République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Kasdi Merbah Ouargla.
Faculté des Mathématiques et Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du

Diplôme de Docteur en 3ème cycle LMD

Spécialité : Mathématiques

Option : Équations Différentielles aux dérivées Partielles et Analyse Numérique

par

SALIHA HICHAR

Un Problème elliptique issu d'une équation Intégrale non Linéaire et Applications

Soutenu publiquement le 20 Décembre 2017 devant le jury composé de

Dr. S. Mohamed Said	*MCA*	Univ Kasdi Merbah-Ouargla	Président
Dr. S. Merabet	*MCA*	Univ Kasdi Merbah-Ouargla	Examinateur
Dr. F. Mokhtari	*MCA*	Univ Benyoucef Benkhadda-Alger	Examinateur
Pr. A. Mansour	*Professeur*	Univ Echahid Hamma Lakhdar-Eloued	Examinateur
Dr. A. Guerfi	*MCA*	Univ Kasdi Merbah-Ouargla	Directeur de thèse

Table des matières

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A ma mère et la mémoire de mon père qui par leur dévouement et leur affection ont été pour moi

un soutien tout au long de mes études et ma vie.

A mon mari et mes enfants pour avoir accepté tant de sacrifices .

A mes frères, mes soeurs, mes chères copines, mes collègues, mes amis

A toute la famille Hichar , Khourara

Je dédie ce travail à toute personne de proche ou de loin qui n'a pas cessé de me

guider et de m'encourager durant la réalisation de ce travail.

HICHAR Saliha

Remerciements

Je remercie Dieu tout-puissant, qui m'a donné la force et la patience pour accomplir cette thèse. Je tiens d'abord à remercier Monsieur Guerfi Amara, mon directeur de thèse. Sans lui, ce travail n'aurait pas pu aboutir. Je lui suis infiniment reconnaissante d'avoir aussi encadré ma thèse de Master et de m'avoir aidé depuis le début de mon travail. Je voudrais remercier le Professeur Mohammed Tayeb Meftah aussi pour les conseils qui m'ont orienté tout au long de la production de cette thèse, je le remercie pour ses conseils avisés et ses indications toujours fructueuses, je remercie en lui le soutien et la compréhension sans limites. Monsieur le Professeur Said Mohamed Said m'a fait le grand honneur de présider le jury. Je l'en remercie très vivement. Je remercie les Docteurs Abdelouahab Mansour, Fares Mokhtari, Smail Merabet de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes proches, ma mère, mon mari, mes soeurs, mes frères, mes enfants, et mes amies pour le soutien constant tout au long des années de la thèse.

ملخص

في هذه الاطروحة, نقدم نتائج وجود حلول لفئة من المعادلات التكاملية الغير خطية من نوع فريد هولم على مجالات نصف مفتوحة من الشكل

$$u(r) = h(r) + \int_0^T k(r,s)F(s,u(s))ds$$

F, k و h دوال معروفة, k هي نواة المعادلة التكاملية, F هي دالة غير خطية.

بعدها استبدلنا المعادلة التكاملية بمعادلة ناقصية تحت شروط على حافة الساحة, و قمنا بحلها بطريقتين, و أخيرا تحصلنا على نتائج رقمية بطريقة تكرار التباين.

كلمات مفتاحية

معادلة تكاملية لفريدهولم, معادلة ناقصية غير خطية, طريقة تكرار التباين.

Résumé

Dans cette thèse, on présente des résultats d'existence de solutions pour une classe d'équations intégrales non linéaires de type Fredholm sur des intervalles semi ouverts de la forme

$$u(r) = h(r) + \int_0^T k(r, s)F(s, u(s))ds, \qquad (0.0.1)$$

Les fonctions k, F, et h sont connues. k est le noyau de l'équation intégrale, F est une fonction non-linéaire. Après on l'a remplacé par une équation elliptique avec des conditions sur le bord de domaine et on l'a résolu par deux méthodes, finalement on a des résultats numériques avec la méthode d'itération variationnelle.

Mots-clés :

Équation intégrale de Fredholm, Équation elliptique semi linéaire, Méthode d'itération variationnelle.

Abstract

In this thesis we present some results of existence solutions to nonlinear integral equations of Fredholm on half open intervals equation of the following form

$$u(r) = h(r) + \int_0^T k(r,s)F(s,u(s))ds, \tag{0.0.2}$$

F, h where are known functions. and K is another known function of two variables, often called the kernel function. F is a nonlinear function. After we replace it by an elliptic equation with boundary conditions, we was solved by two methods, finally we have numerical results with the variational iteration method.

Key word : *Integral equation of Fredholm, semi linear Elliptic Equation, variational iteration method.*

Notations générales

Symbole	***Signification***
$\mathbb{R}^N$	*L'espace Euclidien de dimension* N.
Ω	*Un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.
$\partial\Omega$	*La frontière de* Ω.
$\|E\|$	*La mesure de Lebesgue de l'ensemble mesurable* E.
p.p.	*Presque partout .*
$(\cdot,\cdot)$	*Produit scalaire.*
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{E'\times E}$	*Le crochet de dualité entre l'espace* E *et son dual topologique* E'.
$B_\rho(x_0)$	*La boule de centre* x_0 *et de rayon* $\rho > 0$.
∂_i	*La i-ième dérivée partielle;* $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.
∇u	*Le gradient de u,* $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
Δu	*Le laplacien de u,* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$.
p^*	*Exposant critique de p,* $p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & si\ p < N \\ +\infty & si\ p \geq N \end{cases}$
s.c.i.	*Semi continue inférieurement.*
s.c.s.	*Semi continue supérieurement.*
$C(\Omega) ou C^0(\Omega)$	*Ensemble des fonctions continues dans* Ω.

$C_c^0(\Omega)$	*Ensemble des fonctions continues dans* Ω *à support compact.*
$C^k(\Omega)$	*Ensemble des fonctions de classe* k *dans* Ω .
$C^{k,\beta}(\Omega)$	*Ensemble des fonctions Hölderiennes de classe* k *dans* Ω .
$C_c^k(\Omega)$	*Ensemble des fonctions de classe* $C^k(\Omega)$ *à support compact.*
$C^\infty(\Omega)$	*Ensemble des fonctions qui appartiennent à* $C^k(\Omega)$ *pour tout* $k \succeq 0$.
$C_c^\infty(\Omega)$	*Ensemble des fonctions de* $C^\infty(\Omega)$ *à support compact.*
$L^p(\Omega)$	*L'espace de Lebesgue,*

$$L^p(\Omega) = \begin{cases} \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ mesurable} \ ; \ \int\limits_\Omega |u|^p < +\infty\Big\}, & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ mesurable} \ ; \ \underset{\Omega}{\text{sup-ess}}(u) < +\infty\Big\}, & si \quad p = +\infty. \end{cases}$$

$L^{p'}(\Omega)$	*Espace dual de* $L^p(\Omega)$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$, $p > 1$.
p'	*Exposant conjugué de p,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *p>1* .
$\mathcal{D}(\Omega)$	*L'espace vectoriel des fonctions indéfiniments différentiables à support borné dans* Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	*L'espace des distributions sur* Ω.
$W^{1,p}(\Omega)$	*L'espace de Sobolev,* $W^{1,p}(\Omega) = \Big\{u \in L^p(\Omega) \ ; \ \lvert\nabla u\rvert \in L^p(\Omega)\Big\}$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	*La fermèture de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.
$W^{k,p}(\Omega)$	$\{\ u \in L^p(\Omega)$, *tel que,* $\forall \lvert\alpha\rvert \preceq k$, $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\ \}$.
$W^{-k,p'}(\Omega)$	*Espace dual de* $W_0^{k,p}(\Omega)$.
$H^1(\Omega)$	$= \Big\{v \in L^2(\Omega), \forall i \in \Big\{1, ..., N\Big\}, \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\Big\}$.

$H_0^1(\Omega)$ *L'espace des fonctions de* $H^1(\Omega)$ *qui s'annulent sur le bord* $\partial\Omega$.

$H^{-1}(\Omega)$ *Le dual de l'espace* $H_0^1(\Omega)$.

Introduction générale

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement est une fonction, se produit sous signe intégral. Dans la littérature nous trouvons de nombreux travaux dédiés à l'étude théorique des équations intégrales non linéaires. J. Fourier (1768-1830) est le premier mathématicien qui a découvert ce genre d'équations intégrales, et Fredholm est le principale inventeur de la théorie des équations intégrales de deuxième espèce, qui porte son nom. Dans la théorie classique d'équations intégrales on parle des équations de Fredholm et les équations de Volterra, dans une équation de Fredholm les régions d'intégrations sont fixées, tandis que dans une équation de Volterra une région est variable.

La théorie des équations intégrales qui s'est développée très vite à la suite des travaux de Volterra, Fredholm et Hilbert, forme aujourd'hui un important thème de l'analyse mathématique.

Parmi les équations intégrales non linéaires, les équations intégrales non linéaires de type Hammerstein voir ([32]) qui sont sous la forme

$$u(x) = \int_D k(x,s)F(s,u(s))ds, \tag{0.0.3}$$

où D est un compact de $\mathbb{R}^N$; u est la fonction inconnue, k est le noyau donné, F une fonction donné. Plusieurs mathématicien ont donné une grande importance à l'étude de ce type d'équation, Hammerstein a utilisé les méthodes variationnelles et Nemytskij a utilisé la méthode de décomposition pour étudier l'existence de solution de 0.0.3.

Cette thèse concerne l'étude d'une équation intégrale non linéaire de fredholm de la forme

$$u(r) = h(r) + \int_0^T k(r,s)F(s,u(s))ds, \tag{0.0.4}$$

k, F, et h sont des fonctions données.

$k(r,s)$ est le noyau de l'équation intégrale, F(s, u(s)) est une fonction non-linéaire.

Dans le travail de S.Douis, M. T. Meftah [24], ils ont abordé un problème physique, dans un milieu chargé électriquement on place un ion positif à l'origine des cordonnées, le système est alors perturbé. Ils ont trouvé une équation intégrale non linéaire similaire à notre équation 0.0.4, *où* l'inconnu qu'ils cherchent est l'énergie potentielle d'un électron quand le système a atteint le nouveau état d'équilibre.

Avec

$$k(r,s) = \frac{3}{2Z}\frac{s}{r}(r+s-|r-s|)$$

$$F(s,u(s)) = \exp(Z\Gamma u(s)) - 1$$

$$h(r) = u_{ie}(r)$$

u_{ie} (potentielle initiale).

r est la distance entre l'électron et l'ion central de la charge électrique.

Z le nombre des charges.

Γ est un constant.

L'inconnu u de l'équation intégrale est l'énergie potentielle d'un électron situé à la position r de l'ion centrale .

Notre objective est de trouver l'énergie potentielle initiale $u_{ie}(r)$ convenable pour que notre équation possède une solution unique u(r) sous les conditions u et u' sont finis au bord de domaine.

L'équation est définie sur l'intervalle semi- ouvert $[0, T)$, avec $0 \leq T \leq \infty$, ceci pose un certain nombre de difficultés dans le cas où $T = \infty$, ce cas est étudié par D. O'Regan, M. Meehan dans [50], ils ont présenté la théorie d'existence à l'aide des conditions sur les fonctions k, F, et h.

Nous avons transformé notre problème à un problème elliptique non linéaire de la forme

$$\begin{cases} \Delta u(r) = \lambda e^{u(r)} + f(r) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u < +\infty & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.5}$$

dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, λ nombre réel, notre objective est d'avoir des conditions convenables sur f pour avoir une seule solution radiale pour notre problème, avec les conditions aux bords, la solution u et sa dérivée doit être finie aux bords $\partial\Omega$.

Evans dans [26] a présenté un problème elliptique semi linéaire similaire à celui de notre travail 0.0.5, soumis aux conditions au bord de type Dirichlet pour une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f(x) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.6}$$

òu g est une fonction non linéaire, $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Evans a étudié l'existence et l'unicité du solution de l'équation 0.0.6, dans deux cas, *où* la fonctions g est croissante, décroissante, et la fonction g est bornée, alors que dans notre problème 0.0.5, la fonction g n'est pas bornée.

Divers problèmes physiques utilisent la théorie des équations intégrales qui mènent aux équations différentielles partielles, et dans la plupart des cas, ces problèmes peuvent être traités d'une façon plus satisfaisante en utilisant ces dernières que d'utiliser directement des équations intégrales. De ce fait, ces équations sont des outilles mathématiques compétents pour ces domaines de recherche.

Ma thèse est consacrée à l'étude d'une équation intégrale non linéaire de Fredholm sur une intervalle semi ouvert, qui mène après à une équation elliptique semi linéaire. Le plan de ce travail est le suivant :

le premier chapitre, on a commencé par une Introduction sur les équations intégrales non linéaires, dont on a étudié leurs classifications, et leurs théories d'existences sur un intervalle fermé , et après leurs théorie d'existence dans un cas différente sur un intervalle Semi ouvert.

le deuxième chapitre, on a présenté une introduction sur les équations elliptiques semi linéaires, puis on a donné une description rapide des problèmes elliptiques semi-linéaires avec la non-linéarité exponentielle et on a pris comme exemple l'équation de Bratu, après on a étudié l'existence et l'unicité de solution pour les problèmes de genre

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.7}$$

le troisième chapitre, on a exposé une équation utile pour notre travail l'équation de Liouville, et on a résolu l'équation elliptique non linéaire issu de l'équation intégrale non linéaire de Fredholm dans les cas o$\grave{u}$ la dimension N = 2, N = 3, et on a trouvé la fonction convenable f, pour que notre problème aura un unique solution u satisfait les conditions u, u' sont finis sur le bord du domaine. puis on a présenté l'application du problème dans la physique des plasmas. Et après on a étudié l'explosion des solutions de l'équation elliptique non linéaire.

le quatrième chapitre, on a présenté la résolution numérique par la méthode d'itérations variationnelles, qui nous a donné des résultats qui montrent l'efficacité de la méthode et qu'elle est tout à fait assez fiable.

Finalement, nous terminons ce travail avec une conclusion générale qui le résume.

Ce document est clôturé par un Index, et une publication, ainsi qu'une liste bibliographique.

Chapitre 1

Introduction sur les équations intégrales non linéaires

Le but de ce premier chapitre est d'adapter le lecteur avec le concept d'équation intégrale, en avisant que le terme d'équation intégrale a été déterminé pour la première fois par Bois-Raymond.

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, se présente sous le signe intégral. Cette définition générale tient compte des différentes formes particulières et dans la pratique plusieurs types distincts surgissent. Pour cette raison, et afin de recouvrir les grands axes de notre thématique sans s'engager dans des situations inadéquates, nous allons s'intéresser beaucoup plus aux équations intégrales non linéaires. Premièrement nous allons présenter la forme et la classification des équations intégrales. Aussi dans l'objectif de rappeler l'origine et l'utilité de telles équations, et de voir essentiellement la relation entre ces dernières et les équations différentielles partielles, on exposera brièvement quelques modèles typiques, représentatives d'une variété plus générale. J. Fourier (1768-1830) est le premier mathématicien qui a introduit ce genre d'équations intégrales dû au fait qu'il a obtenu la formule de sa transformation.

En 1837, J. Liouville (1809-1882) a publié un article sur la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles dans le quel il montrait qu'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire est obtenue en résolvant une équation intégrale. En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a montré la théorie d'équations intégrales aux équations intégro-différentielles et aux équations intégrales singulières. Fredholm (1866-1927) a étudié la méthode pour résoudre l'équation intégrale de deuxième espèce. La théorie des équations intégrales est utilisée dans plusieurs domaines des mathématiques, beaucoup de problèmes dans le domaine des équations différentielles partielles, la physique mathématique, les problèmes de contacts et de l'astrophysique peut être énoncer comme une équation intégrale. Ainsi, la théorie de l'équation intégrales a été un domaine de recherche intéressant dans les mathématiques appliquées et la physique mathématique. L'importance des équations intégrales dans toutes les branches de la science nous amène à traiter certaines de ces équations et les étudier numériquement.

1.1 Classification des équations Intégrales

Définition 1.1 *Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration, la forme générale d'une équation intégrale est :*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, s, u(s))ds \tag{1.1.1}$$

où E est un ensemble fermé, borné et mesurable dans un espace euclidien de dimension n (x et s des points de cet espace).

λ est un paramètre réel .

f, k sont des fonctions données, k est le noyau de l'équation intégrale , $u(x)$ la fonction inconnue .

On dit qu'une équation intégrale est linéaire si la fonction k est linéaire rapport la variable u .

On dit qu'une équation intégrale est non linéaire si $k(x, s, u(s)) = k(x, s).F(u(s))$ avec F est une fonction non linéaire.

l'équation intégrale non linéaire (E.I.N) est sous la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, s)F(u(s))ds \tag{1.1.2}$$

$x \in E$, et u est l'inconnue qui appartient à $L^p(E)$ ou $C(E)$,

Les équations intégrales non linéaires sont classées par leurs caractéristiques selon trois types :

1. **Bornes d'intégration**

— les deux sont fixées

l'équation est de Fredholm de la forme

$$\alpha u(x) + f(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)F(u(s))ds$$

$$a \leq x \leq b$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

— L'une est variable

l'équation est de Volterra de la forme

$$\alpha u(x) + f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)F(u(s))dt$$

$$a \leq x \leq b$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

2. **Placement de la fonction inconnue** u

— Si $\alpha = 0$ on a :

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)F(u(s))ds$$
$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)F(u(s))ds$$

Qui sont les équations de Fredholm et de Volterra de première espèce respectivement.

— Si $\alpha \neq 0$, les équations intégrales de la forme

$$u(x) + f_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x,s)F(u(s))ds$$

$$u(x) + f_1(x) = \lambda_1 \int_a^x K(x,s)F(u(s))ds$$

est dite de Fredholm et de Volterra de deuxième espèce respectivement.

Où :-

$$\frac{\lambda}{\alpha} = \lambda_1, \frac{f(x)}{\alpha} = f_1(x)$$

3. **Placement de la fonction connue f :**

   Si $f \equiv 0$ L'équation (1.1.1) dite alors homogène, sinon l'équation est dite non homogène.

4. **α est une fonction connue :**

   $\alpha = A(x)$

   l'équation :

   $$A(x)u(x) + f(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)F(u(s))ds,$$

   est une équation intégrale de troisième espèce.

1.2 Théorie d'existence pour les équations intégrales non linéaires de Fredholm sur des intervalles compacts

1.2.1 Introduction

On va présenter la théorie d'existence pour l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \int_0^T K(x,s)F(s,u(s))ds, \tag{1.2.1}$$

définie sur un intervalle compact [0, T]. Deux principes d'existence sont établis qui donnent les conditions sous lesquelles l'équation intégrale de Fredholm (1.2.1) a une solution u soit dans $L^p[0,T]$ ou $C[0,T]$.

on va présenter quelque définitions et des théorèmes importants :

Théorème de Tonelli

Théorème 1.1 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ *sont* σ*- espaces de mesure complets et finis, on Suppose que* $f : X \times Y \to [0, \infty]$ *est mesurable. Donc on a*

1. f_x *est mesurable pour tout* x *et* f_y *est mesurable pour tout* y.
2. $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ *est mesurable en fonction de* x *et* $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ *est mesurable en fonction de* y
3. $\displaystyle\int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y)$
$\displaystyle= \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x)\right] d\nu(y).$

Fonction de Carathéodory

Dans notre étude on a besoin de la définition d'une fonction de caratéodory

Définition 1.2 *Soit I un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, la fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite de carathéodory si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *La fonction $f(.,u)$est mesurable pour tout u de $\mathbb{R}^n$.*

2. *La fonction $f(t,.)$ est continue pour p.p $t \in I$.*

Inégalité de Minkowski[50]

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f\, ;\, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables, et $p \in [1, +\infty[$. Alors

$$(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_\Omega |g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2.2}$$

On a aussi des notations qui seront utilisées tout au long de cette thèse et l'état des définitions et de la littérature qui seront nécessaires après.

La théorie du point fixe joue un rôle important dans la théorie d'existence, par conséquent nous déclarons les théorèmes du point fixe suivants :

Théorème 1.2 *(Alternative non linéaire) [50]*

Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace normé linéaire E, et soit U un sous ensemble ouvert de C. Donc toute fonction continue $N' : U \longrightarrow C$ a au moins l'une des deux propriétés suivantes :

(i) N' a un point fixe,

(ii) il existe un $x \in \partial U$, tel que $x = (1-\lambda)\alpha + \lambda N'x$, pour certain $0 < \lambda < 1$, $\alpha \in U$

Théorème 1.3 *(Théorème du point fixe de Schauder) [50]*

Soit K un sous-ensemble convexe d'un espace de Banach E et $T : K \longrightarrow K$ une application continue compacte. Donc T a un point fixe.

Théorème 1.4 *(Théorème de critère de compacité de Riesz)[50]*

Soit $M \subset L^p([t_0, t_1], \mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour la compacité relative de* M *en* L^P *sont :*

(i) M *est borné dans* L^P ,

(ii) $\forall x \in M$, $\int_{t_0}^{t_1} |x(t+h) - x(t)|^p dt \longrightarrow 0$ *lorsque* $h \longrightarrow 0$.

Théorème 1.5 *(Yosida [61]) Soit* S *la ligne réelle,* B *l'anneau de sous-ensembles de Baire* B *de* S *et* $m(B) = \int_B dx$ *la mesure de Lebesgue de* B. *Donc le sous ensemble* K *de* $L^P(S, B, m)$, $1 \leq p < \infty$, *est relativement compact si et seulement si il satisfait aux conditions suivantes :*

(i) $\sup\limits_{x \in K} \|x\| = \sup\limits_{x \in K} \left(\int_S |x(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$,

(ii) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \int_S |x(t+s) - x(s)|^p ds = 0$ *uniformément pour* $x \in K$,

(iii) $\lim\limits_{\alpha \uparrow \infty} \int_{|s| > \alpha} |x(s)|^p ds = 0$ *uniformément pour* $x \in K$. *avec* x *est une fonction de* K.

Théorème 1.6 *(Krasnoselskii) [50]*

Soit I *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, g *une fonction de Carathéodory,* $g : IX\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *pour tout* $y \in L^{P_1}(I)$, $g(t, y) \in L^{P_2}(I)$ *avec* $(p_1, p_2 \geq 1)$. *Alors l'opérateur* $G : L^{P_1}(I) \longrightarrow L^{P_2}(I)$ *définie par* $Gy(t) = g(t, y(t))$, *est continu et borné. Et il existe* $a_1 \in L^{P_2}(I)$ *et* $a_2 > 0$ *tels que*

$$|g(t, y)| \leq a_1(t) + a_2 |y|^{\frac{p_1}{p_2}}.$$

1.2.2 Les principes d'existence pour les équations intégrales sur des intervalles Semi- ouverts

Voir [50]

Dans cette section on considère l'équation intégrale de Fredholm.

pour tout $x \in [0,T)$

$$u(x) = h(x) + \int_0^T k(x,s)F(s,u(s))ds, \tag{1.2.3}$$

l'équation est définie sur l'intervalle Semi- ouvert $[0,T)$, avec $0 \leq T \leq \infty$.

Les principes d'existence suivants donnent des conditions sous lesquelles (1.2.3) admet des solutions dans $L^P[0,T)$

Théorème 1.7 *[50] Soient p, p_1 et p_2 des nombres réels tels que $1 \leq p_1 \leq p < \infty$ et $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$, on suppose que*

(M_1) $h \in L^P[0,T)$,

(M_2) $F : [0,T) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction de caratéodory (voir la définition (1.2)), et* $F(x,u(x)) \in L^{p_2}[0,T)$ *pour tout* $u \in L^p[0,T)$

(M_3) $k : [0,T) \times [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction mesurable qui vérifie*

$$\left(\int_0^T \left(\int_0^T |k(x,s)|^p dx \right)^{\frac{p_1}{p}} ds \right)^{\frac{1}{p_1}} \equiv M_0 < \infty \tag{1.2.4}$$

sont vérifiées, en outre, supposons qu'il existe une constante $M > 0$ indépendante de λ, avec $\|u\|_p \neq M$ pour toute solution $u \in L^p[0,T)$ de l'équation

$$u(x) = \lambda \left(f(x) + \int_0^T k(x,s)F(s,u(s))ds \right) \tag{1.2.5}$$

pour chaque $\lambda \in (0,1)$, l'équation (1.2.3) a au moins une solution $u \in L^p[0,T)$.

Preuve. Voir l'annexe. ∎

Chapitre 2

Introduction sur les équations elliptiques non linéaires

On va donner des résultats généraux, très utiles pour la problématique étudiée dans cette thèse. Le problème étudié dans cette thèse, n'est pas le fruit de l'imagination inventé d'un théoricien, bien au contraire, le problème traité trouve son origine dans des différents domaines, nous citons par exemple : L'électrostatique, l'astrophysique [16], la théorie de combustion [29], le problème gaussien de courbure dans la géométrie Riemannien [42], [17], la formulation d'Onsager dans la mécanique statistique [14], le système de Keller-Siegel de le chimiotactisme [53], la théorie de mesure de Chern-Simon-Higgs [18], [60].

Des recherches mathématiques rigoureuses sur des questions concernant les équations elliptiques non-linéaires ont commencé à la fin d'année 1970. Le problème de l'existence de solutions pour ces équations est ramené à celui de l'existence de solutions d'une équation elliptique non-linéaire de la forme

$$\Delta u + \lambda g(x, u) = 0 \tag{2.0.1}$$

Sur cette question, on retiendra en particulier les travaux précurseurs de Strauss [54], de Stuart [55] et de Berestycki et Lions [4], dans lesquels les auteurs utilisent des méthodes de minimisation sous contrainte dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. L'originalité de ces travaux donne des techniques qui permettent de prouver l'existence de solutions pour (2.0.1) sur tout l'espace $\mathbb{R}^N$, sous des conditions assez générales sur la non-linéarité g et pour des dimensions $N > 1$.

Le défi majeur consistait alors à adapter les méthodes variationnelles qui avaient depuis longtemps fait leurs preuves pour des équations définies sur des domaines bornés réguliers de $\mathbb{R}^N$, le problème principal étant, lorsqu'on travaille sur tout l'espace . Une méthode à la fois efficace et élégante pour combler ce manque de compacité fut introduite par Strauss [54], qui consiste à utiliser des suites de fonctions à symétrie sphérique comme suites minimisantes. Nous faisons l'usage de ce genre d'arguments , où nous prouvons l'existence d'un état fondamental pour l'équation (2.0.1), pour tout $\lambda > 0$.

Dans [4], Berestycki et Lions ont considérablement généralisé le type de non-linéarité avec la méthode variationnelle. Cependant, ils ne considèrent également que des non-linéarité autonomes, i.e.$g(x, u) = g(u)$. L'article [55] de Stuart s'inscrit dans une série de travaux novateurs [56, 43, 57, 58] qui mettent en évidence des phénomènes de bifurcation pour des équations elliptiques non-linéaires à partir d'un point du spectre essentiel de l'opérateur linéarisé. Plus précisément, des équations de la forme :

$$\Delta u - F(u) = \lambda u \tag{2.0.2}$$

sont considérées dans [55], et F est sur-linéaire à l'origine. Strauss s'intéresse alors à la bifurcation (une bifurcation intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans l'organisation du système) à partir de points λ pour

lesquels $\Delta - \lambda I$ n'est pas un opérateur de Fredholm dans le cas de domaine non bornée.
Un opérateur D linéaire borné $D : X \longrightarrow Y$ est appelé opérateur de fredholm s'il a un noyau et un conoyau de dimension finie et si son image est fermée.
C'est le cas si λ est un point du spectre essentiel de Δ. La bifurcation à partir d'un point du spectre essentiel ne peut être démontrée en utilisant la théorie standard de bifurcation via la méthode de réduction de Liapounov-Schmidt car l'opérateur $\Delta - \lambda I$ est typiquement injectif et pas surjectif. La méthode mise en oeuvre dans [55] consiste alors à établir l'existence de solutions de (2.0.2) par des arguments de minimisation sous contrainte du même genre que ceux mentionnés ci-dessus, puis à établir des relations entre certaines normes des solutions ainsi obtenues et le paramètre λ afin de prouver la bifurcation dans les normes en question.
Les résultats obtenus dans [55] concernent le problème de Dirichlet associé à des équations non-autonomes du genre de ((2.0.1)).

2.1 Les problèmes Elliptiques Semi-linéaires avec la non-linéarité exponentielle

Nous commençons par donner une description rapide des problèmes elliptiques semi-linéaires avec la non-linéarité exponentielle.

Cette thèse est dédiée à l'étude d'un problème elliptique faisant intervenir, d'une part le laplacien $\Delta = \dfrac{\delta^2}{\delta^2 x} + \dfrac{\delta^2}{\delta^2 y}$, et d'une autre part $\lambda e^u + g(x)$ est un terme avec la non-linéarité exponentielle, où λ constant

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u + g(x) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.1}$$

g est une fonction continue, Ω domaine borné de $\mathbb{R}^2$

Le problème (2.1.1) est lié au problème de Bratu suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.2}$$

où Ω ici est la boule d'unité de $\mathbb{R}^N$.

Gelfand [28], Joseph et Lundgren [41], en utilisant l'analyse de phase-plane, ont donné une description complète des solutions classiques à (2.1.2), qui sont aussi radialement symétriques [31].

Proposition 2.1 *soit $N \geqslant 1$ alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que :*

— *pour $0 < \lambda < \lambda^*$, (2.1.2) a une solution minimale u_λ ;*

— *pour $\lambda = \lambda^*$, (2.1.2) a une solution unique ;*

— *pour $\lambda > \lambda^*$, (2.1.2) n'a aucune solution (même dans le sens faible).*

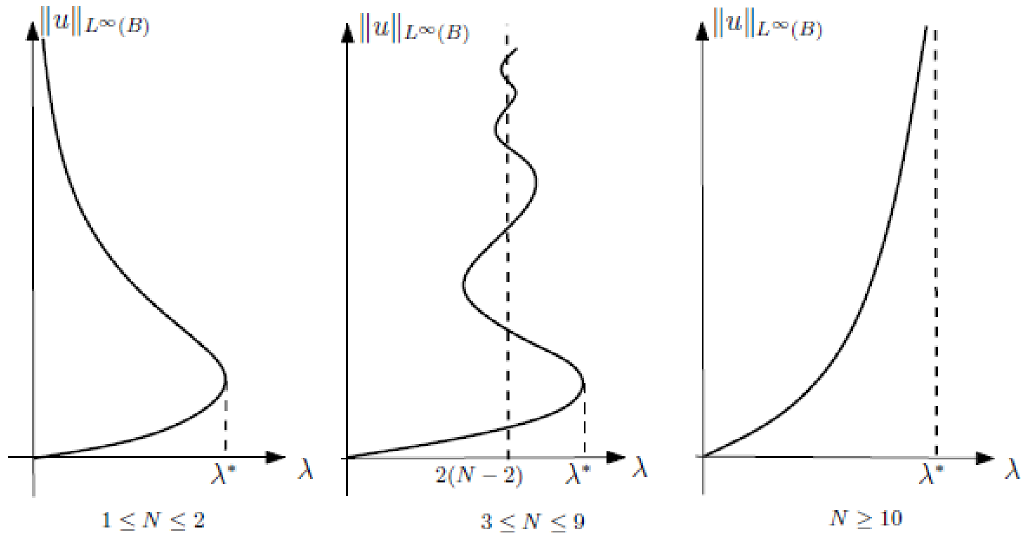

FIGURE 2.1 – Bifurcation diagram for the Gelfand problem.

D'ailleurs, nous avons

(a) *Si $N = 1, 2$, alors pour $0 < \lambda < \lambda^*$, il y a exactement deux solutions à (2.1.2), l'un des deux est u_λ une solution minimale, l'autre, dénoté U_λ, avec l'indice de Morse (voir [13]).*

(b) *Si $3 \leqslant N \leqslant 9$, et pour $0 < \lambda < \lambda^*$, $\lambda \neq 2(N-2)$, (2.1.2) a un nombre fini de solutions ; pour $\lambda = 2(N-2)$, (2.1.2) a un nombre infini de solutions.*

(c) *Si $N \geqslant 10$, et pour $\lambda^* = 2(N-2)$, (2.1.2) a une solution minimale unique u_λ pour chaque $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

Preuve.

Voir L. Dupaigne [25] ■

Nagasaki et Suzuki [46] ont classifié les solutions de (2.1.2) selon leur indice de Morse [13]. La famille des solutions régulières de (2.1.2) peuvent être décrites comme courbe $(u(s), \lambda(s))$ avec $s \in [0, \infty)$, tel que $(u(s), \lambda(s)) \to (0, 0)$ lorsque $s \to 0$ et $(u(s), \lambda(s)) \to (u_\sigma, \lambda_\sigma)$ lorsque $s \to \infty$, où $u_\sigma(r) = -2log(r)$, $\lambda_\sigma = 2(N-2)$ est une solution singulière de (2.1.2).

Dans la dimension $3N \geqslant 0$, $\lambda(s)$est monotone, $u(s)$ est monotone et stable .

Nous renvoyons le lecteur au livre de L. Dupaigne [25] pour un autre référence sur le problème(2.1.2) [5].

le type de problème étudié par Gelfand est les problèmes elliptiques non linéaire.

La solution exacte de (2.1.2) est donnée par [2], [7],et [8] comme suite :

$$u(x) = -2ln \left[\frac{cosh((x - \frac{1}{2})\frac{\theta}{2})}{cosh\frac{\theta}{4}} \right] \tag{2.1.3}$$

où θ résout l'équation

$$\theta = \sqrt{2\lambda} cosh(\frac{\theta}{4}) \tag{2.1.4}$$

Il existe deux solutions de l'équation (2.1.4) pour les valeurs de $0 < \lambda < \lambda_c$; pour $\lambda > \lambda_c$, il n'y a aucune solution .

la solution (2.1.3) est une solution unique pour la valeur critique de $\lambda = \lambda_c$ qui résout l'équation

$$1 = \frac{1}{4}\sqrt{2\lambda_c} sinh(\frac{\theta_c}{4}) \tag{2.1.5}$$

Il a été évalué dans [2], [7], [8], [12], [40], et [27], que la valeur critique λ_c est donnée par $\lambda_c = 3.513830719$.

2.2 Étude de problème $-\Delta u + g(u) = f$

Voir [26]

L'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires se pose pour nombreux problèmes scientifiques. En effet, la plupart des problèmes de la physique sont non linéaires.

Plusieurs problèmes abstraits se traitent par des équations aux dérivées partielles non linéaires de la forme $-\Delta u + g(u) = f$.

2.2.1 Étude d'existence et unicité

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$.

Le problème elliptique semi linéaire suivant considéré par Evans dans [26] soumis aux conditions au bord de type Dirichlet pour une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2.1}$$

òu g est une fonction non linéaire.

Soient les propositions

(H_1) $\exists p = 2^*$ et $\exists c > 0$ tel que $|g(t)| \leq c(1+|t|^{p-1})$, $\forall t \in \mathbb{R}^n$.

(H_2) g une fonction continue croissante .

(H_3) $f \in H^{-1}(\Omega)$.

1. **Le cas** *òu* **g est croissante :**

Proposition 2.2 *[26]*

Le problème (2.2.1) sous les conditions (H_1), (H_2) et (H_3) possède une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve. Voir[26]

On vérifie tout d'abord que le problème (2.2.1) a une forme variationnelle, c'est à dire qu'il existe $F : H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow d_G F(u) = 0.$$

Étape 1 : Mise sous forme variationnelle :

Introduisons la primitive G de g définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds,$$

on vérifie aisément que

$$|G(t)| \leq c(1 + |t|^{2^*}) \tag{2.2.2}$$

par ailleurs, comme $G' = g$ qui est croissante, on a G convexe sur $\mathbb{R}$.

Introduisons maintenant la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega G(v) - < f, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

vérifions tout d'abord que $F \in C^1(H_0^1; \mathbb{R})$ et que

$$dF(u)v = \int_\Omega \nabla u.\nabla v + g(u)v - < f, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

de sorte que

$$dF(u) = -\Delta u + g(u) - f \tag{2.2.3}$$

En effet

$F = E + W - L$

où

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 = \|u\|^2_{H_0^1}$$

$$W(v) = \int_\Omega G(v(x))dx$$

et

$$L =< f, v >_{H_0^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

E est une forme bilinéaire symétrique sur $H_0^1(\Omega)$, donc C^∞ et

$$dF(u)v = \int_\Omega \nabla u.\nabla v$$

c'est à dire $dF(u) = -\Delta u$

La forme L est linéaire continue, donc C^∞ et

$$dL(u)v = Lv =< f, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} .$$

Enfin on a

$W = l \circ T_G \circ i$

où i est l'injection de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. T_G est l'opérateur de Nemytskii

$$L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

$$v \longrightarrow G(v)$$

et l est la forme linéaire sur $L^1(\Omega)$ définie par

$$l(w) = \int_\Omega w$$

l et i sont linéaires continues, donc C^∞.

D'après les résultats précédents, T_G est C^1 et

$$T_G v w = g(v)w$$

on en déduit donc que

$$dW(v) = \int_\Omega g(u)v$$

i.e

$$dW(u) = g(u)$$

En conclusion

$$dF(u)v =< -\Delta u + g(u) - f, v >_{H^{-1},H_0^1}$$

i.e

$$-\Delta u + g(u) = f \Longleftrightarrow dF(u) = 0$$

Étape 2 : recherche de solutions :

Nous avons vu que les solutions dans $H_0^1(\Omega)$ de (2.2.1) étaient les points critiques de $F \in C^1(H, \mathbb{R})$.

Vérifions que F est convexe strictement, coercive de sorte que le résultat sera établi en vertu des théorèmes (A.3) et (A) de Annexe A.

α) F est strictement convexe : En effet F est la somme de deux fonctions convexes E, W et la fonction linéaire L donc F est convexe, E est strictement convexe, donc F est strictement convexe.

β) F est coercive : comme g est croissante, on vérifie aisément qu'il existe $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$G(t) \geq -\Lambda$$

Il en résulte que, $\forall v \in H$

$$F(v) \geq E(v) - L(v) - |\Omega|\Lambda$$

La coercivité de F résulte alors de celle de E - L.

On a par l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned} E(v) - L(v) &= \int_\Omega |\nabla u| - \int_\Omega f.v \\ &\geq \|v\|^2_{H_0^1} - c\|f\|_{H^{-1}}\|v\|_{H_0^1} \\ &\geq p(\|v\|) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

où $P(x) = x^2 - c\|f\|_{H^{-1}} + x$, comme $P(x) \longrightarrow +\infty$, lorsque $|x| \longrightarrow +\infty$, le résultat en découle.

Étape 3 : Conclusion

Comme F est continue convexe, par le théorème (A.3), il existe un unique $u \in H_0^1$ tel que

$$F(u) = \inf_{v \in H_0^1} F(v)$$

de plus $dF(u) = 0$ donc u est la solution de (2.2.1) par le théorème (A) u est l'unique solution du problème. ■

2. **Le cas *où* g est décroissante :**

Soient les suppositions suivantes

(T_1) $\exists p$ tel que $1 \leq p < 2^*$ et $\exists c > 0$ tel que $|g(t)| \leq c(1+|t|^{p-1})$, $\forall t \in \mathbb{R}^n$.

(T_2) g fonction tel que $g(t).t \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$

(T_3) $f \in H^{-1}(\Omega)$

Proposition 2.3 *[26]*

Pour les fonctions f et g qui vérifient $(T_1), (T_2), et (T_3)$ il existe une solution

$u \in H_0^1(\Omega)$ *pour le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f(x) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Preuve. Voir l'annexe. ■

Chapitre 3

L'équation elliptique non linéaire issue de l'équation intégrale de Fredholm

Voir [24]

L'étude des équations intégrales et de leur résolution numérique est un thème qui connaît un grand succès. Les systèmes physiques les plus souvent rencontrés dans la vie quotidienne, se décrivent généralement par des équations intégrales , qui a débuté avec les travaux de Fredholm, principale inventeur de la théorie des équations intégrales de deuxième espèce, qui porte son nom.

Les équations aux dérivées partielles, par exemple(l'opérateur de Laplace, de Helmholtz, du bilaplacien ...), peuvent être issus par des équations intégrales .

Nous allons voir brièvement un modèle physique réel [24] où nous avons une équation elliptique non linéaire issue d'une équation intégrale non linéaire de Fredholm.

Soit un milieu électriquement chargé constitué par des électrons et un fond continu de charges positives neutralisantes. Si on place un ion positif (appelé charge test ou impureté) à l'origine des coordonnées, le système est alors perturbé et au bout d'un certain moment, il va atteindre un nouvel état d'équilibre.

L'objectif est de trouver l'énergie potentielle d'un électron situé à la position r de l'ion central de charge électrique quand le système a atteint le nouveau état d'équilibre.

On obtient ce potentiel de l'équation intégrale suivante en utilisant les coordonnés sphériques (voir [24]) :

$$Y(r) = Y_{ie}(r) - \frac{3}{2Z}\int_0^{\infty} \frac{r'}{r}(r + r' - |r - r'|)(\exp(Z\Gamma Y(r')) - 1)dr' \tag{3.0.1}$$

avec

Y_{ie} est l'énergie potentielle d'interaction du couple ion-électron (potentielle initiale).

r est la distance entre l'électron et l'ion central de la charge électrique.

Z le nombre des charges.

Γ est le couplage faible, constant.

Pour transformer cette équation à une équation différentielle on va dériver l'équation 3.0.1 deux fois comme la suite :

nous avons la fonction

$$\frac{r'}{r}(r + r' - |r - r'|) = \begin{cases} \frac{2r'^2}{r} & \text{si } r \geq r', \\ 2r' & \text{si } r < r' \end{cases} \tag{3.0.2}$$

soit

$$G(r, r') = \frac{r'}{r}(r + r' - |r - r'|)(\exp(Z\Gamma Y(r')) - 1)$$

on va appliquer la relation :

$$Y'(r) = \frac{dY(r)}{dr} = \frac{dY_{ie}(r)}{dr} - \frac{3}{2Z}(\int_{\varphi(r)}^{\psi(r)} \frac{dG(r, r')}{dr}dr' + \frac{d(\psi(r))}{dr}G(\psi(r), r) - \frac{d(\varphi(r))}{dr}G(\varphi(r), r))$$

donc on a

$$Y(r) = Y_{ie}(r) - \frac{3}{2Z}\int_0^r \frac{2r'^2}{r}(\exp(Z\Gamma Y(r')) - 1)dr' - \frac{3}{2Z}\int_r^\infty 2r'(\exp(Z\Gamma Y(r')) - 1)dr'$$

$$Y'(r) = Y'_{ie}(r) + \frac{3}{2Z}\int_0^r \frac{2r'^2}{r^2}(\exp(Z\Gamma Y(r')) - 1)dr' - \frac{3r}{Z}(\exp(Z\Gamma Y(r)) - 1)$$

$$Y''(r) = Y''_{ie}(r) - \frac{3}{2Z}\int_0^r \frac{4r'}{r^3}(\exp(Z\Gamma Y(r')) - 1)dr' - \frac{3}{Z}(\exp(Z\Gamma Y(r)) - 1)$$

et on a

$$Y''(r)+\frac{2}{r}Y'(r) = Y''_{ie}(r)+\frac{2}{r}Y'_{ie}(r)-\frac{3}{2Z}\int_0^r \frac{4r'}{r^3}(\exp(Z\Gamma Y(r'))-1)dr'-\frac{3}{Z}(\exp(Z\Gamma Y(r))-1)$$

$$+\frac{3}{2Z}\int_0^r \frac{4r'}{r^3}(\exp(Z\Gamma Y(r')) - 1)dr' + \frac{6}{Z}(\exp(Z\Gamma Y(r)) - 1)$$

donc

$$Y''(r) + \frac{2}{r}Y'(r) = Y''_{ie}(r) + \frac{2}{r}Y'_{ie}(r) + \frac{3}{Z}(\exp(Z\Gamma Y(r)) - 1)$$

et on trouve pour le dimension 3

$$\Delta Y = \exp(Z\Gamma Y(r)) + Y''_{ie}(r) + \frac{2}{r}Y'_{ie}(r) - \frac{3}{Z}$$

ou sous la forme d'équation différentielle

$$\frac{d^2Y(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dY(r)}{dr} = Y''(r) + \frac{2}{r}Y'(r) = \frac{3}{Z}e^{Z\Gamma Y(r)} + F(r). \tag{3.0.3}$$

avec :

$$F(r) = Y''_{ie}(r) + \frac{2}{r}Y'_{ie}(r) - \frac{3}{Z}. \tag{3.0.4}$$

$Y(r)$ est le potentiel ; et Y_{ie} est le potentiel initial.

Le premier membre de (3.0.3) est le Laplacien de Y (r). En peut écrire l'équation (3.0.3)comme la suite

$$\Delta Y(r) = \frac{3}{Z}e^{Z\Gamma Y(r)} + F(r) \tag{3.0.5}$$

où nous avons utilisé l'abréviation

$$\Delta Y(r) = Y''(r) + \frac{2}{r}Y'(r) \tag{3.0.6}$$

qui est venue des relations suivantes

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = \frac{dY}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{dY}{dr}\frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2} = \frac{d^2Y}{dr^2}(\frac{x_i}{r})^2 + \frac{dY}{dr}(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3})$$

En sommant sur i avec $\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = r$ nous avons finalement obtenu

$$\begin{aligned}
\partial Y(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 Y}{\delta^2 x_i} &= \sum_{i=1}^{N}(\frac{d^2Y}{dr^2}(\frac{x_i}{r})^2 + \frac{dY}{dr}(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3})) \\
&= \frac{d^2Y}{dr^2}\sum_{i=1}^{N}(\frac{x_i}{r})^2 + \frac{dY}{dr}\sum_{i=1}^{N}(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}) \\
&= \frac{d^2Y}{dr^2}(\frac{r}{r}) + \frac{dY}{dr}(\frac{N}{r} - \frac{1}{r}) \\
&= \frac{d^2Y}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{dY}{dr}
\end{aligned}$$

donc le laplacien de Y s'écrit sous la forme

$$\Delta Y = Y_r^{''} + \frac{N-1}{r}Y_r^{'}.$$

Si $N = 2$

$$\Delta Y = Y_r^{''} + \frac{1}{r}Y_r^{'}.$$

Et Si $N = 3$

$$\Delta Y = Y_r^{''} + \frac{2}{r}Y_r^{'}$$

dans notre problème

$$\Delta Y(r) = \frac{3}{Z}e^{Z\Gamma Y(r)} + F(r) \tag{3.0.7}$$

on met $u(r) = Z\Gamma Y(r)$

$$Z\Gamma\Delta Y(r) = Z\Gamma\frac{3}{Z}e^{Z\Gamma Y(r)} + Z\Gamma F(r)$$

en suite

$$Z\Gamma\Delta Y(r) = 3\Gamma e^{Z\Gamma Y(r)} + Z\Gamma F(r)$$

nous avons

$u(r) = Z\Gamma Y(r)$, soit $\lambda = 3\Gamma$ et $f(r) = Z\Gamma F(r)$

et notre problème prend la forme

$$\Delta u(r) = \lambda e^{u(r)} + f(r). \tag{3.0.8}$$

Le problème principal est maintenant présenté par l'équation (3.0.8) qui nécessite des conditions au bord $\partial\Omega$: Y(r), et $Y'(r)$ sont finis

c'est à dire :

u(r), u'(r) sont finis (sur le bord $\partial\Omega$)

Dans une situation pratique nous exigeons que la solution doit être finie sur les bords du domaine qui est une sphère de rayon b . Notre problème (3.0.8) est un problème mal posé, et notre travail est de trouver la fonction $f(r)$ convenable pour que notre problème a une solution radiale unique $u(r)$

3.1 L'équation de Liouville

L'équation de Liouville est bien traitée dans le travail [11], cette équation a une grande importance pour notre travail donc on va citer quelque corollaires et théorèmes :

On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné et soit u la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Corollaire 1 *[11] Soit u la solution de (3.1.1) avec $f \in L^1(\Omega)$. Alors pour chaque constant $k > 0$ on a, $e^{k|u|} \in L^1(\Omega)$.*

Preuve.

voir [11] ∎

soit u solution de l'équation non-linéaire (Équation de Liouville)

$$\begin{cases} -\Delta u = v(x)e^u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.2}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et $v(x)$ est une fonction donnée sur Ω

Corollaire 2 *[11] On suppose que u une solution de (3.1.2) avec $v \in L^p(\Omega)$ et $e^u \in L^{p'}(\Omega)$ pour certains p, $1 < p \leq \infty$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.*

Preuve.

D'après le corolaire 1 on a $e^{ku} \in L^1(\Omega), \forall k > 0$ ie $e^u \in L^r(\Omega)$,

$\forall r < \infty$ donc $ve^u \in L^{p-\delta}(\Omega); \forall \delta > 0$ si $p < \infty$ et $ve^u \in L^r(\Omega)$,

$\forall r < \infty$ si $p = \infty$ donc $u \in L^\infty(\Omega)$. ∎

Remarque 3.1

Le corollaire 2 n'est pas valide pour $p = 1$.

Remarque 3.2 *[11] Soit* $(0 < a < 1)$. *La fonction* $u(r) = a\log(\log\frac{e}{r})$, *avec* $r = |x|$ *satisfait le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u(r) = v(r)e^u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.3}$$

avec

$$v(r) = -\frac{a}{r^2(\log\frac{e}{r})^{2+a}}$$

on note que $v(r) \in L^1(\Omega), e^u \in L^\infty(\Omega)$ *et pourtant* $u(r) \notin L^\infty(\Omega)$ *depuis* $u(r) \longrightarrow -\infty$ *pour* $r \longrightarrow 0$. *La même fonction* $u(x)$ *avec* $a < 0$ *fournit un exemple où* u *satisfait (3.1.3) avec* $v \in L^1(\Omega), ve^u \in L^1(\Omega)$ *et pourtant* $u \notin L^\infty(\Omega)$ *depuis* $u(r) \longrightarrow -\infty$ *pour* $r \longrightarrow 0$.

3.2 La résolution de l'équation elliptique

On cherche dans [37] une solution radiale du problème elliptique non linéaire d'une non linéarité exponentielle

$$\begin{cases} \Delta u(r) = \lambda e^{u(r)} + f(r) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.1}$$

dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, λ nombre réel, f une fonction de $L^q(\Omega)$ pour $q > 1$ u_0 est un constant .

3.2.1 Le cas de dimension deux (N = 2)

Nous allons résoudre notre problème sur un domaine borné, disque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de rayon b, $0 < b \leq \alpha$ tel que $\alpha > 1$ avec une frontière $\partial\Omega$, λ un constant réel.

La solution u et sa dérivée doit être finie au bord $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} \Delta u(r) = \lambda e^{u(r)} + f(r) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.2}$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$

$$\Delta u(r) = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) \tag{3.2.3}$$

Pour résoudre l'équation (3.2.2), on met $u(r) = k(r) + w(r)$

donc

$$\Delta u(r) = \Delta k(r) + \Delta w(r)$$

et on a

$$\begin{aligned} \Delta(k(r) + w(r)) =& \lambda e^{k(r)+w(r)} + f(r) \\ &= \lambda e^{w(r)} e^{k(r)} + f(r) \\ &= v(r) e^{k(r)} + f(r) \end{aligned}$$

avec $v(r) = \lambda e^{w(r)}$

tel que $w(r)$ satisfait l'équation

$$\begin{cases} \Delta w(r) = f(r) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \\ w =_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.4}$$

$w =_0 \in \mathbb{R}$,

$k(r)$ satisfaisant le problème de Liouville complété par des conditions aux bords sur $\partial\Omega$

$$\begin{cases} \Delta k(r) = \lambda e^{w(r)} e^{k(r)} \equiv v(r) e^{k(r)} & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \\ k(r) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.5}$$

il faut avoir des conditions convenables sur $f(r)$ pour avoir une solution unique pour le problème 3.2.2.

La solution de ce problème nous permet d'avoir la solution de (3.2.2) u (r) comme $u(r) = k(r) + w(r)$ avec $w(r)$ la solution de l'équation (3.2.4). Il faut donc choisir les solutions qui vérifient les conditions aux bords et ayant une fonction convenable f (r) pour l'équation (3.2.4) .

On a pour un constant A, $0 < A < 1$. La fonction $k(r) = Alog(log\frac{e}{r})$, avec $r = |x|$ satisfait le problème

$$\begin{cases} -\Delta k(r) = v(r)e^{k(r)} & \text{dans } \Omega, \\ k(r) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.6}$$

avec

$$v(r) = -\frac{A}{r^2(\log\frac{e}{r})^{2+A}}$$

donc

$$k(r) = A\log(\log\frac{e}{r})$$

est la solution de l'équation de Liouville 3.2.5

d'autre part

$$v(r) = -\frac{A}{r^2(\log\frac{e}{r})^{2+A}} = \lambda e^{w(r)}$$

donc on peut trouver $w(r)$,

$$\begin{aligned}
e^{w(r)} =& v(r) \\
e^{w(r)} =& \frac{v(r)}{\lambda} \\
w(r) =& ln\frac{v(r)}{\lambda} \\
=& ln[-\frac{A}{\lambda r^2(\log\frac{e}{r})^{2+A}}] \\
=& ln[\frac{-A}{\lambda r^2}(\log\frac{e}{r})^{-A-2}]
\end{aligned}$$

avec $\frac{e}{r} > 0$ quelque soit $r \in]0, \alpha]$, donc on a trouvé la forme convenable de $f(r)$

$$\begin{aligned}
f(r) =& \Delta w(r) \\
=& w''(r) + \frac{1}{r}w'(r)
\end{aligned}$$

et notre solution

$$\begin{aligned}
u(r) =& k(r) + w(r) \\
=& A\log[\log(\frac{e}{r})] + \ln(-\frac{A}{\lambda r^2}[\log(\frac{e}{r})]^{-A-2})
\end{aligned}$$

et on a la solution finale

$$\begin{aligned}
u(r) =& A\log[\log(\frac{e}{r})] + \ln(-\frac{A}{\lambda r^2}[\log(\frac{e}{r})]^{-A-2}) \\
=& A\log[\log(\frac{e}{r})] + \ln(-\frac{A}{\lambda r^2}) + ln[\log(\frac{e}{r})]^{-A-2} \\
=& A\log[\log(\frac{e}{r})] + \ln(-\frac{A}{\lambda r^2}) + (-A-2)\ln[\log(\frac{e}{r})]
\end{aligned}$$

après une certaine simplification

$$u(r) = A\log[\log(\frac{e}{r})] + \ln(-\frac{A}{\lambda r^2}) + (-A-2)\ln[\log(\frac{e}{r})], \qquad 0 < r \le \alpha, \qquad \lambda < 0 \quad (3.2.7)$$

qui est une fonction qui vérifié les conditions au bords , u(r), et $u'(r)$ sont finis sur les bords de disque $\partial\Omega$ c'est à -dire lorsque r $= \alpha$

3.2.2 Le cas de dimension trois (N=3)

On va résoudre le même problème dans le dimension N = 3

$$\begin{cases} \Delta u(r) = \lambda e^{u(r)} + f(x) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^3, \\ \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.8}$$

on cherche la solution qui est finie, Ainsi sa dérivée sur la frontière du sphère. On va traiter notre problème d'une autre façon, soit

$$u(r) = k(r) + w(r)$$

et on va remplacer dans l'équation

$$\Delta u(r) = \lambda e^u + f(r)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u(r)}{\partial r} =& \lambda \exp\left(u(r)\right) + f(r) \\ u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) =& \lambda \exp\left(u(r)\right) + f(r) \\ k''(r) + \frac{2}{r}k'(r) + w''(r) + \frac{2}{r}w'(r) =& \lambda \exp\left(k(r) + w(r)\right) + f(r) \\ k''(r) + \frac{1}{r}k' + w''(r) + \frac{2}{r}w'(r) + \frac{1}{r}k'(r) =& \lambda \exp\left(w(r)\right)\exp(k(r)) + f(r) \\ k''(r) + \frac{1}{r}k'(r) + w''(r) + \frac{2}{r}w'(r) + \frac{1}{r}k'(r) =& v(r)\exp(k(r)) + f(r) \end{aligned}$$

avec

$$v(r) = \lambda \exp(w(r))$$

donc il faut résoudre les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} w''(r) + \frac{2}{r}w'(r) + \frac{1}{r}k'(r) = f(r) \\ k''(r) + \frac{1}{r}k'(r) = v(r)\exp(k(r)) \end{aligned}$$

La deuxième équation est l'équation de Liouville (pour la dimension 2), ces solutions sont données dans la section précédente. Donc $k(r)$ et $v(r)$ sont bien connus.

$$w(x) = \ln(\frac{v(x)}{\lambda})$$

ce qui permet d'avoir à la fois u(r) et f(r).

Par ces résultats, $u(r)$ et $f(r)$ sont donnés par

$$u(r) = k(r) + w(r)$$

$$f(r) = w''(r) + \frac{2}{r}w'(r) + \frac{1}{r}k'(r) = \Delta w(r) + \frac{k'(r)}{r}. \quad (3.2.9)$$

Donc

$$f(r) = \Delta w(r) + \frac{k'(r)}{r}$$

3.3 L'application du problème dans la physique des plasmas

Nous allons maintenant appliquer les deux dernières solutions proposées, dans les sections précédentes, pour un problème concret, rencontré dans la physique des plasmas.

Ce problème vise à extraire l'équation (3.0.5), des informations précises sur l'interaction de l'énergie quantique $Y_{ie}(r)$ entre les particules voisines dans les plasmas.

Cette équation basée sur (3.0.4)

$$\frac{\partial^2 Y(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial Y(r)}{\partial r} = \frac{\partial^2 Y_{ie}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial Y_{ie}(r)}{\partial r} - \frac{3}{Z} + \frac{3}{Z}\exp(Z\Gamma Y(r))$$

Y_{ie} est l'énergie potentielle d'interaction du couple ion-électron (potentielle initiale).

r est la distance entre l'électron et l'ion central de charge électrique.

Z le nombre des charges.

Γ est le couplage faible, constant.

On met

$$y(r) = Z\Gamma Y(r), y_{ie}(r) = Z\Gamma Y_{ie}(r).$$

Puis

$$\frac{\partial^2 y(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial y(r)}{\partial r} = \frac{\partial^2 y_{ie}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial y_{ie}(r)}{\partial r} - 3\Gamma + 3\Gamma \exp(y(r))$$

donc l'équation prend la forme suivante

$$\frac{\partial^2 y(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial y(r)}{\partial r} = 3\Gamma \exp(y(r)) + \frac{\partial^2 y_{ie}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial y_{ie}(r)}{\partial r} - 3\Gamma$$

en déduit qu'avec $\lambda = 3\Gamma$ on a

$$f(r) = y''_{ie}(r) + \frac{2}{r}y'_{ie}(r) - \lambda \equiv \Delta y_{ie}(r) - \lambda \tag{3.3.1}$$

Puis l'équation à la forme principale

$$\Delta u(r) \equiv \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u(r)}{\partial r} = \lambda \exp(u(r)) + f(r) \quad \text{avec } \lambda = 3\Gamma. \tag{3.3.2}$$

La solution $u(r)$ est finie au bord du domaine .

Avec la combinaison de (3.3.1) et (3.3.2) nous obtenons

$$f(r) = \Delta w(r) = \Delta y_{ie}(r) - \lambda \equiv \Delta y_{ie}(r) - \Delta\varphi(r),$$

toujours on travail sur la dimension trois (N = 3) .

Avec $\varphi(r)$ qui est la solution de l'équation

$$\Delta\varphi(r) = \lambda$$

donc le terme $y_{ie}(r)$ vient de la relation

$$\Delta w(r) = \Delta y_{ie}(r) - \Delta \varphi(r)$$

$$y_{ie}(r) = w(r) + \varphi(r)$$

En utilisant le résultat de section (3.2.2) et les formules (3.3.1) et (3.2.9)

l'énergie d'interaction $y_{ie}(r)$ peut être calculée comme la suite

$$f(r) = \Delta w(r) + \frac{k'(r)}{r} = \Delta y_{ie}(r) - \lambda$$

où

$$\Delta w(r) = \Delta y_{ie}(r) - \Delta \psi(r)$$

et $\psi(r)$ est une solution de

$$\Delta \psi(r) = \lambda + \frac{k'(r)}{r}$$

Finalement, on obtient

$$y_{ie}(r) = w(r) + \psi(r)$$

on cherche une fonction $f(r)$ convenable pour que notre problème aura une solution unique.

On a calculé l'énergie d'interaction $y_{ie}(r)$ et on a pu trouver la fonction $f(r)$

$$f(r) = \frac{\partial^2 y_{ie}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial y_{ie}(r)}{\partial r} - 3\Gamma$$

donc on a trouvé la fonction convenable $f(r)$ pour que notre problème

$$\frac{\partial^2 Y(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial Y(r)}{\partial r} = \frac{\partial^2 Y_{ie}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial Y_{ie}(r)}{\partial r} - \frac{3}{Z} + \frac{3}{Z}\exp(Z\Gamma Y(r))$$

a un solution unique u .

On peut dire que ce problème est un problème inverse de l'électrostatique, parce qu' on a trouvé la fonction convenable $f(r)$ pour résoudre le problème

$$\begin{cases} \Delta u(r) = \lambda e^u + f(r) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3.3}$$

3.4 Explosion et comportement de solution de l'équation elliptique semi-linéaire

Nous avons étudié un des problèmes elliptiques non linéaires de dimension deux, nous avons donné quelques estimations pour la résolution de ce problème, et nous l'avons décomposé en deux problèmes, le premier est l'équation de Poisson

$$\Delta w(x) = f(x),$$

et la seconde est l'équation de Liouville

$$\Delta k(x) = v(x)e^{k(x)}$$

et la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u(x) = \lambda e^u + f(x) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4.1}$$

est de la forme $u(x) = w(x) + k(x)$.

Donc le blow-up de problème 3.4.1, est le blow-up de l'équation de liouville

$$\Delta k(x) = v(x)e^{k(x)}$$

3.4.1 Explosion de solution de l'équation $-\Delta u = v(x)e^u$

Dans cette section on va donner des estimations de Brezis et Merle voir [11], ils ont étudié l'explosion de solution pour l'équation

$$-\Delta u = v(x)e^u \tag{3.4.2}$$

sur Ω domaine bornée, $v(x) \in L^P(\Omega)$, et la solution de 3.4.2 $u \in L^1(\Omega)$, $e^u \in L^{p'}(\Omega)$, p' est l'exposant conjugué de p.

On considère une suite (u_n) de solutions de

$$-\Delta u_n = v_n(x)e^{u_n} \tag{3.4.3}$$

sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

On va étudier la suite (u_n) des solutions de (3.4.3) sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3)

$$(H_1) \qquad v_n \geq 0,$$

$$(H_2) \qquad \|v_n\|_{L^P} \leq c_1$$

$$(H_3) \qquad \|e^{u_n}\|_{L^{P'}} \leq c_2$$

c_1 et c_2 des constants positives, $1 < p \leq \infty$, et p' est l'exposant conjugué de p.

On va voir cet exemple typique suivant,

la suite (u_n) des solutions de (3.4.3) avec $v_n = 1$

$$u_n(x) = \ln \frac{8n^2}{(1+n^2|x|^2)^2}$$

qui satisfait l'équation $-\Delta u_n = e^{u_n}$, dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

on a que $\|e^{u_n}\|_{L^1} = 8\pi$, donc les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) son vérifiées pour cet exemple.

Notez que $u_n(x) \longrightarrow -\infty$, pour tout $x \neq 0$ et $u_n(0) \longrightarrow +\infty$, cet exemple fournit une très bonne description du mécanisme de Blow up dans le cas général sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3).

Si la suite (u_n) est non bornée alors il y a un ensemble fini $S \subset \Omega$, où $(u_n(x))$ tend vers $+\infty$ et ou d'autre part, $(u_n(x))$ tend vers $-\infty$, $\forall x \in S$.

Plus précisément on peut définir l'ensemble S de Blow up comme la suite :

S $= \{\ x \in \Omega\,;$ il existe une suite (x_n) dans Ω, tel que $x_n \longrightarrow x$ et $u_n(x_n) \longrightarrow \infty\ \}$

Théorème 3.1 *[11]*

Soit (u_n) une suite des solutions de l'équation (3.4.3), pour certain $0 < p \leq \infty$ et des constants c_1, c_2 les hypothèses

$$(H_1) \qquad v_n \geq 0,$$

$$(H_2) \qquad \|v_n\|_{L^P} \leq c_1$$

$$(H_3) \qquad \|e^{u_n}\|_{L^{P'}} \leq c_2$$

sont vérifiées, alors, il existe une sous suite (u_{n_k}) satisfaisant une des alternatives suivantes

(i_1) (u_{n_k}) est bornée dans $L^{\infty}_{loc}(\Omega)$

(i_2) $u_{n_k}(x) \longrightarrow -\infty$ uniformément sur des sous-ensembles compacts de Ω.

(i_3) il existe un ensemble fini, et non vide de Blow up $S = \{a_1, ..., a_m\} \subset \Omega$, non vide, tel que pour $1 \leq i \leq m$, il existe une sous suite $\{x_{n_k}\} \subset \Omega$, tel que $x_{n_i} \longrightarrow a_i$, $u_{n_k}(x_{n_k}) \longrightarrow \infty$ ou $u_{n_k}(x) \longrightarrow -\infty$, uniformément sur des sous-ensembles compacts de $\Omega \setminus S$.

En outre, $v_{n_k} e^{u_{n_k}}$ converge dans Ω, vers $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{a_i}$, avec $\alpha_i \geq 4\pi$, $\forall i$.

Preuve.

Voir [11] ■

Y.Li,I.Shafrir[44] ont travaillé sur le même sujet, et ils ont présenté cette théorème qui nous donne la valeur de α_i qui a apparu dans le condition (i_3) .

Théorème 3.2 *[44]*

Soient (u_n), (v_n), deux suites vérifient l'équation (3.4.3), (u_n) la suite des solutions.

On suppose que $v_n \in C^0(\bar{\Omega})$, $v_n \geq 0$ dans Ω.

$v_n \longrightarrow v$ dans $C^0(\bar{\Omega})$, avec $\|e^{u_n}\|_{L^1(\Omega)} \leq c_0$, pour un certain constant positif c_0.

On suppose que l'alternative (i_3) *de théorème précédent est vérifié, alors pour tout i,* $\alpha_i = 8\pi\lambda_i$, *avec* λ_i *est un entier positif, et* $v_{n_k}e^{u_{n_k}} \longrightarrow \sum_i \alpha_i\delta_{a_i}$.

Preuve.

Voir [44] ∎

Chapitre 4

Résolution numérique par la méthode d'itération variationnelle

4.1 Méthode d'itération variationnelle

Notre problème est toujours

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u + f(x) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1.1}$$

f est une fonction donné par la relation

$f(x) = 3\Gamma - \frac{\Gamma Z}{\eta}\frac{e^{-\frac{x}{\eta}}}{x}$

avec Γ, η et Z des constants.

4.2 Procédure de la Méthode d'itération variationnelle

voir [52]

La méthode d'itération variationnelle est une méthode de résolution (approchée) d'équations différentielle linéaires ou non-linéaires.

L'avantage principal de cette méthode est qu'elle peut être appliquée directement pour tous les types d'équations intégrales différentielles non linéaires, homogènes ou non homogènes, avec des coefficients constants ou variables. D'ailleurs, la méthode proposée est capable de réduire considérablement la taille de travail informatique tout en maintenant toujours de grande précision de la solution numérique. Plusieurs exemples sont donnés pour mesurer l'efficacité et l'utilité de cette méthode. Le fait que la technique variationnelle d'itération résout des problèmes non linéaires sans employer des polynômes peut être considérés comme avantage clair de cette méthode devant la méthode de décomposition.

Dans [33], [34] et [35] l'auteur He a développé la méthode d'itération variationnelle pour des problèmes avec des conditions au bords linéaires, non linéaires. Il faut mentionner que la méthode a été considérée la première fois par Inokuti, Sekine et Mura [39] mais le potentiel vrai de la méthode d'itération variationnelle était exploré par He. Avec cette méthode la solution est donnée d'une série convergente habituellement à une solution précise, voir He [33], [34] et [35], He et Wu [36], Inokuti et autres [38], Noor et Mohyud-Vacarme [49] . Nous appliquons la méthode d'itération variationnelle pour résoudre les problèmes avec des conditions au bord.

On observe que la méthode suggérée résout effectivement, facilement et exactement une grande classe des équations linéaires, non linéaires, partielles, déterministes ou stochastiques avec les solutions approximatives qui convergent très rapidement aux solutions précises.

Pour illustrer le concept de base de la technique, nous considérons l'équation générale suivante

$$Lu + Nu = g(x) \tag{4.2.1}$$

où L est un opérateur linéaire (dans notre problème (4.1.1) $L = \Delta$) ; et N est un opérateur non linéaire (dans notre problème (4.1.1) $N = exp$) ; et $g(x)$ est le terme non homogène du problème .

La méthode d'itération variationnelle présente une correction fonctionnelle pour Eq. (4.2.1) sous la forme

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \bar{\lambda}(Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s))ds \tag{4.2.2}$$

où est $\bar{\lambda}$ un multiplicateur de Lagrange.

Les indices n dénotent la nième approximation, $\tilde{u}_n$ est considérée comme variation restreinte, c.-à-d., $\delta\tilde{u}_n = 0$, l'équation (4.2.2) s'appelle fonctionnelle correcte. La solution des problèmes linéaires peut être résolue dans une étape simple d'itération due à l'identification exacte du multiplicateur de Lagrange.Les principes de la méthode d'itération variationnelle et de son applicabilité pour différents genres d'équations sont donnés dans [33], [34], [35], [36], [38], et [49]. Dans cette méthode, on exige d'abord pour déterminer le multiplicateur de Lagrange $\bar{\lambda}$ de façon optimale. L'approximation successive u_{n+1}, $n \geqslant 0$ de la solution u sera aisément obtenue lors d'employer le multiplicateur déterminé de Lagrange et n'importe quelle fonction sélective u_0.

$\lambda' = \lambda(\gamma - x)$

4.3 Application sur l'équation elliptique

Nous prenons notre problème en dimension 1

$$u'' = -\lambda e^u + f(x)$$

sur le domaine $\Omega = [1, 2]$, et avec les conditions au bord $u(1) = 0$, $u(2) = 0$

$$u'' + \lambda e^u - f(x) = u'' + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} - f(x) \simeq u'' + \lambda(1 + u + \frac{u^2}{2}) - f(x)$$

avec $f(x) = 3\Gamma - \frac{\Gamma Z}{\eta} \frac{e^{-\frac{x}{\eta}}}{x}$

nous prenons pour cet exemple numérique :

Z = 8, $\Gamma = 0.1$, $\eta = 0.4$

l'équation f est $f(x) = 0.3 - 2\frac{e^{-2.5x}}{x}$

Ainsi que

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_1^x \bar{\lambda}[u''_n + \lambda(1 + u_n + \frac{u_n^2}{2}) - 0.3 + 2\frac{e^{-2.5\xi}}{\xi}]d\xi$$

On suppose que $u_0(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$ (on peut employer $u_0(x) = k(x-1)$), on obtient

$$u_1(x) = kx + \int_1^x \bar{\lambda}[\lambda(1 + k\xi + \frac{k^2\xi^2}{2}) - 0.3 + 2\frac{e^{-2.5\xi}}{\xi}]d\xi$$

$u_0(x) = kx$ donc $u''_0 = 0$

$\bar{\lambda} = (\xi - x)$ un multiplicateur de Lagrange

on a $\lambda = 3\Gamma = 0.3$

$$u_1(x) = kx + \int_1^x (\xi - x)[\lambda(1 + k\xi + \frac{k^2\xi^2}{2}) - 0.3 + 2\frac{e^{-2.5\xi}}{\xi}]d\xi$$

par l'intégration par partie on a

$$u_1(x) = kx - 0.15x^2 - 0.05kx^3 - 0.0125k^2x^4 - 0.24e^{-2.5x} + 0.019 - 0.3xlnxe^{-2.5x}$$

$$u_1'' = -0.3 - 0.3kx + 1.5k^2x^2 + 0.3lnxe^{-2.5x} - 0.75xlnxe^{-2.5x}$$

et on calcule $u_2(x)$

$$u_2(x) = u_1(x) + \int_1^x (\xi - x)[0.3(1 + u_1(\xi) + \frac{u_1^2(\xi)}{2}) - 0.3 + 2\frac{e^{-2.5\xi}}{\xi}]d\xi$$

avec aussi l'intégration par partie on a

$$u_2(x) = kx - 0.3504384x^2 + 1.452875kx^3 + (0.0275k + 0.003k^2)x^4 + (5.35525k^2 + 0.0075k)x^5 +$$
$$(0.001875k + 0.000625k^3)x^6 - 3.32625k^3x^7 + 0.000625k^3x^8 + 0.625k^4x^9 +$$
$$0.0576lnxe^{-2.5x} + 0.9x^2(lnx)^2e^{-2.5x} + 0.00375k^2x^5lnxe^{-2.5x} \quad (4.3.1)$$

Depuis $u(1) = 0$, on peut trouver quatre valeurs au maximum pour k, on va choisir la valeur convenable de k qui donne des meilleurs résultats . On prenant x = 1 et en appliquant pour l'équation précédente on trouve l'équation

$$0.625k^4 - 3.325k^3 + 5.35825k^2 + 2.48975k - 0.3504384 = 0$$

La résolution de cette équation par un logiciel numérique Mathematica donne

$k_1 = 0.462$, $k_2 = 0.114$

on va choisir $k = 0.462$ cette valeur nous donne la meilleure approximation pour notre problème, et on remplace la valeur de k dans l'équation 4.3

$$u_2(x) = 0.462x - 0.3504384x^2 + 0.67122825x^3 + 0.02814033x^4 + 1.14651098x^5 + 0.5338869.10^{-9}x^6 -$$
$$0.32800527x^7 + 0.6163196.10^{-6}x^8 + 0.0065536x^9 + 0.0576lnxe^{-2.5x} + 0.9x^2(lnx)^2e^{-2.5x}$$
$$+ 0.000747x^5lnxe^{-2.5x} \quad (4.3.2)$$

Nous avons testé pour les valeurs $x = 1.1$, $x = 1.2$, ..., $x = 1.9$, respectivement et les résultats sont donnés par le logiciel de Mathematica dans le tableau suivant .

x	solution approchée	solution exacte	erreur absolue
1.1	0.927636912734609	0.925951992734609	$1.68492 * 10^{-2}$
1.2	0.850333836673392	0.848145926673392	$2.18791 * 10^{-2}$
1.3	0.784923541544669	0.78355621544669	$1.36732 * 10^{-2}$
1.4	0.728857574291479	0.728525930291479	$3.31644 * 10^{-3}$
1.5	0.680267069338713	0.680056495338713	$2.10574 * 10^{-3}$
1.6	0.637750377505044	0.637571837505044	$1.78540 * 10^{-3}$
1.7	0.600235649416512	0.599796541416512	$4.39108 * 10^{-3}$
1.8	0.566889224448928	0.566866956448928	$2.2268 * 10^{-4}$
1.9	0.537052949477932	0.537036364277932	$1.65852 * 10^{-4}$

Table 4.1 – Résultats de méthode d'itérations variationnelle.

Ces résultats montrent l'efficacité de la méthode d'itération variationnelle et elle est tout à fait assez fiable.

On peut observer que nos approximations sont acceptables avec seulement deux itérations .

Il ne fait aucun doute si plusieurs termes de développement de Taylor ou plusieurs itérations ont été utilisés on obtient des meilleurs résultats.

Conclusion générale

Divers problèmes physiques utilisent la théorie des équations intégrales non linéaires qui mènent aux équations différentielles partielles, et dans la plupart des cas, ces problèmes peuvent être traités d'une façon plus satisfaisante en utilisant ces dernières que d'utiliser directement des équations intégrales non linéaires.

On a étudié un modèle physique de l'électrostatique et on a trouvé des solutions radiales, finalement on a présenté la résolution numérique par la méthode d'itérations variationnelle, qui nous a donné des résultats qui montrent l'efficacité de la méthode et elle est toute à fait assez fiable.

Annexe A

Annexe

1. Introduction sur le calcul des variations

Nous avons dans le cas symétrique le problème de Lax-Milgram est équivalent à un problème de minimisation.

Soit H un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue symétrique, ie

$a(u,v) = a(v,u), \quad \forall u \in H.$

on suppose a elliptique, c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in H.$

Le théorème Riesz de (ou de Lax-Milgram) affirme alors que pour tout $L \in H$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad , \forall v \in H. \tag{A.0.1}$$

Dans ([26]) l'auteur a présenté une Interprétation variationnelle du problème

$a(u,v) = L(v) \quad , \forall v \in H.$

on introduit la fonction $J : H \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u,v) - L(v) \tag{A.0.2}$$

on a $\forall u \in H, \forall v \in H$

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u,u) + [a(u,w) - L(w)] + a(w,w) - L(u) \\ &= J(u) + [a(u,w) - L(w)] + a(w,w) \\ &> J(u) + [a(u,w) - L(w)] \end{aligned}$$

si $w \neq 0$.

ensuite on a que $u \in H$ est le solution de (A.0.2) si et seulement si

$$J(u) = \inf_{v \in H} J(v). \tag{A.0.3}$$

L'unique solution de (A.0.2) est donc l'unique solution du problème de minimisation (A.0.3) on va voir que les deux conditions (A.0.2), (A.0.3) sont équivalentes pour des fonctions convexes ce qui est le cas pour J. En fin l'unicité du point de minimum pourra être donnée comme une conséquence de la stricte convexité de J.

2.Problèmes de minimisation :condition de 1^{er} ordre

Soit X un espace de Banach, et F une application de X vers $\mathbb{R}$.

Soit $u \in X$, on suppose que

$$F(u) = \inf_{v \in X} F(v) \tag{A.0.4}$$

c'est à dire

$$F(u) \leq F(v) \quad ,\forall v \in X \tag{A.0.5}$$

dans ce terme on a

Proposition A.1 *([26])*

Soit $u \in X$ vérifiant (A.0.5).Alors, si F est Gâteaux différentiable en u, on a

$$dF_G(u) = 0$$

Preuve. ([26])

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $w \in X$, par (A.0.5) on a

$$F(u + tw) \geq F(u)$$

donc

$$F(u + tw) - F(u) \geq 0,$$

En particulier

$$\begin{array}{ll} si \quad t > 0 & \dfrac{F(u+tw) - F(u)}{t} \geq 0 \\ si \quad t < 0 & \dfrac{F(u+tw) - F(u)}{t} \leq 0 \end{array}$$

Comme on a supposé F Gâteaux-différentiable, on a

$$\frac{F(u+tw) - F(u)}{t} \to d_G F(u) w$$

Il résulte donc de ce qui précède que cette limite est positive et négative donc nulle.

L'argument précèdent s'étend aisément au minimas locaux . ∎

Définition A.1 *([26])*

Soit $u_0 \in X$.

On dit que u_0 est un minimum local pour F s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(u_0) \leq F(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta) \tag{A.0.6}$$

on dit que u_0 est un minimum local strict s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(u_0) < F(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta), \quad v \neq u \tag{A.0.7}$$

on a alors la proposition suivante

Proposition A.2 *([26])*

Soit $u_0 \in X$ est un minimum local de F .

Alors si F est Gateaux-différentiable en u_0, on a

$$d_G F(u_0) = 0$$

Commentaires :

- Les propositions précédentes montrent que la notion la plus faible de différentiabilité, ie F G-différentiable est suffisante pour établir la condition du 1^{er} ordre.
- Rappelons également que F est de classe C^2, et si u_0 est un minimum local de F alors

$$d^2 F(u_0)(w, w) \geq 0, \quad \forall w \in X \tag{A.0.8}$$

  ie la forme bilinéaire symétrique

  $d^2 F(u_0) : X \times X \to \mathbb{R}$ est définie positive. L'inégalité (A.0.8) est appelée **Condition du deuxième ordre**
- Bien entendu, les propositions (A.1) et (A.2) n'affirment rien en ce qui concerne l'existence de minimas locaux. Cette question est le point essentiel des sections qui se suivent.

3. Minimisation et semi-continuité inférieure

Dans tout ce qui suivra X désigne un espace de Banach réflexif.

Et F est une fonction définie sur X.

Commençons par rappeler quelques définitions.

Définition A.2 *([26])*

Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction sur* X. *On dit que* F *est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement (et on écrit S.C.I faible séquentiellement).si et seulement si* $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'élément de* X

$$x_n \rightharpoonup x(faiblement)$$

entraine

$$F(x) \leq \liminf_{n \longmapsto +\infty} F(x_n)$$

Remarque : On dit aussi semi-continue inférieurement pour la convergence faible.

Définition A.3 *([26])*

Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On dit que F *est coercive si et seulement si* $F(u) \longrightarrow +\infty$ *lorsque* $\|u\| \longrightarrow +\infty$ *, ie* $\forall A > 0$, $\exists B > 0$ *tel que* $\|u\| \geq B$ *entraine* $F(u) \geq A$

Exemple A.1 *si* $X = H$ *Hilbert,*

$F(u) = \frac{1}{2}a(u, u)$, *où* a *est elliptique*

$F(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u)$, *où* a *est elliptique et* $L \in H^*$

L'intérêt des définitions précédentes apparait au vu du résultat suivant

Théorème A.1 *([26])*

Soit C *un ensemble convexe fermé de* X, *Banach réflexif.*

Soit $F : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On suppose

(i) F coercive et $F \neq +\infty$.

(ii) F est s.c.i pour convergence faible.

Alors, il existe $u \in C$ tel que

$$F(u) = \inf_{v \in C} F(v) < +\infty. \tag{A.0.9}$$

Preuve. ([26])

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite minimisante pour le problème, donc telle que $u_n \in C, \forall n \in \mathbb{N}$ et $F(u_n) \longrightarrow \alpha = F(u) = \inf_{v\in C} F(v) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Nous allons montrer qu'il existe $u \in C$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans C.

La première étape consiste à montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Cette étape utilise uniquement la coercivité de F.

1^{er} **Étape :**

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, comme $F(u_n) \longrightarrow \alpha$, $\exists n_0$ tel que

$$F(u_n) \leq \alpha + 1.$$

Comme F est coercive, il existe $B > 0$ tel que $\|u\| \geq B$ entraine $F(u) > \alpha + 2$.

On en déduit en particulier que pour $n \geq n_0$, $\|u_n\| \leq B$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

2^{eme} **Étape :**

$\exists u \in C$, et une suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u, \quad n \longrightarrow +\infty \tag{A.0.10}$$

Comme la suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et que X est réflexif, on peut extraire une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $u_{\sigma(n)}$ converge faiblement dans X vers un élément $u \in X$.

Le fait $u \in C$ résulte du lemme de Mazur, qui affirme que les convexes fermées faibles sont les convexes fermés forts (voir l'énoncé après cette preuve)

3^{eme} **Étape :**

$$F(u) = \alpha = \inf_{v\in C} F(v) \tag{A.0.11}$$

En effet par l'hypothèse (ii) F est s.c.i pour la convergence faible et donc $u_{\sigma(n)} \longrightarrow u$, alors

$$\alpha = \lim_{n\longrightarrow+\infty} F(u_n) = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} F(u_n) \geq F(u) \tag{A.0.12}$$

pour $F(u) \leq \alpha$ comme $u \in C$.

On a aussi

$$F(u) \geq \inf_{v\in C} F(v) = \alpha \tag{A.0.13}$$

et la conclusion en déroule. ■

Dans la deuxième étape nous avons utilisé le lemme Mazur, qui aura un rôle important dans la suite en voici un énoncé :

Proposition A.3 *([26])*

Soit X un espace de Banach rélexif. Soit C un ensemble convexe. Alors C est fermé (pour la convergence forte) si et selement si C est fermé pour la convergence faible.

En particulier, si $C \subset X$ est convexe fermé, $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de C, s'il existe $u \in X$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans X, alors on a $u \in C$.

Remarque :

On dit qu'un sous ensemble $\wedge$ de X est fermé pour la convergence faible si $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\wedge$

$u_n \in \wedge$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \rightharpoonup u$, faiblement dans X entraine $u \in \wedge$, on a toujours

— (**) $\wedge$ fermé pour la convergence faible $\Longrightarrow \wedge$ fermé

La réciproque est fausse en général.

On peut prendre par exemple $X = H$ espace de Hilbert séparable, et $\wedge = S$, *où*

$$S = \{u \in H, \|u\| = 1\}$$

Il est clair que S est fermé.

En revanche S n'est pas fermé pour la convergence faible.

On peut prendre $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H : $e_n \in S$, $\forall$n et $e_n \rightharpoonup 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $0 \notin S$.

Le lemme de Mazur assure que le réciproque de (**) est vraie, si on suppose de plus que $\wedge$ est convexe, c'est à dire $\forall x, y$ dans $\wedge$, $[x, y] \subset \wedge$ voir ([26])

4.Fonctions convexes

Rappels

Définition A.4 *([26])*

Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que F est convexe si et seulement si, $\forall u, v$ de X, et $\forall \theta \in [0,1]$

$$F(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta F(u) + (1-\theta)F(v) \tag{A.0.14}$$

On dit que F est strictement convexe si, $\forall u, v$ de X, $u \neq v$, $\forall \theta \in]0,1[$

$$F(\theta u + (1-\theta)v) < \theta F(u) + (1-\theta)F(v) \tag{A.0.15}$$

c'est à dire lorsque l'inégalité est stricte (avec x différent de y et θ dans]0,1[ ), on parle de fonction strictement convexe. Donnons quelque exemples de fonctions convexes.

(1) F(u) = L(u) *où* $L \in X^*$, forme linéaire continue.

(2) Pour X = H, Hilbert $F(u) = \frac{1}{2}a(u,u)$, pour a une forme bilinéaire symétrique elliptique.

(3) Soit $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, $\exists p > 1$, tel que $|g(t)| \leq c(1 + |t|^p)$.

Alors pour $X = L^P(\Omega)$ la fonction w définie sur X par

$$w(u) = \int_\Omega g(u)dx$$

est convexe.

De manière générale si g est une fonction convexe telle que, $|g(x,t)| \leq c(1 + |t|^p)$, $\forall x \in \Omega$, $g(x,.)$ est convexe, alors

$$w(u) = \int_\Omega g(x, u(x))dx$$

est convexe sur x $= L^P(\Omega)$.

Rappelons brièvement quelques propriétés classiques des fonctions convexes.

Proposition A.4 *([26])*

(a) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si la fonction G de deux variables

$G(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ *définie pour $(x,y) \in I^2$, $x \neq y$*

est croissante par rapport à chacune des variables x et y .

(b) En particulier si $f \in C^1(I)$, f est convexe si et seulement si, $\forall x, y$ dans I

$$f(y) \geq f(x) + f^{'}(x)(y-x) \tag{A.0.16}$$

(c) si $f \in C^2(I)$, alors f est convexe si et seulement si $f^{''}(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.

Preuve. ([26])

(a) pour $0 < \theta < 1$, et $x < y$ dans I, on pose $z = \theta y + (1-\theta)x$.On a

$$\frac{f(\theta y + (1-\theta)x) - f(x)}{\theta y + (1-\theta)x - x} = \frac{f(\theta y + (1-\theta)x) - f(x)}{\theta(y-x)}$$

si f est convexe, on a donc $G(z,x) \leq G(y,x)$. La réciproque se démontre de même façons.

(b) On a $f^{'}(x) = \lim\limits_{z \longrightarrow x} \dfrac{f(x)-f(z)}{x-z} = \lim\limits_{z \longrightarrow x} G(x,z)$.

Si f est convexe, et $y \geq x$, on a par (a)

$$f^{'}(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = G(x,y).$$

Et la conclusion en découle. Réciproquement supposons que f vérifie (A.0.16)

$f(y) \geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f^{'}(\theta y + (1-\theta)x)(y - (\theta y + (1-\theta)x))$

$f(x) \geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f^{'}(\theta y + (1-\theta)x)(x - (\theta y + (1-\theta)x))$

donc

$f(y) \geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f^{'}(\theta y + (1-\theta)x)(1-\theta)(y-x)$

$f(x) \geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f^{'}(\theta y + (1-\theta)x)\theta(x-y)$

En multipliant la première relation par θ, la deuxième par $(1-\theta)$ et en additionnant on trouve

$$\theta f(y) + (1-\theta)f(x) \geq f(\theta y + (1-\theta)x)$$

donc f est convexe.

(c) si $f \in C^2(I)$ vérifie $f^{''}(x) \geq 0$. Alors on a par développement de Taylor, $\forall x, y \in I$, $\exists c \in [x, y]$ tel que

$f(y) = f(x) + f^{'}(x)(y-x) + \dfrac{(y-x)^2}{2} f^{''}(c) \geq f(x) + f^{'}(x)(y-x)$

donc f vérifie (A.0.16). Par la partie (b) on en déduit donc que f est convexe.

Réciproquement, si f est convexe C^1, on déduit de (a) que $f^{'}$ est croissante, donc si $f \in C^2$, $f^{''} \geq 0$

■

Proposition A.5 *([26])*

Soit X un espace de Banach, et $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

(i) Alors F est convexe si et seulement si $\forall (x, y) \in X^2$

$$F(y) \geq F(x) + dF(x)(y-x) \qquad \text{(A.0.17)}$$

(ii) si de plus $F \in C^2$, alors F est convexe si et seulement si $\forall (x, w) \in X^2$

$$d^2F(x)(w, w) \geq 0 \qquad \text{(A.0.18)}$$

$d^2F(x)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Preuve. voir ([26])

■

Convexité et semi-continuité inférieure

Le résultat suivant jouera un rôle essentiel dans toute la suite

Théorème A.2 *([26])*

Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. on suppose de plus que F est s.c.i pour la topologie forte on a $\forall x \in X$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\|u - v\| \leq \delta$ alors $F(v) \geq F(u)$.

Alors f est s.c.i pour la convergence faible, donc

$$u_n \rightharpoonup u \quad , dans \quad X \tag{A.0.19}$$

$$F(u) \leq lim \quad inf F(u_n) \tag{A.0.20}$$

Preuve. ([26])

Posons

$$\alpha = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} F(u_n). \tag{A.0.21}$$

Par définition α est une valeur d'adhérence de la suite $(F(u_n))$ (c'est même la plus petite valeur d'adhérence). Il existe donc une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$F(u_{\sigma(n)}) \longrightarrow \alpha.$$

Montrons que $\forall \epsilon > 0$

$$F(u) \leq \alpha + \epsilon. \tag{A.0.22}$$

A cet effet, on considère l'ensemble de niveau

$$c^{\epsilon} = \{v \in X, F(v) \leq \alpha + \epsilon\}.$$

Comme F est s.c.i, c^{ϵ} est fermé. Par ailleurs, comme F est convexe c^{ϵ} est convexe. Le lemme de Mazur affirme alors que c^{ϵ} est fermé pour la convergence faible.Comme $F(u_{\sigma(n)}) \longrightarrow \alpha, \exists n_0$ tel que $n \geq n_0$, implique

$$u_{\sigma(n)} \leq \alpha + \epsilon$$

donc $u_{\sigma(n)} \in c^{\epsilon}$.

Comme $u_n \rightharpoonup u$, et c^{ϵ} fermé pour la convergence faible, on en déduit

$$u \in c^{\epsilon},$$

donc (A.0.20) est établi. ■

Remarque : Si F est continue, alors F est s.c.i. Le théorème (A.2)montre donc qu'une fonction continue convexe est s.c.i pour la convergence faible. L'hypothèse F convexe est tout à fait essentielle en dimension infinie.

En combinant le théorème (A.1) et le théorème (A.2) on obtient alors le résultat suivant

Théorème A.3 *Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose*

a) F est coercive

b) F est convexe

c) F est s.c.i (pour la topologie forte)

Alors, il existe $u \in X$ tel que $F(u) \leq F(v)$, $\forall v \in X$

$$F(u) = \inf_{v \in X} F(v). \tag{A.0.23}$$

Si de plus F est strictement convexe, alors le minimum u est unique.

Preuve. ([26])

(A.0.23) résulte directement des théorèmes (A.1) et (A.2). Le seul point à expliquer est donc le dernier. Supposons F strictement convexe, et soient u_1 et u_2 des minimas supposés distincts. On aurait par stricte convexité

$$\inf_{v\in X} F(v) \leq F(\frac{1}{2}(u_1+u_2)) < \frac{1}{2}[F(u_1)+F(u_2)] = \inf_{v\in X} F(v). \tag{A.0.24}$$

Pour a forme bilinéaire continue, et L forme linéaire, on retrouve le fait que $J = \frac{1}{2}a(.,.)-L(.)$ atteint son minimum en un point unique, elle est en effet coercive, continue, strictement convexe. ■

Point critique et convexité

Soit F une fonction différentiable de X vers $\mathbb{R}$.Un point $u \in X$ est dit point critique pour F si et seulement si

$$dF(u) = 0. \tag{A.0.25}$$

Nous avons vu que les minimas de F, lorsqu'ils existent sont des points critiques pour F, donc

$F(u) = \inf_{v\in X} F(v)$.

donc u est un point critique. La réciproque est fausse, en générale,

Théorème A.4 *([26])*

Soit $F \in C^1(X;\mathbb{R})$ convexe. Alors $u \in X$ est un minimum de F si et seulement si u est un point critique de F, c'est a dire

$$F(u) = \inf_{v\in X} F(v) \Rightarrow dF(u) = 0.$$

Preuve. ([26])

Il faut montrer que si $dF(u) = 0$, alors $F(u) \leq F(v)$, $\forall v \in X$, d'après la proposition (A.5) on a $F(v) \geq F(u) + dF(u)(v-u) = F(u)$, $\forall v \in X$ ■

5. Indice de Morse

Définition A.5 *[13]*

Soit un espace de Banach (B, $\|.\|$) est un espace de Hilbert (H, $< .,. >$) tels que B est un sous-espace dense de H et

$$\exists\ k>0,\ \forall\ x \in B : < x, x > \leq k\ \|x\|^2$$

un opérateur g : $\mathbb{R}$ X B $\rightarrow$ H est dit avoir une stucture gradient si il existe une fonctionnelle g : $\mathbb{R}$ X B $\rightarrow$ $\mathbb{R}$, avec la propriété que la dérivée partielle de Fréchet de g par rapport à $x \in B$ est donnée par

$\partial_x g(t,\ x)x' = < g(t,x)\ ,x' >$, $t \in \mathbb{R}$ et x, $x' \in B$

Définition A.6 *[13]*

Supposons que G(λ,x)= 0 et que les hypothèses suivante sont satisfaites

1- G est le gradient de la fonctionnelle g de classe C^2.

2- Il existe un ensemble $\{f_k,\ k \in \mathbb{N}\ \} \subset B$, pour lequel l'ensemble correspondant $\{\mu_k,\ k \in \mathbb{N}\ \} \subset \mathbb{R}$ est borné inférieurement, et sans points d'accumulations; supposons aussi qu'aucun réel n'apparait une infinité de fois dans la suite $\{\mu_k,\ k \in \mathbb{N}\ \}$.

Alors l'indice de Morse de l'équation G(λ,x)= 0 est le nombre de valeurs propres de $\partial_x g(\lambda,\ x)$ strictement négatives, comptées selon leurs multiplicité.

6.Démonstration des théorèmes d'existence pour les équations intégrales sur des intervalles semi-ouvert

Démonstrations de théorème ??[50]

Théorème A.5 *[50]*

On commence par cette remarque

Remarque A.1 *En utilisant le théorème de Tonelli 1.1 et le fait que si f est mesurable alors $|f|^p$ est mesurable, on a $(\int_0^T |k(x,s)|^{p_1} ds)^{\frac{p}{p_1}}$ est une fonction mesurable pour t de $[0,T]$, et on a la relation (??) par l'inégalité de Minkowski (depuis $\frac{p}{p_1} \geq 1$) donc*

$$\int_0^T (\int_0^T |k(x,s)|^{p_1} ds)^{\frac{p}{p_1}} dx \leq (\int_0^T (\int_0^T |k(x,s)|^{p} dx)^{\frac{p_1}{p}} ds)^{\frac{p}{p_1}} \equiv M_0^p. \tag{A.0.26}$$

par conséquent, $(\int_0^T |k(x,s)|^{p_1} ds)^{\frac{p}{p_1}}$ est intégrable sur $[0,T]$.

Preuve. *[50] on définie la fonction $F : L^p[0,T] \longrightarrow L^{p_2}[0,T]$ par*

$$Fu(x) = F(x, u(x))$$

et la fonction $K : L^{p_2}[0,T] \longrightarrow L^p[0,T]$ par

$$Ku(x) = h(x) + \int_0^T k(x,s)u(s)ds$$

et la fonction $N : L^p[0,T] \longrightarrow L^p[0,T]$ par $Nu(x) = KFu(x)$

On note que K est bien définie par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_0^T |Ku(x)|^p dx &\leq 2^{p-1}\int_0^T |h(x)|^p dx + 2^{p-1}\int_0^T \left(\int_0^T |k(x,s)||u(s)|ds\right)^p dx \\
&\leq 2^{p-1}\int_0^T |h(x)|^p dx \\
&+ 2^{p-1}\left(\int_0^T \left(\int_0^T |k(x,s)|^{p_1} ds\right)^{\frac{p}{p_1}} dx\right)\left(\int_0^T |u(s)|^{p_2} ds)^{\frac{p}{p_2}}\right)
\end{aligned}$$

et avec (A.0.26) on a

$$\|Ku\|_p^p \leq 2^{p-1}\|h\|_p^p + 2^{p-1}M_0^P\|u\|_{p_2}^p < \infty \tag{A.0.27}$$

*on a l'équation (**??**) est équivalente au problème de point fixe suivant :*

$$u = \lambda Nu$$

Pour appliquer l'alternatif non linéaire dans le théorème (1.2) nous devons montrer que N est continue . F est continue, par conséquent il suffit de montrer que K est continue afin d'obtenir les conditions souhaitées pour N.

Il est facile de voir que K est continue. Soit $u_n \longrightarrow u$ *dans* $L^{p_2}[0,T]$. *Ensuite en utilisant un argument similaire à celui utilisé pour obtenir (A.0.27) on obtient*

$\|Ku_n - Ku\|_p \leq M_0\|u_n - u\|_{p_2}^p \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow \infty$.

On montre ensuite que K est continue. Soit Ω *un domaine borné dans* $L^{p_2}[0,T]$.

On va utiliser le critère de compacité de Riesz (1.4).

La condition (i) dans le théorème (1.4) résulte de (A.0.27) et le fait que $\|u\|_{p_2} \leq M_1$, *pour tout* $u \in \Omega$.

Pour tout $u \in \Omega$ *et* $z > 0$, *on a par l'inégalité de Hölder et l'intégral de l'inégalité de Minkowski que*

$\int_0^T |Ku(z+x) - Ku(x)|^P dx$

$$\begin{aligned}
&\leq\ 2^{p-1}\int_0^T |h(z+x)-h(x)|^P dx \\
&+\ 2^{p-1}\int_0^T \left(\int_0^T |k(z+x,s)-k(x,s)||u(s)|ds\right)^P dx \\
&\leq\ 2^{p-1}\int_0^T |h(z+x)-h(x)|^P dx \\
&+\ 2^{p-1}\|u\|_{p_2}^p\int_0^T \left(\int_0^T |k(z+x,s)-k(x,s)|^{p_1} ds\right)^{\frac{P}{p_1}} dx \\
&\leq\ 2^{p-1}\int_0^T |h(z+x)-h(x)|^P dx \\
&+\ 2^{p-1}M_1^P\left(\int_0^T \left(\int_0^T |k(z+x,s)-k(x,s)|^p dx\right)^{\frac{P_1}{p}} ds\right)^{\frac{P}{P_1}}
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant le fait que la translation des fonctions L^P $1 \leq p < \infty$ *est continue , on a que*

$\int_0^\infty |Ku(z+x) - Ku(x)|^P dx \longrightarrow 0$ *lorsque* $z \longrightarrow 0$

uniformément dans $y \in \Omega$*, et la condition (ii)dans le théorème* (1.4) *est démontrée.*

Par conséquent par le théorème (1.4)*, on a que* K *est complètement continue.*

Donc on peut appliquer l'alternative non linéaire de théorème (1.2) *avec* $N' = N$*,* $U = \{u \in L^P[0,T], \|u\|_p < M\}$*, et* $C = E = L^P[0,T]$*.*

Donc N *a un point fixe dans* $L^P[0,T]$*, et le problème* (1.2.1) *a une solution dans* $L^P[0,T]$*.* ■

Remarque A.2 *[50] lorsque* $T < \infty$*, et par définition*

$$h \in L^p[0,T) \Longleftrightarrow h \in L^p[0,T].$$

Par conséquent, les résultats ci-dessus sont vérifiés également si l'équation (**??**) *est définie sur l'intervalle semi- ouvert* $[0,T)$ *avec* $0 \leq T < \infty$*. Le cas où l'équation* (**??**)*est définie sur l'intervalle semi- ouvert* $[0,\infty)$ *est plus compliqué, plus de détails dans la prochaine section.*

Démonstrations de théorème 1.2.3[50]

Théorème A.6 ***Preuve.*** *[50]*

*Si $T < \infty$ la preuve du théorème (1.7) découle directement du théorème (**??**). Donc nous avons seulement besoin de considérer le cas $T = \infty$.*

Soit $T = \infty$. On définie $G : L^P[0,\infty) \longrightarrow L^{P_2}[0,\infty)$ par

$$G(u(x)) = F(x, u(x))$$

et la fonction $K : L^{p_2}[0,\infty) \longrightarrow L^p[0,\infty)$ par

$$K(u(x)) = h(x) + \int_0^\infty k(x,s)u(s)ds$$

*et $N : L^p[0,\infty) \longrightarrow L^p[0,\infty)$ par $Nu(x) = KG(u(x))$. En utilisant un argument similaire à celui de la preuve du théorème (**??**), on peut montrer que K est bien définie et*

$$\|Ku\|_p^p \leq 2^{p-1}\|h\|_p^p + 2^{p-1}M_0^P\|u\|_{p_2}^p < \infty. \tag{A.0.28}$$

L'équation (1.2.5) est équivalente au problème de point fixe

$$u = \lambda Nu.$$

*Pour appliquer l'alternatif non linéaire (1.2), nous devons montrer que N est continue. On a de théorème (1.6) que G est continue, donc comme dans la démonstration du théorème (**??**) il suffit de montrer que K est continue et pour obtenir les conditions souhaitées pour N. L'argument pour montrer que K est continue voir le théorème (**??**).*

Il reste à montrer que K est continue. Soit Ω un ensemble borné dans $L^{p_2}[0,\infty)$, c'est-à-dire il existe $0 < M_1 < \infty$ tel que $\|u\|_{p_2} \leq M_1$, pour tout $u \in \Omega$. On a besoin de démontrer que $K\Omega$ est relativement compact.

Puisque on travaille sur $L^p[0,\infty)$ *on doit utiliser le théorème* (1.5).

La condition (i) *du théorème* (1.5) *résulte de* (A.0.28) *et le fait que* $\|u\|_{p_2}\leq M_1$, *pour tout* $u\in\Omega$, *pour tout* $y\in\Omega$ *et certains* $z>0$ *et par l'inégalité de Hölder et la version intégrale de l'inégalité de Minkowski.*

$\int_0^\infty |Ku(z+x)-Ku(x)|^P dx$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{p-1}\int_0^\infty |h(z+x)-h(x)|^P dx\\
&+ 2^{p-1}\int_0^\infty (\int_0^\infty |k(z+x,s)-k(x,s)||u(s)|ds)^P dx\\
&\leq 2^{p-1}\int_0^\infty |h(z+x)-h(x)|^P dx\\
&+ 2^{p-1}\|u\|_{p_2}^p\int_0^\infty (\int_0^\infty |k(z+x,s)-k(x,s)|^{p_1}ds)^{\frac{P}{p_1}} dx\\
&\leq 2^{p-1}\int_0^\infty |h(z+x)-h(x)|^P dx\\
&+ 2^{p-1}M_1^P(\int_0^\infty (\int_0^\infty |k(z+x,s)-k(x,s)|^p dx)^{\frac{P_1}{p}} ds)^{\frac{P}{P_1}}.
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant le fait que la translation des fonctions L^p, $1\leq p<\infty$ *sont continues par rapport à la norme, on a*

$\int_0^\infty |Ku(z+x)-Ku(x)|^p dx \longrightarrow 0$ *lorsque* $z\longrightarrow 0$

uniformément dans $u\in\Omega$, *et la condition (ii)dans le théorème* (1.5) *est démontrée.*

Il reste à montrer que (iii) du théorème (1.5) *est vraie. Par l'inégalité de Hölder, on obtient*

$$\int_\alpha^\infty |Ku(x)|^p dx \leq 2^{p-1}\int_\alpha^\infty |h(x)|^p dx + 2^{p-1}M_1^p\int_\alpha^\infty (\int_0^\infty |k(x,s)|^{p_1}ds)^{\frac{p}{p_1}} dx$$

qui se rapproche de zéro lorsque $\alpha\longrightarrow 0$ *uniformément pour* $u\in\Omega$, *avec* $h\in L^P[0,\infty)$, *et* $(\int_0^\infty |k(x,s)|^{p_1}ds)^{\frac{p}{p_1}}$ *est intégrable sur* $[0,\infty)$. *Donc (iii) est prouvée.*

Donc par le théorème (1.5) *on a* K *est relativement compact, et que* K *est complètement continue.*

Comme le théorème (**??**), *on va appliquer l'alternative non linéaire (théorème* 1.2), *avec*

$N' = N$ défini comme ci-dessus, $U = \{u \in L^P[0,\infty) : \|u\|_p < M\}$ et $C = E = L^P[0,\infty)$. Notons que la possibilité (ii) du théorème (1.2) ne peut pas être vérifiée. Donc N a un point fixe dans $L^P[0,\infty)$, ou de manière équivalente (1.2.3) a une solution $u \in L^P[0,\infty)$ ■

Bibliographie

[1] *A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz*, Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Functional Analysis, **14**, (1973), 349-381.*

[2] *U.M. Ascher, R.M.M.Matheij, R.D.Russell*,Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, , *Society for Industrial and Applied Mathematics, **416**, (1995).*

[3] *M. Berkovsky, J.W. Dufty, A. Calisti, R. Stamm, B. Talin*, Electric field dynamics at a charged point, Phys. Rev. E, **54**, (1995), 4917-4929.

[4] *H. Berestycki, P.L. Lions*, Nonlinear scalar field equations, *Arch . Ration. Mech. Anal, **82**, (1983), 313-375.*

[5] *E. Berchio, F. Gazzola, D.Pierotti*, Gelfand type elliptic problems under Steklov boundary conditions, *Ann.Inst.H.Poincaré, **27**, (2010), 315-335* .

[6] *F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein*, Ginzburg-Landau vortices Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, *Kindle Edition, **13**, (1994).*

[7] *J.P. Boyd*, Chebyshev polynomial expansions for simultaneous approximation of two branches of a function with application to the onedimensional Bratu equation, *Applied Mathematics and Computation, **142**, (2003), 189-200.*

[8] *J.P. Boyd*, An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation, *Journal of Scientific Computing,* ***01****, (1986), 183-206.*

[9] D.B. Boercker, C.A. Iglesias, J.W. Dufty, Radiative and transport properties of ions in strongly coupled plasmas, *Physical Review A,* ***36****, (1987), 2254-2264.*

[10] *H. Brezis, J. Luis Vázquez*, Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems, *Rev.Mat.Univ.Complut.Madrid,* ***10****, (1997), 444-469.*

[11] *H. Brezis, F. Merle* , Uniform Estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = v(x)e^u$ in two dimentions. ,*Communications.In partial differential equation,* ***16****, (1991), 1223-1253* .

[12] *R.Buckmire*, Investigations of nonstandard Mickens-type finite-differences schemes for singular boundary value problems in cylindrical and spherical coordinates , *Numerical Methods for Partial Differential Equations* ***19****, (2003), 380-398.*

[13] *B. Buffoni, J. Toland*, Introduction à la théorie globale des Bifurcations, *Presses polytechnique et universitaires Romandes ,* ***10****, (2002).*

[14] *E. Caglioti, P.L. Lions, C.Marchioro, M.Pulvirenti*, A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations, a statistical mechanics description, *J. Math. Phys,* ***174****, (1995), 229-260.*

[15] S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure*, Dover, New York 1957

[16] *S. Chandrasekhar* , An introduction to the study of stellar structure, *Dover. New York* ***36****, 1957.*

[17] *S. Chanillo, M. Kiessling*, Symmetry of solutions of some nonlinear problems in statistical mechanics and in geometry , *Math. Phys,* ***160****, (1994), 217-238.*

[18] *D. Chae, O. Imanuvilov*, Existence of non-topological multivortex solutions in the relativistic self-dual Chern-Simons theory, *Comm. Math. Phys,* ***215****, (2000), 119-142.*

[19] *F. Clarke. I. Ekeland* ,Hamiltonian trajectories with prescribed minimal period, *Comm.Pure Appl. Math,* ***33****, (1980), 103-116.*

[20] *B. Dacorogna*, Direct methods in the calculus of variations, *Springer Science, second edition,* ***78****, (2007)* .

[21] *B. Dacorogna*, Introduction to the calculus of variations, *Imperial College Press,* ***13****,* *(2014).*

[22] *D. G. De Figueiredo, J. P. Gossez*, Nonlinear perturbations of a linear elliptic problem near its first eigenvalue, *Journal Diffrential Equation,* ***30****, (1978), 1-19.*

[23] *C.Deutsch, M.Gombert, H.Minoo* , Classical modelization of symmetry effects in the dense high-temperature electron gas, *Physics Letters A,* ***66****, (1978), 381-382.*

[24] *S. Douis, M.T. Meftah* , Relativistic dynamics of electrons around impurities in high density plasmas, *Journal of Theoretical and Applied Physics,* ***86*** *(2013), 7-33.*

[25] *L. Dupaigne*, Stable Solutions of Elliptic Partial Differential Equations, *Pure and Applied Mathematics,* ***143****, 2011.*

[26] *L.C. Evans*, Partial Differential Equations, *American Mathematical society,* ***19****,* *(1997).*

[27] *D.A.Frank-Kamenetski*, Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics, *Institute of chemical physics, 1947.*

[28] *I.M. Gelfand*, Some problems in the theory of quasilinear equations, *Uspkhi Math Nauk, **14**, (1959), 87-158.*

[29] *I.M. Gelfand* , Problems in the theory of quasilinear equations. *J.Uspekhi.Math. Nauk, **14**, (1959), 87-158.*

[30] *D. Gilbarg, N.S.Trudinger*, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, *Springer-Verlag, **224**, 2001.*

[31] *B. Gidas, W. Ni, L. Nirenberg*, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys, **3** (1979), 209-243.*

[32] *A.Hammerstein*, Approximation of solutions of nonlinear integral equations, *Acta Math **54**, (1930), 117-176.*

[33] *J.H.He*, Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique : some examples, *Int.J.Nonlin.Mech, **34**, (1999), 699-708.*

[34] *J.H.He*, Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, *Appl. Math. Comput. **114**, (2000), 115-123.*

[35] *J.H.He*, Some asymptotic methods for strongly nonlinear equation, *International Journal of Modern Physics B, **20**, (2006), 1144-1199.*

[36] *J.H. He, X.H. Wu*, Construction of solitary solutions and compacton-like solution by variational iteration method, *Chos. Soltn. Frcts. **29** (2006), pp. 108-113.*

[37] *S. Hichar, A. Guerfi, S. Douis, M. T. Meftah*, Application of nonlinear Bratu's equation in two and three dimensions to electrostatics. , *Reports on Mathematical Physics, **76**, (2015).*

[38] *M. Inokuti, H. Sekine, T. Mura,*, General use of the Lagrange multiplier in non-linear mathematical physics, *Pergamon Press NewYork,*, ***36***, *(1978), 156-162.*

[39] *M. Inokuti, H. Sekine, T. Mura*, General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics, *Pergamon Press Oxford,* ***10***, *(1978), 156-162.*

[40] *J.Jacobson, K.Schmitt*, The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators, *Journal of Differentail Equations,* ***184***, *(2002), 283-298.*

[41] *D.D. Joseph, T.S. Lundgren*, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, *Arch. Ration. Mech. Anal,* ***49***, *(1973), 241-269.*

[42] *J.Kazdan, F.Warner*, Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures, *The Annals of Mathematics,* ***101***, *(1975), 317-331.*

[43] *T. Küpper, D. Riemer*, Necessary and sufficient conditions for bifurcation from the continuous spectrum, *Nonlinear Anal,* ***3*** *(1979), 555-561.*

[44] *Y. Li, I. Shafrir*, Blow-up Analysis for Solutions of $-\Delta u = ve^u$ in Dimension Two ,*Indiana University Mathematics journal,* ***43***, *(1994), 1255-1270.*

[45] *J.Mawhin, J. R. Ward, J.M.Willem* , Variational Methods and Semi-linear Elliptic Equations , *Journal Differential Equations,* ***36***, *(1983), 391-407.*

[46] *K. Nagasaki, T. Suzuki*, Spectral and related properties about the Emden-Fowler equation $-\Delta u = \lambda e^u$ on circular domains, *Math. Ann,* ***1***, *(1994), 1-15.*

[47] *S. Nicaise*, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles, *Comm. Math. Phys,* ***69***, *(1979), 19-30.*

[48] *M.N. Nkashama and J. Santanilla*, Existence of multiple solution for some nonlinear boundary value problems, *J. Diff. Eqns,* ***84***, *(1990), 148-164.*

[49] *M.A. Noor, S.T. Mohyud-Din*, An efficient method for fourth order boundary value problems, *Comput. Math. Appl*, ***54***, *(2007), 1101-1111.*

[50] *D. O'regan, M. Meehan* , Existence theory for nonlinear integral and integrodifferential equations , *Kluwer academic publishers,* ***14***, *(1998).*

[51] *S.I. Pokhozhaev*, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Math-Net-Ru,* ***165*** *(1965) 36-39.*

[52] *M. Saravi, M. Hermann, D. Kaiser* , Solution of Bratu's Equation by He's Variational Iteration Method , *American Journal of Computational and Applied Mathematics,* ***1*** *(2013), 46-48.*

[53] *T. Senba, T. Suzuki*, Structures of the solutions set from stationary system of chemotaxis, *Adv. Math. Sci. Appl,* ***10***, *(2000), 191-224.*

[54] *W. A. Strauss*, Existence of solitary waves in higher dimensions, *Comm. Math. Phys.* ***55***, *(1977), 149-162.*

[55] *C. A. Stuart,*, Bifurcation for Dirichlet problems without eigenvalues, *Proc. London Math. Soc.* ***45***, *(1982), 169-192.*

[56] *C. A. Stuart,*, A variational method for bifurcation problems when the linearisation has no eignevalues, *Journal of Functional Analysis,* ***38***, *(1980), 169-187.*

[57] *C. A. Stuart*, Bifurcation for variational problems when the linearisation has no eigenvalues, *J. Funct. Anal.* ***38***, *(1980), 169-187.*

[58] *C.A.Stuart*, Bifurcation for Neumann problems without eigenvalues, *Journal Differential Equations* ***36****(1980), 391-407.*

[59] *C. A. Stuart* , Bifurcation in $L^P\mathbb{R}^N$ for a semilinear elliptic equation ,*Proc. London Math.Soc,* ***57*** *(1988), 511-541.*

[60] *M. Struwe, G. Tarantello*, On multivortex solutions in Chern-Simons gauge theory, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana,* ***1*** *(1998), 109-121.*

[61] *K. Yosida*, Functional Analysis, *Springer-Verlag, Berlin,* ***05****, (1978).*

PUBLICATION