UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des sciences et de la technologie et
des sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ET INFORMATIQUE

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par : Bensalem Billel

Thème

Les inéquations variationnelles et leurs application aux problèmes de Signorini

Soutenu publiquement le : 13/09/2012

Devant le jury composé de :

Mr. Mezabia Mohamed Elhadi	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Merabet Smail	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Ghezal Abderrazek	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Bensayah Abdallah	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédication

Je dédie ce mémoire :

A mes parents, qui sont la graine de mon existence et la source de ma réussite, pour leurs encouragements et leurs sacrifices, à mes frères et mes sœurs. Je vous remercie pour votre confiance, votre soutien. Je ne sais comment vous remercier pour tout ce que je vous dois.

A toi mon épouse pour ton réconfort, ta compréhension, ton soutien moral surtout dans les moments difficiles durant cette thèse, de m'avoir poussé et encouragé à aller au delà de mes capacités et surtout d'avoir été présente à chaque fois que j'ai eu besoin de toi et surtout je te remercie pour tes sacrifices et ta patience.

A toute ma famille.

A mes chers amis.

Remerciement

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à remercier **Mr Abdallah Bensayah**, d'avoir accepté de rapporter mon mémoire, se fut un grand honneur pour moi. Et pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Je remercie aussi messieurs Mezabia Mohamed Elhadi, Merabet Smail et Ghezal Abderrazek d'avoir été membre du jury et d'avoir examiné ce travail.

Je tiens également à remercier Mr. Said, Gherfi, Assila, Chacha, Dadi, et Bahayo.

Je tiens a remercier mon collègue d'étude Henka Ahmed.

Je tiens a remercier tous mes amis en particulier, Fethi, Samir, Nadir, Ilyas, Faycel, Walid, et Maki.

Table des matières

Notations

$u = (u_i)$ vecteur de composantes u_i.

$uv = u_i v_i$ produit scalaire euclidien.

n normale unitaire extérieure.

$u_N = u.n$ la composante normale du déplacement.

$u = (u_N, u_T), u_T$ la composante tangentielle du déplacement.

$\sigma_N = (\sigma(u)\, n)\, n$ la composante de la force de pression appliquée sur une section de normale n.

$\sigma(u)\, n = (\sigma_N, \sigma_T)$, σ_T la composante tangentielle du vecteur $\sigma(u)\, n$

$\partial_i u_j = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$. dérivée de u_j par rapport à x_i.

$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$.

$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl} e_{kl}(u)$.

$div\sigma(u) = \partial_j \sigma_{ij}$ divergence du tenseur $\sigma(u)$

$H^2(\Omega) = (H^2(\Omega))^p$.

$L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^p$.

$\rightarrow$ la convergence forte.

$\rightharpoonup$ la convergence faible.

En garde la même notation de la fonction et ça trace sur le bord si n'y a pas de confusion.

La présence d'une sous le singe d'intégrale est signifier le produit de dualité.

Introduction

Dans les cinquante dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil pertinent dans l'étude des problèmes non linéaires en physique et en mécanique.

La théorie des inéquations variationnelles ont été faites a partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par Signorini [13] et Fichera [14]. la théorie mathématiques obtenus par Stampacchia [15], Lions et Stampacchia [16] et puis développés par : Brézis [17], [18], Stampacchia [19], Lions [20], Mosco [21], Kinderlehrer et Stampacchia [22], et pour l'approximation des inéquations variationnelles on rappelle, les contributions de Mosco [25], Glowinski, Lions et Trémolières [26] ou Glowinski [27].

Le contact unilatéral des corps élastiques, avec ou sans frottement, est une contrainte mécanique souvent rencontrée en modélisation. En 1933, A. Signorini a formulé un problème de contact sans frottement entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide. Ce n'est qu'en 1964, que G. Fichera [3] a pu résoudre ce problème en utilisant quelques propriétés des inéquations variationnelles elliptique. L'étude mathématique des problèmes de contact a commencé en 1972, avec l'ouvrage de Duvaut et Lions, où on trouve des résultats d'existence et d'unicité de plusieurs problèmes de contact, mais dans le cas linéaire.

Les problèmes de contact avec conditions aux limites de Signorini et frottement de Coulomb induisent de nombreuses difficultés mathématiques dans la résolution mathématique. A partir de 1980, Nèčas, Jarušek et Haslinger [4] ont établi, seulement, l'existence des solutions d'un problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb pour un coefficient de frottement assez petit. Des résultats plus généraux sont donnés ensuite par Jarušek [11], Kato [12], Eck et Jarušek [6]. Récement, R. Hassani, P.Hild et I.Ionescu [10]

Ce présent mémoire présente l'étude des inéquation variationnelles et leurs application en mécanique, particulièrement le problème statique de contact unilatéral d'un corps élastique contre un obstacle rigide avec les conditions de complémentarité dites les conditions de Signorini, on fait l'étude du problème sans frottement puis avec frottement de Tresca et Coulomb.

Ce mémoire est divisé en 3 chapitres.

On début notre travail par un chapitre reprend, de façon générale, les définitions, et les résultats fondamentaux qui seront essentiels pour comprendre les chapitres suivantes.

Le deuxième chapitre est consacré a l'étude des inéquations variationnelles (existence et unicité).

La section 2.1 contient les inéquations variationnelles stationnaires (elliptique) de première et deuxième espèce dans le cas des opérateurs linéaires et continus dans des espaces de Hilbert ou des opérateurs monotones et hémicontinus dans des espaces de Banach.

La section 2.2 étudie les inéquations quasi-variationnelles stationnaires, l'existence et l'unicité dans le cas des opérateurs fortement monotones et hemicontinus.

Au dernier chapitre, on passe à l'étude de problèmes statiques avec ou sans frottement dont les formulations faibles s'écrivent en termes des inéquations variationnelles ou quasi-variationnelles. Les résultats présentés s'obtiennent, en appliquant la théorie développée dans le deuxième chapitre.

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

1.1 Rappels

Définition 1 *Une fonction $f : I \to R$ est dite convexe lorsque :*

$$\forall (x, y) \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition 2 *Une fonction $f : I \to R$ est dite strictement convexe si :*

$$\forall (x, y) \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Corollaire 3 *Soit J une fonctionnelle convexe de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i (par exemple continue) pour la topologie forte. Si v_n est une suite de V faiblement convergente vers v alors*

$$j(v) \leq \lim_{n \to +\infty} \inf j(v_n)$$

Définition 4 *un ensemble C est dit convexe si*

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in \left]0, 1\right[, \quad \lambda x + (1 - \lambda) y \in C$$

Définition 5 *Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue supérieurement sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes :*

$$\begin{aligned} &\bullet \forall a \in \mathbb{R}, \quad \{u \in V,\ J(u) \geq a\} \text{ est fermé} \\ &\bullet \forall \bar{u} \in V, \quad \lim_{u \to \bar{u}} \sup j(u) \leq j(\bar{u}) \end{aligned}$$

Définition 6 *Une fonction J de V dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes :*

$$\begin{array}{lll} \bullet\forall a & \in & \mathbb{R}, \qquad \{u\in V,\ J(u)\leq a\} \ \text{est fermé} \\ \bullet\forall \bar{u} & \in & V, \qquad \lim_{u\to\bar{u}}\inf j\left(u\right)\geq j\left(\bar{u}\right) \end{array}$$

Définition 7 *Soit J une fonctionnelle de V dans $\bar{\mathbb{R}}$, convexe et semi-continue inférieurement. Soit K un sous-ensemble convexe, non vide et fermé de V. J est propre c'est-a-dire qu'il existe un élément v_o de K tel que $J(v_o)<+\infty$.*

Définition 8 *V est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans V^{*} (en général non linéaire).*

$i)A$est monotone si

$$\forall u,v\in V,\quad \left\langle A\left(u\right)-A\left(v\right),u-v\right\rangle \geq 0$$

$ii)A$ est strictement monotone si de plus $\left\langle A\left(u\right)-A\left(v\right),u-v\right\rangle = 0$ implique $u=v$.

$iii)A$ est hémicontinue si pour tous $u,v\in V$, l'application t$\mapsto$ $\left\langle A\left(u+tv\right),v\right\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 9 *Soient $(V,\|.\|)$ est un espace Banach réel réflexif avec son dual $(V^{*},\|.\|_{*})$ un opérateur $A:V\to V$ est hémicontinu, c'est-à-dire*

$$\forall u,v\in V,\ \text{l'application } t\in[0,1]\to\left\langle A\left(\left(1-t\right)u+tv\right),u-v\right\rangle \ \text{est continue}$$

où $\langle .,.\rangle$ désigne le produit de dualité entre V et V^{*}.

Définition 10 *Soit K un convexe non borné. On dit que A est coercive s'il existe $v_0\in K(v_0=0$ si $K=V)$ tel que*

$$\lim_{\|v\|_V\to+\infty}\frac{\left\langle A\left(v\right),v-v_0\right\rangle}{\|v\|_V}=+\infty$$

1.2 Les Espaces $\mathbf{L}^p$

Soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour p donné avec $1<p<+\infty$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions v mesurables sur Ω et telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_{\Omega}\left|v\left(x\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty \tag{1.1}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme (1.1) est un espace de Banach (évidemment, (1.1) n'est pas une norme si $0 < p < 1$). De plus, il est séparable et, pour $1 < p < \infty$, réflexif.

Les éléments de $L^p(\Omega)$, comme classes d'équivalence de fonctions mesurables, seront identifier si elles sont égales presque partout dans Ω. Mais, pour simplifier l'écriture, on note $v \in L^p(\Omega)$ pour tout v satisfaisant (1.1) et on fait la convention $v = 0$ dans $L^p(\Omega)$ si $v(x) = 0$ p.p. dans Ω.

Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondante a la norme (1.1) étant donné par

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$$

On va identifier l'espace $L^2(\Omega)$ a son dual (ce qui n'est pas vrais dans d'autres cas, pour $p \neq 2$).

Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions v mesurables et essentiellement bornées sur Ω i.e. il existe une constant C telle que $|v(x)| \leq C$ p.p. sur Ω. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess\, |v(x)| = \inf\{C;\ \ |v(x)| \leq C\ p.p\ x \in \Omega\}$$

voir ([7], page 15)

1.3 Espaces de Sobolev $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, C'est la définition de l'espace de Sobolev$W^{m,p}(\Omega)$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v,\ D^\alpha v \in L^p(\Omega), \quad \text{pour } |\alpha| \leq m\}$$

où $D^\alpha v$ est la dérivée au sens des distributions pour tout $v \in L^p(\Omega)$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$\begin{aligned}
\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p \in [1,\infty) \\
\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}
\end{aligned}$$

De façon évidente, on a $W^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. La semi-norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par

$$\begin{aligned} |v|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p \in [1, \infty) \\ |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

Dans le cas $p = 2$, on utilise la notation

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

voir [7]

1.4 Théorèmes de traces dans $H^1(\Omega)$

Théorème 11 *Supposons que Ω est un ouvert de classe C^1 de frontière Γ. Alors on peut définir de façon unique la trace*

$\gamma_0 v$ de $v \in H^1(\Omega)$ sur Γ de façon que $\gamma_0 v$ coïncide avec la définition usuelle

$$\gamma_0 v(x) = v(x) \quad x \in \Gamma \tag{1.2}$$

Si $v \in C^1(\Omega)$. De plus, l'application

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$$

est linéaire, continue mais elle n'est pas surjective et l'application.

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est linéaire, continue et surjective.[7]

Corollaire 12 *L'application γ_0 définie par (1.2)s'étend en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, telle que*

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0 v\|_{L^2(\Gamma)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

voir [7]

1.5 Théorème de Schauder

Théorème 13 *Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.*

Preuve. voir ([9], page 13) ■

1.6 Théorème de représentation de Riez

Théorème 14 *Soit H un espace de Hilbert, pour tout $F \in H^*$ (dual de H), il existe un unique $v \in H$ telle que :*

$$F(u) = (u, v), \quad \forall u \in H$$

et en plus :

$$\|F\|_{H^*} = \|v\|_H$$

1.7 Théorème de Stampacchia

Théorème 15 *Soit H un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$. Soit K une partie convexe fermée non vide de H.*

Si $a(u, v)$ une forme bilinéaire qui soit

•Continue sur $H \times H$: $\exists c > 0 \;\; \forall u, v \in H, \quad \|a(u, v)\| \leq c\|u\|\|v\|$

•Coercive sur H : $\exists \alpha > 0 \quad \forall u \in H \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$

Si $L(.)$ une forme linéaire continue sur H

Sous ces conditions, il existe un unique u de K tel que

$$\forall v \in K \quad a(u, v - u) \geq L(v - u)$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de K qui minimise la fonctionnelle $J : H \to \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ pour tout v de K, en particulier :

$$\exists! u \in K \quad J(v) = \min_{v \in K} J(u)$$

Preuve. voir ([23]) ■

1.8 Inégalité de Korn

Théorème 16 *Si Ω est borné de frontière régulière alors, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :*

$$\forall u \in H^1(\Omega), \int_\Omega \epsilon_{ij}(u)\,\epsilon_{ij}(u)\,dx + \int_\Omega u_i u_i dx \geq \gamma \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

(démonstration dans [8]).

1.9 La formule de Green généralisée

Soit γ opérateur linéaire continu, appelé opérateur de trace, de $H^1(\Omega)$ en $H^{1/2}(\Gamma)$ tel que :

$$\gamma(v) = v|_\Gamma, \text{ si } v \in \left[C^\infty\left(\bar{\Omega}\right)\right]^n.$$

Il est bien connu que si le domaine $\Omega \in C^{1,1}$, ils existent des applications linéaires sont uniquement déterminés γ_n de $H^1(\Omega)$ en $H^{1/2}(\Gamma)$ et γ_T de $H^1(\Omega)$ en $H_T^{1/2}(\Gamma)$ tel que :

$$\gamma(v) = \gamma_n(v)\,n + \gamma_T(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

où $H_T^{1/2}(\Gamma) = \{\phi \in H^{1/2}(\Gamma); \gamma_n(\phi) = 0\}$. Aussi si $v \in \left[C^\infty\left(\bar{\Omega}\right)\right]^n, \gamma_n(v) = v|_\Gamma.n$ et $\gamma_T(v) = v|_\Gamma - \gamma_n(v)\,n$. Les applications $\gamma_n(v)$ et $\gamma_T(v)$ sont surjective. Ci-après, pour simplifier l'écriture,v_n et v_T désigner traces normales de $v, \gamma_n(v)$ et $\gamma_T(v)$, respectivement.

Soit V l'espace définie par

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma(v) = 0 \text{ sur } \Gamma_2\},$$

et

$$V_{ad} = \{v \in V; v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

le sous-ensemble convexe fermé des déplacements admissibles.

On note par $\gamma^0_{\sum} : V \to H^{1/2}(\sum)$ l'opérateur de tracer que relative $v \in V$ avec la restriction de $\gamma(v)$ sur $\sum$. Cet opérateur, ce qui conduit V en $H_{00}^{1/2}(\sum)$

est linéaire, continue et surjective pour les frontières $\partial \sum$ que sont C^∞.

Lemme 1 *Si le domaine Ω est $C^{1,1}$ ils existent applications linéaires, continues et surjectives*

$$\gamma^0_{\sum_n} : V \to H^{1/2}_{00}\left(\sum\right) \quad , \quad \gamma^0_{\sum_T} : V \to H^{1/2}_{T00}\left(\sum\right)$$

avec $H^{1/2}_{T00}(\sum) = \{\phi \in H^{1/2}_{00}(\sum)\,;\, \phi_n = 0\}$ *et tel que :*

$$\gamma^0_{\sum}(v) = \gamma^0_{\sum_n} \ ; \qquad (v)\, n + \gamma^0_{\sum_T}(v) \qquad v \in V.$$

Considérons le champs des espace des contraintes :

$$X = \{\tau = (\tau_{\alpha\beta}) \in \left[L^2(\Omega)\right]^{n^2} ; \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}\}, \tag{1.3}$$

à condition que la norme

$$\|\tau\|_X = \left(\int_\Omega \tau : \tau dx\right)^{1/2}, \tag{1.4}$$

est un espace de Hilbert.

Soit E le sous-espace de X définie par :

$$E = \{\tau \in X ; div(\tau) \in L^2(\Omega)\} \tag{1.5}$$

qui aussi est un espace de Hilbert avec la norme :

$$\|\tau\|_E = \|\tau\|_X + \|div(\tau)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Lemme 2 *Soit $\Omega \in C^{0,1}$. Alors il existe une unique application, π linéaire et continue de E en $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ tel que :*

$$\pi(\tau) = \tau\mid_\Gamma n, \ \ si\ \tau \in \left[C^1\left(\bar{\Omega}\right)\right]^{n^2}. \tag{1.7}$$

En outre, la formule de Green généralisée suivante vérifiée pour chaque $\tau \in E$ et pour $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \tau : \varepsilon(v)\, dx + \int_\Omega div(\tau).v dx = \langle \pi(\tau), \gamma(v)\rangle_\Gamma, \tag{1.8}$$

où $\langle .,. \rangle_\Gamma$ désigne le produit de dualité en $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$.

Lemme 3 *Si $\Omega \in C^{1,1}$ Alors il existe des applications uniquement déterminé π_n de E en $\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma)$ tel que*

$$\langle \pi(\tau), \gamma(v)\rangle_\Gamma = \langle \pi_n(\tau), v_n\rangle_{n,\Gamma} + \langle \pi_T(\tau), v_T\rangle_{T,\Gamma},$$

Pour tout $\tau \in E$ et $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, et

$$\pi_n(\tau) = \tau n.n \quad et \quad \pi_T(\tau) = \tau n - \tau_n n,$$

pour tout $\tau \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ où $\tau_n \equiv \pi_n(\tau)$ Ci-après désigner simplement $\tau_T \equiv \pi_T(\tau)$ s'il n'y a pas de confusion.

Ces résultats peuvent être étendus à l'espace V en utilisant l'application de trace $\pi^0_{\sum}$ au lieu de π, suit :

Théorème 17 *Soit*$\Omega \in C^{0,1}$. *Alors il existe une application linéaire uniquement déterminée* $\pi^0_{\sum}$ *de* E *en* $\left(\mathbf{H}^{1/2}_{00}\left(\sum\right)\right)'$ *tel que :*

$$\pi^0_{\sum}\left(\tau\right) = \tau \mid_{\sum} n \ si \ \tau \in C^1\left(\bar{\Omega}\right),$$

et la formule de Green générale est valable pour chaque $\tau \in E$ *et pour tout* $v \in V$

$$\int_{\Omega} \tau : \varepsilon\left(v\right) dV'_X + \int_{\Omega} div\tau . v dV_X =_{00} \langle \pi^0_{\sum}\left(\tau\right), \gamma^0_{\sum}\left(v\right)\rangle_{\sum}, \tag{1.9}$$

où ${}_{00}\langle .,. \rangle_{\sum}$ *désigne le produit de dualité* $\left(\mathbf{H}^{1/2}_{00}\left(\sum\right)\right)' \times \mathbf{H}^{1/2}_{00}\left(\sum\right)$. *Aussi, si* $\Omega \in C^{1,1}$,$\pi^0_{\sum}$ *les opérateurs peuvent être décomposés en* $\pi^0_{\sum n}$,$\pi^0_{\sum T}$ *tel que :*

$${}_{00}\langle \pi^0_{\sum}\left(\tau\right), \gamma^0_{\sum}\left(v\right)\rangle_{\sum} =_{00} \langle \pi^0_{\sum n}\left(\tau\right), \gamma^0_{\sum n}\left(v\right)\rangle_{n;\sum} + {}_{00}\langle \pi^0_{\sum T}\left(\tau\right), \gamma^0_{\sum T}\left(v\right)\rangle_{T,\sum},$$

Pour tout $\tau \in E$ et $v \in V$, et

$$\pi^0_{\sum n}\left(\tau\right) = \tau_{\mid \sum} n.n \quad \text{et} \quad \pi^0_{\sum T}\left(\tau\right) = \tau_{\mid \sum} n - \tau_{n,\sum} n,$$

pour $\tau \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$, où $\tau_{n,\sum} \equiv \pi^0_{\sum n}\left(\tau\right)$.

voir [24]

Chapitre 2

Inéquations variationnelles

Ce chapitre présente l'existence et l'unicité pour la solution des inéquations variationnelles de première et deuxième espèce.

2.1 Inéquations variationnelles stationnaires

Dans cette section on établit quelques résultats de base d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de première et deuxième espèce. Dans le cas des opérateurs linéaires et non linéaires définies sur des ensembles convexes dans des espaces de Hilbert et de Banach réflexif respectivement.

2.1.1 Inéquations variationnelles linéaires

Soit V un espace de Hilbert (sur le corps $\mathbb{R}$ des réels) avec V^*son dual. Le produit scalaire dans V est noté $(.,.)$ et la norme associée $\| \ . \ \|$. Soit K un ensemble non vide, convexe et fermé de V .

Nous considérons la forme bilinéaire continue a : $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, donc vérifiant

$$a\,(u,v) \leq M\|u\|\|v\| \quad \forall u,v \in V \tag{2.1}$$

ou M est une constante positive.

On donne une fonctionnelle $j : K \to \bar{\mathbb{R}}$ convexe sémicontinue inférieurement et propre (i.e. j non identiquement égale à $+\infty$ et $j(v) > -\ \infty \ \ \forall v \in V$).

Soit $f \in V^*$ donné. Grâce au théorème de Riesz , on peut identifier l'espace de Hilbert V avec son dual V^* et alors on désigne encore par f l'élément de V qui représente uniquement la forme linéaire et continue f.

Inéquations variationnelles de première espèce

Définition 18 *Le problème considéré est*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.2}$$

appelé inéquation variationnelle de première espèce.

Théorème 19 *D'après le théorème de Stampacchia* (*voir chapitre 1*) *il existe un unique u de K tel que*

$$\forall v \in K \quad a(u, v-u) \geq (f, v-u)$$

Inéquations variationnelles de deuxième espèce

Définition 20 *Le problème considéré est*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u \in K \textit{ tel que} \\ a(u, v-u) + j(v) - j(v) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.3}$$

appelé inéquation variationnelle de deuxième espèce.

D'abord, nous prouvons le lemme suivant :

Lemme 4 *On suppose que la forme bilinéaire continue a est positive (c'est- à-dire $a(v; v) \geq 0$, $\forall v \in V$). Alors l'inéquation variationnelle* (2.3) *et l'inéquation*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(v, v-u) + j(v) - j(v) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.4}$$

sont équivalentes.

De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (2.3) est fermé convexe (il peut être vide).

Preuve. Si u est une solution de (2.3) alors, de la positivité de a, On a :

$$\begin{aligned} a(v-u,v-u) &\geq 0 \\ a(v,v-u)-a(u,v-u) &\geq 0 \\ a(v,v-u) &\geq a(u,v-u) \\ a(v,v-u)+j(v)-j(u) &\geq a(u,v-u)+j(v)-j(u) \geq (f,v-u) \end{aligned}$$

Si u est solution de (2.4),Inversement, en utilisant la convexité de$K$ et prenant $v = (1-\lambda)u+\lambda w \in K$ dans (2.4) avec $w \in K$ quelconque et $\lambda \in (0;1)$

$$\begin{aligned} a((1-\lambda)u+\lambda w,(1-\lambda)u+\lambda w-u) \ +j((1-\lambda)u+\lambda w)-j(u) &\geq (f,(1-\lambda)u+\lambda w-u) \\ a((1-\lambda)u+\lambda w,\lambda(w-u))+j((1-\lambda)u+\lambda w)-j(u) &\geq (f,\lambda(w-u)) \end{aligned}$$

De la convexité de j on obtient

$$\begin{aligned} a((1-\lambda)u+\lambda w,\lambda(w-u))+(1-\lambda)j(u)+\lambda j(w)-j(u) &\geq (f,\lambda(w-u)) \\ a((1-\lambda)u+\lambda w,\lambda(w-u))+\lambda j(w)-\lambda j(u) &\geq (f,\lambda(w-u)) \\ \lambda a((1-\lambda)u+\lambda w,w-u)+\lambda j(w)-\lambda j(u) &\geq \lambda(f,w-u) \\ a((1-\lambda)u+\lambda w,w-u)+j(w)-j(u) &\geq (f,w-u) \end{aligned}$$

d'où, en passant a la limite avec $\lambda \longrightarrow 0$ on obtient (2.3).

De cette équivalence il en résulte que l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (2.3) s' écrit

$$X = \{u \in K \ ; a(v,v-u)+j(v)-j(u) \geq (f;v-u) \quad \forall v \ \in K\}$$

Pour montrer que l´ensemble X est convexe

soit $u_1, u_2 \ \in X$ on a

$a(v,v-u_1)+j(v)-j(u_1) \geq (f,v-u_1)$

$a(v, v-u_2) + j(v) - j(u_2) \geq (f, v-u_2)$on montre que : $(1-\lambda)u_1 + \lambda u_2 \in K$

$$
\begin{aligned}
& a(v, v-(1-\lambda)u_1 - \lambda u_2) + j(v) - j((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) \\
\geq\ & a(v, v-(1-\lambda)u_1 - \lambda u_2) + j(v) - (1-\lambda)j(u_1) - \lambda j(u_2) \\
\geq\ & a(v, (1-\lambda)v + \lambda v - (1-\lambda)u_1 - \lambda u_2) + (1-\lambda)j(v) + \lambda j(v) - (1-\lambda)j(u_1) - \lambda j(u_2) \\
\geq\ & a(v, (1-\lambda)(v-u_1)) + a(v, \lambda(v-u_2)) + (1-\lambda)j(v) + \lambda j(v) - (1-\lambda)j(u_1) - \lambda j(u_2) \\
\geq\ & (1-\lambda)[a(v, v-u_1) + j(v) - (1-\lambda)(u_1)] + \lambda[a(v, v-u_2) + j(v) - j(u_2)] \\
\geq\ & (1-\lambda)(f, v-u_1) + \lambda(f, v-u_2) \\
\geq\ & (f, (1-\lambda)(v-u_1) + \lambda(v-u_2)) \\
\geq\ & (f, v-(1-\lambda)u_1 - \lambda u_2)
\end{aligned}
$$

donc X est convexe.

Pour montrer qu'il est fermé, soit $\{u_n\}_n \subset X$ telle que $u_n \longrightarrow u$. évidemment $u \in K$ et on a

$$
\begin{aligned}
a(v, v-u) + j(v) - j(u) &\geq \lim_{n\to\infty} a(v, v-u_n) + j(v) - \lim_{n\to\infty} \inf j(u_n) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \sup [a(v, v-u_n) + j(v) - j(u_n)] \\
&\geq \lim_{n\to\infty} (f, v-u_n) = (f, v-u)
\end{aligned}
$$

Donc X est fermé ■

$$
(Au, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \qquad \forall v \in K \tag{2.5}
$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire dans V.

Preuve. voir ([7], page 35) ■

Théorème 21 *On suppose que la forme bilinéaire continue a est V -elliptique et que l'ensemble K est non vide convexe et fermé et $j : K \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ une fonction convexe semi-continue inférieurement et propre. Alors il existe et est unique un élément $u \in K$ solution de l'inéquation variationnelle* (2.3).

Preuve. Dans le cas général, pour tout $p > 0$, l'inéquation (2.3) peut s' écrire sous la forme

$$(u - (u - p(Au - f)), v - u) \geq p\varphi(v) - p\varphi(u) \quad \forall v \in V$$

ou encore $u = Prox_{p\varphi}(u - p(Au - f))$ (respectivement, $u = P_K(u - p(Au - f))$ dans le cas ((2.2)) où $j \equiv 0$). L'existence et l'unicité de u découle du théoreme de point fixe de Banach (voir, par exemple [113] page 16), en montrant que pour certains valeurs de p, l'opérateur T_p : K →K défini par

$$T_p(v) = Prox_{p\varphi}(v - p(Av - f)) \quad (\text{respectivement,} T_p(v) = P_K(v - p(Av - f))) \qquad (2.6)$$

est contractante (application k-lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$) sur l'ensemble fermé K d'un espace de Banach. En effet, utilisant la propriété de non-expansivité de l'opérateur de proximité ou de l'opérateur de projection, V ellipticité de a et le relation (2.1) on a

$$\|T_p(v_1) - Tp(v_2)\| \leq \sqrt{1 + p^2M^2 - 2\alpha p}\|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in K$$

d'où, en choisissant $p \in \left(0, \frac{2\alpha}{M^2}\right)$, on obtient $1 + p^2M^2 - 2\alpha p \in (0, 1)$ soit T_p est contractante. ■

2.1.2 Inéquations variationnelles non linéaire

"Cette section est consacrée à l'étude d'existence et d'unicité des solutions des inéquations variationnelles d'opérateurs non linéaires nommément les opérateurs monotones et hémicontinus."

Soient $(V, \|.\|)$ est un espace de Banach réel réflexif avec son dual $(V^*, \|.\|_*)$ et $K \subset V$ un ensemble non vide convexe et fermé. On considère $j : K \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe sémicontinue inférieurement propre et un opérateur $A : V \to V^*$monotone et hémicontinu, c'est- a-dire

$$\begin{cases} \langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \\ \forall u, v \in V, \text{ l'application } t \in [0, 1] \to \langle A((1 - t)u + tv), u - v \rangle \text{ est continue} \end{cases} \qquad (2.7)$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit de dualité entre V^* et V .

Inéquations variationnelles de première espèce

Théorème 22

$$\begin{cases} \text{\textit{Trouver} } u \in K \text{ \textit{tel que}} \\ \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.8}$$

Si A est strictement monotone alors la solution de l'inéquation variationnelle (2.8) est unique.

Preuve. Soient $u_1, u_2 \in K$ deux solutions. Pour tous $v_1, v_2 \in K$,

$$\begin{aligned} \langle Au_1, v_1 - u_1\rangle &\geq \langle f, v_1 - u_1\rangle \\ \langle Au_2, v_2 - u_2\rangle &\geq \langle f, v_2 - u_2\rangle \end{aligned}$$

On prend $\mathrm{v}_1 = \mathrm{u}_2$ et $\mathrm{v}_2 = \mathrm{u}_1$, d'où

$$\begin{aligned} \langle Au_1, u_2 - u_1\rangle &\geq \langle f, u_2 - u_1\rangle \\ \langle Au_2, u_1 - u_2\rangle &\geq \langle f, u_1 - u_2\rangle \end{aligned}$$

par addition on obtient

$$\begin{aligned} \langle Au_1, u_2 - u_1\rangle + \langle Au_2, u_1 - u_2\rangle &\geq \langle f, u_2 - u_1\rangle + \langle f, u_1 - u_2\rangle \\ \langle Au_1, u_2 - u_1\rangle - \langle Au_2, u_2 - u_1\rangle &\geq 0 \\ \langle Au_1 - Au_2, u_2 - u_1\rangle &\geq 0 \\ -\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle &\geq 0 \\ \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle &\leq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, comme A est monotone,

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle = 0$$

d'où $u_1 = u_2$ par stricte monotonie. ■

Théorème 23 *Soit $A : V \to V^*$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercive et soit K un convexe fermé non vide de V . Alors, pour tout $f \in V^*$, l'inéquation variationnelle* (2.8) *admet au moins une solution.[1]*

Preuve. Pour $R > 0$, on pose $K_R = \{v \in K; \|v\|_V \leq R\}$. C'est un convexe fermé borné de V non vide, si R est assez grand, il existe au moins une solution u_R de l'inéquation sur K_R . En particulier, on peut prendre R assez grand pour que $v_0 \in K_R$ et donc

$$\langle Au_R, v_0 - u_R \rangle \geq \langle f, v_0 - u_R \rangle$$

soit

$$\langle Au_R, u_R - v_0 \rangle \leq \langle f, u_R - v_0 \rangle \leq \|f\|_{v^*} (\|u_R\|_V + \|v_0\|_V)$$

Montrons que u_R reste bornée dans V indépendamment de R . Divisant la dernière inégalité par $\|u_R\|_V$ (que l'on suppose non nul, sinon il n'y a rien à montrer), il vient

$$\frac{\langle Au_R, u_R - v_0 \rangle}{\|u_R\|_V} \leq \|f\|_{v^*} \left(1 + \frac{\|v_0\|_V}{\|u_R\|_V}\right)$$

Supposons qu'il existe une suite $R_n \to +\infty$ telle que $\|u_R\|_V \to +\infty$. Alors on a $\frac{\|v_0\|_V}{\|u_R\|_V} \to 0$ et l'inégalité ci-dessus contredit la coercivité. Il existe donc une constante C telle que $\|u_R\|_V \leq C$ pour tout R.

On prend maintenant $R = C + 1$. Montrons que u_R est alors solution de l'inéquation variationnelle (2.8). Pour tout $v \in K$ et tout $\lambda \in [0, 1], \lambda v + (1 - \lambda)u_R$ appartient à K. De plus,

$$\|\lambda v + (1 - \lambda)u_R\|_V \leq \lambda\|v\|_V + (1 - \lambda)\|u_R\|_V \leq \lambda\|v\|_V + C.$$

En particulier, si l'on prend $0 < \lambda \leq \frac{1}{\|v\|_V}$, on voit que $\lambda v + (1 - \lambda)u_R$ appartient à K_R . Donc, par l'inéquation variationnelle sur K_R ,

$$\begin{aligned}
\langle Au_R, \lambda v + (1 - \lambda)u_R - u_R \rangle &\geq \langle f, \lambda v + (1 - \lambda)u_R - u_R \rangle \\
\langle Au_R - f, \lambda v + (1 - \lambda)u_R - u_R \rangle &\geq 0 \\
\langle Au_R, \lambda v + u_R - \lambda u_R - u_R \rangle &\geq 0 \\
\langle Au_R, \lambda (v - u_R) \rangle &\geq 0 \\
\lambda \langle Au_R, v - u_R \rangle &\geq 0
\end{aligned}$$

d'où le résultat en divisant par λ . ■

Inéquations variationnelles de deuxième espèce

On va établir les conditions qui assuré l'existence des solutions de l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \langle Au, v-u \rangle + j(v) - j(u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.9}$$

pour $f \in V^*$ donné.

D'abord, procédant de la même façon comme dans la démonstration du lemme 3, on obtient :

Lemme 5 *Sous les hypothèses ci-dessus, un élément $u \in K$ satisfait l'inéquation* (2.9) *si et seulement si il satisfait l'inéquation*

$$\langle Av, v-u \rangle + j(v) - j(u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K \tag{2.10}$$

De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation (2.9) est un convexe fermé de$V$. Le résultat essentiel de cette section est le suivant théorème d'existence et d'unicité.

Théorème 24 *Dans les hypothèses ci-dessus, si une des trois conditions est satisfaite*

$$i)\ K \text{ est borne.} \tag{2.11}$$

$$ii)\ 0 \in K, j(0) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{\|v\| \to +\infty \\ v \in k}} \frac{\langle Av, v \rangle + j(v)}{\|v\|} = +\infty \tag{2.12}$$

$$iii)\ \exists v_0 \in K \text{ tel que } \lim_{\substack{\|v\| \to +\infty \\ v \in k}} \frac{\langle Av, v - v_0 \rangle + j(v) - j(v_0)}{\|v\|} = +\infty \tag{2.13}$$

alors, pour tout $f \in V$, il existe $u \in K$ solution de (2.9). De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (2.9) est un convexe fermé et borné de V (donc faiblement compact).

Si, de plus, j est strictement convexe ou A est strictement monotone, soit

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \quad \forall u, v \in V, u \neq v$$

alors la solution de l'inéquation variationnelle (2.9) est unique.

Preuve. Dans l'hypothèse (i), de lemme 5, l'ensemble des solutions de (2.9) s'écrit

$$X = \bigcap_{v \in k} S(v) \quad \text{où} \quad S(v) = \{u \in k \; ; \langle Av, v - u \rangle + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u \rangle\}.$$

Évidement X est borné ayant $X \subset K$.Supposons l'hypothèse (ii) ou (iii) satisfaite. Considérons l'ensemble convexe fermé borné

$$K_R = K \cap T_R$$

où $T_R = \{v \in V; \; \|v\| \leq R\}$. Si R est assez grand alors l'ensemble T_R est non vide. Alors, de la première partie de la démonstration, il existe $u_R \in K_R$ tel que

$$\langle Au_R, v - u_R \rangle + j(v) - j(u_R) \geq \langle f, v - u_R \rangle \quad \forall v \in K_R \tag{2.14}$$

Nous allons montrer que les hypothèses de coercivité (ii) ou (iii) implique $\|u_R\| < R$. Supposons $\|u_R\| = R$.

Si la condition (2.12) est satisfaite, alors

$$\langle Au_R, u_R \rangle + j(u_R) > \langle f, u_R \rangle$$

ce qui est contraire à

$$\langle Au_R, u_R \rangle + j(u_R) \leq \langle f, u_R \rangle$$

obtenu de(2.14) pour$v = 0 \in K_R$.Si (2.13) a lieu, alors on a

$$\langle Au_R, u_R - v_0 \rangle + j(u_R) - j(v_0) > \langle f, u_R - v_0 \rangle$$

Mais, en supposant $R \geq \|v_0\|$ (on peut toujours trouver R assez grand), de (2.14) pour $v = v_0 \in K_R$ on obtient la contradiction

$$\langle Au_R, v_0 - u_R \rangle + j(v_0) - j(u_R) > \langle f, v_0 - u_R \rangle$$

En conséquence, $\|u_R\| < R$.

Pour tout $w \in K$ il existe $\epsilon = \epsilon(w) \in (0,1]$ tel que $v = u + \epsilon(w-u) \in K_R$. En effet, si $w \in K_R$ on prend $\epsilon = 1$ et si $w \notin K_R$ alors prenant $0 < \epsilon \leq \frac{R-\|u_R\|}{\|w\|-\|u_R\|} \in (0,1)$ on obtient $v \in K_R$. Alors de (2.14) et la convexité de j, il vient

$$\begin{aligned}
\langle Au_R, u_R + \epsilon (w-u_R) - u_R\rangle + j(u_R + \epsilon(w-u_R)) - j(u_R) &\geq \langle f, u_R + \epsilon(w-u_R) - u_R\rangle \\
\langle Au_R, \epsilon(w-u_R)\rangle + j(\epsilon w + (1-\epsilon) u_R) - j(u_R) &\geq \langle f, \epsilon(w-u_R)\rangle \quad \forall w \in K_R \\
\langle Au_R, \epsilon(w-u_R)\rangle + \epsilon j(w) + (1-\epsilon) j(u_R) - j(u_R) &\geq \langle f, \epsilon(w-u_R)\rangle \quad \forall w \in K_R \\
\epsilon \langle Au_R, w-u_R\rangle + \epsilon j(w) - \epsilon j(u_R) &\geq \epsilon \langle f, w-u_R\rangle \quad \forall w \in K_R \\
\langle Au_R, w-u_R\rangle + j(w) - j(u_R) &\geq \langle f, w-u_R\rangle \quad \forall w \in K
\end{aligned}$$

soit u_R est solution de (2.9).L'ensemble des solutions X est convexe et fermé. Montrons qu'il est borné. Sinon, pour tout $R > 0$, il existe $u_R \in X$ tel que $\|u_R\| > R$. Mais alors, pour R assez grand, les relations de coercivité (2.12), (2.13) et l'inéquation (2.9) donnent, comme ci-dessus, une contradiction. La première partie de la démonstration est achevée.

Enfin, pour montrer l'unicité de la solution dans des cas particuliers, supposons que l'inéquation (2.9) a deux solutions $u_1, u_2 \in K$

$$\begin{aligned}
\langle Au_1, v-u_1\rangle + j(v) - j(u_1) &\geq \langle f, v-u_1\rangle \\
\langle Au_2, v-u_2\rangle + j(v) - j(u_2) &\geq \langle f, v-u_2\rangle
\end{aligned}$$

Prenant $v = \frac{u_1+u_2}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle Au_1, u_2-u_1\rangle + j\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) - j(u_1) &\geq \langle f, v-u_1\rangle \\
\frac{1}{2}\langle Au_2, u_1-u_2\rangle + j\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) - j(u_2) &\geq \langle f, v-u_2\rangle
\end{aligned}$$

par addition

$$\frac{1}{2}\langle Au_1 - Au_2, u_2-u_1\rangle + 2j\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) - j(u_1) - j(u_2) \geq 0$$

en utilisant la monotonie de A

$$2j\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) - j(u_1) - j(u_2) \geq \frac{1}{2}\langle Au_1 - Au_2, u_{1-}u_2\rangle \geq 0$$

donc

$$0 \leq \frac{1}{2}\langle Au_1 - Au_2, u_1-u_2\rangle + j(u_1) + j(u_2) - 2j\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \leq 0$$

Il en résulte que $u_1 = u_2$ si A est strictement monotone ou j est strictement convexe. ∎

2.2 Inéquations quasi-variationnelles stationnaires

Nous considérons une classe plus large d'inéquations variationnelles, nommément inéquations quasi-variationnelles.

2.2.1 Inéquations quasi-variationnelles pour opérateurs hémicontinus

Soient $(V, \|\|)$ un espace de Banach réflexif, $(V^*, \|\|^*)$ son dual et K un sous-ensemble non vide convexe fermé de V .

On considéré un opérateur $A : V \to V$ et une fonctionnelle $j : V \times V \to (-\infty, +\infty]$.

Pour $f \in V^*$ donné nous considérons l'inéquation quasi-variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \langle Au, v-u \rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K \end{array} \right. \tag{2.15}$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit de dualité entre V et V^*.

Remarque 25 *L'inéquation* (2.15) *est nommé l'inéquation quasi-variationnelle de deuxième espèce.*

Remarque 26 *Dans le cas particulier $K = V$ (ou, suffisamment, $domj = K \times K$ où $domj = \{(u,v) \in V \times V; j(u,v) < +\infty\}$) et $j(u,v) = \delta(Q(u),v) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si\ v \in Q(u) \\ +\infty & si\ v \notin Q(u) \end{array} \right.$* où $Q : V \to 2^V$est une application plurivalente telle que pour tout $u \in V$, $Q(u)$ est un ensemble non vide convexe fermé de V, alors l'inéquation (2.15) devient

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in Q(u) \\ \langle Au, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in Q(u) \end{array} \right.$$

Cette inéquation est appelée inéquation quasi-variationnelle de première espèce.

Théorème 27 *Soit $A : V \to V^*$ un opérateur hémicontinu et fortement monotone, c'est-a-dire*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \langle Au - Av, u-v \rangle \geq \alpha \|u-v\|^2 \quad \forall u, v \in V \tag{2.16}$$

On considère une fonction $j : V \times V \to (-\infty, +\infty]$ satisfaisant les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in V, j(u,.) : V \to (-\infty, +\infty]\text{est une fonction} \\ \text{convexe, propre et semi-continue inférieurement} \end{array} \right. \tag{2.17}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} k < \alpha \text{ tel que } |j(u_1, v_1) + j(u_2, v_2) - j(u_1, v_2) - j(u_2, v_1)| \\ \leq k \|u_1 - u_2\| \|v_1 - v_2\| \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in K \end{array} \right. \tag{2.18}$$

Alors, pour tout $f \in V$, l'inéquation quasi-variationnelle (2.15) a une solution et est seule.

Preuve. L'opérateur A étant fortement monotone, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\langle Aw - Av_0, w - v_0 \rangle}{\|w\|} &\geq \frac{\alpha \|w - v_0\|^2}{\|w\|} \\
\frac{\langle Aw, w - v_0 \rangle - \langle Av_0, w - v_0 \rangle}{\|w\|} &\geq \frac{\alpha \|w - v_0\|^2}{\|w\|} \\
\frac{\langle Aw, w - v_0 \rangle}{\|w\|} &\geq \frac{\alpha \|w - v_0\|^2 - \langle Av_0, w - v_0 \rangle}{\|w\|} \\
&\geq \frac{\alpha \|w\|^2 + \alpha \|v_0\|^2 - 2\alpha \|w\| \|v_0\| - \|Av_0\|_* \|w\| + \|Av_0\|_* \|v_0\|}{\|w\|} \\
&\geq \alpha \|w\| - 2\alpha \|v_0\| - \|Av_0\|_* + \frac{\alpha \|v_0\|^2 + \|Av_0\|_* \|v_0\|}{\|w\|}
\end{aligned}$$

$$\frac{\langle Aw, w - v_0 \rangle}{\|w\|} \geq \alpha \|w\| - 2\alpha \|v_0\| - \|Av_0\|_* + \frac{\alpha \|v_0\|^2 - \|Av_0\|_* \|v_0\|}{\|w\|} \quad \forall w, v_0 \in K \tag{2.19}$$

d'où

$$\lim_{\|w\| \to +\infty} \frac{\langle Aw, w - v_0 \rangle}{\|w\|} = +\infty \tag{2.20}$$

De (2.17) il résulte que, pour tout $u \in K$ il existe $\lambda \in V^*(\lambda = \lambda(u))$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$j(u, w) \geq \langle \lambda, w \rangle + \mu \geq - \|\lambda\|_* \|w\| + \mu \quad \forall w \in K \tag{2.21}$$

De (2.20) et (2.21) on déduit que pour tout $u \in K$ on a

$$\lim_{\|w\| \to +\infty} \frac{\langle Aw, w - v_0 \rangle + j(u, w) - j(u, v_0)}{\|w\|} = +\infty \quad \forall v_0 \in dom j(u, .) \tag{2.22}$$

où $dom j(u, .) = \{v \in K; j(u, v) < \infty\}$

Maintenant, désignons par S l'application $S : K \to K$ qui associe a tout élément $w \in K$ la solution de l'inéquation variationnelle de deuxième espèce

$$\begin{cases} \text{S}w \in K \text{ tel que} \\ \langle A(Sw), v - w\rangle + j(w, v) - j(w, Sw) \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.23}$$

De (2.22) et (2.16)-(2.18), en appliquant le théorème 24, on obtient l'existence et l'unicité de la solution de l'inéquation (2.23) donc l'application S est bien définie.

Remarquons que l'ensemble des points fixes de l'application S coïncide a l'ensemble des solutions de l'inéquation quasi-variationnelle (2.15). Ainsi, l'existence et l'unicité des solutions de l'inéquation quasi-variationnelle (2.15) se réduit a l'existence et l'unicité des points fixes de l'application S.

On va montrer que l'application S est une contraction. En effet, pour $w_1, w_2 \in K$ arbitraires, soient Sw_1 et Sw_2 les solutions correspondantes de l'inéquation (2.23)

$$\begin{aligned} \langle A(Sw_1), v - Sw_1\rangle + j(w_1, v) - j(w_1, Sw_1) &\geq \langle f, v - Sw_1\rangle \\ \langle A(Sw_2), v - Sw_2\rangle + j(w_2, v) - j(w_2, Sw_2) &\geq \langle f, v - Sw_2\rangle \end{aligned}$$

pour $v = Sw_2$ et, respectivement, $v = Sw_1$, on obtient,

$$\begin{aligned} \langle A(Sw_1), Sw_2 - Sw_1\rangle + j(w_1, Sw_2) - j(w_1, Sw_1) &\geq \langle f, Sw_2 - Sw_1\rangle \\ \langle A(Sw_2), Sw_1 - Sw_2\rangle + j(w_2, Sw_1) - j(w_2, Sw_2) &\geq \langle f, Sw_1 - Sw_2\rangle \end{aligned}$$

Par additions des deux inégalités

$$\begin{aligned} \langle A(Sw_1) - A(Sw_2), Sw_2 - Sw_1\rangle + j(w_1, Sw_2) - j(w_1, Sw_1) + j(w_2, Sw_1) - j(w_2, Sw_2) &\geq 0 \\ -\langle A(Sw_1) - A(Sw_2), Sw_1 - Sw_2\rangle + j(w_1, Sw_2) - j(w_1, Sw_1) + j(w_2, Sw_1) - j(w_2, Sw_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

en utilisant (2.16)

$$\begin{aligned} j(w_1, Sw_2) - j(w_1, Sw_1) + j(w_2, Sw_1) - j(w_2, Sw_2) &\geq \langle A(Sw_1) - A(Sw_2), Sw_1 - Sw_2\rangle \\ |j(w_1, Sw_2) - j(w_1, Sw_1) + j(w_2, Sw_1) - j(w_2, Sw_2)| &\geq \alpha \|Sw_1 - Sw_2\|^2 \\ |j(w_1, Sw_1) + j(w_2, Sw_2) - j(w_1, Sw_2) - j(w_2, Sw_1)| &\geq \alpha \|Sw_1 - Sw_2\|^2 \end{aligned}$$

en utilisant (2.18)

$$\begin{aligned} K\left\|w_1-w_2\right\|\left\|Sw_1-Sw_2\right\| &\geq \alpha\left\|Sw_1-Sw_2\right\|^2 \\ \frac{K}{\alpha}\left\|w_1-w_2\right\| &\geq \left\|Sw_1-Sw_2\right\| \end{aligned}$$

$$\left\|Sw_1-Sw_2\right\| \leq q\left\|w_1-w_2\right\| \tag{2.24}$$

avec $q=\frac{K}{\alpha}<1$

Il en résulte, du théorème de point fixe de Banach (voir [5] ou [2]), que l'application S a un point fixe unique soit la solution unique de l'inéquation quasi-variationnelle (2.15).

■

Chapitre 3

Le problème de Signorini

On s'intéresse ici d'un problème statique de contact unilatéral en élasticité linéaire.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $p = 2, 3$, un ouvert, supposé borné et de frontière assez régulière, occupé par un corps élastique dans son forme initiale, non-déformé. La frontière de Ω est divisée en trois parties Γ_1, Γ_2, Γ_3, Le corps est soumis à une densité de forces volumique f donnée dans Ω et à une densité de forces surfacique t donnée sur Γ_1. Le corps est en contact unilatéral contre un support rigide en Γ_2.

On note par u, ϵ, σ le champ vectoriel des déplacements, le champ tensoriel des déformations, respectivement, le champ tensoriel des contraintes. Et

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad 1 \leq i, j \leq p$$

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\epsilon_{kh}(u)$$

avec la convention usuelle de sommation et $1 \leq i, j, k, h \leq p$. On suppose que les coefficients d'élasticité a_{ijkh}, vérifient les conditions usuelles de symétrie

$$a_{ijkh} = a_{jihk} = a_{khij} \tag{3.1}$$

et d'ellipticité

$$\exists \alpha > 0 \ \text{ tel que } a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh} \geq \alpha \left|\varepsilon\right|^2 \ , \forall \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \tag{3.2}$$

On utilise une décomposition classique en composantes normales et tangentielles du vecteur déplacement et du vecteur contrainte sur Γ :

$$\begin{aligned} u_n &= u_i n_i \\ u_T &= u - u_n n \\ \sigma_n &= \sigma_{ij} n_i n_j \\ \sigma_{T_i} &= \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i \end{aligned}$$

$\sigma_{ij} n_j$ étant défini par la formule de Green généralisé

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}(u) n_j, \gamma(v_i) \rangle_{\frac{1}{2},\Gamma} &= \int_\Omega \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) \, dx + \int_\Omega \sigma_{ij,j}(u) v_i dx \\ \forall u &\in H^1_{div}(\Omega) \quad \forall v \in \left(H^1(\Omega)\right)^p \\ H^1_{div}(\Omega) &= \left\{ v \in \left(H^1(\Omega)\right)^p, div\sigma(v) \in \left(L^2(\Omega)\right)^p \right\} \end{aligned}$$

où $\langle ., . \rangle_{\frac{1}{2},\Gamma}$ désigne le produit de dualité entre les espaces $\left(H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)\right)^p$ et $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^p$, $\left(H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)\right)^p$ étant le dual de $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^p$.

Évidemment, pour u régulière, on a la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \sigma_{ij}(u) n_j v_i ds &= \int_\Omega \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) \, dx + \int_\Omega \sigma_{ij,j}(u) v_i dx \\ \forall u \text{ régulière}, \forall v &\in \left(H^1(\Omega)\right)^p. \end{aligned}$$

3.1 Contact sans frottement

3.1.1 Problème classique P.C

Trouver u tel que

$$-div\sigma(u) = f \quad \text{dans } \Omega \tag{3.3}$$

$$\sigma(u) = A\epsilon(u), \quad \epsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right) \quad \text{dans } \Omega \tag{3.4}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \tag{3.5}$$

$$\sigma.n = t \quad \text{sur } \Gamma_1 \tag{3.6}$$

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad u_n.\sigma_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \tag{3.7}$$

L'équation (3.3) désigne l'équation d'équilibre telle que$\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))$ est le tenseur des contraintes et $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkh}\epsilon_{kh}(u)$ où $\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ et $\epsilon(u) = (\epsilon_{ij}(u))$ est le tenseur des déformations linéarisé où $\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. On simplifie l'écriture par $\sigma(u) = A\epsilon(u)$ qui est appelée loi de comportement.

Les conditions

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad u_n.\sigma_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

sont appelées les conditions de Signorini.

$\sigma_T = 0$ pas de frottement sur Γ_2

3.1.2 Problème variationnel P.V

$$\begin{aligned} V &= \left\{v \in \left(H^1(\Omega)\right)^p, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\} \\ K &= \{v \in V, v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2\} \\ a(u,v) &= \int_\Omega \sigma(u)\,\epsilon(v)\,dx \quad \forall u, v \in V \\ (F,v) &= (f,v) + \int_{\Gamma_1} t.vds \quad \forall v \in V \\ (f,v) &= \int_\Omega f.vdx \end{aligned}$$

La formulation variationnelle, en terme de déplacement, est la suivante

$$P.V \left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq (F, v-u) \quad \forall v \in K \end{array} \right.$$

Théorème 28 *Si u est une fonction qui vérifie $(P.C)$ alors u est solution de l'inéquation variationnelle $(P.V)$.*

Preuve. Multipliant l'équation d'équilibre (3.3) par $(v-u)$

$$\begin{aligned} -div\sigma(u)(v-u) &= f(v-u) \\ \int_\Omega -div\sigma(u)(v-u)\,dx &= \int_\Omega f(v-u)\,dx \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green

$$\int_\Omega \sigma(u)\,\epsilon(v-u)\,dx - \int_\Gamma \sigma(u)\,n(v-u)\,ds = \int_\Omega f(v-u)\,dx$$

$$(f, v-u) = a(u, v-u) - \int_\Gamma \sigma(u)\,n(v-u)\,ds \tag{3.8}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \sigma(u)\,n(v-u)\,ds &= \int_{\Gamma_0} \sigma(u)\,n(v-u)\,ds + \int_{\Gamma_1} \sigma(u)\,n(v-u)\,ds + \int_{\Gamma_2} \sigma(u)\,n(v-u)\,ds \\ &= \int_{\Gamma_1} t(v-u)\,ds + \int_{\Gamma_2} \sigma_T(v_T-u_T) + \sigma_n(v_n-u_n)\,ds \\ &= \int_{\Gamma_1} t(v-u)\,ds + \int_{\Gamma_2} \sigma_n v_n ds \end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Gamma \sigma(u)\,n(v-u)\,ds \geq \int_{\Gamma_1} t(v-u)\,ds \tag{3.9}$$

De (3.8) et (3.9) on obtient

$$\begin{aligned} a(u, v-u) - (f, v-u) - \int_\Gamma \sigma(u)\,n(v-u)\,ds &= 0 \\ a(u, v-u) - (f, v-u) - \int_{\Gamma_1} t(v-u)\,ds &\geq 0 \\ a(u, v-u) - (F, v-u) &\geq 0 \\ a(u, v-u) &\geq (F, v-u) \end{aligned}$$

■

Théorème 29 *Si u est une solution assez régulière de l'inéquation variationnelle $(P.V)$ alors u satisfait $(P.C)$ en un sens généralisé.*

Preuve. Si u est une solution assez régulière de l'inéquation variationnelle $(P.V)$ alors on prend $v = u \pm \varphi$ avec $\varphi \in (D(\Omega))^p$ on obtient

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) &\geq (F,\varphi) \\ a(u,-\varphi) &\geq (F,-\varphi) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) &= (F,\varphi) \\ a(u,\varphi) &= (f,\varphi) + \int_{\Gamma_1} t.\varphi ds \\ a(u,\varphi) &= (f,\varphi) \\ \int_\Omega \sigma(u)\,\epsilon(\varphi)\,dx &= \int_\Omega f.\varphi dx \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned} -\int_\Omega div\sigma.\varphi dx - \int_\Gamma \sigma(u)\,\varphi dx &= \int_\Omega f.\varphi dx \\ \int_\Omega (-div\sigma - f)\,\varphi dx &= 0 \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} -div\sigma - f &= 0 \text{ p.p} \\ -div\sigma &= f \quad \text{p.p} \end{aligned}$$

d'où (3.3)

Multipliant (3.3) par $(v-u)$ et utilisant la formule de Green on obtient

$$a(u,v-u) - (f,v-u) = \int_\Gamma \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds$$

grâce à l'inéquation variationnelle $(P.V)$

$$-\int_{\Gamma_1} t\,(v-u)\,ds + \int_\Gamma \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds \geq 0$$

en prend $v = u \pm \varphi$ avec $\varphi \in (D(\Gamma))^p$ et supp$\varphi \subset \Gamma_1$ on déduit

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_1} t.\varphi ds + \int_\Gamma \sigma(u)\,n.\varphi ds &= 0 \\ \int_{\Gamma_1} (\sigma.n - t)\,\varphi ds &= 0 \\ \sigma.n &= t \quad p.p \text{ sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

d'où (3.6)

Pour obtenir les conditions de Signorini (3.7) on a

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_1} t\,(v-u)\,ds + \int_{\Gamma} \sigma.n\,(v-u)\,ds &\geq 0 \\ -\int_{\Gamma_1} \sigma.n\,(v-u)\,ds + \int_{\Gamma} \sigma.n\,(v-u)\,ds &\geq 0 \end{aligned}$$

en prenant $v=\varphi+u$ où $\varphi\in(D(\Gamma))^p$ avec $supp\varphi\in\Gamma_2$ et $\varphi_n\leq 0$ p.p surΓ_2 on obtient

$$\int_{\Gamma_2} \sigma_n\varphi_n \geq 0$$

ce qui donne $\sigma_n\leq 0$ sur Γ_2

on a $u\in K$ donc $u_n\leq 0$

en choisissant maintenant $v_n=0$ puis $v_n=2u_n$ on obtient

$$\sigma_n u_n = 0$$

■

3.1.3 Existence et unicité

Théorème 30 *Si $f\in(L^2(\Omega))^p$, $t\in(L^2(\Gamma_1))^p$ alors le problème (P_2) admet une solution unique dans K*

Preuve. (i) $a(u,v)$ est une forme bilinéaire continue coercive.

(1) $a(u,v)$ est une forme bilinéaire(évident).

(2) On a :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left|\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u).\epsilon_{ij}(v)\,dx\right| \\ &= \left|\int_{\Omega} a_{ijkh}\epsilon_{kh}(u).\epsilon_{ij}(v)\,dx\right| \\ &\leq c\int_{\Omega} |\epsilon_{kh}(u).\epsilon_{ij}(v)|\,dx \\ &\leq c\left(\int_{\Omega}(\epsilon_{kh}(u))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}(\epsilon_{ij}(v))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\epsilon_{kh}(u))^2 \, dx &= \frac{1}{4}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right)^2 dx \\
&\leq \|u\|^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où la continuité de $a(u,v)$.

(3) En utilisant la condition de l'ellipticité de a_{ijkh}, on trouve :

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega \sigma_{ij}(u) .\epsilon_{ij}(v) \, dx \\
&= \int_\Omega a_{ijkh}\epsilon_{kh}(u) .\epsilon_{ij}(v) \, dx \\
&\geq \alpha \int_\Omega \epsilon_{kh}(u) .\epsilon_{ij}(v) \, dx
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Korn, on obtient

$$a(u,u) \geq k \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

ce qui achéve la coercivité.

(ii) F est une forme linéaire continue sur V .En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega fv dx\right| &\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_2} |v|^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c \|v\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

et

$$\left|\int_{\Gamma_1} tv ds\right| \leq \|t\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}$$

En utilisant l'injection continue de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$ et l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on trouve :

$$\begin{aligned}
|(F,v)| &\leq c\left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}\right) \\
&\leq c' \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

De (i) et (ii) et par le moyen du théorème de Stampacchia (voir chapitre 1), l'inéquation variationnelle admet une solution unique. ■

3.2 Contact avec frottement (la loi de Tresca)

3.2.1 Problème classique P.C

Trouver u tel que

$$- div\sigma(u) = f \quad \text{dans } \Omega \tag{3.10}$$

$$\sigma(u) = A\epsilon(u), \quad \epsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right) \quad \text{dans } \Omega \tag{3.11}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \tag{3.12}$$

$$\sigma.n = t \quad \text{sur } \Gamma_1 \tag{3.13}$$

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad u_n.\sigma_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \tag{3.14}$$

$$|\sigma_T| \leq Set \begin{cases} |\sigma_T| < S \Longrightarrow u_T = 0 \\ |\sigma_T| < S \Longrightarrow \exists\lambda \geq 0, u_T = -\lambda\sigma_T sur \Gamma_2 \end{cases} \tag{3.15}$$

Les conditions (3.15) sont appelées les conditions de la loi de Tresca

3.2.2 Problème variationnel P.V

On introduit le sous-espace linéaire

$$V = \left\{v \in \left(H^1(\Omega)\right)^p, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\}$$

On utilise aussi les notations :

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega \sigma(u)\,\epsilon(u)\,dx \quad \forall u,v\in V\\
(F,v) &= (f,v)+\int_{\Gamma_1} t.vds \quad \forall v\in V\\
(f,v) &= \int_\Omega f.vdx\\
j(v) &= \int_{\Gamma_2} S\,|v_T|\,ds \quad \forall v\in V
\end{aligned}$$

La formulation variationnelle, en termes de déplacements, est la suivante :

$$(P.V)\begin{cases}\text{Trouver } u\in K \text{ tel que}\\ a(u,v-u)+j(v)-j(u)\geq (F,v-u) \quad \forall v\in K\end{cases}$$

Théorème 31 *Si u est une fonction qui vérifie (P,C) alors u est solution de l'inéquation variationnelle $(P.V)$.*

Preuve. On suppose que toute les fonctions régulières

Multipliant l'équation (3.10) par $(v-u)$

$$\begin{aligned}
-div\sigma(u).(v-u) &= f(v-u)\\
\int_\Omega -div\sigma(u).(v-u)\,dx &= \int_\Omega f(v-u)\,dx
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green

$$\int_\Omega \sigma(u)\,\epsilon(v-u)\,dx-\int_\Gamma \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds=\int_\Omega f(v-u)\,dx$$

$$(f,v-u)=a(u,v-u)-\int_\Gamma \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds \tag{3.16}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds &= \int_{\Gamma_0}\sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds+\int_{\Gamma_1}\sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds+\int_{\Gamma_2}\sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds\\
&= \int_{\Gamma_1} t\,(v-u)\,ds+\int_{\Gamma_2}\sigma_T\,(v_T-u_T)+\sigma_n\,(v_n-u_n)\,ds\\
&= \int_{\Gamma_1} t\,(v-u)\,ds+\int_{\Gamma_2}\sigma_n v_n+\sigma_T\,(v_T-u_T)\,ds\\
&\geq \int_{\Gamma_1} t\,(v-u)\,ds+\int_{\Gamma_2}\sigma_T\,(v_T-u_T)\,ds
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\Gamma} \sigma(u)\, n\,(v-u)\, ds \geq \int_{\Gamma_1} t\,(v-u)\, ds + \int_{\Gamma_2} \sigma_T\,(v_T - u_T)\, ds \tag{3.17}$$

De (3.16) et (3.17) on obtient

$$\begin{aligned}
a(u, v-u) - (f, v-u) - \int_{\Gamma} \sigma(u)\, n\,(v-u)\, ds &= 0 \qquad (3.18)\\
a(u, v-u) - (f, v-u) - \int_{\Gamma_1} t\,(v-u)\, ds &\geq \int_{\Gamma_2} \sigma_T\,(v_T - u_T)\, ds\\
a(u, v-u) + j(u,v) - j(u,u) - (F, v-u) &\geq \int_{\Gamma_2} \sigma_T\,(v_T - u_T)\, ds + \int_{\Gamma_2} S\,(|v_T| - |u_T|)\, ds\\
a(u, v-u) + j(u,v) - j(u,u) - (F, v-u) &\geq \int_{\Gamma_2} S\,(|v_T| - |u_T|) + \sigma_T\,(v_T - u_T)\, ds \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Il reste de montrer que

$$S\,(|v_T| - |u_T|) + \sigma_T\,(v_T - u_T) \geq 0 \tag{3.20}$$

En utilisant les conditions (3.15)

1) Si $|\sigma_T| < S \Longrightarrow u_T = 0$

$$\begin{aligned}
S\,(|v_T| - |u_T|) + \sigma_T\,(v_T - u_T) &= S\,|v_T| + \sigma_T v_T\\
&\geq |\sigma_T|\,|v_T| + \sigma_T v_T\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

2) Si $|\sigma_T| = S \Longrightarrow u_T = -\lambda\sigma_T$

$$\begin{aligned}
S\,(|v_T| - |u_T|) + \sigma_T\,(v_T - u_T) &= |\sigma_T|\,(|v_T| - \lambda\,|\sigma_T|) + \sigma_T\,(v_T + \lambda\sigma_T)\\
&= |\sigma_T|\,|v_T| + \sigma_T v_T\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

De $(3.19)\,,(3.20)$

$$a(u, v-u) + j_f(u,v) - j_f(u,u) - (F, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K$$

■

Théorème 32 *Si u est une solution assez régulière de l'inéquation variationnelle $(P.V)$ alors u satisfait $(P.C)$ en un sens généralisé.*

Preuve. voir [28] ■

3.2.3 Existence et unicité

Théorème 33 *Si* $f \in (L^2(\Omega))^p$, $t \in (L^2(\Gamma_1))^p$ *alors le problème* (P_2) *admet une solution unique dans* K

Preuve. (i) $a(u,v)$ est une forme bilinéaire continue coercive.

(1) $a(u,v)$ est une forme bilinéaire(évident).

(2) On a :

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \sigma_{ij}(u) .\epsilon_{ij}(v)\, dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega a_{ijkh}\epsilon_{kh}(u) .\epsilon_{ij}(v)\, dx \right| \\
&\leq c \int_\Omega |\epsilon_{kh}(u) .\epsilon_{ij}(v)|\, dx \\
&\leq c \left(\int_\Omega (\epsilon_{kh}(u))^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (\epsilon_{ij}(v))^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\epsilon_{kh}(u))^2\, dx &= \frac{1}{4} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right)^2 dx \\
&\leq \|u\|^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où la continuité de $a(u,v)$.

(3) En utilisant la condition de l'ellipticité de a_{ijkh}, on trouve :

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega \sigma_{ij}(u) .\epsilon_{ij}(v)\, dx \\
&= \int_\Omega a_{ijkh}\epsilon_{kh}(u) .\epsilon_{ij}(v)\, dx \\
&\geq \alpha \int_\Omega \epsilon_{kh}(u) .\epsilon_{ij}(v)\, dx
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Korn, on obtient

$$a(u,u) \geq k \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

ce qui achevé la coercivité.

(ii) F est une forme linéaire continue sur V .En effet, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega fvdx\right| &\leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Gamma_2} |v|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\,\|v\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

et

$$\left|\int_{\Gamma_1} tvds\right| \leq \|t\|_{L^2(\Gamma_1)}\,\|v\|_{L^2(\Gamma_1)}$$

En utilisant l'injection continue de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$ et l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on trouve :

$$\begin{aligned}|(F,v)| &\leq c\left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}\right) \\ &\leq c'\,\|v\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

(iii) c'est facile a vérifier que $j(u)$ est convexe, semi continue inférieurement et propre.

Donc d'après le théorème 21 l'inéquation variationnelle admet une solution unique. ■

3.3 Contact avec frottement de Coulomb

3.3.1 Problème classique P.C

Trouver u tel que

$$-\,div\sigma(u) = f \quad \text{dans } \Omega \tag{3.21}$$

$$\sigma(u) = A\epsilon(u), \quad \epsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right) \quad \text{dans } \Omega \tag{3.22}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \tag{3.23}$$

$$\sigma.n = t \quad \text{sur } \Gamma_1 \tag{3.24}$$

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad u_n.\sigma_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \tag{3.25}$$

$$|\sigma_T| \leq \mu\,|R\sigma_n| \text{ et } \begin{cases} |\sigma_T| < \mu\,|R\sigma_n| \Longrightarrow u_T = 0 \\ |\sigma_T| < \mu\,|R\sigma_n| \Longrightarrow \exists\lambda \geq 0, u_T = -\lambda\sigma_T \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \tag{3.26}$$

où $R\sigma_n$ représente une régularisation de σ_n qui sera précisée ultérieurement.

3.3.2 Problème variationnel P.V

Pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème, on fait les hypothèses de régularité :

$$\begin{cases} f \in \left(L^2(\Omega)\right)^p \\ t \in \left(L^2(\Gamma_1)\right)^p \\ a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i,j,k,l = 1, \ldots\ldots, p \\ \mu \in L^\infty(\Gamma_2), \mu \geq 0 p.p \text{ sur } \Gamma_2 \\ R : H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2) \to L^2(\Gamma_2) \text{ est un opérateur linéaire et compact} \end{cases} \tag{3.27}$$

où $H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)$ est le dual de l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) = \left\{v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), v = 0 \ p.p \text{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_2\right\}$
$\sigma_n(u) \in H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma), \forall u \in H^1_{div}(\Omega) = \left\{v \in (H^1(\Omega))^p, \ div\sigma(v) \in \left(L^2(\Omega)\right)^p\right\}$
On introduit le sous-espace linéaire

$$V = \left\{v \in \left(H^1(\Omega)\right)^p, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\} \tag{3.28}$$

de l'espace de Hilbert $\left(H^1(\Omega)\right)^p$ et l'ensemble des champs des déplacements statiquement admissibles définie par

$$K = \{v \in V, v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2\} \tag{3.29}$$

On utilise aussi les notations :

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \sigma(u)\,\epsilon(u)\,dx \quad \forall u, v \in V && (3.30) \\ (F,v) &= (f,v) + \int_{\Gamma_1} t.vds \quad \forall v \in V \\ (f,v) &= \int_\Omega f.vdx && (3.31) \\ j_f(u,v) &= \int_{\Gamma_2} \mu\left|R\sigma_n(P_f u)\right|\left|v_T\right| ds \quad \forall u \in H^1_{div}(\Omega), \forall v \in V \end{aligned}$$

où $P_f : V \to C_f$ est l'opérateur de projection sur l'ensemble convexe et fermé

$$C_f = \{v \in V, \ a(v,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in (D(\Omega))^p\}$$

La formulation variationnelle, en termes de déplacements, est la suivante :

$$(P.V)\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u,v-u)+j(u,v)-j(u,u) \geq (F,v-u) \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{3.32}$$

Remarque 34 *Si u est une solution du problème $P.V$ alors $u \in C_f$, donc $P_f u = u$. De plus*

$$j_f(w,v) = j(w,v) \quad \forall v \in V, \ \forall w \in C_f$$

où

$$j(w,v) = \int_{\Gamma_2} \mu \left| R\sigma_n(w) \right| |v_T| \, ds \quad \forall v \in V, \ \forall w \in C_f$$

Remarque 35 *Pour tout $v \in C_f$, nous avons*

$$\|\sigma_n(v)\|_{\frac{-1}{2},\Gamma} \leq C(\|v\|_1^2 + \|f\|_0^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.33}$$

Remarque 36 *Pour tout $u, v \in V$ on a*

$$\|\sigma_n(P_f u) - \sigma_n(P_f v)\|_{\frac{-1}{2},\Gamma} \leq C \|u-v\|_1 \tag{3.34}$$

En effet, si $u, v \in V$ alors $P_f u - P_f v \in C_0 = \{v \in V, \ a(v,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in (D(\Omega))^p\}$

Théorème 37 *Si u est une fonction qui vérifie (P,C) alors u est solution de l'inéquation variationnelle $(P.V)$.*

Preuve. On suppose que toute les fonctions régulières

De (3.21) on obtient :

$$\begin{aligned} -div\sigma(u) &= f \\ \int_\Omega -div\sigma(u) .\varphi dx &= \int_\Omega f\varphi dx \quad \forall \varphi \in (D(\Omega))^p \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma(u)\,\epsilon(\varphi)\,dx &= \int_\Omega f\varphi dx \quad \forall \varphi \in (D(\Omega))^p \\ a(u,\varphi) &= (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in (D(\Omega))^p \end{aligned}$$

on déduit que $u \in C_f$ donc $P_f u = u$ et

$$j_f(u,v) = \int_{\Gamma_2} \mu \left| R\sigma_n(u) \right| |v_T| \, ds \quad \forall v \in V$$

Multipliant l'équation (3.21) par $(v-u)$

$$\begin{aligned} -div\sigma(u).(v-u) &= f(v-u) \\ \int_\Omega -div\sigma(u).(v-u)\,dx &= \int_\Omega f(v-u)\,dx \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green

$$\int_\Omega \sigma(u)\,\epsilon(v-u)\,dx - \int_\Gamma \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds = \int_\Omega f(v-u)\,dx$$

$$(f, v-u) = a(u, v-u) - \int_\Gamma \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds \tag{3.35}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds &= \int_{\Gamma_0} \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds + \int_{\Gamma_1} \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds + \int_{\Gamma_2} \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds \\ &= \int_{\Gamma_1} t(v-u)\,ds + \int_{\Gamma_2} \sigma_T(v_T-u_T) + \sigma_n(v_n-u_n)\,ds \\ &= \int_{\Gamma_1} t(v-u)\,ds + \int_{\Gamma_2} \sigma_n v_n + \sigma_T(v_T-u_T)\,ds \\ &\geq \int_{\Gamma_1} t(v-u)\,ds + \int_{\Gamma_2} \sigma_T(v_T-u_T)\,ds \end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Gamma \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds \geq \int_{\Gamma_1} t(v-u)\,ds + \int_{\Gamma_2} \sigma_T(v_T-u_T)\,ds \tag{3.36}$$

De (3.35) et (3.36) on obtient

$$\begin{aligned} a(u,v-u) - (f,v-u) - \int_\Gamma \sigma(u)\,n\,(v-u)\,ds &= 0 \\ a(u,v-u) - (f,v-u) - \int_{\Gamma_1} t(v-u)\,ds &\geq \int_{\Gamma_2} \sigma_T(v_T-u_T)\,ds \\ a(u,v-u) + j_f(u,v) - j_f(u,u) - (F,v-u) &\geq \int_{\Gamma_2} \sigma_T(v_T-u_T)\,ds + \int_{\Gamma_2} \mu\,|R\sigma_n(u)|\,(|v_T| - |u \\ a(u,v-u) + j_f(u,v) - j_f(u,u) - (F,v-u) &\geq \int_{\Gamma_2} \mu\,|R\sigma_n(u)|\,(|v_T| - |u_T|) + \sigma_T(v_T-u_T)\,ds \end{aligned}$$

Il reste de montrer que

$$\mu\,|R\sigma_n(u)|\,(|v_T| - |u_T|) + \sigma_T(v_T-u_T) \geq 0 \tag{3.38}$$

En utilisant les conditions (3.26)

1) Si $|\sigma_T| < \mu |R\sigma_n| \Longrightarrow u_T = 0$

$$\begin{aligned}
\mu |R\sigma_n(u)| (|v_T| - |u_T|) + \sigma_T (v_T - u_T) &= \mu |R\sigma_n(u)| |v_T| + \sigma_T v_T \\
&\geq |\sigma_T| |v_T| + \sigma_T v_T \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

2) Si $|\sigma_T| = \mu |R\sigma_n| \Longrightarrow u_T = -\lambda \sigma_T$

$$\begin{aligned}
\mu |R\sigma_n(u)| (|v_T| - |u_T|) + \sigma_T (v_T - u_T) &= |\sigma_T| (|v_T| - \lambda |\sigma_T|) + \sigma_T (v_T + \lambda \sigma_T) \\
&= |\sigma_T| |v_T| + \sigma_T v_T \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

De $(3.37), (3.38)$

$$a(u, v-u) + j_f(u,v) - j_f(u,u) - (F, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K$$

■

Théorème 38 *Si u est une solution assez régulière de l'inéquation variationnelle $(P.V)$ alors u satisfait $(P.C)$ en un sens généralisé.*

Preuve. Si u est une solution de l'inéquation variationnelle $(P.V)$ alors on prend $v = u \pm \varphi$ avec $\varphi \in (D(\Omega))^p$ on obtient

$$\begin{aligned}
a(u,\varphi) + j(u, u+\varphi) - j(u,u) &\geq (F,\varphi) \\
a(u,-\varphi) + j(u, u-\varphi) - j(u,u) &\geq (F,-\varphi)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
a(u,\varphi) &= (F,\varphi) \\
a(u,\varphi) &= (f,\varphi) + \int_{\Gamma_1} t.\varphi ds \\
a(u,\varphi) &= (f,\varphi) \\
\int_\Omega \sigma(u)\,\epsilon(\varphi)\,dx &= \int_\Omega f.\varphi dx
\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega} div\sigma.\varphi dx - \int_{\Gamma} \sigma(u)\varphi dx &= \int_{\Omega} f.\varphi dx \\
\int_{\Omega} (-div\sigma - f)\varphi dx &= 0
\end{aligned}
$$

par conséquent

$$
\begin{aligned}
-div\sigma - f &= 0 \quad \text{p.p sur } \Omega \\
-div\sigma &= f \quad \text{p.p sur } \Omega
\end{aligned}
$$

d'où (3.21)

Multipliant (3.21) par $(v-u)$ et utilisant la formule de Green on obtient

$$
a(u, v-u) - (f, v-u) = \int_{\Gamma} \sigma(u)\, n\, (v-u)\, ds
$$

grâce à l'inéquation variationnelle $(P.V)$

$$
j(u,v) - j(u,u) - \int_{\Gamma_1} t(v-u)\, ds + \int_{\Gamma} \sigma(u)\, n\, (v-u)\, ds \geq 0 \quad \forall v \in K \tag{3.39}
$$

en prend $v = u \pm \varphi$ avec $\varphi \in (D(\Gamma))^p$ et supp$\varphi \subset \Gamma_1$ on déduit

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_1} t.\varphi ds + \int_{\Gamma} \sigma(u)\, n.\varphi ds &= 0 \\
\int_{\Gamma_1} (\sigma.n - t)\varphi ds &= 0 \\
\sigma.n &= t \quad p.p \text{ sur } \Gamma_1
\end{aligned}
$$

d'où (3.24)

Alors, revenant a l'inéquation (3.39), on a

$$
j(u,v) - j(u,u) + \int_{\Gamma_2} \sigma_n (v_n - u_n) + \sigma_T (v_T - u_T)\, ds \geq 0 \quad \forall v \in K
$$

Choisissant $v = \varphi_T + u_n n$ où $\varphi \in (D(\Gamma))^p$ avec $supp\varphi \subset \Gamma_2$ et en tenant comptes que $v_n = u_n, v_T = \varphi_T, \sigma_T\varphi_T = \sigma_T\varphi$, on déduit

$$
\int_{\Gamma_2} [\mu\, |R\sigma_n|\, (|\varphi_T| - |u_T|) + \sigma_T.\varphi]\, ds \geq \int_{\Gamma_2} \sigma_T.u_T ds
$$

ou, en utilisant que $\varphi \geq \varphi_T$, on a

$$\int_{\Gamma_2} [\mu |R\sigma_n| |\varphi| + \sigma_T.\varphi] \, ds - \int_{\Gamma_2} [\mu |R\sigma_n| |u_T| + \sigma_T.u_T] \, ds \geq 0 \quad \forall \varphi \in (D(\Gamma))^p \text{ avec } supp\varphi \subset \Gamma_2$$

En prenant $\varphi = \lambda\varphi$ avec $\lambda > 0$ nous obtenons

$$\lambda T_1 - T_2 \geq 0$$

où

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{\Gamma_2} [\mu |R\sigma_n| |\varphi| + \sigma_T.\varphi] \, ds \\ T_2 &= \int_{\Gamma_2} [\mu |R\sigma_n| |u_T| + \sigma_T.u_T] \, ds \end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$T_1 \geq 0, \; T_2 \leq 0$$

En prenant $\varphi = \pm\varphi$

$$\int_{\Gamma_2} |\sigma_T| |\varphi| \, ds \leq \int_{\Gamma_2} \mu |R\sigma_n| |\varphi| \, ds \quad \forall \varphi \in (D(\Gamma))^p \text{ avec } supp\varphi \subset \Gamma_2$$

Soit $|\sigma_T| \leq \mu |R\sigma_n|$. Comme $T_2 \leq 0$ il en suit que $T_2 = 0$ donc

$$\mu |R\sigma_n| |u_T| + \sigma_T.u_T = 0 \;\; p.p \text{ sur } \Gamma_2 \tag{3.40}$$

ce qui implique (3.26). En effet, si $|\sigma_T| < \mu |R\sigma_n|$ alors, en supposant $u_T \neq 0$, de (3.40) on obtient $\sigma_T.u_T = -\mu |R\sigma_n| |u_T| < -|\sigma_T| |u_T|$ d'où, nécessairement, il faut avoir $u_T = 0$.

Si $|\sigma_T| = \mu |R\sigma_n|$ alors, de (3.40), il vient $\sigma_T.u_T = -|\sigma_T| |u_T|$ donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $u_T = -\lambda\sigma_T$.

Pour obtenir les conditions de Signorini (3.25), on retourne a (3.39) en prenant $v = \varphi_n.n + u_T$ où $\varphi \in (D(\Gamma))^p$ avec $supp\varphi \subset \Gamma_2$ et $\varphi_n \leq 0$ $p.p$ sur Γ_2. On obtient

$$\int_{\Gamma_2} \sigma_n.\varphi_n ds - \int_{\Gamma_2} \sigma_n.u_n ds \geq 0 \; \varphi \in \left(H^1(\Gamma)\right)^p \text{ avec } supp\varphi \subset \Gamma_2 \text{ et } \varphi_n \leq 0 \; p.p \text{ sur } \Gamma_2$$

ce qui donne, en prenant, comme nous avons fait dans le cas des conditions (3.26), $\varphi = \lambda\varphi$ avec$\lambda > 0$, les conditions (3.25). Certainement, la condition $u_n \leq 0$ est satisfaite parce que $u \in K$. ■

3.3.3 Existence et unicité

Théorème 39 *Supposons que les conditions (3.27) sont satisfaites et mes* $(\Gamma_0) > 0$. *Alors il existe* $\mu_1 > 0$ *tel que pour tout* $\mu \geq 0$ *avec* $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq \mu_1$, *le problème* (P_2) *a une solution et cette solution est unique.*

Preuve. On va prouver que la fonction $j(;)$ satisfait la relation (2.18).

De l'inégalité de Schwartz dans $L^2(\Gamma_2)$ et tenant compte que l'opérateur R est linéaire et continu,on obtient

$$\begin{array}{rl} & |j_f(u_1,v_2)+j_f(u_2,v_1)-j_f(u_1,v_1)-j_f(u_2,v_2)| \\ = & \left|\int_{\Gamma_2}\mu\left(|R(\sigma_n(P_fu_1))|-|R(\sigma_n(P_fu_2))|\right)(|v_{2_T}|-|v_{1_T}|)\,ds\right| \\ \leq & \left|\int_{\Gamma_2}\mu\,|R(\sigma_n(P_fu_1-P_fu_2))|\,|v_{2_T}-v_{1_T}|\,ds\right| \\ \leq & \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|R(\sigma_n(P_fu_1-P_fu_2))\|_{L^2(\Gamma_2)}\|v_1-v_2\|_{L^2(\Gamma_2)} \\ \leq & C_1\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|\sigma_n(P_fu_1-P_fu_2)\|_{\frac{-1}{2},\Gamma_2}\|v_1-v_2\|_{L^2(\Gamma_2)} \quad \forall u_1,u_2,v_1,v_2\in V \end{array} \tag{3.41}$$

De (3.34) (3.41) on a

$$\begin{array}{rl} & |j_f(u_1,v_2)+j_f(u_2,v_1)-j_f(u_1,v_1)-j_f(u_2,v_2)| \\ \leq & C_2\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|u_1-u_2\|_1\|v_1-v_2\|_1 \quad \forall u_1,u_2,v_1,v_2\in V \end{array}$$

Soit $j(.,.)$ satisfait (2.18) avec $k = C_2\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}$. Prenant

$$0 < \mu_1 < \frac{\alpha}{C_2}$$

il résulte que pour tout $\mu \geq 0$ avec $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq \mu_1$ on a $k < \alpha$. Alors on peut appliquer le théorème 27 pour achever la démonstration. ■

Conclusion

De ce travail, on résulte que, le problème de Signorini statique soit dans le cas sans frottement ou dans le cas avec frottement de Coulomb on peut avoir l'existence et l'unicité d'après la formulation variationnelle au terme d'inéquation variationnelle.

Pour les perspectives, il serait intéressant de trouver l'existence et l'unicité d'un problème statique de contact unilatéral en élasticité non linéaire. Et aussi étendre ces études pour le cas dynamique.

Bibliographie

[1] Hervé Le Dret, équations aux dérivées partielles elliptiques, 4 mars 2010.

[2] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math., 3, 133-181, 1922.

[3] G.Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : ilproblema di signorini con ambigue condizioni al contorno, Mem. Accad. Naz. Lincei Ser., VIII(7), 91-140 (1964).

[4] Néčas, Jarušek et Haslinger, On the solution of the variational inequality to the signorini problem with small friction, Boll. U.M.I. 5(17B), 796-811 (1980).

[5] M. Sofonea, A. Matei, Variational inequalities with applications, A study of Antiplane Frictional Contact Problems, Advances in Mechanics, vol. 18, 234 p., Springer, 2009.

[6] Eck et Jarušek, Existence results for the static contact problem with Coulomb friction, Math. Models Methods Appl. Sci., 8, 445-468 (1998).

[7] Anca Capatina, Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement, 10/2011.

[8] G.Duvaut, J.L.Lions, Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod 1972.

[9] Clémence MINAZZO - Kelsey RIDER, Théorèmes du Point Fixe et Applications aux Equations Différentielles.

[10] R. Hassani, P.Hild et I.Ionescu, Sufficient conditions of non-uniqueness for the Coulomb friction problem.Math. Meth. Appli. Sci. 2004 ; 27 :47-67.

[11] J.Jarušek, Contact Problem with Bounded Friction : Coercive case, Czechoslovak Math. J.,33(108), 237-261 (1983).

[12] Y.Kato, Signorini problem with friction in linear elasticity, Japan J. Appl. Math., 4, 237-268 (1987).

[13] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Progresso della Scienze, 1933.

[14] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964.

[15] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[16] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967.

[17] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1, 1-168, 1972.

[18] H. Brézis, équations et inéquations non linéires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1, 115-175, 1968.

[19] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[20] J. L. Lions, Quelques m ethodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[21] U. Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[22] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[23] H.Brezis, Analyse fonctionnelle théories et applications.Dunod 1999.

[24] Maria Teresa Cao Rial

[25] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[26] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières, Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.

[27] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1984.

[28] A. BENSAYAH, Modélisation asymptotique du problème de Signorini avec frottement pour les plaques minces, mémoire de Magister, 2006