

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE KASDI MERBAH DE OUARGLA

Faculté des Sciences et technologie

et Sciences de la matière

DEPARTEMENT DE :

MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en mathématiques**

Spécialité : ANALYSE

Par

Abayahia Oum saad

THÈME

Applications Discrètes Exploration et Routes Vers le Chaos

Soutenu publiquement, le

devant le jury composé de :

Mr	Professeur	l'université de	Président.	
Mr	Maître de Conférences(A)	l'université de	Examineur	
Mr	Maître de Conférences(A)	l'université de	Examineur	
Mr	M.Mammeri	Maître de Conférences(A)	l'université de	Rapporteur

Remerciements

Je tiens en premier lieu à rendre grâce à "Dieu" qui lui a été créé grâce à ce travail et remercier Monsieur Mammeri Mohammed, qui a dirigé cette mémoire. Grâce à ces incessants conseils et son information et inaltérable motivation cette formation par et pour la recherche a été des plus passionnantes.

Mes remerciements vont également à Monsieur : Kouidri Mohammed, d'avoir accepté d'être président du jury de cette mémoire.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur : Ben chik Abd elkarim et Monsieur : Abassi hocin pour leur participation au jury.

Je voudrais remercier tous les professeurs des mathématiques à l'université de Ouargla.

Je voudrais remercier tous les professeurs qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir.

Un grand merci aux toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail.

Pour finir c'est un grand merci à mes parents et toutes mes amies, ma famille, proches ou non des mathématiques.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à...mon prophète **Mohammed** la paix de *Dieu* soit sur lui..

A ma très chère mère **Hadda**.

Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études.

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.

Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour.

Puisse **Dieu**, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

Cher à mon père **Mebrouk**.

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.

Rien au monde ne vaut les efforts frmiss jou et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma

formation.

A ma très chère sœur **Fatima**, son mari **Ali** et ses **enfants** et sa jeune fille **Aya**.

A mon très cher frère **Rabeh**, son marie **Kalthoum** et ses **enfants**.

A mon très cher frère **Youcef**, et son marie **Laila**.

A mon très cher frère **Hocin**.

A mes très sœurs **Sabah**, **Aida**, **Sakina**.

A mes confidentes **Fatima Zahra Bacha**, **Naima** et sa petite fille **Fatouha**.

A tous les membres de famille **ABAYAHIA** et **GHOUMMID**, petite et grande.

A tous mes **Aimes**.

Table des matières

Notations et conventions	7
Introduction	8
1 Généralités sur les systèmes dynamiques	10
1.1 Systèmes dynamiques continus dans le temps	10
1.1.1 Système autonome et non autonome	10
1.1.2 Flot	11
1.1.3 Trajectoire (ou orbite)	11
1.1.4 L'espace des phases	11
1.1.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatives	12
1.1.6 Points critiques	13
1.1.7 Orbites périodiques	13
1.2 Systèmes dynamiques discret dans le temps	13
1.2.1 Définition et représentation	13
1.2.2 Orbites négatives et orbites positives	14
1.2.3 Points fixes	15
1.2.4 Stabilité	15
1.2.5 Stabilité locale	16
2 Attracteurs et attracteurs chaotiques	17
2.1 Attracteur et attracteur chaotique[2]	17

2.2	Sensibilité aux conditions initiales	18
2.3	Attracteur	19
2.3.1	Ensemble invariant	19
2.3.2	Bassin d'attraction	20
2.3.3	Propriétés d'attracteurs	20
2.3.4	Les différents types d'attracteurs	21
2.4	Attracteurs chaotiques	22
2.4.1	Définitions d'attracteur chaotique	22
2.4.2	Les différents types d'attracteurs chaotiques [1]	23
2.5	Exposant de L'yapunov	25
2.5.1	Exposant de L'yapunov d'un système en temps discret	26
3	Routes vers le chaos : Inverse collision de frontière doublement de période	28
3.1	Route vers le chaos (bifurcation)	28
3.1.1	Différente types des routes	29
3.1.2	Diagramme de bifurcation	29
3.2	Nouvelle Application[8]	30
3.2.1	Orbites bornées	31
3.2.2	Stabilité de point fixe	32
3.2.3	Orbites chaotiques	34
3.2.4	Inverse collision de frontière doublement de période route vers le chaos	34
	Conclusion	40

Notations et conventions

- $|\cdot|$: la valeur absolue.
- λ_i : les multiplicateurs caractéristiques
- DG : le jacobien de G
- le discriminant
- W^s : les variétés stables.
- W^i : les variétés instables.

Introduction générale

«Le monde est un chaos, et son désordre excède tout ce qu'on y voudrait apporter de remède.» Pierre Corneille.

L'existence du chaos, appelé également «chaos déterministe» pour bien le différencier d'un phénomène aléatoire, avait en fait été présenté par Poincaré à la fin du siècle dernier. S'intéressant aux problèmes de mécanique céleste, il avait en effet montré que, malgré un caractère déterministe, le problème des trois corps (par exemple Terre-Lune-Soleil) ne pouvait donner lieu à prédiction. Si la résolution analytique des équations du problème des trois corps est impossible, il est possible de déterminer numériquement les trajectoires. On a ainsi pu tester la stabilité de ce application en comparant les trajectoires suivies par un des corps à partir de deux positions initiales très proches : ces trajectoires restent proches l'une de l'autre à court terme et on peut donc prédire les éclipses!, mais elles deviennent complètement différentes à long terme. Une toute petite différence initiale a donc produit un effet considérable et on peut penser que l'application solaire est chaotique, mais fort heureusement sur des échelles de temps très grandes. C'est dans cette extrême sensibilité aux conditions initiales que réside l'origine de l'imprédictibilité du chaos déterministe. Poincaré avait remarqué cet effet puisqu'il écrit : " Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir et alors nous disons que cet effet est dû au hasard".

On sait que c'est E.Lorenz qui est à l'origine des lois du chaos en montrant qu'une infime variation « l'effet papillon » ou imprécision des calculs menait à des prévisions météorologiques complètement opposées au bout d'un certain temps (de Lyapunov), ce qui condamnait toute possibilité de prévision du temps à long terme, trop sensible aux " conditions initiales " et dont les divergences s'accroissent exponentiellement avec le temps. Du coup, c'est le déterminisme de la nature qui en est ébranlé, bien qu'il ne soit pas question de le supprimer puisqu'on parle même de « chaos déterministe », il ne s'agit en aucun cas de renier la science et son efficacité, mais reconnaître ses limites, les effets de seuil introduisant des instabilités, des indéterminations qui échappent au calcul, et donc

des scénarios multiples, " dépendants du chemin " emprunté dans un environnement d'équilibres multiples, de bifurcation.etc....

En 1972 qu'E.Lorenz donne une conférence scientifique inititulée : «prédictibilité : Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil provoque-t-il une tornade au Texas ?» L'image va faire le tour du monde et donner toute son ampleur aux théories du chaos (ce mot ne sera d'ailleurs « créé » que trois ans plus tard par deux autres mathématiciens).

En mathématiques, la thérie du chaos étudie le comportement des applications dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales, un phénomène généralement illustré par l'effet papillon. ...Le comportement chaotique est à la base de nombreux applications naturels, tels que la météo ou le climat. La théorie du chaos a montré que le monde n'avait pas une prédictibilité déterministe.

Nous avons représenté dans le premier chapitre généralités sur les systèmes dynamiques, qui comprend des systèmes dynamiques continues et discrètes avec d'autre définitions. Dans le deuxième chapitre, nous avons introduit la définition de bifurcation et attracteur chaotique a également parlé les attracteurs, bassin d'attraction, l'exposant de Lyapunov. Dans le troisième chapitre, et se termine nous appliquons étude sur l'application de Hénon en 3D, en ce qui concerne l'étude numérique et analytique.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques

1.1 Systèmes dynamiques continus dans le temps

1.1.1 Système autonome et non autonome

Système autonome

un système autonome est une application à évolution temporelle continue qui a implicitement du temps t :

$$\frac{dx}{dt} = G(x(t)) \quad (1.1)$$

Système non autonome

un système non autonome est une application à évolution temporelle continue qui dépend explicitement du temps t :

$$\frac{dx}{dt} = G(x, t) \quad (1.2)$$

1.1.2 Flot

On appelle flot de l'équation différentielle, l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi & : \quad \mathbb{R} \times X \longrightarrow X \\ (t, x_0) & \longrightarrow \varphi(t, x_0) = \varphi_t(x_0) = x(t, x_0) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Tel'que

- 1- Pour chaque x_0 fixé, $t \longrightarrow \varphi(t, x_0)$ est une solution de l'équation différentielle.
- 2- Le flot φ possède les propriétés suivantes :
- 3- $\varphi(0, x_0) = x_0$ en d'autres termes $\varphi(t, x_0)$ est la valeur à l'instant t de la solution qui vaut x_0 en $t = 0$.
- 4- $\varphi(t_1 + t_2, x_0) = \varphi(t_1(x_0)) \circ \varphi(t_2(x_0))$ pour tous $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Donc φ possède la propriété d'un semi-groupe.

1.1.3 Trajectoire (ou orbite)

Définition 1.1 Soit $x_0 \in X$ une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution de l'équation (1.3). L'ensemble des points $\{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$ est la trajectoire (ou orbite) dans l'espace d'état passant par le points x_0 à l'instant $t = 0$.

- Deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial.
- La trajectoire d'un système dynamique autonome ne dépend que l'état initial.

1.1.4 L'espace des phases

L'espace des phases(ou espace d'état)

Chez les physiciens, l'espace des phases est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié.

Dés que la dimension n du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "montalement" comment le système évolue, L'outil de passe pour y palier est

l'espace de phase. on considère chaque composante x_K de X (l'espace d'état) comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension n , L'évolution suivant t du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.

portrait de phase

Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'un système dynamique dans le plan de phase : à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point systèmes conservatifs et systèmes dissipatives

Le caractère conservatif ou non de la dynamique fait référence à un nouveau point de vue sur l'évolution dans l'espace de phases. En effet, les définitions que nous avons introduites jusqu'à présent sont implicitement rattachées à la détermination de trajectoires individuelles.

1.1.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatives

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un application qui dissipe de l'énergie.

Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Exemple : (l'application de Hénon)

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

Où a, b sont des paramètres réels, l'espace des phases est : \mathbb{R}^2 , l'espace des paramètres est : \mathbb{R}^2 .

1.1.6 Points critiques

Les points \bar{x} où le champ de vitesse v s'annule sont appelés points critiques, ou points d'équilibre. Ils correspondent à des points fixes du flot : $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$ pour tout t .

Un point d'équilibre est une trajectoire particulière. Une autre trajectoire particulière est la trajectoire qui se referme sur elle-même.

1.1.7 Orbites périodiques

On appelle cycle (ou trajectoire périodique ou orbite périodique) une trajectoire $\phi_t(x)$ qui n'est pas réduite à un point et telle qu'il existe $T > 0$ vérifiant $\phi_T(x) = x$. Le plus petit réel T strictement positif tel que $\phi_T(x) = x$ est appelé période, il est indépendant du point x pris sur la trajectoire.

1.2 Systèmes dynamiques discret dans le temps

1.2.1 Définition et représentation

L'étude de la stabilité des solutions périodiques, grâce à l'application de Poincaré aux multiplicateurs caractéristiques, permet d'entrevoir l'importance des systèmes dynamiques discrets, ou, dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes. Un système dynamique discret est de la forme :

$$x_{k+1} = G(x_k) \tag{1.4}$$

où G est une application régulière d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans lui-même. Le système continu $\frac{dx}{dt} = v(x)$ peut être étudié comme un système discret si, au lieu de considérer son flot continu ϕ_t , on considère $\tau > 0$ ("sorte" de période d'échantillonnage) et l'application associée.

$$G : \begin{array}{l} U \longrightarrow U \\ x \longmapsto G(x) = \phi_\tau(x) \end{array}$$

Comme $\phi_\tau \circ \phi_\tau = \phi_{2\tau}$, il est clair que l'étude de ϕ_t lorsque $t \rightarrow +\infty$ et celle de

$$G^k = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k\text{-fois}}$$

lorsque l'entier k tend vers $+\infty$ doivent être très similaires.

Nous rappelons ici, succinctement, comment les notions et résultats précédents, introduits pour les applications continues, se transposent aux les systèmes discrets.

1.2.2 Orbites négatives et orbites positives

Orbite positive

Définition 1.2 Une orbite positive O^+ d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de G :

$$O^+(x_0) = \{x_0, G(x_0), G^2(x_0), \dots, G^k(x_0), \dots\}$$

Si G inversible alors :

$$\underbrace{G^{-k}(x_0) = G^{-1} \circ G^{-1} \circ \dots \circ G^{-1}(x_0)}_{k\text{-fois}}$$

Orbite négative

Définition 1.3 Une orbite négative O^- d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de G :

$$O^-(x_0) = \{x_0, G^{-1}(x_0), G^{-2}(x_0), \dots, G^{-k}(x_0), \dots\}$$

Si $O^+(x_0)$ et $O^-(x_0)$ existent alors l'orbite $O(x_0)$ de x_0 est l'ensemble :

$$O(x_0) = O^+(x_0) \cup O^-(x_0)$$

1.2.3 Points fixes

Soit un système autonome ou non, caractérisé par l'équation d'état (1,1) ou (1,2) , un état d'équilibre est caractérisé par la relation suivante :

$$F(x) = 0.$$

Tout solution x vérifiant cette relation est appelée position d'équilibre point singulier, point fixe ou encore solution stationnaire. On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Ils s'agit des nœuds stables et des foyer stables.

1.2.4 Stabilité

Puisque les solutions de la plupart des applications ne s'expriment, pas au moyen des fonctions élémentaires ou par des quadratiques on recourt également à des méthodes d'intégrations approchées. Le défaut de ces méthodes, c'est qu'elles ne donnent qu'une solution particulière, il faut refaire tous les calculs. Connaissant une solution particulière, on ne peut pas se prononcer sur le caractère des autres solutions.

La question de la stabilité d'une solution ou des positions d'équilibre est une des questions fondamentales de la théorie qualitative des systèmes dynamiques, la réponse de cette question a été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe A. Lyapunov (1857 - 1918).

Un point d'équilibre de système continu correspond à ce que l'on appelle aussi un régime stationnaire. La question de la stabilité expose alors des termes très simples : si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il ? Ou encore : une petite perturbation, qui éloigne légèrement le système de son régime stationnaire, peut-elle avoir des conséquences

importantes et être amplifiée au cours du temps.

1.2.5 Stabilité locale

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction réelle définie une application discrète, soit $Df(x_0)$ sa matrice Jacobienne évaluée au point fixe x_0 de l'application f , pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe x_0 on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

Définition 1.4 *Les valeurs propres du jacobien $Df(x_0)$ sont appelées multiplicateurs caractéristiques de f en x_0 .*

Définition 1.5 *Le point fixe x_0 de f est dit stable si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.*

Définition 1.6 *Le point fixe x_0 de f est dit instable si l'un des multiplicateurs est de module strictement supérieur à 1.*

Définition 1.7 *Le point fixe x_0 de f est dit point selle si au moins un multiplicateur est de module strictement inférieur à 1 et les autres multiplicateurs sont tous de module strictement supérieur à 1.*

Chapitre 2

Attracteurs et attracteurs chaotiques

2.1 Attracteur et attracteur chaotique[2]

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de définition communément admise l'attracteur. La notion d'attracteur est liée à un type de régime asymptotique. Dire d'une application qu'il possède plusieurs attracteurs, c'est aussi dire qu'il admet plusieurs types notablement différents de régimes asymptotiques.

En effet, puisqu'un attracteur est un ensemble invariant, sa dimension dans un espace tridimensionnel doit être strictement inférieure à 3. Mais nous cherchons également un attracteur dont la dimension n'est ni 1 (point fixe) ni 2 (cycle). Nous recherchons donc des objets géométriques complexes de dimension non - entière.

De telles structures existent, moyennant une définition plus générale du concept de dimension. Mandelbrot leur a donné le nom de fractales. Nous examinerons dans ce chapitre le problème de leur dimension. Pour l'heure, essayons de mieux caractériser ces attracteurs. On comprend bien que leur nature doit être radicalement différente de celle d'un tore, qui ne peut être attracteur que d'un régime périodique. Les objets considérés ici, par contre, sont le siège de phénomènes aperiodiques et du chaos. On les appelle des attracteurs étranges ou chaotiques. Et pour cause : il s'agit d'ensembles compacts, donc bornés, dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques, dont l'une des caractéristiques est d'être dense dans l'ensemble.

téristiques essentielles est la S C I. (les trajectoires issues de conditions initiales proches s'écartent exponentiellement).

Comment peut-on faire coexister l'attraction, qui implique le resserrement des trajectoires, avec la S C I, qui implique leur écartement ? La solution réside dans le concept d'hyperbolicité de l'attracteur [1] : l'attraction s'opère dans une direction, et la divergence dans une autre. La surface contenant les trajectoires divergentes est appelée variété instable, alors que celle contenant les trajectoires convergentes sera dénommée variété stable. Notons que ceci ne peut se concevoir que dans un espace de phase d'au moins trois dimensions. Les attracteurs étranges sont caractéristiques l'évolution des applications chaotiques, au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. On va parler de ce type d'attracteur Dans ce chapitre.

2.2 Sensibilité aux conditions initiales

La **S.C.I** est un phénomène découvert dès la fin du *XIX^{ième}* siècle par Poincaré dans des travaux concernant le problème à N corps en mécanique céleste, puis par Hadamard avec un modèle mathématique abstrait aujourd'hui baptisé « flot géodésique sur une surface à courbure négative ». Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Il a été redécouvert en 1963 par Lorenz lors de ses travaux en météorologie.

Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Ce résultat est souvent vulgarisé sous le nom « d'effet papillon ».

La **S.C.I** se traduit mathématiquement par l'hyperbolicité d'une partie de l'espace des phases d'application, hyperbolicité à laquelle est associée un ensemble d'exposants de Lyapunov positifs, ainsi qu'une entropie topologique également positive.

Exemple :

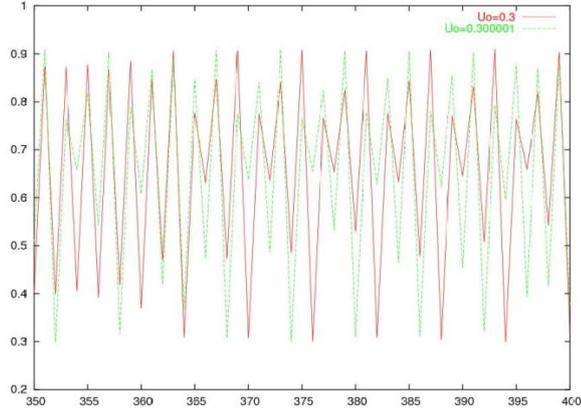


FIG. 2-1 – L'évolution d'une population d'individus dans le temps pour des conditions initiales très proches $U_{n+1} = 4aU_n(1 - U_n)$ ($u_0 = 0.3$ et $u_0 = 0.300001$).

2.3 Attracteur

2.3.1 Ensemble invariant

Définition 2.1 [Ensemble invariant] Soit A un sous-ensemble de l'espace des phases U ; A est dit invariant (resp. positivement invariant) par un flots φ_t , si pour tout t dans \mathbb{R} (resp. dans $[0, +\infty[$), $\varphi_t(A)$ est inclus dans A .

Définitions d'attracteur

Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle. On donne un seul définition possible d'attracteur :

Définition 2.2 [Guckenheimer, Holmes] Soit $\langle X, g \rangle$ un système dynamiques discret, Une sous-partie A de X est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1. A est fermée;
2. A est positivement invariante;
3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :

- (a) U est positivement invariant ;
- (b) U est attiré par $A : \forall u \in U, \lim_{t \rightarrow \infty} d(g^t(u), A) = 0$.

Exemple 2.1 Dans l'espace \mathbb{R}^2 considérons l'application discret dont la fonction successeur est la suivante :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

La variété instable $\mathbb{R}_i^2 = W^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ est non-vide, fermée, et strictement positivement invariante. De plus, elle est un attracteur global en un seul pas. Au contraire, la variété stable $\mathbb{R}_s^2 = W^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$ est non-vide, fermée et strictement positivement invariante mais n'est pas un attracteur.

2.3.2 Bassin d'attraction

On rappelle que tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions 3.a et 3.b dans la définition (2.2) est appelée voisinage attiré par A . Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré U , on ne peut pas affirmer qu'il est unique : en effet A peut admettre plusieurs voisinages attirés par lui-même. On donne quelques définitions du bassin d'attraction :

Définition 2.3 On appelle bassin d'attraction $B(A)$ de A le plus grand des tels voisinages attirés, c'est à dire $B(A) = \bigcup \{U \in P(X) : U \text{ est un voisinage attiré } A\}$.

Définition 2.4 [Zeraoulia, Sprott] Le bassin d'attraction $B(A)$ d'un attracteur A est l'ensemble des conditions initiales (l'ensemble des tous états initiaux des orbites) est à long-temps un comportement approche vers A .

2.3.3 Propriétés d'attracteurs

1. A est un sous ensemble borné de l'espace est de volume nul, invariant par le flot φ_t autrement dit, tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t .

2. Il existe un ensemble $B \subset A$, tel que pour tout voisinage de A , la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A . Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans B tend vers l'attracteur, cette "zone d'influence" est le (Bassin d'attraction) .
3. Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

2.3.4 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de système non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

1- Les points fixes

On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des nœuds stables et des foyers stables.

2- Les cycles limites : orbites périodiques

La représentation d'une telle solution dans le plan de phase nous donne une trajectoire fermée appelée cycle limite et telle qu'aucune trajectoire commençant suffisamment proche d'elle, ne soit également fermée. En général on a trois types de cycle limite :

- (a) cycle limite stable.
- (b) cycle limite instable.
- (c) cycle limite semi-stable(en pratique instable).

3- Les cycles limites pseudo-périodiques

Un comportement pseudo-périodique(quasi-périodique) peut être vu comme la somme d'un nombre finis de termes périodiques dont le rapport des périodes deux à deux n'est pas rationnel.

2.4 Attracteurs chaotiques

Il n'existe pas à proprement parler de définition positive des orbites chaotiques. Un mouvement chaotique est non déterministe mais il ne s'agit pas d'un mouvement aléatoire. Il possède un spectre fréquentiel continu (caractère erratique) et présente en outre une extrême sensibilité aux conditions initiales. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé.

On peut définir un attracteur chaotique (ou attracteur étrange) comme étant un attracteur de volume nul qui n'est ni un point fixe, ni cycle limite, ni quasi-périodique. Dans une section de Poincaré, un attracteur chaotique décrit une infinité de points dont l'ensemble possède une structure topologique auto-similaire avec une dimension fractale non entière [7]. De ce fait, on ne peut pas réduire un mouvement chaotique à un point fixe ou un cycle limite comme pour les autres comportements asymptotiques. Néanmoins, les solutions chaotiques présentent des propriétés de périodicité dans l'espace non pas euclidien mais celui d'Hausdorff [6].

2.4.1 Définitions d'attracteur chaotique

Définition 2.5 *L'attracteur chaotique (ou étrange) est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.*

Définition 2.6 *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une application T de l'espace s'il existe un voisinage R de A ; c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans R vérifiant les propriétés suivantes :*

1- *Attraction : R est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans R , est entièrement contenue dans R . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.*

2- Il est contenu dans un espace fini. son volume est nul. sa dimension est fractale (non entière).

3- Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.

4- Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).

2.4.2 Les différents types d'attracteurs chaotiques [1]

Nous donnons une classification commune d'attracteurs chaotiques des systèmes dynamiques. En règle générale, à l'heure actuelle, les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types principales :

- 1- Attracteur hyperbolique.
- 2- Attracteur de type de Lorenz.
- 3- Quasi ttracteurs.

Exemple : L'attracteur de Hénon : L'attracteur de M. Hénon (1976), associé à une application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme $(x, y) \rightarrow (X = 1 - ax^2 + y, Y = bx)$, est initialement issu d'un problème d'astronomie concernant les amas globulaires. L'application différentiel initial (application de Hénon - Heiles) est un application hamiltonien non intégrable ; il est traité par la méthode des surfaces de section de Poincaré pour lui associer une application du plan dans lui-même dont l'étude plus abordable permet d'analyser le problème initial et ici de décrire son comportement chaotique par l'attracteur de Hénon. Ce procédé d'analyse d'un application différentiel non intégrable (et c'est le cas le plus souvent !) par une méthode de section est assez courant ; bien que l'application itératif associé soit lui aussi non linéaire, son analyse est souvent plus facile à développer (Figure 2.2).

Exemple :

L'attracteur de Lorenz : l'attracteur de E. Lorenz signe, en 1963, les débuts de la météorologie moderne : c'est en se posant la question de savoir comment prévoir le temps

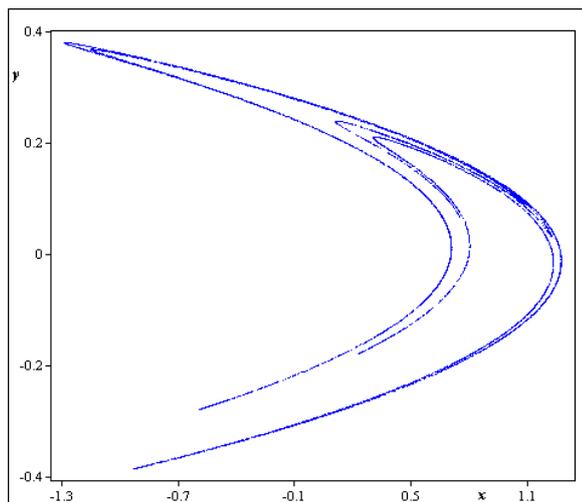


FIG. 2-2 – Attracteur de Hénon avec $(a, b) = (1.4, 0.3)$ et $(x_0 = 0.25, y_0 = 0.25)$.

à l'avance que E.Lorenz a abouti à son système différentiel et à son attracteur étrange . Il s'agit de modéliser certains mouvements atmosphériques : on considère pour cela le mouvement d'un fluide entre deux plaques horizontales portées à des températures légèrement différentes (la plaque la plus chaude en bas). Pour une différence de température suffisante, il apparaît alors des tourbillons convectifs qui vérifient les équations de la convection de Rayleigh-Bénard dont la formulation est classique en mécanique des fluides : on obtient un système de trois équations aux dérivées partielles. Avec quelques hypothèses simplificatrices, on peut associer à ce application aux dérivées partielles un système différentiel ordinaire de la forme (a, b, c étant des paramètres réels, b décrivant la différence des températures des deux plaques) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = bx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - cz \end{array} \right.$$

(on observera que les seconds membres de ces équations sont assez simples mais cependant non linéaires). On effectue une résolution numérique de ces équations : pour b supérieur à

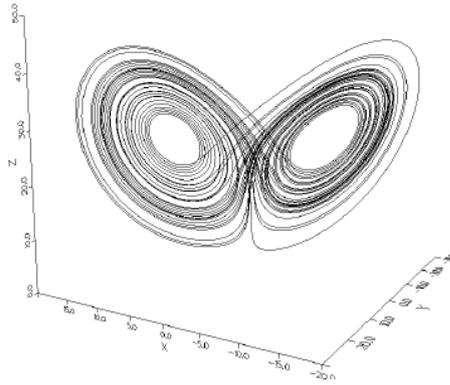


FIG. 2-3 – Attracteur de Lorenz : $(a, b, c) = (10, 28, 8/3)$.

une certaine valeur critique, on obtient un comportement chaotique pour les trajectoires de ce application (l'attracteur étrange de Lorenz) ; simulez une vue en 3 dimensions de l'attracteur de Lorenz. L'attracteur a la forme d'un papillon en vol, pour laquelle le deux "yeux" des ailes seraient remplacés par vide (Fig (2.3)).

2.5 Exposant de L'yapunov

L'étude formelle de la théorie du chaos met à notre disposition différents outils permettant d'identifier sans ambiguïté si la dynamique d'un système est chaotique ou non. Parmi ces outils, on peut citer les exposants de Lyapunov qui constituent une approche très naturelle de la mesure de l'état de chaos d'un système. Le chaos déterministe se reconnaît essentiellement par la manière dont il est apparu. Mais, une fois établi, sa signature consiste en un objet de l'espace de phases que l'on appelle un attracteur étrange. Ce non d'attracteur provient du fait que l'objet en question "attire" les trajectoires de l'espace de phases, en imposant deux conditions initiales différentes, on obtient deux trajectoires produisant des figures ayant même allure générale mais où la répartition exacte des points est différente. Quant au terme d'étrange

Les trajectoires de l'attracteur vérifient la notion de sensibilité aux conditions ini-

tiales (S.C.I). C'est dans ce sens qu'elles sont chaotiques. on peut quantifier la sensibilité aux conditions initiales par le degré de divergence. L'exposants de Lyapunov mesurent l'attraction exponentielle ou la séparation dans le temps de deux trajectoires adjacentes, dans l'espace de phases, ayant des conditions initiales différentes.

2.5.1 Exposant de Lyapunov d'un système en temps discret

G une application unidimensionnelle, $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $x_{n+1} = G(x_n)$, x_0 et $x_0 + \varepsilon$ deux points initiaux proches après n itération on aura :

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} = |G^n(x_0 + \varepsilon) - G^n(x_0)| \quad (2.1)$$

quand n tend vers l'infini et ε aussi

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \left| \frac{G^n(x_0 + \varepsilon) - G^n(x_0)}{\varepsilon} \right| \quad (2.2)$$

notons $x_i = G^i(x_0)$ et on sait que

$$G^n(x_0) = G(G^{n-1}(x_0)) \quad (2.3)$$

par règle de chaîne on obtient :

$$\frac{dG^n(x_0)}{dx} = G'(x_{n-1})G'(x_{n-2})\dots G'(x_1)G'(x_0) \quad (2.4)$$

alors l'exposant de Lyapunov égale :

$$\lambda = \lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |G'(x_i)| \quad (2.5)$$

Définition 2.7 On considère l'application discret du plan suivant :

$$X_{k+1} = G(X_k), X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

où la fonction $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est le champ de vecteurs associé avec le système (2.4). Soit $J(X_k)$ sa Jacobienne en $X_k \in \mathbb{R}^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, et de définir la matrice :

$$T_n(X_0) = J(X_{n-1}) J(X_{n-2}) \dots J(X_1) J(X_0). \quad (2.7)$$

Par ailleurs, soit $J_i(X_0, n)$ le module de la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de la $n^{\text{ème}}$ matrice $T_n(X_0)$, où $i = 1, 2$ et $n = 0, 1, 2, \dots$. Maintenant on a la définition : les exposants de Lyapunov pour le système discret en dimension deux en temps discret sont définis par la relation :

$$l_i(X_0) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} J_i(X_0, n)^{\frac{1}{n}} \right), i = 1, 2. \quad (2.8)$$

Exemple 2.2 Soit l'équation discrète quadratique suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k - ax_k^2 = ax_k(1 - x_k) \\ y_{k+1} = b - x_k - by_k + x_k y_k = (b - x_k)(1 - y_k) \end{cases}$$

La matrice jacobienne du équation est :

$$\begin{pmatrix} a(1 - 2x) & 0 \\ (1 + y) & -b + x \end{pmatrix}$$

parce que La matrice jacobienne est triangulaire, les exposants de Lyapunov sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln a |1 - 2x| \\ \lambda_2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln |-b + x| \end{cases}$$

Chapitre 3

Routes vers le chaos : Inverse collision de frontière doublement de période

A ce jour, on a distingué au moins trois routes ou transitions dans lesquelles un application non linéaire peut devenir chaotique si un paramètre de contrôle externe est varié. Toutes ces routes peuvent être vérifiées expérimentalement et montrent un comportement universel fascinant.

3.1 Route vers le chaos (bifurcation)

La théorie de la bifurcation étudie le changement que subit une application sous la variation d'un paramètre ou plus, donc la bifurcation signifie un changement dans le comportement qualitatif d'une application, suite à une variation d'un paramètre de l'application. Par exemple déstabilisation d'un point fixe stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur. La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation. Notons que la transition vers le chaos s'opère selon des bifurcations, il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos.

On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est progressive, mais marquée des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcation.

3.1.1 Différents types de routes

Dans cette section, on considère trois types de routes locales : La route de doublement de période, la route point selle (ou nœud-col) et la route de Neimark. Ces routes sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation de l'application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite. Tous les types de bifurcations étudiées correspondent toujours à $|\lambda_i| = 1$ (où λ_i représente les multiplicateurs).

Route doublement de période ($\lambda = -1$)

Cette route a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égale à -1 . Un cycle d'ordre k qui subit cette route va changer de nature et crée un cycle d'ordre $2k$ de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'application d'un cycle d'ordre 2 stable.

Route nœud-col ($\lambda = +1$)

La route $\lambda = +1$ correspond à la situation où l'un des multiplicateurs est égale à $+1$. Ce type de route donne naissance à deux cycles d'ordre k en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable.

Route Neimark ($\rho = 1$)

Cette route se produit lorsque la matrice Jacobienne possède deux multiplicateurs complexes conjugués $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ et de plus $|\lambda_{i=1,2}| = 1$.

3.1.2 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire d'application en fonction du paramètre de contrôle. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en

fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée.

3.2 Nouvelle Application[8]

Dans cette section nous étudions une application simple est obtenue par des modifications de l'application Hénon :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy - z^2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

l'application (3.2) possède une propriété très importante dans l'étude des applications discrètes, car leurs orbites sont toutes bornées. D'autre part l'application (3.2) est capable de réaliser deux types d'attracteurs chaotiques :l'attracteur chaotique de type Lorenz et l'attracteur chaotique de type multiples-plis de différentes routes vers le chaos.

On considère l'application modifiée de Hénon (3.2) f en 3-D définie par $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \sin z \\ a + bx + cy - \sin z^2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

où le terme linéaire z dans l'application de Hénon (3.1) est remplacé par le terme non linéaire $\sin z$, et le terme non linéaire z^2 est remplacé par le terme non linéaire $\sin z^2$. Notre application (3.2) est capable de concrétiser quelques attracteurs chaotiques de type Lorenz, pour certaines valeurs de ses paramètres de bifurcation, d'une part la fonction associée par l'application (3.2) est continue sur \mathbb{R}^3 , le déterminant de la matrice jacobienne de l'application (3.2) n'est pas constante et les deux applications (3.1) et (3.2) ne sont pas topologiquement équivalentes. L'application (3.2) équivalente à l'équation aux

différences de troisième ordre :

$$z_{t+1} = a + b \sin z_{t-2} + c \sin z_{t-1} - \sin z_t^2 \quad (3.3)$$

3.2.1 Orbites bornées

Dans cette section, nous allons montrer que toutes les orbites de l'application (3.2) sont bornées. D'autre part il a été montré dans (@@) que l'ensemble des orbites bornées de l'application de Hénon en 2-D sont situés à l'intérieur d'un box, et il a été montré dans(@@) que l'ensemble orbites bornées de l'application préservant le volume en 3-D sont situés à l'intérieur d'un cube. De même, nous allons montrer que toutes les orbites de l'application (3.2) sont situés à l'intérieur dans un cuboïde.

Théorème 3.1 *Toutes les orbites de l'application (3.2) sont bornées pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $t > 1$, et pour toutes les conditions initiales finies (x_0, y_0, z_0) .*

Preuve. Nous utilisons le résultat standard suivant : La suite réelle $(z_n)_n$ est bornée s'il existe un nombre réel positif k tel que $|z_n| \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans notre cas, la suite $(z_t)_t$ donnée en (3.3) satisfait l'inégalité suivante : $|z_t| \leq 1 + |a| + |b| + |c|$ car $|\sin z| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Le nombre réel $1 + |a| + |b| + |c|$ est positif, donc la suite $(z_t)_t$ est bornée pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $t > 1$. Ce qui implique que toutes les orbites de l'application (3.2) sont bornées pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $t > 1$.

Théorème 3.2 Conclusion 3.3 *Les orbites de l'application (3.2) sont situés à l'intérieur du cuboïde :*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 + |a| + |b| + |c|\} \quad (3.4)$$

Preuve. Il est très facile prouver ce théorème, puisque l'application (3.2) est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin z_{t-1} \\ \sin z_t \\ a + b \sin z_{t-2} + c \sin z_{t-1} - \sin z_t^2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

3.2.2 Stabilité de point fixe

Dans cette section, nous examinons les domaines des paramètres de bifurcation $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que les point fixes de l'application (3.2) soient stable.

Théorème 3.4 *Le point fixe $A(x_0, y_0, z_0)$ de l'application (3.2) est stable pour tout $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $(b, c) \in \cup_{i=1}^{i=2} \Omega_i$, où :*

$$\Omega_1 : \begin{cases} -1 < b < 1 \\ b(b \cos z_0 + 2z_0 \cos z_0^2) - 1 < c < \frac{1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|}{\cos z_0} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\Omega_2 : \begin{cases} -1 < b < 1 \\ \frac{1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|}{\cos z_0} < c < b(b \cos z_0 + 2z_0 \cos z_0^2) - 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Preuve. Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne de l'application (3.2) calculé au point $A(x_0, y_0, z_0)$, prend la forme :

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 + 2z_0 \cos z_0^2 \lambda^2 - c \cos z_0 \lambda - b \cos z_0$$

d'après le critere Jery Koyen, nous concluons que le point fixe A de l'application (3.2) est stable si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1- $|b \cos z_0| < 1$.
- 2- $1 + 2z_0 \cos z_0 - c \cos z_0 - b \cos z_0 > 0$.
- 3- $1 - 2z_0 \cos z_0 - c \cos z_0 + b \cos z_0 > 0$.
- 4- $1 - b^2 \cos^2 z_0 > 2bz_0 \cos z_0 \cos^2 z_0 - c \cos z_0$.

D'après (1) on tire (5) $|b| < 1$, et d'après (2) et (3) nous avons (6)

$$c \cos z_0 < 1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|$$

et d'après (4) on tire (7)

$$c \cos z_0 > b^2 \cos^2 z_0 + 2bz_0 \cos z_0 \cos^2 z_0 - 1$$

et d'après (6) et (7) nous obtenons (8)

$$b \cos z_0 (b \cos z_0 + 2z_0 \cos z_0^2) - 1 < c \cos z_0 < 1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|$$

Enfin, les inégalités (1) et (8) donnent les conditions de stabilité du point fixe A .

Par exemple, le point fixe de l'application (3.2) est la solution du système :

$$x_0 = y_0, y_0 = \sin z_0, z_0 = a + b \sin z_0 + c \sin z_0 - \sin z_0^2. \quad (3.8)$$

On a donc l'équation :

$$z_0 - (b + c) \sin z_0 + \sin z_0^2 - a = 0 \quad (3.9)$$

Très difficile de calculer les points fixes de l'application (3.2) analytiquement, on remarque si $a = 0$, le point $(0, 0, 0)$ est un point fixe de l'application (3.2) pour toutes les valeurs des paramètres de bifurcation $(b, c) \in \mathbb{R}^2$. Ensuite, nous avons le théorème suivant :

Si $a = 0$, le point fixe $(0, 0, 0)$ est stable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} -1 < b < 1 \\ b^2 - 1 < c < 1 - |b| \end{cases} \quad (3.10)$$

Si nous choisissons $a = 0, b = 0.8$ et $c = 0.1$. Alors, avec ces valeurs, le point fixe $(0, 0, 0)$ est asymptotiquement stable, et nous avons les trois valeurs propres suivantes : $\lambda_1 = 0.4821 - 0.7728i, \lambda_2 = 0.4821 + 0.7728i$ et $\lambda_3 = 0.9642$, donc $|\lambda_{i=1,2,3}| < 1$.

3.2.3 Orbites chaotiques

Les orbites bornées jouent un rôle vital dans les système dynamique. Car nous avons qu'un système dynamique est chaotique si elle est bornée. D'autre part, dans des cas particuliers de l'application (3.2) le chaos peut se produit si elle a admis au moins un point fixe n'est pas asymptotiquement stable (point fixe instable).

Définissons les sous-ensemble suivants de \mathbb{R}^2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_{11} : b \leq -1 \text{ ou } b \geq 1 \\ \bar{\Omega}_{12} : c \leq b(b \cos z_0 + 2z_0 \cos z_0^2) - 1 \text{ ou } c \geq \frac{1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|}{\cos z_0} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_{21} : b \leq -1 \text{ ou } b \geq 1 \\ \bar{\Omega}_{22} : c \leq \frac{1 - |b \cos z_0 - 2z_0 \cos z_0^2|}{\cos z_0} \text{ ou } c \geq b(b \cos z_0 + 2z_0 \cos z_0^2) - 1 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

et :

$$\bar{\Omega}_i = \cup_{j=1}^{j=2} \bar{\Omega}_{ij}, i = 1, 2.$$

ici, les sous-ensembles $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq 2}$ sont les complémentaires dans \mathbb{R}^2 des sous-ensembles $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq 2}$ donnés par (3.4) et (3.5). Alors on a la conclusion suivante :

Conclusion 3.5 *Si $a \in \mathbb{R}$ et $(b, c) \in \cap_{i=1}^{i=2} \cup_{j=1}^{j=2} \Omega_{ij}$, alors, possible d'existe des orbites chaotiques par l'application (3.2), où $\bar{\Omega}$ est les compléments en \mathbb{R}^3 de l'ensemble Ω .*

3.2.4 Inverse collision de frontière doublement de période route vers le chaos

Dans cette section, nous illustrons certaines observations des attracteurs chaotiques, les comportements dynamiques de l'application (3.2) sont étudiées par méthode numé-

rique, ensuite pour déterminer le comportement à long terme et les régions chaotiques, nous représentons numériquement l'exposant de Lyapunov et le diagramme de bifurcation de type Lorenz :

D'après le diagramme de bifurcation Fig(3.2), on en déduit que l'application (3.2) propose ne présente pas un classique route vers le chaos pour les valeurs de paramètres sélectionnées. L'application (3.2) affiche l'existence route d'inverse collision de frontière doublement de période.

Nous varions le paramètre a , $a \in [-1, 1]$ et fixons $b = 0.8$, $c = 0.99$ on peut observer une inverse bifurcation de doublement de période route vers le chaos, comme indiqué dans Fig.(3.2), pour $0 \leq a < 0.04$, l'application (3.2) présente des attracteurs chaotiques de type Lorenz comme représenté sur les Fig.((3.4),(3.5),(3.6),(3.7)). Par exemple, pour $a = 0.003$, $b = 0.8$ et $c = 0.99$, la matrice jacobienne de l'application (3.2) évaluée au point $(-0.0038, -0.0038, -0.0038)$ admet trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = -0.6340 - 0.4747i$, $\lambda_2 = -0.6340 + 0.4747i$ et $\lambda_3 = 1.2755$ et les exposants de Lyapunov sont $L_1 = L_2 = -0.2332$ et $L_3 = 0.2433$. Fig.(3.3) représente le spectre de l'exposant de Lyapunov le plus grand de l'application (3.2) par rapport au paramètre a , $a \in [-1, 1]$. Les portraits des phases de l'application (3.2) sont représentés dans les Fig.((3.4),(3.5),(3.6),(3.7)).

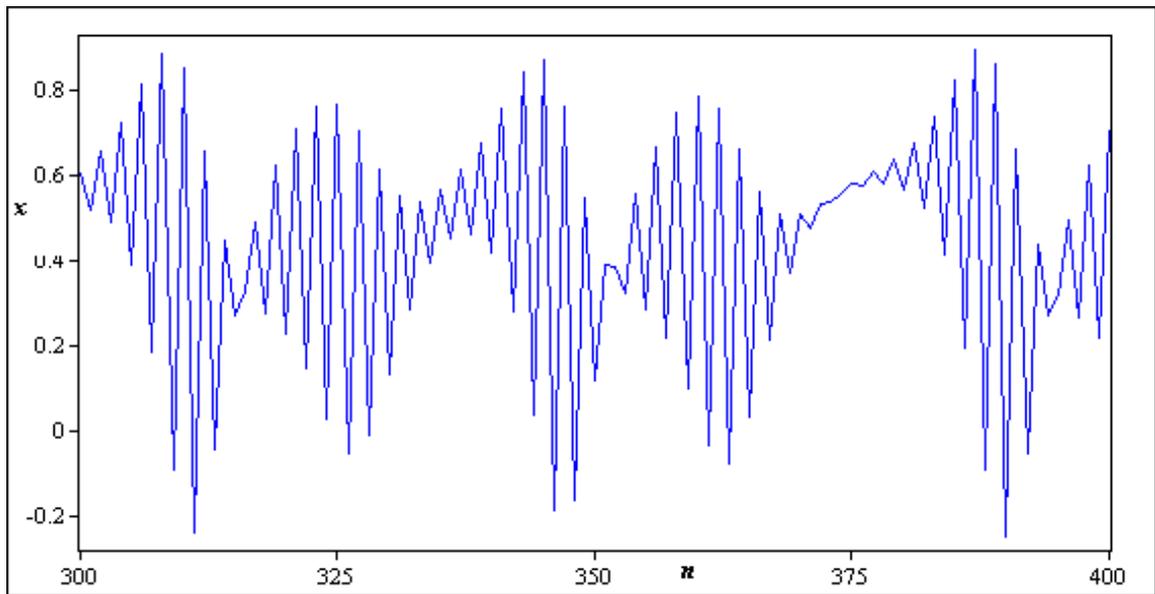


FIG. 3-1 – Série (x,n) .

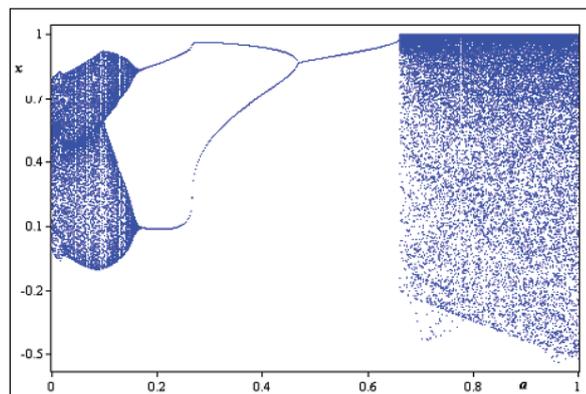


FIG. 3-2 – Diagramme de bifurcation de l'application (3.2) obtenu avec $b = 0.8$, $c = 0.99$ et $-1 \leq a \leq 1$.

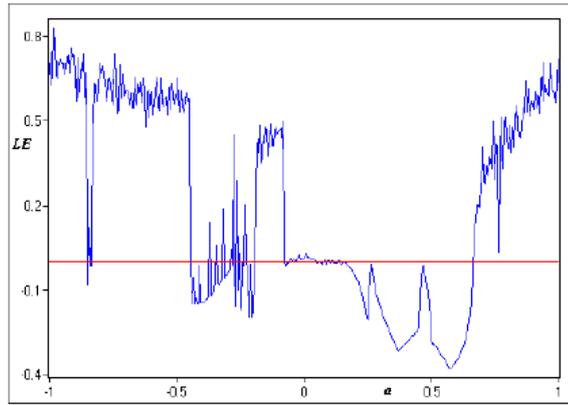


FIG. 3-3 – Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (3.2) obtenue avec $b = 0.8$, $c = 0.99$ et $-1 \leq a \leq 1$.

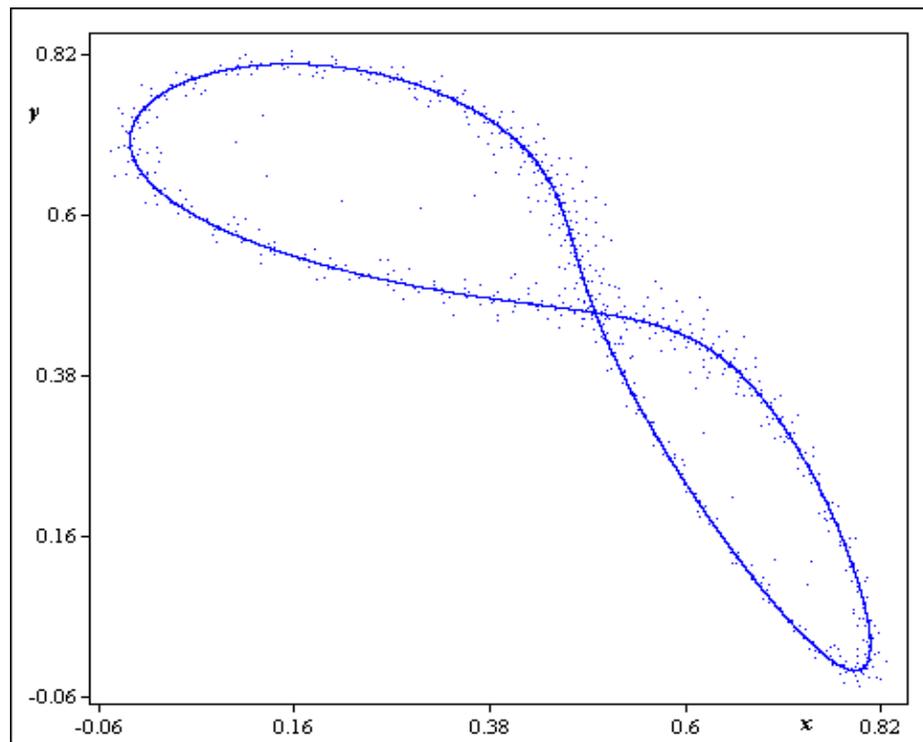


FIG. 3-4 – Attracteur chaotique de l'application (3.2) avec $a = 0.023$.

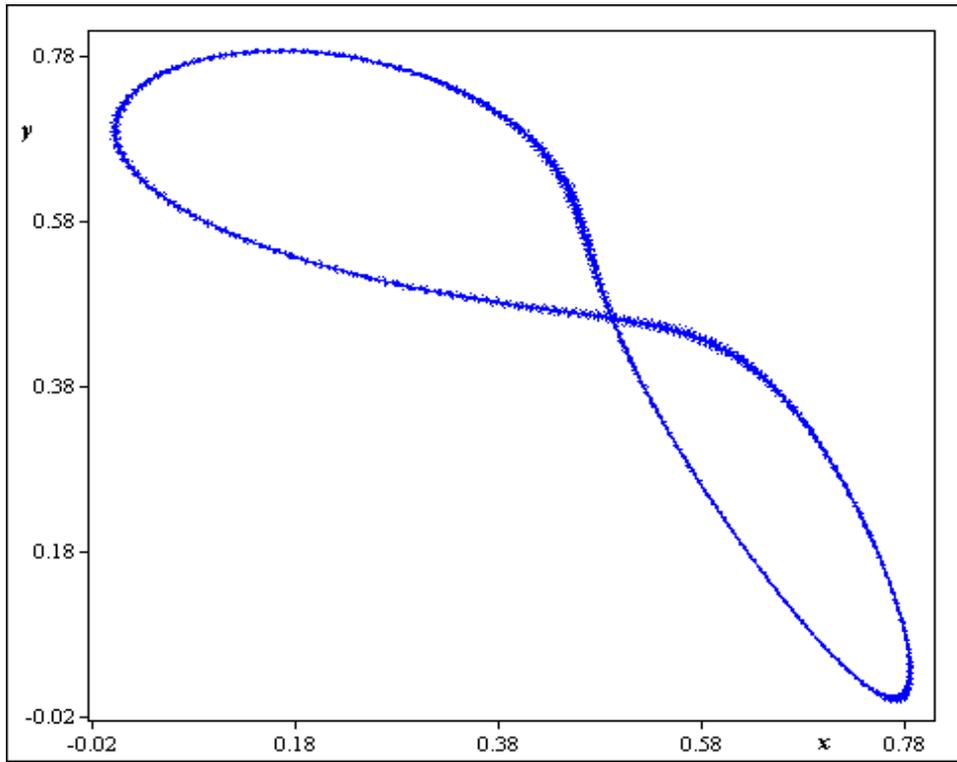


FIG. 3-5 – Attracteur chaotique de l'application (3.2) avec $a = 0.01$.

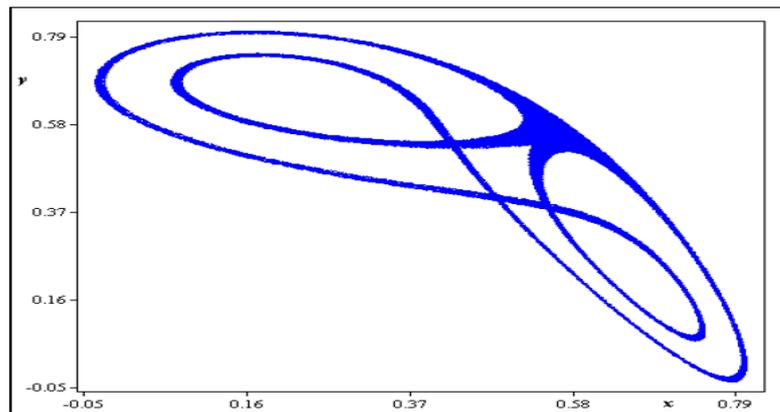


FIG. 3-6 – Attracteur chaotique avec $a = 0.01$.

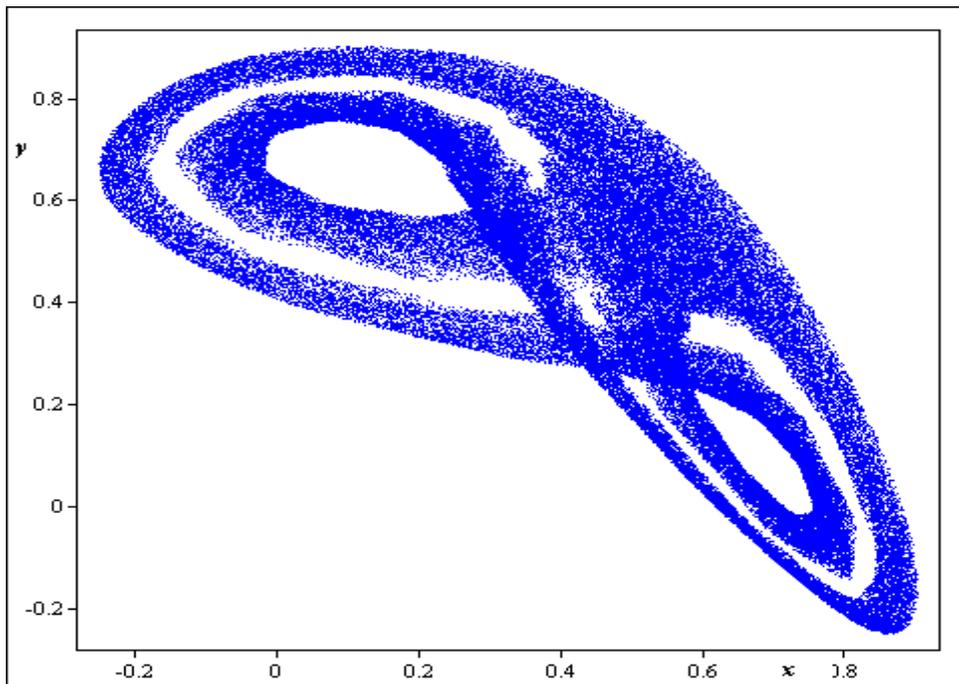


FIG. 3-7 – Attracteur chaotique avec $a = 0.003$.

Conclusion général

Dans ce mémoire on a présenté l'étude analytique et numérique de l'application de Hénon modifiée en 3D. on met l'accent sur les différentes routes vers le chaos dans les systèmes dynamiques discrets en 3-D et on présente une nouvelle application de 3-D qui présente une nouvelle route vers le chaos c'est : l'inverse collision de frontière doublement de période.

Bibliographie

- [1] A. Chenciner, Stabilité Structurale et Ergodicité (ou catégorie et mesure), Journal de Physique, (1978).
- [2] C. P. Li, W. H. Deng, D. Xu, Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order, Physica A360, 171-185, (2006).
- [3] G. Chen. Controlling chaos and Bifurcations in Engineering systems. London CRC Press, 1999.
- [4] E. Zeraouia. Etude de Quelques Types de Systemes Chaotique : Generalisation d'un Modele Issu du Modele de Chen (2006).
- [5] H. G. Schuster. Handbook of Chaos Control. Weinheim Wiley-VCH, 1999.
- [6] H. Schuster Georg. "Deterministic Chaos-an Introduction". 4 edition, Wiley, (2005), 288pp.
- [7] L. Y. Lu and Z. H. Lu, The Periodicity of chaotic Impact Oscillators in Hausdorff Phase Spaces. Journal of Sound and Vibration, 235(1), 105-116, (2000).
- [8] M. Mammeri. A large Chaotic Region in 3-D Sinusoid Discret Map (2016).
- [9] R. Botet. Les fractales en physique. Technique de L'Ingénieur, AF 4500, 1-18, (2000).
- [10] C. Robinson. Dynamical Systems : Symbolic Dynamies, and Chaos. CRC Press, (1998).
- [11] M. Benedics and L. Carleson. The dynamice of the Henon map. Annals of mathematics, 133, 73-169, (1991).

- [12] E. Zeraouia and J.C. Sprott, 2-D quadratic maps and 3-D ODE systems : A Rigorous Approach, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A, no 73, (2010).
- [13] S. V. Gonchenko, I. I. Ovsyannikov, C. Simó, D. Turaev., Three-Dimensional Hénon-like Maps and Wild Lorenz-like Attractors, International Journal of Bifurcation and Chaos., 15 (11), 2005, 3493–3508.
- [14] J. Palis, On Morse-Smale dynamical systems, Topology no8, 385-404, 1968.
- [15] M.M. Peixoto, Structural stability on two-dimensional manifolds, Topology no1, 101-120, 1962.
- [16] S. Friedland and J. Milnor .Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. Ergodic Theory and dynamical Systems, 9, 67-99, (1989).
- [17] M. Hénon., A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor, Comm. Math. Phys., 50,1976, 69–77.
- [18] E. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences, 20, 130-141, (1963).
- [19] Bi Chuang, Q. Zhang, and al., Bifurcation and attractor of two-dimensional sinusoidal discrete map, Acta Phys Sin., 62 (24), 2013, 240503-1–240503-7.
- [20] W. Hu, G.-H. Zhao, G. Zhang, and al., Stabilities and bifurcations of sine dynamic equations on time scale, Acta Phys. Sin., vol. 61 (17), 2012, 170505-1–170505-12.
- [21] J. Guckenheimer and P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer, New York, 1983.
- [22] P. Rouchon, Systèmes Dynamique et Modélisation, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris France, (1993).