رقم الترتيب:

الرقم التسلسلي:

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية العلوم و التكنولوجيا و علوم المادة

قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

مذكرة لنيل شهادة الماستر أكاديمي

ميدان الرياضيات و الإعلام الآلي

فرع الرياضيات

اختصاص تحليل

مقدمة من طرف: بوغرارة فاطمة

بعنوان

حول المتراجحات بين المؤثرات القرينة لنفسها

نوقشت يوم: 2013/07/02

أمام لجنة الأساتذة:

عمارة قرفي	أستاذ محاضر(أ)	جامعة ورقلة	رئيسا
السعيد محمد السعيد	أستاذ محاضر(أ)	جامعة ورقلة	محررا
عسيلة مصطفى	أستاذ محاضر(ب)	جامعة ورقلة	مؤطرا

2013/ 2012

إهــــداء

أحمد الله عز وجل الذي أنعم علي بنعمة العلم و سهل لي طريقا أبتغي فيه علما ووفقني في إنهاء هذا العمل المتواضع.

أهدي ثمرة جهدي

إلى نبراس الحياة و نبع الحنان إلى أغلى ما وهبني الرحمان إلى دفيء المشاعر, إلى مصدر الثقة و التي مهما كتبت لن أفي حقها إلى أمي العزيزة

حفظها الله و رعاها

إلى من علمني ودعمني طوال سنين دراستي إلى من كان سر بهجتي والنور الذي أضاء ضلمتي إلى أبي الغالي

حفظه الله و رعاه

إلى إخوتي "لخضر,علي,مبروك,سعيد,عبد الكريم,وليد"

وإلى أخواتي"سعيدة,صليحة,خديجة,و الصغيرة وردة" وإلى صغار الأفراد

"فاطمة,أنفال,سلسبيل,أسيل,أحمد ياسر,جمانة,نسيبة,وأخص المشاكس أحمد صلاح الدين والكتكوتتين أريج و رنيم".

إلى كل أقاربي و أهلي من بعيد وقريب و خاصة عمي الوحيد وزوجته و إبنته"آمنة"

إلى خالتي وإبنتها "مسعودة"

وإلى كل رفيقاتي في الدرب و زميلاتي طوال مشواري الدراسي و أخص بالذكر "وفاء,هدى,إيمان,فريدة" .

إلى الأستاذ المشرف الدكتور"مصطفى عسيلة" و إلى كل أساتذة قسم رياضيات وإعلام آلي.

إلى كل من مسح دمعي وقت ضعفي وشجعني وحفزني لإنهاء بحثي وإلى كل من ساعدني ولو بكلمة أو نصيحة.

إلى كل من يعرفني و وسعتهم ذاكرتي و لم أذكرهم في مذكرتي أقول لهم شكرا.

قائمة الترميز:

$\boldsymbol{B}$: فضاء بناخ

$\mathcal{H}$: فضاء هيلبرت.

$\langle .\,,.\rangle$:الجداء السلمي .

$\|.\|$:النظيم.

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$: مجموعة المؤثرات الخطية المحدودة من $\mathcal{H}$ في $\mathcal{H}$

$\mathcal{D}(\mathrm{F})$:مجموعة تعريف المؤثر F

$\mathrm{E}(\mathrm{F})$:مجموعة قيم المؤثر F

F^{-1}: مقلوب المؤثر F

F^{*}: المؤثر قرين لF

$\mathrm{P}_{\mathcal{H}}$: مؤثر الإسقاط على $\mathcal{H}$

$\mathrm{U}(\mathcal{H})$: مجموعة المؤثرات الوحدوية على $\mathcal{H}$

$\sigma(\mathrm{F})$: طيف المؤثر F

$\mathcal{V}(x)$:مجموعة جوارات x

E_{λ}:الدالة الطيفية

$\mathrm{R}_{\lambda}(\mathrm{F})$:مؤثرالحالة لـ F

$[.,.]$:الجداء السلمي غير المحدد

المقدمة

العامة

مقدمة

نشأ التحليل الدالي في أوائل القرن العشرين, و رغم حداثة سنه نسبيا إلا أنه يشغل حاليا مركزا متميزا بين العلوم الرياضية المعاصرة. ويشغل مفهوم المؤثر مركز الصدارة فيه و هو تعميم لمفهوم الدالة في التحليل الرياضي و دراسة النظرية العامة للمؤثرات تكمن في صلب موضوع التحليل الدالي. و من بين المؤثرات؛ المؤثر القرين لنفسه الذي يتمحور حوله موضوع المذكرة ألا و هو "حول المتراجحات بين المؤثرات القرينة لنفسها".

و لمعالجة هذا الموضوع وضعنا منهج معين لإتباعه احتوى على:

ثلاث فصول مع مقدمة و خلاصة عامة.

الفصل الأول (معارف أساسية):يحتوي أهم المفاهيم و النظريات الخاصة بالمؤثرات الخطية التي ستستعمل في الفصول اللاحقة.

الفصل الثاني(دراسة طيفية):يحوي هذا الفصل المفاهيم العامة لطيف و حالة المؤثر الخطي و ركزنا فيه على طيف المؤثر القرين لنفسه و تحليله عن طريق دالته الطيفية.

أما **الفصل الثالث**:فهو الفصل الذي يلم بجوهر الموضوع عامة و هو تعميم للمتراجحة المعروفة :

$$F \leq T \rightarrow F^{-1} \geq T^{-1}$$

حيث F, T غير سالبين و قابلين للقلب ; إلى صنف أوسع و هو صنف المؤثرات القرينة لنفسها و قابلة للقلب(أي لا يشترط أن يكون F, T غير سالبين).

الصعوبات: كأي بحث فإنه لا يخلو من صعوبات تواجه الباحث, فهو يتطلب مجهود لمواجهة العقبات إلا أن هذه الأخيرة كانت الحافز و الدافع لبذل مزيد من الجهد في سبيل إكمال هذا البحث على أحسن وجه. ومن المصاعب :

-قلة الكتب و المراجع في الانترنت و خاصة بالعربية إن لم نقل معدومة, وهذا خلق عائقا جديدا و هو مشكل الترجمة و الصياغة.

- وأتمنى بهذا أن أكون قد وفقت في معالجة موضوع المذكرة و أن يكون مفيدا ولو بالقليل لكل متخصص في هذا المجال.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

01. الفراغ الشعاعي النظيمي:

يسمى فراغا شعاعيا نظيميا كل زوج $(X\,,\|.\|)$ حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$

(إما $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$) و $\|.\|$ تطبيق منX في $\mathbb{R}_+$ يحقق من أجل كل x, y من X ما يلي:

- $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \rightarrow \quad \| \lambda x \| = | \lambda | \, \| x \|$
- $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y\|$

الرمز $\|.\|$ يسمى نظيما ,و العدد $\| x \|$ يسمى نظيم العنصر x.

تعريف:يسمى الفراغ الشعاعي النظيمي بفراغ بناخ إذا كانت كل متتالية أساسية (لكوشي) فيه

متقاربة فيه عندها يسمى الفراغ X بالفراغ التام و يرمز له بالرمز $\boldsymbol{B}$.

02. الفضاء الهيلبرتي:

يسمى فراغا شبه هيلبرتيا كل زوج (X,φ), حيث X فراغ شعاعي و φ تطبيق من$X\times X$ في

$\mathbb{K}$(إما$\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$) يحقق من أجل كل x, y, z من X و α من $\mathbb{K}$ ما يلي:

- $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$
- $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$
- $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x, y)$
- $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \varphi(x, x) \geq 0$

يسمي التطبيقφ بالجداء السلمي و يرمز له بالرمز$\langle . , . \rangle$و نكتب: $\varphi(x , y) = \langle x , y \rangle$

أي الفضاء الشبه هيلبرتي هو فضاء شعاعي مزود بالجداء السلمي.

خصائص: من أجل كل x , y يكون:

1. متراجحة كوشي- شوارتز: $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x , x \rangle}.\sqrt{\langle y , y \rangle}$
2. التطبيق h المعرف من X في $\mathbb{R}$ كالتالي$h(x) = \sqrt{\langle x , x \rangle}$ هو نظيم علىX.
3. $4\langle x , y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + i y\|^2 - \|x - i y\|^2)$
4. قاعدة متوازي الأضلاع: $\|x + y\|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

نتيجة(1): كل فراغ شبه هيلبرتي يكون فراغا شعاعيا نظيميا.

تعريف(1): يسمى الفراغ الشبه هيلبرتي بفراغ هيلبار إذا كان تاما بالنسبة لنظيمه المشارك لجدائه

السلمي(أي$\|x\| = \sqrt{\langle x\,,x\,\rangle}$) يرمز لفراغ هيلبار بالرمز $\mathcal{H}$.

تعريف(2): يقال عن $x\,,y$ من X أنهما متعامدان و نكتب $x\perp y$ إذا كان: $\langle x\,,y\rangle = 0$.

إذا كان M جزء من X ($M\subset X$).

عمودي M يعرف كالتالي: $N=\{\, x \in X \,/\, x \perp y \,,\ \forall\ y\in X \,\}$

و نرمز لعمودي M بالرمز $M^{\perp}$ و نكتب: $N= M^{\perp}$.

نتيجة(2): العنصران y,x من X يكونا متعامدين إذا وفقط إذا تحقق:

$$\| x \|^2 + \|y\|^2 = \|x + y \|^2 \quad \text{و} \quad \| x \|^2 + \|y\|^2 = \|x + i\, y \|^2$$

قضية(2):[2]إذا كان $\mathcal{H}$ فراغا لهيلبار و X_0 فراغا جزئيا مغلقا منه فإن:

$$\mathcal{H} = X_0 \oplus X_0^{\perp}$$

و يسمى التحليل العمودي لـ $\mathcal{H}$.

نتيجة(3):

$$\forall\, z \in \mathcal{H},\ \exists!\, x\in X_0 \,,\exists!\, y\in X_0^{\perp} \,/\, z= x+y$$

و نكتب: $x = P_{X_0} z,\ y= P_{X_0^{\perp}} z$ بحيث: P_{X_0} تطبيق الإسقاط على X_0 و $P_{X_0^{\perp}}$ تطبيق

الإسقاط على $X_0^{\perp}$.

نتيجة(4): التطبيق P_{X_0} يحقق:

-1 $P_{X_0} = P_{X_0}^2$

-2 $\| P_{X_0}\| \leq 1$

$$\forall\, x\,, y \in \mathcal{H} \;\; \to \langle \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0} x, y\rangle = \langle x, \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0} y\rangle \qquad \text{-3}$$

$$\ker \mathrm{P}_{\mathrm{X}_0} = \mathrm{X}_0{}^{\perp} \;\; , \mathrm{E}(\mathrm{P}_{\mathrm{X}_0}) = \mathrm{X}_0 \qquad \text{-4}$$

تعريف(3): لتكن $\{ \ (e_i)_{i\in \mathrm{I}} \ \}$=A جملة عناصر من $\mathcal{H}$ (Iمجموعة دلائل كيفية).

1_ يقال إن الجملة A متعامدة إذا كانت متعامدة مثنى مثنى أي:

$$\forall\ i, j \in \mathrm{I} \qquad ,i{\neq}j \quad \langle e_i, e_j\rangle = 0.$$

2_يقال إن الجملة A أساس متعامد و متجانس إذا كانت متعامدة مثنى مثنى و

$$\|e_i\| = 1\,,\ \forall\ i \in \mathrm{I}\ .$$

و الفضاء المولد بالأشعة $\{ e_i \}$ كثيف في $\mathcal{H}$.

03. المؤثرات الخطية:

ليكن $(\mathrm{X}, \|\ .\|_{\mathrm{X}})$, $(\mathrm{Y}\,, \|\ .\|_{\mathrm{Y}})$ فراغين شعاعيين نظيميين, على نفس الحقل$\mathbb{K}$

(إما $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$), اختصارا نكتب Y, X ف.ش.ن.

لتكن $\mathcal{D}$مجموعة غير خالية من X($\mathcal{D}$ قد تساوي X).

تعريف(1): إذا أرفق بكل عنصرx من $\mathcal{D}$ عنصرا معينا y منY, يقال أنه قد عرف مؤثرا من X في Y,يرمز له بالرمز F ونكتب:

$$y = \mathrm{F}(x) \text{ أو } y = \mathrm{F}x$$

- المجموعة تسمى مجموعة تعريف المؤثر F و يرمز لها $\mathcal{D}$ (F) .
- مجموعة العناصر y من Y حيث $y = \mathrm{F}x$ و $x \in \mathcal{D}(\mathrm{F})$ تسمي مجموعة قيم المؤثر F و يرمز لها E(F) ونكتب:

$$\mathrm{E(F)} = \{\ y \in \mathrm{Y}\ /\ y = \mathrm{F}x\ ,\ \ \forall x \in \mathcal{D}(\mathrm{F})\ \}$$

- صيغة المؤثر تكتب كالتالي:

$$X \supset \mathcal{D}(F) \xrightarrow{F} E(F) \subset Y$$

اختصارا نكتب: $F: X \longrightarrow Y$.

- مجموعة الأزواج(x, Fx) من فراغ $X \times Y$ حيث $x \in \mathcal{D}(F)$ تسمي بيان المؤثرF و يرمز له بالرمز "Γ_F" و نكتب:

$$\Gamma_F = \{ (x, Fx) \,/\, x \in (F)\} \subset X \times Y$$

- من أجل كل y منY , مجموعة العناصر x من $\mathcal{D}(F)$ حيث $y = Fx$ تسمي الصورة العكسية للعنصرy و نرمز لها بالرمز "$\overleftarrow{F\,y}$"و نكتب:

$$\overleftarrow{F\,y} = \{x \in \mathcal{D}(F) / \; y = Fx\}$$

- مجموعة أصفار المؤثر F تسمى نواة المؤثر F و يرمز لها بالرمز" $Ker\,F$ "و نكتب:

$$Ker F = \{x \in \mathcal{D}(F) / \, Fx = 0\}$$

تعريف(2): إذا كان T, F مؤثرين من XفيY, يقال إن:

1. المؤثرين T, F منطبقان, إذا تحقق ما يلي:

أ. $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}$

ب. $\forall \; x \in \mathcal{D} \longrightarrow T(x) = F(x)$

2. المؤثر T تمديد(توسيع) للمؤثر F, أو اقتصارا للمؤثرT إذا تحقق ما يلي:

أ. $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(T)$

ب. $\forall \; x \in \mathcal{D}(F) \longrightarrow T(x) = F(x)$

3. المؤثر F تقابل على $\mathcal{D}(F)$ في $E(F)$ إذا تحقق ما يلي:

عندها نكتب: $F^{-1}y = x_y$

ننبه على أنه في الحالة العامة $\overleftarrow{F}y \neq F^{-1}y$

تعريف(3): المؤثر F من X في Y, يقال أنه مؤثر خطي إذا حقق ما يلي :

1. المجموعة $\mathcal{D}(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X.

2. $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(F) \, ، \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \longrightarrow F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F x_1 + \alpha_2 F x_2$

يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y بالرمز: $L(X, Y)$.

- في حالة $Y \equiv X$ اختصارا نكتب $L(X)$ بدلا من $L(X, X)$.

نتيجة(1): إذا كان المؤثر من: $L(X, Y)$ فإن:

1. المجموعات $Ker\,F$,$E(F)$,Γ_F فراغات شعاعية جزئية من الفراغات X, Y, $X\times Y$ على التوالي.

2. المؤثر F تقابل على $\mathcal{D}(F)$ و $E(F)$ إذا و فقط إذا كان $Ker F = 0$.

3. المؤثر F تقابل يستلزم المؤثر F^{-1} خطي أيضا, أي: $F^{-1} \in L(X, Y)$.

3.1_ فراغ المؤثرات الخطية:

تعريف(1): من أجل كل مؤثرين F_1 ,F_2 من L(X, Y) يعرف:

1. جمع المؤثرين F_1 ,F_2 كالتالي:

$$(F_1 + F_2)\, x = F_1 x + F_2 x \quad , x \in \mathcal{D}(F_1) \cap \mathcal{D}(F_2)$$

2. ضرب المؤثر F_1 بعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي:

$$(\alpha\, F_1)\, x = \alpha\, F_1 x \quad ; x \in \mathcal{D}(F), \alpha \in \mathbb{K}$$

نتيجة(1):

1 -المؤثران F,Φ حيث $F = F_1 + F_2$, $\Phi = \alpha F$ يكونا من L(X, Y).

2 -المجموعة L(X, Y) تكون فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف(2): إذا كان F,Φ مؤثرين من L(X,Y), L(Y ,Z) على التوالي ,

(Z ف.ش.ن.على نفس الحقل $\mathbb{K}$) فإن جداء(تركيب)المؤثرين F,Φ يعرف كالتالي:

$$(\Phi F)x = \Phi(Fx) \;/\; x \in \mathcal{D}(F)\, , F(x) \in \mathcal{D}(\Phi)$$

تعريف(3): الفراغ L(X) إذا زود بالجداء المعرف في التعريف2 يسمى"جبر".

- إذا كان في هذا الجبر $\Phi F = F\Phi$, فإنه يسمى جبر تبديلي.
- واضح أن المؤثر الحيادي I من L(X) يمثل عنصر حيادي فيه بالنسبة للجداء, و عليه يسمى L(X) بالجبر الوحدوي.

تعريف(4): يعرف نظيم المؤثر F من L(X, Y)كالتالي:

لكن ننبه هنا على أن الحد الأعلى قد يكون غير منته أي $\| F \| = +\infty$. و عليه إذا زود الفراغ L(X, Y)بالنظيم المعرف أعلاه يكون فراغا شعاعيا نظيميا غير عادي.

3.2_ المؤثرات الخطية المحدودة:

ليكن المؤثر F من L(X, Y) حيث X, Yف.ش.ن.على نفس الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف(1): يقال أن المؤثر F محدود على $\mathcal{D}$(F) إذا حول كل مجموعة من $\mathcal{D}$(F) محدودة في X إلى مجموعة محدودة في Y.

في حالة $\mathcal{D}(F) \equiv X$ يقال إن F محدود علىX, اختصارا يقال أن المؤثر F محدود.

تعريف(2): يقال أن المؤثر F محدود إذا وجد ثابت Mيحقق المتراجحة التالية:

$$\| Fx \|_Y \leq M \| x \|_X \quad , \forall x \in X$$

تعريف(3): يقال أن المؤثر F مستمر في النقطة x_0 من $\mathcal{D}$(F), إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / (\forall x \in \mathcal{D}(F) \cap X / \| x - x_0 \| < \delta) \longrightarrow \|F x - F x_0\| < \varepsilon$$

تعريف(4):يقال أن المؤثر F مستمر في النقطة x_0 من $\mathcal{D}$(F), إذا تحقق مايلي:

من أجل كل متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من $\mathcal{D}$(F) متقاربة نحو x_0 من$\mathcal{D}$(F) تكون المتتالية $(Fx_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو Fx_0.(يسمى هذا الاستمرار بالاستمرار بتتابع).

ملاحظة:يقال أن المؤثر F مستمر على $\mathcal{D}$(F), (على X)إذا كانت التعريف السابقة محققة من أجل كل x_0 من$\mathcal{D}$(F)(من X).

نتيجة(1): إذا كان المؤثر F من $L(X, Y)$ فإن F مستمر يكافئ F محدود.

يرمز لمجموعة المؤثرات من $L(X, Y)$ و المحدودة بالرمز $\mathcal{L}(X,Y)$.

- في حالة $X \equiv Y$ الفراغ $\mathcal{L}(X, X)$ اختصارا نكتب $\mathcal{L}(X)$.

نتيجة(2):

1) $\mathcal{L}(X, Y) \subset L(X, Y)$.

2) $\mathcal{L}(X,Y)$ مزود بأحد النظم في التعريف 4 من الفقرة 3.2 هو فراغ شعاعي نظيمي.

3) إذا كان الفراغ Y لبناخ فإن الفراغ $\mathcal{L}(X, Y)$ يكون لبناخ أيضا.

4) الجبر $\mathcal{L}(X)$ حيث X فراغ بناخ يسمى جبر بناخ و هو وحدوي.

ملاحظة: في حالة $Y \equiv \mathbb{K}$ الفراغ $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ يسمى الثنوي التبولوجي و يرمز له بالرمز X' و هو جبر بناخ.

نتيجة(3): إذا كان بعد الفراغ X منته فإن:

$$\mathcal{L}(X,Y) \equiv L(X, Y)$$

نتيجة(4): الإثباتات التالية متكافئة :

1. $F \in \mathcal{L}(X,Y)$.
2. F مستمر في الصفر.
3. F محدود على كرة الوحدة المغلقة .
4. F محدود على سطح كرة الوحدة المغلقة.
5. F يحقق شرط لبشيتز.
6. F مستمر بانتظام.

تعريف(5): بالإضافة لنظم المؤثر F المعرفة في التعريف 4 من الفقرة 3.1, يمكن تعريف في الفراغ $\mathcal{L}(X,Y)$ النظيم التالي:

$$\| F\|=\min \{M/ \| Fx\| \leq M \| x \|,\ x \in X \}$$

قضية(1): إذا كان المؤثر F من $\mathcal{L}(X,Y)$ حيث Y,X فراغات هيلبار, فإن:

$$\| F\|=\sup\{ \left|\langle F x , y\rangle\right| ,\ \| x\| \leq 1 ,\ \| y \| \leq 1\}$$

البرهان: نضع $\alpha=\sup\{ \left|\langle F x , y\rangle\right| ,\ \| x\| \leq 1 ,\ \| y \| \leq 1\}$

بما أن $\| x\| \leq 1 ,\ \| y\| \leq 1$, فإنه حسب متراجحة كوشي_شفارتز يكون:

$$|\langle F x , y\rangle| \leq \| Fx\|\|y\| \leq \|F\|\|x\|\|y\| \leq \|F\| \}$$

من المتراجحة الأخيرة واضح أن:

$$\alpha \leq \|F\| \qquad (1)$$

من ناحية ثانية إذا كان β عددا حقيقيا يحقق $\alpha \leq \beta$, فإن:

$$\forall x\in X \longrightarrow \| Fx\| \leq x\| \beta \| \qquad (*)$$

فعلا لأنه في حالة $x = 0$ المتراجحة واضحة.

- في حالة $x \neq 0$ نضع $x' = \frac{xx}{\|\ \|}$, $y' = \frac{Fx}{\|Fx\|}$ و حيث $Fx \neq 0$.

بما أن $\alpha \leq \beta$, فإن $|\langle Fx', y'\rangle| \leq \beta$, و عليه باعتبار $|\langle Fx', y'\rangle| = \frac{\| Fx\|}{\|x\|}$ تكون (*)محققة.

من الصيغة(*) و حسب تعريف النظيم يكون:

$$\|F\| \leq \alpha \qquad (2)$$

من الصيغة(1) و(2) نستنتج أن:

$$\| F\|=\sup\{\left|\langle F x , y\rangle\right| ,\ \| x\| \leq 1 ,\ \| y \| \leq 1\}$$

نتيجة(5):

1. إذا كان المؤثر F من$\mathcal{L}(X,Y)$ حيث X,Y فراغات لهيلبار, فإن:

$$(\forall x \in X, \forall y \in Y, \ \langle F x, y \rangle = 0) \iff F \equiv 0$$

2. إذا كان المؤثر F من$\mathcal{L}(X)$ حيث X فراغ هيلبار مركب, فإن:

$$(\forall x \in X, \ \langle F x, x \rangle = 0) \iff F \equiv 0$$

نتيجة(6): الفراغ $\mathcal{L}(X)$ إذا زود بالجداء المعرف بالتركيب أي:

$$F_1, F_2 \in \mathcal{L}(X) \longrightarrow F_1 . F_2 = F_1 \circ F_2$$

يكون جبرا وحدوي, يسمى جبر المؤثرات الخطية المحدودة,و يسمى جبر بناخ إذا كان X فراغا بناخيا.

نتيجة(7):

1 - $F_1, F_2 \in \mathcal{L}(X) \longrightarrow \| F_1 . F_2 \| \leq \| F_1 \| \| F_2 \|$

2 - $F \in \mathcal{L}(X)$, $F^0 = I$, $F^2 = F \circ F$, $F^{n+1} = F^n \circ F$, $n \geq 1$

3 - $F \in \mathcal{L}(X)$, $\| F^n \| \leq \| F \|^n$, $n \geq 1$

3.3_ قابلية القلب باستمرار:

تعريف(1): المؤثر F من$\mathcal{L}(X, Y)$ يقال أنه أنه قابل للقلب باستمرار إذا وجد له مؤثر عكسي معرف و محدود على كل الفراغ. أي:

$$\exists F^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$$

نتيجة(*نظرية بناخ للتطبيق العكسي*): إذا كان المؤثر F من $\mathcal{L}(X,Y)$ تقابلا حيث X,Y لبناخ, فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار.

قضية:[4]إذا كان المؤثر F من $\mathcal{L}(X)$ حيث X لبناخ و $\| F\| \leq 1$, فإن المؤثر $I-F$ قابل للقلب باستمرار, عندها يكون:

$\|I-($

3.4_ المؤثر القرين:

ليكن $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ فراغين لهيلبار وF مؤثر خطي من$\mathcal{H}_1$ في$\mathcal{H}_2$

تعريف(1):يسمى مؤثرا قرينًا للمؤثر F,المؤثر F^* المعرف من $\mathcal{H}'_2$ في$\mathcal{H}'_1$ بحيث من أجل كل (y,x) من $\mathcal{H}_1\times \mathcal{H}_2$ يكون: $\langle Fx , y \rangle =\langle x ,F^*y \rangle$

قضية(1):إذا كان $F\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ فإن F^* موجود ووحيد من$\mathcal{L}(\mathcal{H}'_2 , \mathcal{H}'_1)$ يحقق:

$$\| F \| = \|F^*\|$$

خصائص:إذا كان F_1, F_2 مؤثرين من $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ فإن:

1. $(\alpha F_1+\beta F_2)^* =\bar{\alpha} F_1^*+ \bar{\beta}F_2^*$
2. $(F_1 F_2)^* = F_2^* F_1^*$
3. $(F^*)^* = F$
4. إذا كان F قابل للقلب فإن: F^* أيضا قابل للقلب عندها يكون $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$.
5. $(E(F^*))^{\perp}= KerF$, $(E(F))^{\perp}=Ker F^*$

3.5_المؤثر القرين لنفسه:

ليكنF مؤثر من $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ نقول أنه:

قرين لنفسه(هيرميتي) إذا حقق $F = F^*$ و نكتب:

$$\forall x, y\in \mathcal{H} \quad ;\langle Fx ,y\rangle= \langle x, Fy \rangle$$

قضية(2):[2] إذا كان F قرين لنفسه, فإن:

‖

حيث: $M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x \rangle , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x \rangle$

خصائص: إذا كان $F\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ و $F=F^*$ فإن:

1 - $\forall x\in \mathcal{H} \ , \ \langle Fx , x\rangle\in \mathbb{R}$

2 - $\| F \| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Fx, x\rangle|$

3 - $\| F^2 \| = \|F\|^2$

تعريف(4): ليكن F مؤثر من $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ نقول أنه:

I. موجب إذا كان قرين لنفسه و يحقق: $\forall x\in \mathcal{H}, \ \langle Fx , x\rangle > 0$

II. وحدوي أي يطبق $\mathcal{H}$ على كل $\mathcal{H}$ ويحقق:

$$\forall\, y,x\in \mathcal{H} \longrightarrow \langle Fx , y\rangle= \langle x , y\rangle$$

خصائص: إذا كان $F\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ و F وحدوي فإن:

1 - F يملك مؤثر عكسي و يكون وحدويا أيضا.

2 - $\forall\, y,x\in \mathcal{H} \longrightarrow \langle Fx , y\rangle= \langle x ,F^{-1}y\rangle$

3 - $\| F \| = 1$

4 - المؤثر F^k $(k\in\mathbb{Z})$ وحدوي.

تعريف(5): ليكن F_1, F_2 مؤثرين من $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ نقول أنهما متكافئان وحدوياإذا وجد U مؤثر وحدوي من $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ و يحقق:

$$UF_1U^{-1} = F_2$$

و يرمز للتكافؤ الوحدوي[1] بين المؤثرين F_1, F_2 :

$$F_1 \cong F_2$$

3.6_المؤثر الموجب و الجذر التربيعي:

ليكن $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ حيث $F = F^*$

تعريف: نقول أن المؤثر F :

1. غير سالب إذا تحقق:

$$\forall x \in \mathcal{H} \longrightarrow \langle Fx , x \rangle \geq 0$$

2. موجب إذا حقق:

$$\forall x \in \mathcal{H} \longrightarrow \langle Fx , x \rangle > 0$$

نتيجة: جداء مؤثرين غير سالبين و تبديلين هو مؤثر غير سالب.

قضية(1): [4]كل مؤثر غير سالب يملك جذرا تربيعيا وحيدا يرمز له بالرمز $F^{½}$ يحقق:

1. $F^{½}$ من $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ غير سالب.
2. $F^{½}$ تبديلي مع أي مؤثر تبديلي مع المؤثر F.

الفصل الثاني

الدراسة الطيفية

01. طيف المؤثر الخطي

ليكن $F\in L(\mathcal{H})$, حيث $\mathcal{H}$ فراغ هيلبار مركب.

من أجل العدد المركب λ إذا وجد مؤثر عكسي للمؤثر $F-\lambda I$ فإن هذا المؤثر يسمى مؤثر الحالة للمؤثر F و يرمز له بالرمز $R_{\lambda}(F)$ و نكتب $R_{\lambda}(F)=(F-\lambda I)^{-1}$.

تعريف(1): نعرف مجموعة الحالة للمؤثر F و يرمز لها بالرمز $\rho(F)$ بأنها مجموعة القيم λ التي من أجلها يكون المؤثر $F-I\lambda$ قابلا للقلب باستمرار أي المؤثر $R_{\lambda}(F)$ محدود و معرف على كل الفراغ.

تعريف(2): يعرف طيف المؤثر F و يرمز له بالرمز $\sigma(F)$ بأنه المجموعة المتممة لمجموعة الحالة في الفراغ المركب أي:

$$\sigma(F)=\mathbb{C}\setminus\rho(F).$$

ملاحظة : من خلال التعريفين السابقين نستنتج أن طيف المؤثر F ينقسم إلى ثلاثة أقسام:

01. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_{λ} لا يقبل مؤثرا عكسيا, تسم ي الطيف النقطي يرمز لها بالرمز: $P_{\sigma}(F)$ (و هي القيم الذاتية لـF)

02. مجموعة الأعداد المركبة λ, من أجلها المؤثر F_{λ} يقبل مؤثرا عكسيا مجموعة تعريفه كثيفة في $\mathcal{H}$ لكنه ليس مستمرا, تسمى الطيف المستمر و يرمز له بالرمز: $C_{\sigma}(F)$

03. مجموعة الأعداد المركبة λ من أجلها المؤثر F_{λ} يقبل مؤثرا عكسيا, لكن مجموعة تعريفه ليست كثيفة في $\mathcal{H}$ تسمى الطيف الباقي و يرمز لها بالرمز: $R_{\sigma}(F)$.

نتيجة(1): أجزاء الطيف تشكل تجزئة له.

نتيجة(2): إذا كان بعد $\mathcal{H}$ منته فإن طيف المؤثر F هو مجموعة قيمه الذاتية أي:

$$R_{\sigma}(F)=C_{\sigma}(F)=\emptyset \text{ و } \sigma(F)=P_{\sigma}(F).$$

نتيجة(3): إذا كان $F\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ فإن:

1. $\sigma(F)$ مجموعة متراصة في $\mathbb{C}$
2. $\{\lambda\in \mathbb{C} , |\lambda| > \|F\| \}\subset \rho(F)$
3. $\sigma(F)\subset\{ \lambda\in \mathbb{C} , |\lambda| \leq \|F\| \}$
4. إذا كان $F^{-1} \in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ فإن: $\sigma(F^{-1})=\{\frac{1}{\lambda} / \lambda \in \sigma(F) \}$
5. $\sigma(F^{*})=\{\bar{\lambda} / \lambda \in \sigma(F) \}$

02. طيف المؤثر القرين لنفسه:

معلوم أنه: إذا كان $F\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ و $F=F^*$ فإن:

1. كل القيم الذاتية للمؤثر F حقيقية.
2. كل شعاعين ذاتيين مرفقين بقيمتين ذاتيتين مختلفتين يكونا متعامدين.
3. إذا كان الفراغ الجزئي M ثابت بالنسبة للمؤثر F, فإن متممه العمودي $M^{\perp}$ يكون كذلك.

قضية (1): [8] العدد λ يكون قيمة ذاتية للمؤثر F القرين لنفسه إذا و فقط إذا كان:

$$(\overline{E(F_{\lambda})})\neq \mathcal{H}$$

البرهان:

- [$\Leftarrow$] لتكن λ قيمة ذاتية للمؤثر و الفراغ M الذاتي المرفق بها بما أن:

$$\forall\, x\in\mathcal{H} \longrightarrow x = y+z \quad / \; y\in M ,\; z \in M^{\perp}$$

فإن:

$$(F-\lambda I)x = (F-\lambda I)y+(F-\lambda I)z = (F-\lambda I)\, z \qquad (1)$$

بما أن z من $M^{\perp}$ فإنه حسب التذكير 3 تكون: $(F-\lambda I)\, z \in M^{\perp}$

ومنه حسب الصيغة(1) نجد $\overline{E(F_\lambda)} \subset M^{\perp}$, أي أن:

$$\overline{E(F_\lambda)} \subset \overline{M^{\perp}} = M^{\perp}$$

و بالتالي يكون $\overline{E(F_\lambda)} \neq \mathcal{H}$

- [⇒] لتكون $\overline{E(F_\lambda)} \neq \mathcal{H}$ معلوم أن الفراغ $\mathcal{H}$ يمكن كتابته كالتالي:

$$\mathcal{H} = \overline{E(F_\lambda)} \oplus \overline{E(F_\lambda)}^{\perp}$$

و منه نستنتج أن: $\forall\, x \in \mathcal{H}\ ,(x \neq 0)\ ,\exists x_0 \neq 0\ /\ \langle F_\lambda x, x_0 \rangle = 0$

لاحظ أن:

$$\langle F_\lambda x, x_0 \rangle = \langle x, F_\lambda^{*} x_0 \rangle = \langle x\, , (F^{*} - \bar{\lambda} I) x_0 \rangle = \langle x, (F - \bar{\lambda} I) x_0 \rangle = 0 \quad (2)$$

من أجل $x = Fx_0 - \bar{\lambda} x_0$ الصيغة (2) تعطي $\| Fx_0 - \bar{\lambda}\, x_0 \| = 0$ أي أن:

$$Fx_0 - \bar{\lambda} x_0\ ,\ \ x_0 \neq 0$$

ومنه نستنتج أن $\bar{\lambda}$ قيمة ذاتية للمؤثر F.

بما أن المؤثر F قرين لنفسه فإن λ قيمة ذاتية له.

نظرية(1):

العدد λ يكون نقطة نظامية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا كان: $E(F_\lambda) = \mathcal{H}$

البرهان:

- [⇐]واضح حسب تعريف النقط النظامية.
- [⇒]نفرض أن $E(F_\lambda) = \mathcal{H}$

حسب القضية السابقة λ لا تكون قيمة ذاتية للمؤثر F, هذا يعني وجود المؤثر العكسي $(F-\lambda I)^{-1}$.

بما أن $E(F_\lambda)=\mathcal{H}$ فإنه حسب نظرية بناخ للتطبيق العكسي المؤثر $(F-\lambda I)^{-1}$ يكون محدودا, و عليه

العدد λ يكون نقطة نظامية للمؤثر F.

نظرية(2):

العدد λ يكون نقطة نظامية للمؤثر F القرين لنفسه إذا و فقط إذا تحققت الصيغة التالية :

$$\exists k>0/\ \forall\ x\in\mathcal{H} \longrightarrow \| F_\lambda\, x \| \geq k\, \| x \|$$

البرهان:

- $[\Leftarrow]$ من أجل $\lambda\in\rho(F)$ يكون المؤثر F_λ قابلا للقلب باستمرار, عندها تتحقق الصيغة التالية:

$$\| F_\lambda^{-1}\, y \| \leq \| F_\lambda^{-1} \| \| y \| \qquad (1)$$

بتعويض $y = F_\lambda x$ في الصيغة(1) نجد:

- $[\Rightarrow]$ عندنا :

$$\exists k>0/\ \forall\ x\in\mathcal{H} \longrightarrow \| F_\lambda\, x \| \geq k\, \| x \| \qquad (2)$$

الصيغة تعني وجود المؤثر F_λ^{-1} , أي أن λ ليست قيمة ذاتية للمؤثر F . هذا يعني حسب القضية 1 أن

$\overline{E(F_\lambda)}=\mathcal{H}$ و منه لبرهان المطلوب(أي $E(F_\lambda)=\mathcal{H}$) يكفي برهان أن $E(F_\lambda)$ مغلقة في الفراغ $\mathcal{H}$.

لتكن $(y_n)_{n\geq1}$ متتالية كيفية من $E(F_\lambda)$ متقاربة في $\mathcal{H}$ أي:

$$\exists y\in\mathcal{H}\ /\ \ y=\lim_{n\to\infty} y_n$$

و منه بوضع: $y_n = F_\lambda\, x_n$ $,\forall\ n\geq 1,$ من الصيغة(2)نستنتج أن:

$$\| y_n - y_m \| \geq k \| x_n - x_m \| \qquad (3)$$

بما أن المتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ متقاربة فإنها لكوشي, و منه حسب الصيغة(3)تكون المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ لكوشي

أيضا في الفراغ $\mathcal{H}$ التام و بالتالي فهي متقاربة فيه, أي:

$$\exists x \in \mathcal{H} \ / \quad x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

بما أن المؤثر F_λ مستمر, فإن

لاحظ أن: $y = F_\lambda x \in E(F_\lambda)$, و بالتالي $E(F_\lambda)$ تكون مغلقة.

حسب نظرية بناخ للتطبيق العكسي المؤثر F_λ^{-1} يكون محدودا, و عليه يكون المؤثر F_λ قابلا للقلب باستمرار,

أي أن $\lambda \in \rho(F)$.

قضية(2):[4]إذا كان F مؤثرا من$\mathcal{L}(\mathcal{H})$, فإن

$$F=F^* \Longrightarrow \sigma(F) \subset \mathbb{R}$$

البرهان: نبرهن أنه:

$$\forall \ \lambda = \alpha + i\beta \ / \ \beta \neq 0 \ \rightarrow \ \lambda \in \rho(F)$$

لاحظ:

$$\begin{aligned}
\| Fx - (\alpha + \beta i)x \|^2 &= \langle Fx - (\alpha + \beta i)x, Fx - (\alpha + \beta i)x \rangle \\
&= \langle Fx - \alpha x - \beta i x \ , \ Fx - \alpha x - \beta i x \rangle \\
&= \| Fx - \alpha x \|^2 + \beta^2 \| x \|^2 + \langle Fx, -\beta i x \rangle - \langle -\beta i x \ , \ Fx \rangle \\
&= \| Fx - \alpha x \|^2 + \beta^2 \| x \|^2 - \langle Fx, \beta i x \rangle + \langle Fx, \beta i x \rangle \\
&= \| Fx - \alpha x \|^2 + \beta^2 \| x \|^2
\end{aligned}$$

ومنه يكون:

و بالتالي حسب نظرية2 يكون$\lambda \in\rho(F)$ أي أن $\sigma(F)$ $\lambda \notin$ و بالتالي يكون $\sigma(F) \subset \mathbb{R}$.

قضية(3): إذا كان F مؤثرا من$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ غير سالب فإن$\sigma(F) \subset \mathbb{R}_+$, $(\mathbb{R}_+ = [0 , +\infty[ )$

البرهان: المؤثر F غير سالب ومنه هو القرين لنفسه حسب القضية السابقة يكون $\sigma(F) \subset \mathbb{R}$ و بالتالي

لبرهان, $\sigma(F) \subset \mathbb{R}_+$ يكفي برهان أن: $\lambda \in \mathbb{R}^*_- \Longrightarrow \lambda \in\rho(F)$ $(\mathbb{R}^*_-=]-\infty, 0 [ )$

بما أن المؤثر F غير سالب فإن: $\forall\ x\in \mathcal{H} \longrightarrow \langle Fx, x \rangle \geq 0$

و منه باعتبار $F=F^*$, $\lambda \in \mathbb{R}^*_-$ يكون:

$$\forall x\in\mathcal{H} \rightarrow \| (\lambda I - F)x\|^2=\langle Fx -\lambda x ,Fx -\lambda x\rangle$$

$$=\| F x \|^2-2\lambda\langle Fx, x \rangle + \lambda^2 \| x \|^2 \geq\| F x \|^2+\lambda^2 \| x \|^2 \geq \lambda^2 \| x \|^2$$

هذا يعني أن:

$$\forall\ x\in \mathcal{H}\longrightarrow \| (\lambda I - F)x\|^2 \geq \lambda^2 \| x \|^2$$

أي أن: $\lambda \in\rho(F)$.

نتيجة: إذا كان المؤثر F قرينا لنفسه, فإن:

1. $\sigma(F) \subset [m_F, M_F]$.

2. $m_F, M_F \in \sigma(F)$

حيث:

03. التحليل الطيفي للمؤثر الخطي:

ليكن F من $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ و $F=F^*$

تعريف: مجموعة مؤثرات الاسقاط $\{E_\lambda\}$ المتعلقة بوسيط حقيقي λ من $\mathbb{R}$ تسمى تحليل وحدة للمؤثر F القرين لنفسه إذا حققت الشروط التالية:

1- إذا كان $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ و $FT = TF$ فإن:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow E_\lambda T = T E_\lambda$$

2 - $E_\lambda \leq E_\mu \quad , \quad \lambda \leq \mu$

3 - $\{E_\lambda\}$ مستمرة من اليمين أي أن $E_{\lambda+0} = E_\lambda$

4 - $$E_\lambda \begin{cases} 0 & -\infty < \lambda < m_F \\ 1 & M_F \leq \lambda < +\infty \end{cases}$$

تعريف: تعرف الدالة الطيفية للمؤثر F بأنها الدالة E_λ

قضية:[9] كل مؤثر قرين لنفسه يملك تحليل وحدة عندها المؤثر F يكتب عن طريق دالته الطيفية كالتالي:

نتيجة: لتكن λ_0 من $\mathbb{R}$:

1. $\lambda_0 \in \rho(F) \Leftrightarrow \exists\, \mathcal{V} \in v(x_0) \,/\, \forall \lambda \in \mathcal{V} \rightarrow E_\lambda$ (ثابت)

2. $\lambda_0 \in P_\sigma(F) \Leftrightarrow E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0} \neq 0$

الفصل الثالث

متراجحات بين المؤثرات القرينة لنفسها

01.الفراغات ذات المسافة غير المحددة :

ليكن X فراغا شعاعيا على الحقل $\mathbb{C}$ و h تطبيق من X×X في $\mathbb{C}$

$$h(x, y) = \alpha \in \mathbb{C}$$

تعريف(1): يقال أن h مسافة غير محددة إذا حقق الشروط التالية:

1. $\forall x \in X \longrightarrow h(x, x) \in \mathbb{R}$.
2. $\forall x, y \in X \longrightarrow h(x, y) = h\overline{(y, x)}$
3. $\forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \longrightarrow h(\alpha x + \beta y, z) = \alpha h(x, z) + \beta h(y, z)$

و نرمز له بالرمز [.,.] أي: $h(x, y) = [x, y]$.أيضا [.,.]يسمى جداء سلمي غير محدد.

ملاحظة: غير محدد أي غير محدد الإشارة, أي المقدار $[x, x]$ يملك أي إشارة.

- الفراغ X إذا زود بالجداء السلمي غير المحدد [.,.] أي الزوج (X ,[.,.]) يسمى فراغ ذي مسافة غير محددة.

تعريف(2): العنصر x من X يقال أنه:

1. سالب(غير موجب) و نكتب: $x < 0$ ($x \le 0$), إذا كان $[x, x] < 0$ ($[x, x] \le 0$) .
2. موجب (غير سالب) و نكتب:$x > 0$ ($x \ge 0$), إذا كان $[x, x] > 0$ ($[x, x] \ge 0$).
3. محايد و نكتب $x = 0$ إذا كان: $[x, x] = 0$.

نرمز لمجموعة كل العناصر الموجبة من X بالرمز X_{++} , ولمجموعة كل العناصر السالبة بالرمز X_{--}, و لمجموعة كل العناصر المحايدة بالرمز X_0 أي:

$$X_{--} = \{ x \in X \setminus [x, x] < 0 \}$$

$$X_{++} = \{ x \in X \setminus [x, x] > 0 \}$$

$$X_0 = \{ x \in X \setminus [x, x] = 0 \}$$

نضع: $X_+ = X_{++} \cup X_0$, $X_- = X_{--} \cup X_0$

أي: X_+ مجموعة العناصر من X غير السالبة و X_- مجموعة العناصر من X غير الموجبة.

تعريف(3): المجموعة M من X يقال أنها:

1. ليست موجبة (سالبة) إذا كانت: $M \subset X_-$ ($M \subset X_{--}$).
2. ليست سالبة (موجبة) إذا كانت: $M \subset X_+$ ($M \subset X_{++}$).
3. محايدة إذا كانت: $M \subset X_0$.

تعريف(4):

1) العنصران, x y من X يقال أنهما متعامدان إذا تحقق $[x , y] = 0$ و نكتب: $x[\perp]y$

2) المجموعتان A وB من X يقال أنهما متعامدان إذا تحقق:

$$\forall x \in A , \forall y \in B \longrightarrow x[\perp]y$$

و نكتب: $A[\perp]B$.

تعريف(5): يعرف المتمم العمودي للمجموعة A من X بأنها المجموعة B المعرفة كالتالي :

$$B = A^{[\perp]} = \{ x \in X , x[\perp] A \}$$

نفرض الآن أن الفراغ $(X , [.,.])$ يمكن كتابته من الشكل:

$$X = X_+ [\oplus] X_- , X_+[\perp] X_- \quad ..... (\divideontimes)$$

$[\oplus]$ يرمز للجمع المباشر المرفق بـ $[.,.]$.

لاحظ أن كل من الفراغين $(X_+ , [.,.])$ و$(X_-, [.,.])$ هو فراغ شبه هيلبرتي أي أن:

$$\forall x, y \in X_+ ; \langle x , y \rangle = [x ,y] \text{ و } \forall x, y \in X_- ; \langle x, y \rangle = -[x , y]$$

تعريف(6): يعرف التحليل النموذجي للفراغ X بأنه التحليل الموجود في الصيغة ($\divideontimes$).

تعريف(7): إذا كان في التحليل النموذجي كل من X_+ و X_- فراغات لهيلبار (تامة) فإن الفراغ

$(X \quad ,[.\,,.])$ يسمى "فراغ كرين" بالإضافة إلى ذلك إذا كان:

$$min\ (\ dimX_+ \ \ ,dim\ X_-) = k< \infty$$

فإن الفراغ $([.\,,.],\ X)$ يسمى فراغ **"بنترياقين"**.

نتيجة(1): فراغ كرين يمكن اعتباره كفراغ هيلبار عادي ذلك لأنه يمكن تعريف جداء سلمي من خلال الجداء

السلمي غير المحدد.

فعلا بما أن: $X = X_+\ [\oplus]\ X_- \quad ,X_+[\perp]\ X_-$

$$\forall x, y \in X\ (\ x = x_+ + x_-\ \ , y = y_+ + y_-)\ /x_+, y_+ \in X_+\ ;\ \ x_-, y_- \in X_-$$

$$\langle\ x\ , y\rangle\ = [x_+\ , y_+\ ] - [x_-\ , y_-] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

في الحالة الخاصة إذا كانت:

$$u\ , v \in X_+ \qquad \longrightarrow \langle u\ ,v\rangle =\ [u\ ,v\ ]$$

$$u\ ,v \in X_- \ \longrightarrow \quad \langle u\ ,v\rangle = -\ [u\ ,v\ ]$$

لاحظ:

$$[x\ , y]=[x_+ + x_-\ , y_+ + y_-]=[x_+\ , y_+] + [x_-, y_-]=\langle x_+\ , y_+\rangle+\langle x_-\ , y_-\rangle \quad (2)$$

$$u \in X_+\ ,v \in X_- \longrightarrow \langle u\ ,v\rangle = [u\ ,0] - [0, v] =0 \Longrightarrow X_+ \perp X_-$$

أي يمكن كتابة : $X= X_+ \oplus X_-$ كفراغ هيلبار.

1.1_المسقط النموذجي و التناظر النموذجي:

ليكن X فراغ كرين و $X= X_+\ [\oplus]\ \ X_-$

هذا التحليل يولد مؤثري إسقاط $P_+\ ,\ P_-$ (حيادي $P_- + P_+ = I$)

$P_-X=X_-$, $P_+X = X_+$ و منه: $P_-x = x_-$,$P_+ x = x_+$ (P_+,P_- تسمى الإسقاط النموذجي).

بما أن: $X= X_+\oplus X_-$ فإن P_+ ,P_- هما مؤثرا إسقاط (و منه قرين لنفسها).بالنسبة للجداء السلمي الناتج عن [. , .] أي يكتب:

$$X = X_+\oplus X_- = P_+X \oplus P_-X$$

تعريف(8): يعرف التناظر النموذجي المرفق بالفراغ X و نرمز له بالرمز J بأنه المؤثر $P_+ - P_-$ و نكتب:

$$J = P_+ - P_-$$

خصائص: التناظر النموذجي J يحقق الخصائص التالية:

1. $J = J^*$
2. $J = J^2$
3. $J^* = J^{-1}$
4. X_+ هو الفراغ الذاتي للمؤثر J المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda=1$.
5. X_- هو الفراغ الذاتي لمؤثر J المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda=-1$.
6. $J (x_+ + x_-) = x_+ - x_-$

تعريف(9): نقول عن F أنه شبه وحدوي(تقايس) إذا حقق:

$$[Fx , Fy] = [x , y] \quad ; x\in\mathcal{H}$$

و نكتب J_شبه وحدوي. وإذا كان $E(F) = \mathcal{H}$ عندها يسمى F وحدوي.

نتيجة(2): بما أن J هو وحدوي و متناظر فإن طيفه هو:

$$\sigma(J) = P_\sigma (J) =\{ -1 ,1\}$$

نتيجة(3):باستعمال التناظر النموذجي من الصيغة (2) و (1) نستنتج أن:

$$\langle x , y\rangle = [\mathrm{J}\, x , y] , \ [x , y] = \langle \mathrm{J}\, x , y \rangle \quad .....(3)$$

و منه نكتب: $\| x \|^2 = [\mathrm{J}\, x , x] , [x , x] = \langle \mathrm{J}\, x , x\rangle$

نتيجة(4):

$$x, y \in \mathrm{X} \ ; \quad |[x, y]| \leq \| \mathrm{J} \| \| x \| \| y \| = \| x \| . \| y \|$$

نتيجة(5):

.1 $x , y \in \mathrm{X} \quad [\mathrm{J}\, x , y] = [x , \mathrm{J} y]$

.2 $x , y \in \mathrm{X} , [\mathrm{J}\, x , \mathrm{J} y] = [x , y]$

فراغ كرين يسمى أيضا: J _فراغ.

1.2_ المؤثر J _غير مقلص:

ليكن Y, X فراغين لكراين و $\mathrm{J}_\mathrm{Y} , \mathrm{J}_\mathrm{X}$ التناظر النموذجي لـ X , Y على التوالي و F مؤثر محدود من J_X_ فراغ في J_Y _ فراغ.

تعريف(10): نقول عن F مؤثر $(\mathrm{J}_\mathrm{Y} , \mathrm{J}_\mathrm{X})$_غير مقلص إذا تحقق:

$$[\mathrm{F}x , \mathrm{F}x]_\mathrm{Y} \geq [x , x]_\mathrm{X} \quad , \ \forall x \in \mathrm{X}$$

-إذا كان $\mathrm{X} \equiv \mathrm{Y}$ و J التناظر النموذج المرفق فإن:

.01 F يسمى J_غير مقلص

.02 إذا كان F _ J _غير مقلص و أيضا F^*_ J _غير مقلص فإن F يسمى " J _ثنائي غير مقلص".

معلوم عندنا إذا كان $\mathcal{H}$ فراغ لهيلبارو T, F مؤثرين من $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ وموجبين و قابلين للقلب الصيغة التالية دوما محققة:

$$F \leq T \rightarrow F^{-1} \geq T^{-1} \quad \ldots\ldots (1)$$

لتعميم هذه النتيجة إلى صنف أوسع من صنف المؤثرات الموجبة و هو صنف المؤثرات القرينة لنفسها و القابلة للقلب فقط.

وضحنا هذا من خلال طريقتين:

الطريقة الأولى هي معيار الإشارة و الطريقة الثانية هي المعيار الطيفي و ذلك باستعمال التحليل النموذجي للفراغ $\mathcal{H}$ الوارد في التعريف**6** كالتالي:

إذا كانF مؤثر من $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ قرين لنفسه و قابل للقلب و E_λ دالته الطيفية.

-نضع:

أي: $\mathcal{H}_+(F) = X_+$, $\mathcal{H}\_(F) = X_-$ حيثX_+ , X_- الواردين في تعريف التحليل النموذجي

عندها يكون التناظر النموذجي المرفق بالمؤثر F هو المؤثر J_F المعرف كالتالي:

نضع:

$$P\_(F) = dim\mathcal{H}\_(F) \quad , \quad P_+(F) = dim\mathcal{H}_+(F)$$

نسمي الزوج المرتب:$(P_+(F), P\_(F))$ "بإشارة "المؤثر F و يرمز له بالرمز$\mathcal{S}(F)$.

02. المعيار حسب الإشارة:

نظرية(1):ليكن F و T مؤثرين قابلين للقلب و قرينان لنفسيهما إذا كان $F \leq T$, فإن$F^{-1} \geq T^{-1}$

$\mathcal{S}(\mathrm{T}) = \mathcal{S}(\mathrm{F})$ و منه ينتج أن المؤثرين J_{T} و J_{F} متكافئان وحدويا.

البرهان:

بفرض: $\mathrm{P}_+(\mathrm{T}) > \mathrm{P}_+(\mathrm{F})$, عندها يوجد $\mathrm{g} \in \mathcal{H}_+(\mathrm{F})$ و $\mathrm{g} \neq 0$ و يحقق: $\mathcal{H}_+(\mathrm{T})$ $\mathrm{g}\perp$ هذا

يعني أن $\mathrm{g} \in \mathcal{H}\_(\mathrm{B})$ و لهذا يكون:

$\langle \mathrm{F\,g\,,g} \rangle > 0 > \langle \mathrm{T\,g\,,g} \rangle$ و هذا يناقض الشرط $\mathrm{F} \leq \mathrm{T}$ و بالتالي يكون عندنا:

$\mathrm{P}_+(\mathrm{T}) \leq \mathrm{P}_+(\mathrm{F})$.

نستعمل نفس البرهان للمؤثرين T^{-1}, F^{-1} نحصل على:

$$\mathrm{P}_+(\mathrm{F}) \geq \mathrm{P}_+(\mathrm{T})$$

وعليه يكون: $\mathrm{P}_+(\mathrm{T}) = \mathrm{P}_+(\mathrm{F})$.

و بنفس الطريقة نجد المساواة $\mathrm{P}\_(\mathrm{T}) = \mathrm{P}\_(\mathrm{F})$.

النظرية (1) تظهر لنا إلزامية الشرط $\mathcal{S}(\mathrm{T}) = \mathcal{S}(\mathrm{F})$ لأجل تحقق الصيغة $\mathrm{F} \leq \mathrm{T} \rightarrow \mathrm{F}^{-1} \geq \mathrm{T}^{-1}$.

مثال يوضح عدم كفاية الشرط :

ليكن $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}\_$

والجملة $\{e_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ $(\{e_n^-\}_{n=1}^{\infty})$ أساس متعامد و متجانس لـ $\mathcal{H}_+$ $(\mathcal{H}\_)$

نعرف المؤثر $\mathrm{B, A}$ كالتالي:

Ae

B

لاحظ $\mathrm{A} < \mathrm{B}$, $\mathcal{S}(\mathrm{A}) = \mathcal{S}(\mathrm{B})$ لأن:

$A^{-1} < B^{-1}$ لكن , $P_{-}(A) = P_{-}(B) = P_{+}(A) = P_{+}(B) = \infty$

نظرية(2):

إذا كان $F \leq T$ و $\mathcal{S}(T) = \mathcal{S}(F)$ و $(P_{+}(F), P_{-}(F)) < \infty$ فإنه $T^{-1} > F^{-1}$.

البرهان:

نضع: $J = J_F$ من الفرض بوجود مؤثر وحدوي U حيث يكون $J_T = U^* J U$.

بوضع: $A = |F|^{1/2}$ و $B = |T|^{1/2}$ نحصل على:

$$T = B J_T B \quad \text{و} \quad F = A J A$$

و منه حتما يكون : $AJA \leq BJ_T B$ و بالتالي ينتج أن :

$J \leq A^{-1} B U^* J U B A^{-1}$ و عليه يكون المؤثر $V = UBA^{-1}$ هو J_غير مقلص و بالتالي

يكون J _ ثنائي غير مقلص أيضا عندها يكون:

أو نكتب:

أي أنه:

$$F^{-1} \geq T^{-1}$$

03.المعيار حسب الطيف:

من خصائص طيف جداء مؤثرين يكون:

إذا كان F و T مؤثرين غير سالبين فإن:

$$\sigma(T\,F) \subset \mathbb{R}_+$$ (حيث الجداء معرف)

نظرية تمهيدية: إذا كان $F \leq T$ كل منهما قرين لنفسه وقابلين للقلب فإن: $\sigma\,(F^{-1}T) \subset \mathbb{R}$.

البرهان: واضح من تعريف طيف الجداء و باعتبار F^{-1} مؤثر قرين لنفسه.

النظرية(3):

إذا كان T , F مؤثرين كل منهما قرين لنفسه وقابلين للقلب حيث $T \leq F$ فإنه لكي يكون $T^{-1} \geq F^{-1}$ يكفي و يلزم أن يكون:

البرهان:

باعتماد نفس الرموز الموجودة في النظرية (2) لإثبات هذه النظرية, من الشرط $T \leq F$ نحصل على أن

$V = UBA^{-1}$ هو مؤثر J_غير مقلص

1 -برهان اللزوم:

ليكن لدينا $T^{-1} \geq F^{-1}$ و منه وحسب النظرية السابقة لد ينا:

$A^{-1}J\,A^{-1} \geq B^{-1}\,J_T B^{-1}$ بتعويض J_T بما لدينا فيما سبق: $J_T = U^*JU$ نتحصل على:

إذن: $B^{-1}\,J_T B^{-1} = B^{-1}\,U^*JUB^{-1}$

$$J \leq UB\,A^{-1}J\,A^{-1}B\,U^* \quad ....(أ)$$

أيضا بتعويض V بما يساويها تكتب العبارة (أ) كالتالي:

هذا معناه أن V يكون J_ثنائي غير مقلص و منه يكون:

بما أن:

$UB(A$

فإن: $\sigma(F^{-1}T) \subset \mathbb{R}_+$

02 .برهان كفاية:

نضع عند: $\sigma(F^{-1}T) \subset \mathbb{R}_+$

بما أن $TF^{-1} = F(F^{-1}T)F^{-1}$ فإنه:

لتكن $\sqrt{F^{-1}T}$ و $\sqrt{TF^{-1}}$ الجذور التربيعية للمؤثرات $F^{-1}T$ و TF^{-1} على التولي

و منه $\sigma\left(\sqrt{F^{-1}T}\right) \subset \mathbb{R}_+,\ \sigma\left(\sqrt{TF^{-1}}\right) \subset \mathbb{R}_+$ (لأن الجذر التربيعي مؤثر غير سالب)

لاحظ أنه:

$$\sqrt{TF^{-1}} = F\left(\sqrt{F^{-1}T}\right)F^{-1} = \left(\sqrt{F^{-1}T}\right)^{*} \qquad (\divideontimes)$$

- نضع $Q = A\left(\sqrt{F^{-1}TA}\right)^{-1}$ و باعتبار $(\divideontimes)$ نتحصل على:

$Q^{*}J$

و منه يكون المؤثر "Q J _ قرين لنفسه " بالإضافة إلى ذلك لدينا:

$$= \; J\,A\,F^{-1}T\,A^{-1} = A^{-1}\,T\,A^{-1} \geq A^{-1}FA^{-1} = J$$

وعليه يكون

$$J \geq (Q^{*})^{-1}$$

أي أن:

$$A^{-1}J\,A^{-1} \geq T^{-1}$$

أو نكتب:

$$F^{-1} \geq T^{-1}$$

الخلاصة

العامة

الخلاصة العامة

لقد قمنا أولا بتقديم عرض موجز حول ما يتعلق بالمتراجحة التي بنينا على أساسها هذا البحث.

لقد حاولنا في هذه المذكرة معالجة المشكل المطروح حيث قدمنا أولا عرض مفصل حول المؤثر القرين لنفسه أو أيضا نسميه المؤثر الهيرميتي من تعريف و خصائص و أيضا أهمية الدراسة الطيفية له.

كما حاولنا استخدام أكثر من مرجع لاستنباط أكبر قدر من المعلومات المختلفة التي تتناول هذا الموضوع و أيضا استعرضنا نظريات بالبراهين المرافقة لها التي تعالج جوهر الموضوع.

و بالتالي نكون قد بدأنا بتعريف حول المؤثرات عامة و المؤثر القرين لنفسه خاصة وصولا إلى مناقشته و مقارنته باستخدام مقاييس معينة.

المراجع

المراجع

[1] إ.بورفسكي و ج.بورفاين, ترجمة علي مصطفى بن الأشهر, **''معجم الرياضيات''**

بيروت_لبنان 1989 .

[2] مصطفى عبد الحفيظ **"دروس في الطبولوجيا"** ديوان المطبوعات الجامعية(1992).

[3] عسيلة مصطفى **"دروس في الطبولوجيا و التحليل الدالي"** ديوان المطبوعات الجامعية(2009).

[4]عسيلة مصطفى**"دروس في المؤثرات ونظرية الأطياف"** د.م.ج.(2011)

[5] إيروين كريزيك ترجمة الدكتور خضر حامد الأحمد,

"المدخل إلى التحليل الدالي و تطبيقاته" سوريا_دمشق(2004-2005م).

[6] أ.كولموغروف.فومين, تعريب أبو بكر خالد سعد الله **"مبادئ في نظرية التوابع و في التحليل التابعي"**

د.م.ج,(1987) .

[7]Yu.L. Shmul'yan. "*Aquestion regarding inequalities between Hermitian operators*".Matimatical notes of the academy of sciences of Meusse April1991.V.49 pp423-425

[8] T.Kato,"*Perturbation theory for linear operators*",Springer, (1980)

[9] Yuli. Edelman, Vitali.Milman and Antonis. Tsolomitis "*Functional Analysis An Introduction*", Congress, (1955)

[10]Yu. P. Ginzburg, "*J_nonexpanding analytic operator_functions* "Candidate's Dissertation, Physics_Math. Sci.Odessa(1958).

[11] V.A.Derkach and M. M. Malamud, "*Generalized resolvents of Hermitian operators with Lacunae,* ''Dep. UkrNITI, No. 2238-Uk88, 07.09.88. Makeevka(1988)

الفهـــرس

ملخص:

دراسة المؤثرات الخطية في الفراغات المجردة و بالأخص في فراغ هيلبار جاءت لتعميم النتائج المحصل عليها في الجبر الخطي إلى الفراغات ذات الأبعاد غير المنتهية .من أهم أصناف المؤثرات الخطية صنف المؤثرات القرينة لنفسها .

من المعلوم أن داخل هذا الصنف إذاكان F, T مؤثرين غير سالبين و قابلين للقلب فإن:

$$F \leq T \;\rightarrow\; F^{-1} \geq T^{-1}$$

في هذا العمل ومن خلال المقال الموجود في قائمة المراجع تحت رقم [7] قمنا بتوضيح كيفية تعميم هذه المتراجحة في غياب الشرط"غير سلبيين " وهذا بطريقتين , الطريقة الأولى عن طريق الإشارة والطريقة الثانية عن طريق طيف المؤثر .

الكلمات الدالة: مؤثر ,قرين لنفسه ,طيف المؤثر , فراغ هيلبار, J _غير مقلص .

Abstruct

:

The study of linear operators in pure spaces and especially in Hilbert space comes to generate the obtained results in linear algebra to spaces which have infinite dimensional. The most important type of linear operators the type of self_adjoint operators.

It is known inside this type if F,T nonnegative invertible operators then:

$$F \leq T \;\rightarrow\; F^{-1} \geq T^{-1}$$

In this work and through the article existing in the reference [7], we are clarifying the way to generate this inequality in the absence of the nonnegative condition and this has two ways:

First the criterion in the term of the Signature and second the criterion in the term of the Spectrum.

Keywords: operator, self-adjoint, the spectrum's operator, Hilbert space. J_noncontractive.