)\sigma_y] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1-\nu)\sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G \\ \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Ou bien, sous la forme de contraintes, les équation différentielles d'équation se reduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x l + \tau_{xy} m = f_x \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m = f_y \end{array} \right. \quad (2.13)$$

II.3.2. Contraintes plan : [7]

Un problème d'élasticité est dit en contrainte plan (dans le plan xoy) si le tenseur de contrainte est indépendant de z et $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$.

En pratique c'est le cas de corps où une dimension (suivant z par exemple) est très petite par rapport aux deux autres dimensions.

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

II.3.2.1. Conséquence de la définition: [7]

L'équation d'équilibre, de condition aux limites et de compatibilité restent les mêmes que celles de la déformation plan tandis l'équation de hook deviennent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \\ \gamma_{yx} = \tau_{xy}/G \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Ou bien sous la forme de lamé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 2G \varepsilon_x + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) \quad ; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_y = 2G \varepsilon_y + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

II.4. Solution du problème elastostatique : [6]

II.4.1. Résolution en déplacement ou solution de lamé:

Le but de la solution de lamé est de pouvoir combiner les 15 équations de l'élasticité et d'exprimer les équations différentielle d'équilibre en fonction des déplacements u,v,w .

Pour cela en remplaçant les équations de lamé dans l'équation d'équilibre on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) + 2G \varepsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G\gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (G\gamma_{xz}) + f_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (G\gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) + 2G \varepsilon_y) + \frac{\partial}{\partial z} (G\gamma_{xz}) + f_y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (G\gamma_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (G\gamma_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) + 2G \varepsilon_z) + f_z = 0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Sachant que : $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$;

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

On aura trois équation différentielles à trois inconnues (u, v, w), dont la résolution nous donnera le vecteur déplacement cherché, on a : [6]

$$\begin{cases} (\lambda + G) \frac{\partial tr(\varepsilon)}{\partial x} + G \nabla^2 (\mathbf{u}) + \mathbf{f}_x = \mathbf{0} \\ (\lambda + G) \frac{\partial tr(\varepsilon)}{\partial y} + G \nabla^2 (\mathbf{v}) + \mathbf{f}_y = \mathbf{0} \\ (\lambda + G) \frac{\partial tr(\varepsilon)}{\partial z} + G \nabla^2 (\mathbf{w}) + \mathbf{f}_z = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.17)$$

∇^2 : désigne le laplacien : $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

II.4.2. Résolution en contraintes ou solution de Beltrami-Michel:

De même les (15) équation de l'élasticité peuvent être combiné de façon à exprimer cette combinaison en fonction des contraintes seulement. C'est la solution de Beltrami-Michel ou solution en contrainte. [6]

Dans ce cas, en dérivant la trois équations (2.17) respectivement par rapport à x,y et z on aura :

$$\begin{cases} (\lambda + G) \frac{\partial^2 tr(\varepsilon)}{\partial x^2} + G \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial x} = \mathbf{0} \\ (\lambda + G) \frac{\partial^2 tr(\varepsilon)}{\partial y^2} + G \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial y} = \mathbf{0} \\ (\lambda + G) \frac{\partial^2 tr(\varepsilon)}{\partial z^2} + G \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{w}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{f}_z}{\partial z} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.18)$$

En additionnant member à member ces équation on aura:

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 tr(\varepsilon) = -\frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{f}_z}{\partial z} \quad (2.19)$$

Or on sait que d'après : $tr(\sigma) = (3\lambda + 2G) tr(\varepsilon)$. (2.20)

En dérivant équation (2.20) deux fois respectivement à x,y et z on aura : [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 tr(\varepsilon)}{\partial x^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \frac{\partial^2 tr(\sigma)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 tr(\varepsilon)}{\partial y^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \frac{\partial^2 tr(\sigma)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 tr(\varepsilon)}{\partial z^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \frac{\partial^2 tr(\sigma)}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

De plus en appliquant le la placien aux équations de lamé : [6]

$$\begin{cases} \nabla^2 \sigma_x = 2G \nabla^2 \varepsilon_x + \lambda \nabla^2 \text{tr}(\varepsilon) \\ \nabla^2 \sigma_y = 2G \nabla^2 \varepsilon_y + \lambda \nabla^2 \text{tr}(\varepsilon) \\ \nabla^2 \sigma_z = 2G \nabla^2 \varepsilon_z + \lambda \nabla^2 \text{tr}(\varepsilon) \end{cases} \quad (2.22)$$

De l'équation (2.17) on a :

$$\nabla^2 \text{tr}(\varepsilon) = - \frac{1}{(\lambda + 2G)} \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (2.23)$$

En remplaçant ceci dans (3.19) on aura :

$$\begin{cases} \nabla^2 \sigma_x = - \frac{1}{(\lambda + 2G)} \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + 2G \nabla^2 \varepsilon_x \\ \nabla^2 \sigma_y = - \frac{1}{(\lambda + 2G)} \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + 2G \nabla^2 \varepsilon_y \\ \nabla^2 \sigma_z = - \frac{1}{(\lambda + 2G)} \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + 2G \nabla^2 \varepsilon_z \end{cases} \quad (2.24)$$

on remplace les équation (3.18) et (3.20) dans (3.16) on aura :

$$\begin{cases} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \text{tr}(\varepsilon)}{\partial x^2} = - \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} - 2 \frac{\partial f_x}{\partial x} \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \text{tr}(\varepsilon)}{\partial y^2} = - \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} - 2 \frac{\partial f_y}{\partial y} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \text{tr}(\varepsilon)}{\partial z^2} = - \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} - 2 \frac{\partial f_z}{\partial z} \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \text{tr}(\varepsilon)}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial f_x}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial x} \\ \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \text{tr}(\varepsilon)}{\partial x \partial z} = - \frac{\partial f_x}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \text{tr}(\varepsilon)}{\partial y \partial z} = - \frac{\partial f_y}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial y} \end{cases} \quad (2.25)$$

Remarque :

Si les forces de volume sont constants ou negligables, le deuxieme terme des équation ci-dessus sera nul.

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

Cas particuliers : [6]

- Déformation plane :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + G) \frac{\partial tr(\varepsilon)}{\partial x} + G \nabla^2 (\mathbf{u}) + f_x = 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial tr(\varepsilon)}{\partial y} + G \nabla^2 (\mathbf{v}) + f_y = 0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Avec $tr(\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

Les équation de Beltrami se reduisent à :

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{(1-\vartheta)} \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \quad (2.27)$$

- contrainte plane :

Les équation de lamé se reduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} G \frac{(1+\vartheta)}{(1-\vartheta)} \frac{\partial tr(\varepsilon)}{\partial x} + G \nabla^2 (\mathbf{u}) + f_x = 0 \\ G \frac{(1+\vartheta)}{(1-\vartheta)} \frac{\partial tr(\varepsilon)}{\partial y} + G \nabla^2 (\mathbf{u}) + f_y = 0 \\ tr(\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Et les équations de Beltrami se reduisent à :

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \vartheta) \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \quad (2.29)$$

donné par :

- $G = \frac{E}{2(1+\vartheta)}$ Module de coulomb.
- $\lambda = \frac{\vartheta E}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)}$ Module de lamé.

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

II.4. Fonction de contraintes ou fonction d'Airy:

La solution d'un problème de l'élasticité plan se réduit à l'intégration des équations différentielles d'équilibre, de l'équation de compatibilité et à la vérification des conditions aux limites.

Supposons un corps que ce que soumis à une force gravitationnelle générale de composants : [5]

$$f_x = \rho g_x ; \quad f_y = \rho g_y$$

où : ρ : masse volumique des corps .

g_x, g_y : composants selon x et y de l'accération gravitationnelle.

Les équations d'équilibre deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho g_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \rho g_y = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Et l'équation de compatibilité (f_x, f_y Cctes) devienne :

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.31)$$

Pour résoudre ce problème, Airy introduit une fonction $\varphi(x,y)$ dite fonction de contrainte telle que :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.32)$$

Et
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \rho g_x y - \rho g_y x$$

Si les composants f_x et f_y sont négligées, on aura :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.33)$$

Pour que celle solution soit la vraie solution du probleme, il faut qu'elle verifie l'équation de compatibilité, on a donc: [5]

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0 \quad (2.34)$$

CAPITER II : Loi De Comportement Elastique

Ou bien :

$$\nabla^4 \varphi = 0 \quad (2.35)$$

Le problème revient donc à déterminer la fonction $\varphi(x,y)$ de l'équation bi-harmonique. Les composantes de contraintes déterminées à partir de cette fonction en utilisant les équations (2.32) et (2.33) doivent satisfaire les conditions aux limites : [5]

$$f_x = \sigma_x \mathbf{l} + \tau_{xy} \mathbf{m}$$

$$f_y = \tau_{xy} \mathbf{l} + \sigma_y \mathbf{m}$$

f_x, f_y : composants selon x et y des forces de surface.

Références bibliographiques

- [1]. Exercice de mécanique des milieux continus.
HELENE DUMONTET, Georges Duvaut. Collection Mathématiques pour la maîtrise Edition
Masson, Paris(1994).
- [2]. Mécanique des milieux continus, cours et exercices corrigés, A.HADDAD et
L.KHEZZAR, Edition BERTI, Alger, 1999.
- [3]. Mécanique des milieux continus. G.Duvaaut, 1990, Masson, Paris.
- [4]. Exercices d'élasticité, G .Caignaert , J.P.Henry- Edition Dunod – Paris 1976.
- [5]. Cours d'élasticité de 1^{er} année Master Génie Civil (Mr. ROUAG Liamine U.K.M) 2011.
- [6]. Mécanique des milieux continus, (Exercice et Problèmes classiques d'élasticité, Masson,
Paris, Paris, 1981).
- [7]. Elasticité (yves debard) institut universitaire de technologie du mans département génie
mécanique et productique <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html> (24 mars 2006
-31 mai 2011).
- [8]. Les jauges de déformation--Edition Mars 2002-Note technique ANSTJ
([Site Internet : http://www.anstj.org/espace/](http://www.anstj.org/espace/))

[1]. **Elasticité (yves debard) institut universitaire de technologie du mans département génie mécanique et productique** <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html> 24 mars 2006 {31 mai 2011.

[2]. Exercice de mécanique des milieux continus.

HELENE DUMONTET, Georges Duvaut. Collection Mathématiques pour la maitrise Edition Masson, Paris(1994).

[3]. **Mécanique des milieux continus.**www.google.com/ Exercice et Problèmes classiques d'élasticité, Masson, Paris, Paris, 1981.

[4]. Mécanique des milieux continus, cours et exercices corrigés, A.HADDAD et L.KHEZZAR, Edition BERTI, Alger, 1999.

[5]. Mécanique des milieux continus. G.Duvaaut, 1990, Masson, Paris.

[6]. Cours d'élasticité de 1^{er} année Master Génie Civil (Mr. ROUAG Liamine U.K.M) 2011.

[7]. Exercices d'élasticité, G .Caignaert , J.P.Henry- Edition Dunod – Paris 1976.

CHAPITER IV : Mesure Expérimentale

IV.1. Grandeurs mécaniques : [8]

- Déformation ε : c'est le rapport de la variation de(Δl) d'une dimension à la valeur initiale l de cette dimension :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (4.1)$$

- Déformation élastique : déformation qui disparaît en même temps que la force qui l'a produite.

- Contrainte σ : force par unité de section (F/s) :

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} \quad (4.2)$$

- Limite d'élasticité : contrainte maximale ne produisant pas de déformation permanente .

- Loi de Hooke : dans le domaine élastique les déformations sont proportionnelles aux contraintes.

- Module d'Young Y : il détermine la déformation dans le sens de la contrainte

- Coefficient de Poisson ν : il détermine la déformation perpendiculaire à la contrainte

$$\varepsilon_x = - \nu \varepsilon_y \text{ (contrainte normale dans le sens x)} \quad (4.2)$$

Dans le domaine élastique, ν est généralement voisin de 0,3 pour les aciers.

IV.2.Principes généraux : [8]

Les jauges résistives sont des capteurs passifs traduisant en variation de résistance leur propre déformation qui est en principe égale à celle de la structure a l'endroit ou elles sont collées.

Le domaine des déformations mesurables avec une précision pouvant atteindre 0,1 % s'étend environ de $\pm 10^{-5}$ à $\pm 2.10^{-1}$.

La limite inférieure est fixée par le bruit de fond de la jauge et des circuits associés, la limite supérieure est celle imposée par l'élasticité de la jauge et du ciment de fixation.

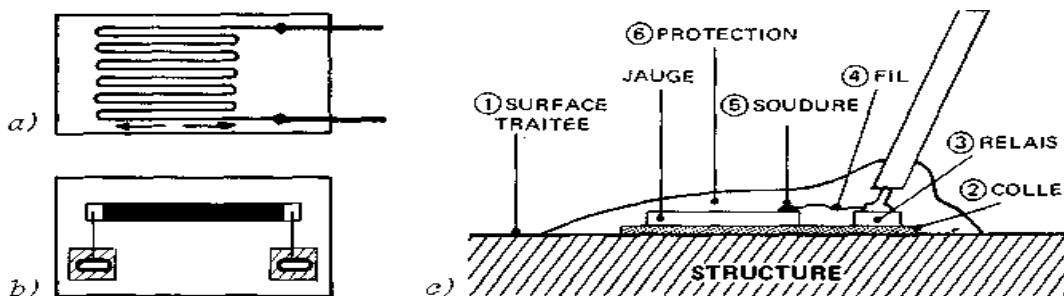
CHAPITER IV : Mesure Expérimentale

Dans le cas général, une jauge est constituée d'une grille formée par un conducteur filiforme de résistivité ρ , section s et longueur nl , l étant la longueur d'un brin et n leur nombre, n est généralement compris entre 10 et 20 pour les jauges métalliques et égal a 1 pour les jauges semi-conductrices.

IV.3. Les Jauges De Déformation:

IV.3.1. Différent types de jauges de déformation :

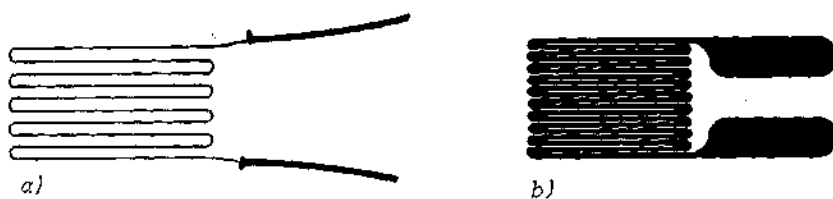
IV.3.1.1.Types de Jauges résistives : [8]



Fi g.(4.1) - Jauges résistives : - a) jauge à fil métallique ; - b) jauge semi-conductrice découpée.

- c) fixation de la jauge de la surface d'une structure.

IV.3.1.2.Types de jauges métalliques : [8]



Fi g.(4.2) - jauges métalliques : - a) jauge a fil ; - b) jauge à trame pelliculaire

Le conducteur est fixe sur un support isolant, papier ou plastique, qui est lui-même colle sur la structure étudiée (c). Il en résulte que la jauge subit une déformation identique a celle de la structure, dans la direction parallèle aux brins : cette déformation étant ($\Delta l/l$)

CHAPITER IV : Mesure Expérimentale

La résistance de la jauge a pour expression : $R = \rho l / s$. Sous l'influence de la déformation, la résistance de la jauge varie de ΔR , soit :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

La déformation longitudinale du fil entraîne une variation de ses dimensions transversales : cotes a et b dans le cas d'une section rectangulaire, diamètre d pour une section circulaire ; la déformation transversale est proportionnelle a la déformation longitudinale.

IV.3.2. Caractéristiques principales des jauges métalliques : [8]

- Résistance :

La résistivité ρ des alliages utilisés doit être suffisamment élevée pour que les valeurs de résistance recherchées (100 à 5000 Ω) puissent être obtenues sans longueur de fil excessive, aboutissant a des dimensions exagérées de la jauge, et sans réduction trop importante de la section qui imposerait une diminution du courant de mesure et donne de la sensibilité.

- Facteur de jauge :

Les valeurs les plus courantes du facteur de jauge sont voisines de $2 \pm 0,1$ a l'exception de l'alliage Isoelastic et du platine-tungstène qui ont un facteur de jauge respectivement voisin de 3,5 et 4,1.

-Influence de la contrainte – Linéarité :

Tant que le fil de la jauge reste en deçà de sa limite élastique, le facteur de jauge est constant assurant une excellente linéarité entre variation de résistance et déformation. Lorsque le fil est déformé au-delà de sa limite élastique ($\Delta l/l$ de 0,5% a 20% selon les matériaux) le coefficient de Poisson devient égal à 0,5 et le facteur de jauge K très voisin de 2.

IV.3.3. Caractéristiques Principales De Jauges Semi-conductrices : [8]

C'est le dopage qui est le facteur déterminant des caractéristiques de ce type de jauges. D'une façon générale, à dopage croissant, le facteur de jauge diminue mais par contre, la linéarité est améliorée et la sensibilité thermique est réduite, permettant l'augmentation du domaine d'utilisation en température, de même est réduite la sensibilité aux radiations.

-Résistance :

La résistivité ρ décroît à mesure qu'augmente la concentration du dopant.

-Influence de la température :

La variation de résistance en fonction de la température dépend de la concentration de dopant et de la température :

- Aux températures inférieures à 120 °C environ, la résistivité augmente avec T, et son coefficient de température qui est positif diminue à dopage croissant.
- Aux températures supérieures, la résistivité décroît lorsque T croît et son coefficient de température qui est négatif est indépendant du dopage : c'est celui du silicium intrinsèque.

-Facteur de jauge :

La valeur du facteur de jauge K est déterminée par le dopage : son module diminue régulièrement lorsque la concentration en dopant augmente.

-Influence de la déformation. Linéarité :

D'une façon générale, la variation conductrice en fonction de la déformation ε est non linéaire.

IV.3.4. Disposition en rosettes : [8]

Ce sont des associations de jauges fixées sur un support unique et dont les directions des brins font entre elles des angles parfaitement définis. Elles sont utilisées quand on souhaite connaître simultanément les déformations dans plusieurs directions.

Lorsque les directions principales des déformations sont inconnues, il faut pour les déterminer mesurer les déformations dans trois directions : on emploie pour cela des rosettes de 3 jauges à 120° (a). Lorsque 1.une des directions principales est présumée probable, on utilise des rosettes à 45° (b), la jauge centrale étant alignée avec cette direction. Les rosettes à deux jauges perpendiculaires (c) sont utilisées quand on connaît les directions principales de déformation. D'autres rosettes à deux jauges sont adaptées a la mesure des déformations de torsion (d). Parmi les nombreux autres types, on peut encore citer les rosettes destinées à la mesure des déformations de membranes (e et f). [8]

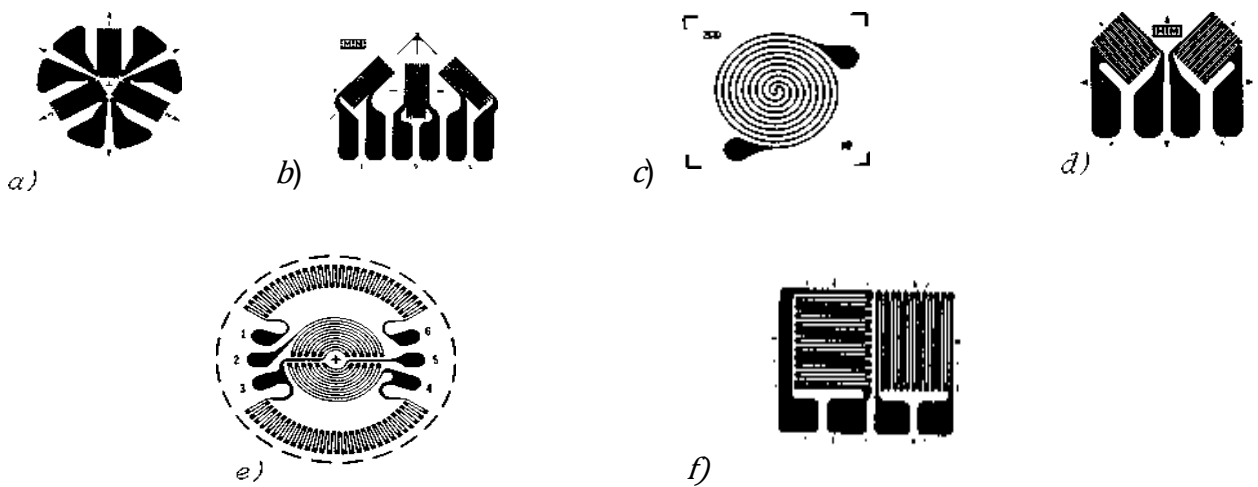


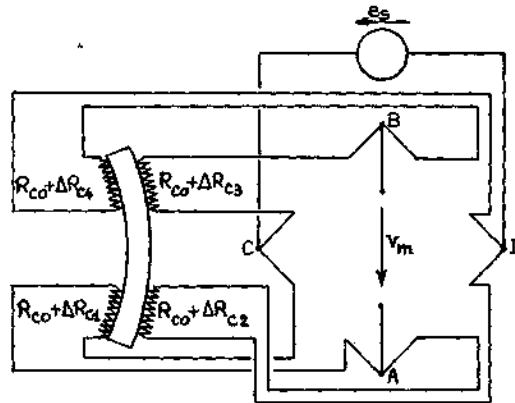
Fig.(4. 3) - Divers types de rosettes

CHAPITER IV : Mesure Expérimentale

IV.3.5.Méthodes de mesure : [8]

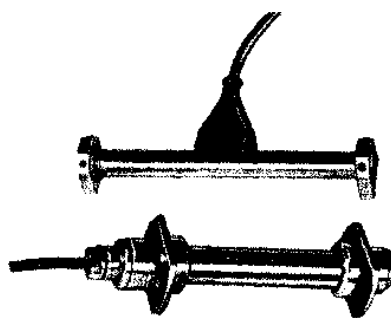
Les résistances de jauges et leurs variations sont mesurées par les méthodes classiques :

- pont de Wheatstone le plus fréquemment
- montage potentiométrique ou source de courant



Fi g.(4.4) - Pont de Wheatstone a quatre jauges de mesure.

Une autre méthode de mesure, utilisant l'extensomètre à corde vibrante est généralement utilisé pour la surveillance de Génie Civil. Il a pour corps d'épreuve une corde d'acier tendue entre deux supports qui sont ancrés dans la structure dont on étudie les déformations. [8]



Fi g.(4.5) - Extensomètre à corde vibrante