

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE KASDI MERBAH DE OUARGLA

Faculté des Sciences et Technologie

et Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE :

MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en mathématiques**

Spécialité : ANALYSE

Par

Abdellaoiu Souhir

THÈME

Système Dynamique Non Linéaire et Conjugaison Topologique

Soutenu publiquement, le

devant le jury composé de :

Mr	Professeur	l'université de	Président.	
Mr	Maître de Conférences(A)	l'université de	Examineur	
Mr	Maître de Conférences(A)	l'université de	Examineur	
Mr	M.Mammeri	Maître de Conférences(A)	l'université de	Rapporteur

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier "Dieu" pour la générosité « louange à **ALLAH**, Seigneur de l'universel », Je remercie M. Mohammed Mammeri, qui a dirigé cette mémoire. Avec des conseils et de l'information, je vous remercie, Monsieur, pour vos efforts et votre temps et de patience **Merci beaucoup**.

Mes remerciements vont également à Monsieur : Abassi Hocin , d'avoir accepté d'être président du jury de cette mémoire. Mes remerciements vont aussi à Monsieur : Ben chik Abd elkarim et Monsieur : Kouidri Mohammed pour leur participation au jury. Je voudrais remercier tous les professeurs des mathématiques à l'université de Ouargla. Je voudrais remercier tous les professeurs qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir. Un grand merci aux toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail.

Pour finir c'est un grand merci à mes parents et mon bien-aimé spécialement la personne qui se lassait avec moi beaucoup (**merci**) et merci à toutes mes amis et ma famille.

Dédication

Je dédie ce travail à ma chère mère et mon cher père, de mes frères **MOHAMMED, AYOUB** et **SLIMAN** et mes sœurs **TAKWA** et **CHIFAA** et ma chère sœur **RAWYA** ,

Je dédie mon travail à la personne la plus proche de mon cœur (et âme sœur) **MANI**, à toute ma famille, à tous mes oncles Spécialisaient mon chère oncle **RACHID** et **TANTI**, à ma chère ami **HAFFSA**, et tous mes amis.

à tous les membres de famille **ABDELLAOUI** et de famille de **ELMACEMI BOZID**,
petite et grande et tous la nation islamique .

Table des matières

Notations et conventions	6
Introduction	7
1 Généralités sur les systèmes	8
1.1 Système dynamique continu dans le temps	8
1.1.1 Système autonome et non autonome	8
1.1.2 Flot	9
1.1.3 Trajectoire (ou orbite)	9
1.1.4 L'espace des phases	9
1.1.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs	10
1.1.6 Points critiques	10
1.1.7 Orbites périodiques	11
1.2 Systèmes discrète dans le temps	11
1.2.1 Définition et représentation	11
1.2.2 Orbites négatives et orbites positives	12
1.2.3 Points fixes	13
1.2.4 Stabilité	13
1.2.5 Stabilité locale	14
2 Attracteur et attracteurs chaotiques	15
2.1 Attracteur et attracteur chaotique[4]	15

2.2	Sensibilité aux conditions initiales	16
2.3	Attracteur	17
2.3.1	Ensemble invariant	17
2.3.2	Bassin d'attraction	18
2.3.3	Propriétés d'attracteurs	19
2.3.4	Les différents types d'attracteurs	19
2.4	Attracteurs chaotiques	20
2.4.1	Définitions d'attracteur chaotique	20
2.4.2	Les différents types d'attracteurs chaotiques [1]	21
2.5	Exposant de L'yapunov	24
2.5.1	Exposant de L'yapunov d'un application en temps discrète	24
2.6	Routes vers le chaos (bifurcation)	27
2.6.1	Différente types des routes	27
2.6.2	Diagramme de bifurcation	28
3	Conjugaison topologique des applications	29
3.1	Conjugaison topologique des applications discret quadratique en 2D : . . .	30
3.2	L'existence des points fixes	35
3.2.1	Les points fixes	35
	Conclusion	42
	Résumé	43
	Abstract	44

Notations et conventions

- $|\cdot|$: la valeur absolue.
- λ_i : les multiplicateurs caractéristiques.
- DG : le jacobien de G .
- W^S : les variétés stables.
- W^i : les variétés instables.
- "○": la loi de combinaison

Introduction générale

« La Géométrie fractale et du Chaos, ou, pour être plus bref, la Géométrie fractale, est l'étude de divers objets, soit mathématiques, soit naturels, qui ne sont pas réguliers, mais qui

sont rugueux, poreux ou fragmentés, et le sont au même degré à toutes les échelles ».

« La Géométrie fractale est caractérisée par deux choix : le choix de problèmes au sein du Chaos de la Nature, car décrire tout le Chaos serait une ambition, sans espoir et sans intérêt ; et le choix

d'outils au sein des mathématiques, car chercher des applications aux mathématiques, simplement parce qu'elles sont belles, n'a jamais causé que des déboires ».

« Progressivement mûris, ces deux choix ont créé quelque chose de nouveau : entre le domaine du Chaos incontrôlé, et l'Ordre excessif d'Euclide, il y a désormais une nouvelle zone d'Ordre fractal ».

Benoît Mandelbrot

Dans ce travail nous parlons de ce qu'on appelle système dynamique non linéaire et conjugaison topologique dans le premier chapitre nous abordons quelques-uns des concepts de base et généralités sur les systèmes dynamiques (continues et discrètes), dans le second chapitre nous allons parler de l'attracteur et attracteur chaotiques tout d'abord, nous allons parler de la sensibilité aux conditions initiales (SCI) en suite on va définir l'attracteur chaotique ce qui représente un élément important dans notre thème rappelons leur types et quelques exemples d'entre eux, on va définir " l'exposant de Lyapunov " et " l'exposant de Lyapunov d'un système dynamique en temps discret " ensuite, nous apprendrons Routes vers le chaos, dans le troisième chapitre nous verrons la conjugaison topologique d'application quadratique on va définir la conjugaison topologique et leurs propriétés et on va prendre la conjugaison topologique des applications discrètes en 2D ensuite, nous examinerons l'existence des conditions nécessaires à la réalisation de cette conjugaison topologique, nous soutiendrons notre étude examine un exemple étudie l'existence des points fixes pour deux applications discrètes qui sont conjuguées topologiquement.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes

1.1 Système dynamique continu dans le temps

1.1.1 Système autonome et non autonome

Système autonome

Un système autonome est un système à évolution temporelle continue qui a une indépendance du temps t :

$$\frac{dx}{dt} = G(x(t)) \quad (1.1)$$

Système non autonome

un système non autonome est un système à évolution temporelle continue qui dépend du temps t :

$$\frac{dx}{dt} = G(x, t) \quad (1.2)$$

1.1.2 Flot

On appelle flot de l'équation (1.2) l'application φ définie par :

$$\begin{aligned}\varphi & : \quad \mathbb{R} \times X \longrightarrow X \\ (t, x_0) & \longrightarrow \varphi(t, x_0) = \varphi_t(x_0) = x(t, x_0)\end{aligned}\tag{1.3}$$

Tel 'que

1. Pour chaque x_0 fixé, $t \longrightarrow \varphi(t, x_0)$ est une solution de l'équation différentielle..
2. Le flot φ possède les propriétés suivantes :
 - (a) $\varphi(0, x_0) = x_0$ en d'autres termes $\varphi(t, x_0)$ est la valeur à l'instant t de la solution qui vaut x_0 en $t = 0$.
 - (b) $\varphi(t_1 + t_2, x_0) = \varphi(t_1, x_0) \times \varphi(t_2, x_0)$ pour tous $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}$. Donc φ possède la propriété d'un semi-groupe.

1.1.3 Trajectoire (ou orbite)

Soit $x_0 \in X$ une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution de l'équation (1.3). L'ensemble des points $\{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$ est la trajectoire (ou orbite) dans l'espace d'état passant par le points x_0 à l'instant $t = 0$.

- Deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial.
- La trajectoire d'une application autonome ne dépend que l'état initial.

1.1.4 L'espace des phases

L'espace des phases(ou espace d'état)

Chez les physiciens, l'espace des phases est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques de système étudié dès que la dimension n d'application dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment l'application évolue, L'outil de passe pour y palier est l'espace de phase.on considère chaque

composante x_K de X (l'espace d'état) comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension n , L'évolution suivant t d'application se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.

Portrait de phase

Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'une application dans le plan de phase : à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point applications conservatifs et applications dissipatives. Le caractère conservatif ou non de l'application fait référence à un nouveau point de vue sur l'évolution dans l'espace de phases. En effet, les définitions que nous avons introduites jusqu'à présent sont implicitement rattachées à la détermination de trajectoires individuelles.

1.1.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Exemple 1.1 *l'application de Hénon* :[14]

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

Où a, b sont des paramètres réels, l'espace des phases est \mathbb{R}^2 , l'espace des paramètres est \mathbb{R}^2 .

1.1.6 Points critiques

Les points \bar{x} où le champ de vitesse v s'annule sont appelés points critiques, ou points d'équilibre. Ils correspondent à des points fixes du flot : $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$ pour tout t .

Un point d'équilibre est une trajectoire particulière. Une autre trajectoire particulière est la trajectoire qui se referme sur elle-même.

1.1.7 Orbites périodiques

On appelle cycle (ou trajectoire périodique ou orbite périodique) une trajectoire $\phi_t(x)$ qui n'est pas réduite à un point et telle qu'il existe $T > 0$ vérifiant $\phi_T(x) = x$. Le plus petit réel T strictement positif tel que $\phi_T(x) = x$ est appelé période, il est indépendant du point x pris sur la trajectoire.

1.2 Systèmes discrète dans le temps

1.2.1 Définition et représentation

L'étude de la stabilité des solutions périodiques, grâce à la dynamique de Poincaré aux multiplicateurs caractéristiques, permet d'entrevoir l'importance des applications discrètes, ou dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes.

Un système dynamique discrète est de la forme :

$$x_{k+1} = G(x_k) \tag{1.4}$$

où G est une application régulière d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans lui même.

le système dynamique continu $\frac{dx}{dt} = v(x)$ peut être étudié comme une application discrète si, au lieu de considérer son flot continu ϕ_t , on considère $\tau > 0$ ("sorte" de période d'échantillonnage) et l'application associée :

$$G : \begin{array}{l} U \longrightarrow U \\ x \longmapsto G(x) = \phi_\tau(x) \end{array}$$

Comme $\phi_\tau \circ \phi_\tau = \phi_{2\tau}$, il est clair que l'étude de ϕ_t lorsque $t \rightarrow +\infty$ et celle de

$$G^k = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k\text{-fois}}$$

lorsque l'entier k tend vers $+\infty$ doivent être très similaires. Nous rappelons ici, succinctement, comment les notions et résultats précédents, introduits pour les systèmes dynamique continues, se transposent aux les systèmes discrètes .

1.2.2 Orbites négatives et orbites positives

Orbite positive

Une orbite positive O^+ d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de

$$O^+(x_0) = \{x_0, G(x_0), G^2(x_0), \dots, G^k(x_0), \dots\}$$

Si G inversible alors :

$$\underbrace{G^{-k}(x_0) = G^{-1} \circ G^{-1} \circ \dots \circ G^{-1}(x_0)}_{k\text{-fois}}$$

Orbite négative

Une orbite négative O^- d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de G :

$$O^-(x_0) = \{x_0, G^{-1}(x_0), G^{-2}(x_0), \dots, G^{-k}(x_0), \dots\}$$

Si $O^+(x_0)$ et $O^-(x_0)$ existent alors l'orbite $O(x_0)$ de x_0 est l'ensemble :

$$O(x_0) = O^+(x_0) \cup O^-(x_0)$$

1.2.3 Points fixes

Soit un système autonome ou non, caractérisé par l'équation d'état (1,1) ou (1,2), un état d'équilibre est caractérisé par la relation suivante :

$$F(x) = 0. \tag{1.5}$$

Tout solution x vérifiant cette relation est appelée position d'équilibre , point singulier, point fixe ou encore solution stationnaire.

On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Ils s'agit des nœuds stables et des foyer stables.

1.2.4 Stabilité

Puisque les solutions de la plupart des systèmes dynamique ne s'expriment, pas au moyen des fonctions élémentaires ou par des quadratiques on recourt également à des méthodes d'intégrations approchées.

Le défaut de ces méthodes, c'est qu'elles ne donnent qu'une solution particulière, il faut refaire tous les calculs. Connaissant une solution particulière, on ne peut pas se prononcer sur le caractère des autres solutions.

La question de la stabilité d'une solution ou des positions d'équilibre est une des questions fondamentales de la théorie qualitative des systèmes dynamique , la réponse de cette question a été étudiée en détail , par l'éminent mathématicien russe A. Lyapunov (1857 - 1918).

Un point d'équilibre d'un système dynamique continu correspond à ce que l'on appelle aussi un régime stationnaire. La question de la stabilité expose alors des termes très

simples : si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il Ou encore : une petite perturbation, qui éloigne légèrement le système de son régime stationnaire, peut-elle avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps.

1.2.5 Stabilité locale

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction réelle définie un système dynamique discrète , soit $Df(x_0)$ sa matrice Jacobienne évaluée au point fixe x_0 de l'application f , pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe x_0 on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

Définition 1.1 *Les valeurs propres du jacobien $Df(x_0)$ sont appelées multiplicateurs caractéristiques de f en x_0 .*

Définition 1.2 *Le point fixe x_0 de f est dit stable si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.*

Définition 1.3 *Le point fixe x_0 de f est dit instable si l'un des multiplicateurs et de module strictement supérieur à 1.*

Définition 1.4 *Le point fixe x_0 de f est dit point selle si au moins un multiplicateur est de module strictement inférieur à 1 et les autres multiplicateurs sont tous de module strictement supérieur à 1.*

Chapitre 2

Attracteur et attracteurs chaotiques

2.1 Attracteur et attracteur chaotique[4]

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de définition communément admise l'attracteur. La notion d'attracteur est liée à un type de régime asymptotique. Dire d'un système dynamique qu'il possède plusieurs attracteurs, c'est aussi dire qu'il admet plusieurs types notablement différents de régimes asymptotiques.

En effet, puisqu'un attracteur est un ensemble invariant, sa dimension dans un espace tridimensionnel doit être strictement inférieure à 3 (< 3). Mais nous cherchons également un attracteur dont la dimension n'est ni 1 (point fixe) ni 2 (cycle). Nous recherchons donc des objets géométriques complexes de dimension non - entière. De telles structures existent, moyennant une définition plus générale du concept de dimension. Mandelbrot leur a donné le nom de fractales. Nous examinerons dans ce chapitre le problème de leur dimension. Pour l'heure, essayons de mieux caractériser ces attracteurs. On comprend bien que leur nature doit être radicalement différente de celle d'un tore, qui ne peut être attracteur que d'un régime périodique. Les objets considérés ici, par contre, sont le siège de phénomènes périodiques et du chaos. On les appelle des attracteurs étranges ou chaotiques. Et pour cause : il s'agit d'ensembles compacts, donc bornés, dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques, dont l'une des caractéristiques essentielles

est la S C I. (les trajectoires issues de conditions initiales proches s'écartent exponentiellement). Comment peut-on faire coexister l'attraction, qui implique le resserrement des trajectoires, avec la S C I, qui implique leur écartement ? La solution réside dans le concept d'hyperbolicité de l'attracteur [1] : l'attraction s'opère dans une direction, et la divergence dans une autre. La surface contenant les trajectoires divergentes est appelée variété instable, alors que celle contenant les trajectoires convergentes sera dénommée variété stable. Notons que ceci ne peut se concevoir que dans un espace de phase d'au moins trois dimensions. Les attracteurs étranges sont caractéristiques l'évolution des applications chaotiques, au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. On va parler de ce type d'attracteur Dans ce chapitre.

2.2 Sensibilité aux conditions initiales

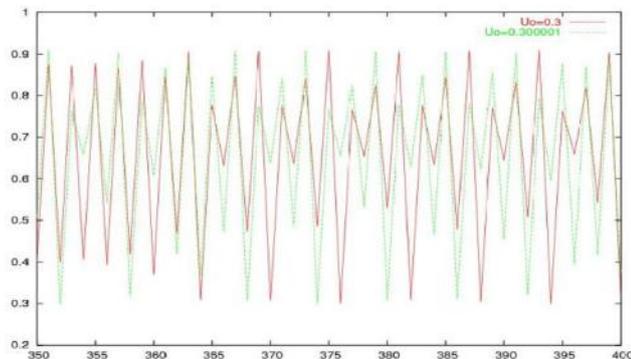
La **S.C.I** est un phénomène découvert dès la fin du *XIX^{ième}* siècle par **Poincaré** dans des travaux concernant le problème à N corps en mécanique céleste, puis par **Hadamard** avec un modèle mathématique abstrait aujourd'hui baptisé « flot géodésique sur une surface à courbure négative ». Ce découvert a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Il a été redécouvert en 1963 par **Lorenz** lors de ses travaux en météorologie.

Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Ce résultat est souvent vulgarisé sous le nom « d'effet papillon ».

La **S.C.I** se traduit mathématiquement par l'hyperbolicité d'une partie de l'espace des phases d'un système , hyperbolicité à laquelle est associée un ensemble d'exposants de **Lyapunov** positifs, ainsi qu'une entropie topologique également positive.

Exemple 2.1 *S.C.I*

–L'évolution d'une population d'individus dans le temps pour des conditions initiales très proches.



L'évolution d'une population d'individus dans le temps pour des conditions initiales très proches $U_{n+1} = 4a(1 - U_n)$ ($U_0 = 0.3$ et $U_0 = 0.00001$)

2.3 Attracteur

2.3.1 Ensemble invariant

Définition 2.1 [5] Soit A un sous-ensemble de l'espace des phases U , A est dit invariant (resp. positivement invariant) par un flot φ_t , si pour tout t dans \mathbb{R} (resp. dans $[0, +\infty[$), $\varphi_t(A)$ est inclus dans A).

Définitions d'attracteur

Définition 2.2 Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle. On donne une seule définition possible d'attracteur :

Définition 2.3 : (Guckenheimer, Holmes) : Soit $\langle X, g \rangle$ un système dynamique discrète , Une sous-partie A de X est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1. A est fermée .
2. A est positivement invariante .
3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :
 - (a) U est positivement invariant .
 - (b) U est attiré par $A : \forall u \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(g^t(u), A) = 0.$$

Dans l'espace \mathbb{R}^2 considérons le système dynamique discrète dont la fonction successeur est la suivante :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

La variété instable

$$\mathbb{R}_i^2 = W^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

est non-vide, fermée, et strictement positivement invariante. De plus, elle est un attracteur global en un seul pas. Au contraire , la variété stable

$$\mathbb{R}_s^2 = W^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$$

est non-vide, fermée et strictement positivement invariante mais n'est pas un attracteur.

2.3.2 Bassin d'attraction

On rappelle que tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions 3.a et 3.b dans la définition précédent est appelée voisinage attiré par A . Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré U , on ne peut pas affirmer qu'il est unique : en effet A peut admettre plusieurs voisinages attirés par lui-même. On donne quelques définitions du

bassin d'attraction

On appelle bassin d'attraction $B(A)$ de A le plus grand des tels voisinages attirés, c'est à dire

$$B(A) = \bigcup \{U \in P(X) : U \text{ est un voisinage attiré } A\}.$$

Définition 2.4 [?]: *Le bassin d'attraction $B(A)$ d'un attracteur A est l'ensemble des conditions initiales (l'ensemble des tous états initiaux des orbites) est à long-temps un comportement approche vers A .*

2.3.3 Propriétés d'attracteurs

1. A est un sous ensemble borné de l'espace est de volume nul, invariant par le flot φ_t autrement dit, tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t . Il existe un ensemble $B \subset A$, tel que pour tout voisinage de A , la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A . Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans B tend vers l'attracteur, cette "zone d'influence" est le (Bassin d'attraction) .
2. Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

2.3.4 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution d'application non chaotique , et peuvent être de trois sortes nous allons en apprendre davantage sur le premier sorte :

Les points fixes

Toute solution x_0 vérifiant la relation $g(x_0) = 0$ est appelée position d'équilibre, point singulier, point fixe, ou encore solution stationnaire. On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des nœuds stables et des foyers stables, représentés . Le point d'équilibre unique d'un pendule amorti est l'exemple classique de ce type d'attracteur.

2.4 Attracteurs chaotiques

Il n'existe pas à proprement parler de définition positive des orbites chaotiques. Un mouvement chaotique est non déterministe mais il ne s'agit pas d'un mouvement aléatoire. Il possède un spectre fréquentiel continu (caractère erratique) et présente en outre une extrême sensibilité aux conditions initiales. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé.

On peut définir un attracteur chaotique (ou attracteur étrange) comme étant un attracteur de volume nul qui n'est ni un point fixe, ni cycle limite, ni quasi-périodique. Dans une section de Poincaré, un attracteur chaotique décrit une infinité de points dont l'ensemble possède une structure topologique auto-similaire avec une dimension fractale non entière [11]. De ce fait, on ne peut pas réduire un mouvement chaotique à un point fixe ou un cycle limite comme pour les autres comportements asymptotiques. Néanmoins, les solutions chaotique présentent des propriétés de périodicité dans l'espace non pas euclidien mais celui d'**Hausdorff** [8].

2.4.1 Définitions d'attracteur chaotique

Définition 2.5 *L'attracteur chaotique(ou étrange) est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution du dynamiques des applications chaotiques.*

Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chao-

tique pour une application T de l'espace s'il existe un voisinage R de A , c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans R vérifiant les propriétés suivantes :

1- *Attraction* : R est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans R , est entièrement contenue dans R . De plus, toute orbite de ce type

devient et reste aussi proche de A que l'on veut.

2- Il est contenu dans un espace fini. son volume est nul. sa dimension est fractale (non entière).

3- Presque toute trajectoire sur l'attracteur à la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.

4- Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (SCI).

2.4.2 Les différents types d'attracteurs chaotiques [1]

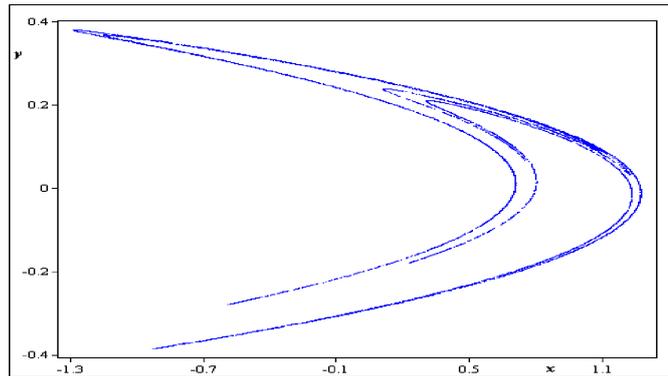
Nous donnons une classification commune d'attracteurs chaotiques des systèmes dynamiques. En règle générale, à l'heure actuelle, les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types

principales :

- 1- Attracteur hyperbolique.
- 2- Attracteur de type de Lorenz.
- 3- Quasi attracteurs.

Exemple 2.2 : *(L'attracteur de Hénon) [13] : L'attracteur de M. Hénon (1976), associé à une application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme $(x, y) \longrightarrow (X = 1 - ax^2 + y, Y = bx)$, est initialement issu d'un problème d'astronomie concernant les amas globulaires. Le système différentiel initial (application de Hénon - Heiles) est un système ha-miltonien non intégrable, il est traité par la méthode des surfaces de section de Poincaré pour lui*

associer. Un système du plan dans lui-même dont l'étude plus abordable permet d'analyser le problème initial et ici de décrire son comportement chaotique par l'attracteur de **Hénon**. Ce procédé d'analyse d'un système différentiel non intégrable (et c'est le cas le plus souvent!) par une méthode de section est assez courant, bien que l'application itératif associé soit lui aussi non linéaire, son analyse est souvent plus facile à développer .



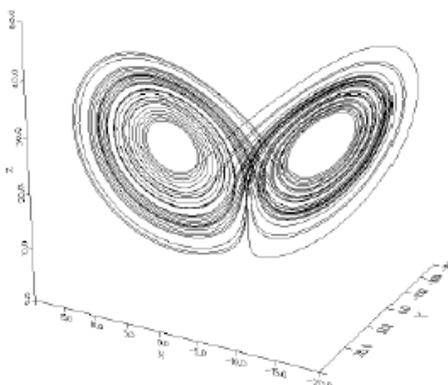
attracteur de Hnon avec

$$(a, b) = (1.4, 0.3) \text{ et } (x_0 = 0.25, y_0 = 0.25)$$

Exemple 2.3 : *(L'attracteur de Lorenz)[2]* : L'attracteur de **E.Lorenz** signe, en (1963), les débuts de la météorologie moderne : c'est en se posant la question de savoir comment prévoir le temps à l'avance que **E.Lorenz** a abouti à son système différentiel et à son attracteur étrange . Il s'agit de modéliser certains mouvements atmosphériques : on considère pour cela le mouvement d'un fluide entre deux plaques horizontales portées à des températures légèrement différentes (la plaque la plus chaude en bas). Pour une différence de température suffisante, il apparaît alors des tourbillons convectifs qui vérifient les équations de la convection de Rayleigh-Bénard dont la formulation est classique en mécanique des fluides : on obtient un système de trois équations aux dérivées partielles.

Avec quelques hypothèses simplificatrices , on peut associer à ce application aux dérivées partielles un système différentiel ordinaire de la forme (a, b, c étant des paramètres réelles , b décrivant la différence des températures des deux plaques) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = bx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - cz \end{cases}$$



Attracteur de Lorenz : $(a, b, c) = (10, 28, 8/3)$

(On observera que les seconds membres de ces équations sont assez simples mais cependant non linéaires).

On effectue une résolution numérique de ces équations :

pour b supérieur à une certaine valeur critique, on obtient un comportement chaotique pour les trajectoires de ce système (l'attracteur étrange de Lorenz); simulez une vue en 3 dimensions de l'attracteur de Lorenz. L'attracteur a la forme d'un papillon en vol, pour laquelle le deux "yeux" des ailes seraient remplacés par vide .

2.5 Exposant de L'yapunov

L'étude formelle de la théorie du chaos met à notre disposition différents outils permettant d'identifier sans ambiguïté si la dynamique d'un système est chaotique ou non. Parmi ces outils, on peut citer les exposants de **Lyapunov** qui constituent une approche très naturelle de la mesure de l'état de chaos d'un système dynamique. Le chaos déterministe se reconnaît essentiellement par la manière dont il est apparu. Mais, une fois établi, sa signature consiste en un objet de l'espace de phases que l'on appelle un attracteur étrange. Ce non d'attracteur provient du fait que l'objet en question "attire" les trajectoires de l'espace de phases, en imposant deux conditions initiales différentes, on obtient deux trajectoires produisant des figures ayant même allure générale mais où la répartition exacte des points est différente. Quant au terme d'étrange Les trajectoires de l'attracteur vérifient la notion de sensibilité aux conditions initiales (S.C.I). C'est dans ce sens qu'elles sont chaotiques. on peut quantifier la sensibilité aux conditions initiales par le degré de divergence.

L'exposants de **Lyapunov** mesurent l'attraction exponentielle ou la séparation dans le temps de deux trajectoires adjacentes, dans l'espace de phases, ayant des conditions initiales différentes.

2.5.1 Exposant de L'yapunov d'un application en temps discrète

G un système dynamique unidimensionnelle, $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $x_{n+1} = G(x_n)$, x_0 et $x_0 + \varepsilon$ deux point intiaux poroches après n itération on aura :

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} = |G^n(x_0 + \varepsilon) - G^n(x_0)| \quad (2.1)$$

quand n tend vers l'infini et ε tend vers 0

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \left| \frac{G^n(x_0 + \varepsilon) - G^n(x_0)}{\varepsilon} \right| \quad (2.2)$$

notons $x_i = G^i(x_0)$ et on sait que

$$G^n(x_0) = G(G^{n-1}(x_0)) \quad (2.3)$$

par règle de chaîne on obtient :

$$\frac{dG^n(x_0)}{dx} = G'(x_{n-1})G'(x_{n-2})\dots G'(x_1)G'(x_0) \quad (2.4)$$

alors l'exposant de Lyapunov égale :

$$\lambda = \lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |G'(x_i)| \quad (2.5)$$

On considère le système dynamique discrète du plan suivant :

$$X_{k+1} = G(X_k), X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

où la fonction $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est le champ de vecteurs associé avec le système (2.6).

Soit $J(X_k)$ sa Jacobienne en $X_k \in \mathbb{R}^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, et de définir la matrice :

$$T_n(X_0) = J(X_{n-1}) J(X_{n-2}) \dots J(X_1) J(X_0). \quad (2.7)$$

Par ailleurs, soit $J_i(X_0, n)$ le module de la i^{ieme} valeur propre de la n^{ieme} matrice $T_n(X_0)$, où $i = 1, 2$ et $n = 0, 1, 2, \dots$

Maintenant on a la définition : les exposants de Lyapunov pour l'application discrète en dimension deux en temps discrète sont définis par la relation :

$$l_i(X_0) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} J_i(X_0, n)^{\frac{1}{n}} \right), i = 1, 2. \quad (2.8)$$

Soit l'équation discrète quadratique suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k - ax_k^2 = ax_k(1 - x_k) \\ y_{k+1} = b - x_k - by_k + x_k y_k = (b - x_k)(1 - y_k) \end{cases}$$

La matrice jacobienne de l'équation est :

$$\begin{pmatrix} a(1 - 2x) & 0 \\ (1 + y) & -b + x \end{pmatrix}$$

parce que la matrice jacobienne est triangulaire, les exposants de Lyapunov sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln a |1 - 2x| \\ \lambda_2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln |-b + x| \end{cases}$$

Considérons à nouveau l'application itérative F , qui applique x_n sur x_{n+1} . Deux conditions initiales très proches, soient x_0 et $x_0 + \varepsilon_0$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues.

Après N itérations, nous avons $F^{(N)}(x_0)$ et $F^{(N)}(x_0 + \varepsilon_0)$ pour les deux valeurs initiales différentes. Donc la séparation de deux trajectoires après N itérations est :

$$\varepsilon_N = F^{(N)}(x_0 + \varepsilon_0) - F^{(N)}(x_0)$$

Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel, nous en déduisons :

$$\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_0} = e^{\lambda N}$$

On pourra alors trouver un réel λ tel que :

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(x_0 + \varepsilon_0) - F^N(x_0)}{\varepsilon_0} \right|$$

La limite de cette expression quand $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ et $N \rightarrow \infty$ est appelée exposant de Lyapunov.

Dans la pratique, il n'est en général pas nécessaire de choisir un grand N , parce qu'un sur coût de simulation n'entraîne qu'une amélioration insignifiante de l'exactitude des calculs. On peut noter que l'exposant de Lyapunov λ n'est calculé que pour un seul point initial. Une valeur moyenne de λ peut être obtenue en moyennant les exposants de Lyapunov déduits de plusieurs points initiaux.

2.6 Routes vers le chaos (bifurcation)

La théorie de la bifurcation étudie le changement que subit une application sous la variation d'un paramètre ou plus, donc la bifurcation signifie un changement dans le comportement qualitatif d'une application, suite à une variation d'un paramètre de l'application. Par exemple déstabilisation d'un point fixe stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur. La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation. Notons que la transition vers le chaos s'opère selon des bifurcations, il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est progressive, mais marquée des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcation.

2.6.1 Différents types des routes

Dans cette section, on considère trois types des routes locales : La route de doublement de période, la route point selle (ou nœud-col) et la route de Neimark. Ces routes sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation de l'application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite. Tous les types de bifurcations étudiées correspondent toujours à $|\lambda_i| = 1$ (où λ_i représente les multiplicateurs).

Route doublement de période ($\lambda = -1$)

Cette route a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égales à -1 . Un cycle d'ordre k

qui subie cette route va changer de nature et crée un cycle d'ordre $2k$ de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

Route nœud-col ($\lambda = +1$)

La route $\lambda = +1$ correspond à la situation où l'un des multiplicateurs est égale à $+1$. Ce type de route donne naissance à deux cycles d'ordre k en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable.

Route Neimark ($\rho = 1$)

Cette route se produit lorsque la matrice Jacobienne possède deux multiplicateurs complexes conjuguées $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ et de plus $|\lambda_{i=1,2}| = 1$.

2.6.2 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre du contrôle. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée.

Chapitre 3

Conjugaison topologique des applications

on dit que deux applications seraient topologiquement conjuguées (équivalente topologiquement) s'il existe un application linéaire, cela conjuguera celui dans l'autre. La conjugaison topologique est importante dans l'étude des applications itérées et plus généralement dans l'étude des systèmes dynamique, Comme l'application logistique et l'application de tente sont topologiquement conjuguées . La conjugaison topologique définit une relation d'équivalence dans l'espace de tous les surjections continus d'un espace topologique à elle-même, on dits que f et g sont être liées s'ils sont topologiquement conjuguées.

Cette relation d'équivalence est très utile dans la théorie d'application, puisque chaque classe contient toutes les applications qui partagent la même dynamique du point de vue topologique. Par exemple, il est naturel de s'attendre à ce que deux applications topologiquement conjuguées ont le même nombre de points d'équilibres et de cycles et de même type de stabilité. Par exemple, les orbites de g sont envoyant sur celles de f par la conjugaison topologique (homeomorphisme) Parlant officieusement, la conjugaison topologique est un « changement des coordonnées » dans un sens topologique.

Soient f et g deux applications on dite que f et g seraient topologiquement

conjuguées s'il existe une application linéaire h , cela conjuguera celui dans l'autre c'est à dire la commutation :

$$g \circ h = h \circ f$$

est vérifié

Propriétés :

1. [10] Si h est une conjugaison entre f et g , alors h est une conjugaison entre f^n et g^n pour tous $n \in \mathbb{Z}$, alors $g^n \circ h = h \circ f^n$
2. La conjugaison de deux applications est souvent représentée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow h^{-1} & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

3. [16] Si f et g sont conjugués, les orbites de f envoyant sur celles de g par h
4. Si f et g sont conjugués, et x_0 est un point fixe de f alors les valeurs propres de $Df(x_0)$ et $Dg(h(x_0))$ sont égaux.

Proof. D'après de **Propriétés 1 et 2.** $f(x) = h^{-1} \circ g \circ h(x)$ Note que, depuis x_0 est un point fixe de f , donc $h^{-1} \circ g \circ h(x_0) = x_0$ De même d'après le théorème des fonctions inverses, on obtient : $Dh^{-1} = (Dh)^{-1}$ De plus h est différentiable, on a donc : $Df|_{x_0} = Dh^{-1}|_{x_0} Dg|_{x_0} Dh|_{x_0}$ ■

3.1 Conjugaison topologique des applications discrètes quadratiques en 2D :

Soit f une application discrète quadratique du plan, et g est une autre application discrète

Où on pose :

$$f(x_n, y_n) = (x_{n+1}, y_{n+1})$$

et

$$f(x_n, y_n) = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1x_n + a_2y_n + a_3x_n^2 + a_4y_n^2 + a_5x_ny_n \\ b_0 + b_1x_n + b_2y_n + b_3x_n^2 + b_4y_n^2 + b_5x_ny_n \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

et

$$g(x_n, y_n) = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{pmatrix} c_0 + c_1x_n + c_2y_n + c_3x_n^2 + c_4y_n^2 + c_5x_ny_n \\ d_0 + d_1x_n + d_2y_n + d_3x_n^2 + d_4y_n^2 + d_5x_ny_n \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

On montre la commutation :

$$g \circ h(x_n, y_n) = h \circ f(x_n, y_n), \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq 5 : \quad (3.3)$$

C'est à dire f et g sont conjugués par définition. Notons que si la transformation (homéomorphisme) h existe, alors il y a une relation d'équivalence et l'ensemble des applications divisent en classes d'applications topologiquement conjuguées ce qui implique que f et g ont les mêmes propriétés topologiques , nombre de points fixes et points périodiques , type de stabilité.

Pour la simplicité de l'étude nous choisissons l'homeomorphisme h comme suit :

Si on définit h par :

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1x + e_2y \\ l_1x + l_2y \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Si on pose :

$$\begin{cases} e_1x + e_2y = p \\ l_1x + l_2y = q \end{cases} \quad (3.5)$$

Nous avons :

$$g \circ h(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} c_0 + c_1p + c_2q + c_3p^2 + c_4q^2 + c_5pq \\ d_0 + d_1p + d_2q + d_3p^2 + d_4q^2 + d_5pq \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$= \begin{pmatrix} m_0 + m_1x_n + m_2y_n + m_3x_n^2 + m_4y_n^2 + m_5x_ny_n \\ n_0 + n_1x_n + n_2y_n + n_3x_n^2 + n_4y_n^2 + n_5x_ny_n \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{cases} m_0 = c_0 \\ m_1 = c_1e_1 + c_2l_1 \\ m_2 = c_1e_2 + c_2l_2 \\ m_3 = c_3e_1^2 + c_4l_1^2 + c_5e_1l_1 \\ m_4 = c_3e_2^2 + c_4l_2^2 + c_5e_2l_2 \\ m_5 = 2c_3e_1e_2 + 2c_4l_1l_2 + c_5(e_1l_2 + e_2l_1) \end{cases} \quad (3.8)$$

et

$$\begin{cases} n_0 = d_0 \\ n_1 = d_1e_1 + d_2l_1 \\ n_2 = d_1e_2 + d_2l_2 \\ n_3 = d_3e_1^2 + d_4l_1^2 + d_5e_1l_1 \\ n_4 = d_3e_2^2 + d_4l_2^2 + d_5e_2l_2 \\ n_5 = 2d_3e_1e_2 + 2d_4l_1l_2 + d_5(e_1l_2 + e_2l_1) \end{cases} \quad (3.9)$$

D'autre part

$$h \circ f(x, y) = \begin{pmatrix} k_0 + k_1x_n + k_2y_n + k_3x_n^2 + k_4y_n^2 + k_5x_ny_n \\ z_0 + z_1x_n + z_2y_n + z_3x_n^2 + z_4y_n^2 + z_5x_ny_n \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = e_1 a_0 + e_2 b_0 \\ k_1 = e_1 a_1 + e_2 b_1 \\ k_2 = e_1 a_2 + e_2 b_2 \\ k_3 = e_1 a_3 + e_2 b_3 \\ k_4 = e_1 a_4 + e_2 b_4 \\ k_5 = e_1 a_5 + e_2 b_5 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} z_0 = l_1 a_0 + l_2 b_0 \\ z_1 = l_1 a_1 + l_2 b_1 \\ z_2 = l_1 a_2 + l_2 b_2 \\ z_3 = l_1 a_3 + l_2 b_3 \\ z_4 = l_1 a_4 + l_2 b_4 \\ z_5 = l_1 a_5 + l_2 b_5 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

avec la condition :

$$e_1 l_2 - e_2 l_1 \neq 0 \quad (3.12)$$

D'après un calcul et simplification analogue comme précédemment. Nous obtenons donc l'expressions des coefficients

Pour établir la relation de commutation : $g \circ h(x, y) = h \circ f(x, y)$; pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

nous avons utilisé les relations ci-dessus (3.8),(3.9),(3.10) et (3.11) donc on a :

$$g \circ h(x, y) = h \circ f(x, y) \iff \left\{ \begin{array}{l} (m_i = k_i)_{0 \leq i \leq 5} \\ (n_i = z_i)_{0 \leq i \leq 5} \end{array} \right. \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.13)$$

D'où après calcul et simplification, on doit donc avoir, l'expressions des coefficients $(c_i, d_i)_{0 \leq i \leq 5}$ de l'application (3.6) en fonction d'expressions des coefficients $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5}$ de l'application (3.2) sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = a_0 = e_1 a_0 + e_2 b_0 \\ c_1 = a_1 = \frac{e_1 a_1 l_2 - e_1 a_2 l_1 + e_2 b_1 l_2 - e_2 b_2 l_1}{e_1 l_2 - e_2 l_1} \\ c_2 = a_2 = \frac{e_1 e_2 b_2 - e_1 e_2 a_1 + e_2^2 a_2 - e_2^2 b_1}{e_1 l_2 - e_2 l_1} \\ c_3 = a_3 = \frac{e_1 a_3 l_2^2 - e_2 b_5 l_1 l_2 - e_2 a_5 l_1 l_2 + e_2 a_4 l_1^2 + e_2 b_3 l_2^2 + e_2 b_4 l_1^2}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \\ c_4 = a_4 = \frac{-(e_1^2 e_2 a_5 - e_3^3 b_3 - e_1 e_2^2 a_3 - e_1^3 a_4 - e_1^2 e_2 b_4 + e_1 e_2^2 b_5)}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \\ c_5 = a_5 = \frac{-(2e_1 e_2 a_3 l_2 - e_1 e_2 a_5 l_1 + e_1 e_2 b_4 l_1 - e_1 e_2 b_5 l_2 + 2e_1^2 a_4 l_1 - e_1^2 a_5 l_2 + 2e_2^2 b_3 l_2 - e_2^2 b_5 l_1)}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 = b_0 = l_1 a_0 + l_2 b_0 \\ d_1 = b_1 = \frac{l_1 a_1 l_2 - l_1 b_2 l_2 + a_2 l_1^2 - b_1 l_2^2}{e_1 l_2 - e_2 l_1} \\ d_2 = b_2 = \frac{e_1 a_2 l_1 - e_2 a_1 l_1 + e_1 l_2 b_2 - e_2 b_1 l_2}{e_1 l_2 - e_2 l_1} \\ d_3 = b_3 = \frac{-(a_5 l_1^2 l_2 - b_3 l_2^3 - a_3 l_1 l_2^2 - a_4 l_1^3 - b_4 l_1^2 l_2 + b_5 l_1 l_2^2)}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \\ d_4 = b_4 = \frac{e_1^2 a_4 l_1 - e_1 e_2 b_5 l_2 - e_1 e_2 a_5 l_1 + e_2^2 a_3 l_1 + e_1^2 b_4 l_2 + e_2^2 b_3 l_2}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \\ d_5 = b_5 = \frac{-(2e_2 a_3 l_1 l_2 - e_2 a_5 l_1 l_2 + 2e_1 b_4 l_1 l_2 - e_1 b_5 l_1 l_2 + 2e_1 a_4 l_1^2 + 2e_2 b_3 l_2^2 - e_2 a_5 l_1^2 - e_1 b_5 l_2^2)}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Selon les valeurs de e_1, e_2, l_1 et l_2 et la condition (3.13) il existe une infinité d'applications linéaire h affine, qui transforment l'application quadratique du plan (3.1) à un autre quadratique du plan. (3.2) Par suite, nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Si la condition (3.13) est satisfaite alors l'application f définie en (3.1) est conjugué à g définie en (3.2), on dit que f et g sont affinement conjuguées.*

Exemple 3.1 Conjugaison topologique : nous proposons l'application quadratique de dimensions deux donnée dans [6] par :

$$f(x, y) = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 - ay_n^2 + bx_n \\ x_n \end{pmatrix}.$$

où a et b sont paramètres de bifurcation. a et $b \in \mathbb{R}$

g une autre application définie par :

$$g(x, y) = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{pmatrix} y_n \\ 1 - ax_n^2 + by_n \end{pmatrix},$$

il existe une application linéaire h définie par :

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

tell que la permutation : $f \circ h = h \circ g$ est satisfaite

par ce que

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

donc

$$f \circ h(x, y) = f[h(x, y)] = \begin{pmatrix} 1 - ax_n^2 + by_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

et

$$h \circ g(x, y) = h[g(x_n, y_n)] = h[(x_{n+1}, y_{n+1})] = \begin{pmatrix} 1 - ax_n^2 + by_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

alors la permutation : $f \circ h = h \circ g$ est satisfaite

3.2 L'existence des points fixes

Ici, nous examinerons l'existence des points fixe pour deux applications quadratique qui sont topologiquement conjuguée.

3.2.1 Les points fixes

Soit f et g deux applications définies comme suit :

$$f(x, y) = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 - ay_n^2 + bx_n \\ x_n \end{pmatrix}.$$

et

$$g(x, y) = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{pmatrix} y_n \\ 1 - ax_n^2 + by_n \end{pmatrix}.$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $a, b \in \mathbb{R}$

1. L'application f

On va calculer les points fixe de l'application f par résoudre l'équation de la forme :

$$f(x, y) = (x, y)$$

c'est-à-dire :

$$(1 - ay_n^2 + bx_n, x_n) = (x_n, y_n)$$

résoudre l'équation suivant :

$$\begin{cases} 1 - ay_n^2 + bx_n = x_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

par le compensation on trouve l'équation

$$1 - ax_n^2 + (b - 1)x_n = 0$$

Nous trouvons la suivante :

$$\Delta = (b - 1)^2 + 4a$$

alors

(a) a/-Si $a \geq \frac{-((-b+1))^2}{4}$, alors

$$x_{n_1} = \frac{-(b-1) - \sqrt{\Delta}}{-2a} \text{ et } x_{n_2} = \frac{-(b-1) + \sqrt{\Delta}}{-2a}$$

$$x_{n_1} = \frac{-(b-1) - \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{-2a} \text{ et } x_{n_2} = \frac{-(b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{-2a}$$

1.

$$x_{n_1} = \frac{b-1 - \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} \text{ et } x_{n_2} = \frac{b-1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}$$

Donc l'application quadratique f a deux points fixes :

$$\begin{cases} P_1 = \left(\frac{b-1 - \sqrt{4a-2b+b^2+1}}{2a}, \frac{b-1 - \sqrt{4a-2b+b^2+1}}{2a} \right) \\ P_2 = \left(\frac{-b-1 + \sqrt{2a-2b+b^2+1}}{2a}, \frac{b-1 + \sqrt{2a-2b+b^2+1}}{2a} \right) \end{cases}$$

b/-Si $a < \frac{-((-b+1))^2}{4}$, alors l'applications quadratique f n'a pas de point fixe.

La matrice jacobienne de l'équation est donnée par :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} b & -2ay \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et le polynome caractéristique pour le point fixe (x, y) donnée par :

$$\lambda^2 - b\lambda + 2ay = 0. \quad (3.16)$$

la caractéristique de la stabilité locale des points équilibres est étudiée en évaluant les racines de l'équation (3.16).

2. L'application g

On va calculer les points fixe de l'application g par résoudre l'équation de la forme :

$$g(x, y) = (x, y)$$

c'est-a-dire :

$$(y_n, 1 - ax_n^2 + by_n) = (x_n, y_n)$$

résoudre l'équation suivant :

$$\begin{cases} y_n = x_n \\ 1 - ay_n^2 + by_n = y_n \end{cases}$$

par le compensation on trouve l'équation

$$1 - ax_n^2 + (b - 1)x_n = 0$$

Nous trouvons la suivante :

$$\Delta = (b - 1)^2 + 4a$$

alors

a/-Si $a \geq \frac{-((-b+1))^2}{4}$, alors

$$x_{n_1} = \frac{-(b-1) - \sqrt{\Delta}}{-2a} \text{ et } x_{n_2} = \frac{-(b-1) + \sqrt{\Delta}}{-2a}$$

$$x_{n_1} = \frac{-(b-1) - \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{-2a} \text{ et } x_{n_2} = \frac{-(b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{-2a}$$

(a)

$$x_{n_1} = \frac{b-1 - \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} \text{ et } x_{n_2} = \frac{b-1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}$$

Donc, l'application quadratique g a deux points fixes :

$$\begin{cases} P_1 = \left(\frac{b-1-\sqrt{4a-2b+b^2+1}}{2a}, \frac{b-1-\sqrt{4a-2b+b^2+1}}{2a} \right) \\ P_2 = \left(\frac{-b-1+\sqrt{2a-2b+b^2+1}}{2a}, \frac{b-1+\sqrt{2a-2b+b^2+1}}{2a} \right) \end{cases}$$

b/-Si $a < \frac{-((-b+1))^2}{4}$, alors l'applications quadratique g n'a pas de point fixe.

La matrice jacobienne de l'équation est donnée par :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2ax & b \end{pmatrix}$$

et le polynome caractéristique pour le point fixe (x, y) donnée par :

$$\lambda^2 - b\lambda + 2ax = 0. \quad (3.17)$$

la caractéristique de la stabilité locale des points équilibres est étudiée en évaluant les racines de l'équation (3.17).

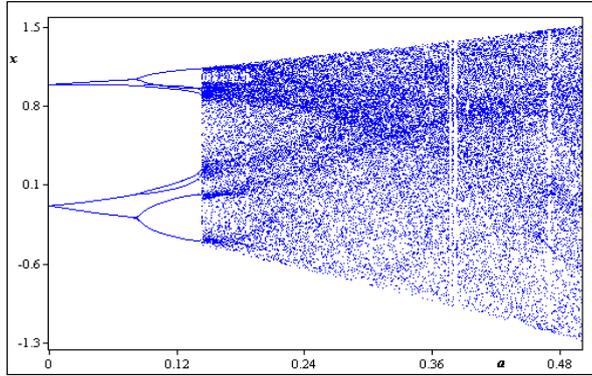


Diagramme de bifurcation de l'application f pour $a \in [0, 0.5]$

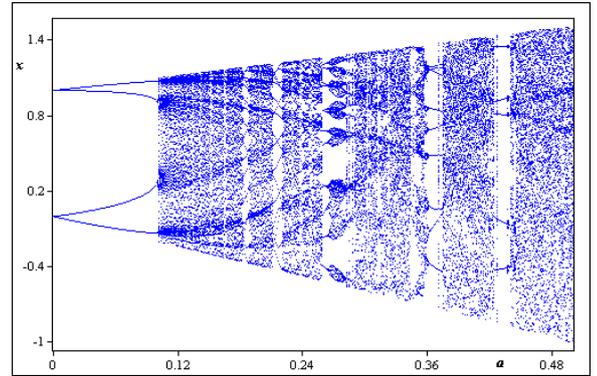
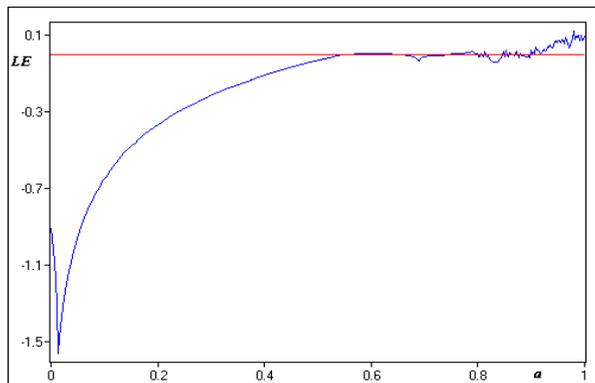
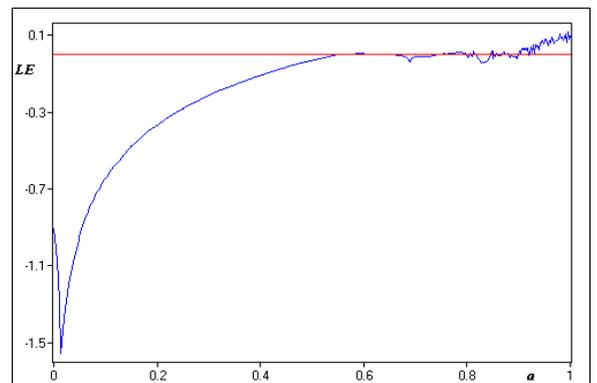


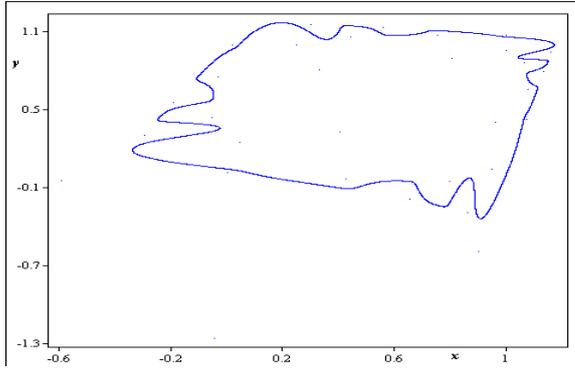
Diagramme de bifurcation de l'application g pour $a \in [0, 0.5]$



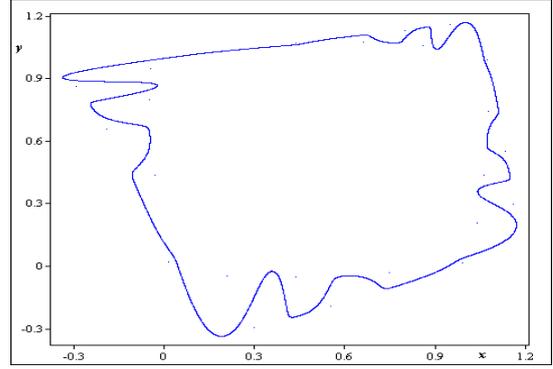
Variation de l'exposant de L'yapunov de l'application f obtenue pour $a \in [0, 1]$



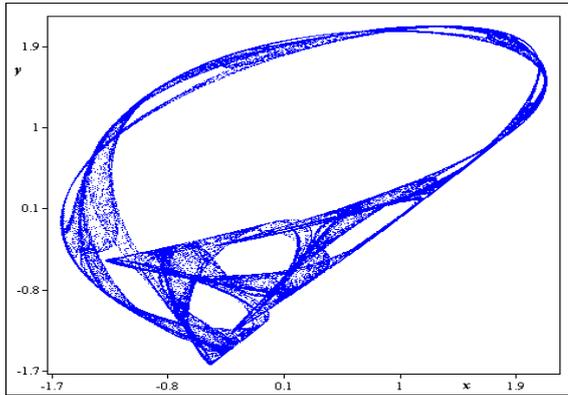
Variation de l'exposant de L'yapunov de l'application g obtenue pour $a \in [0, 1]$



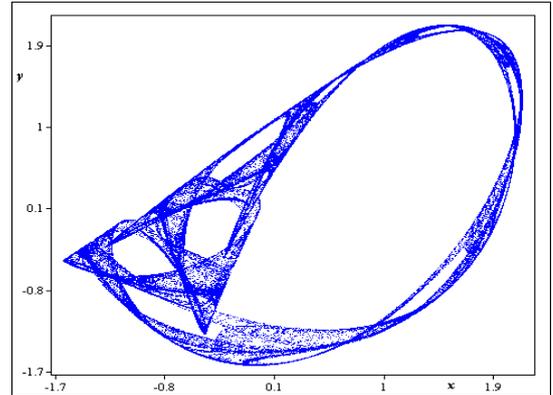
Atracteur de l'application f pour
 $a = 1, b = 0.17$



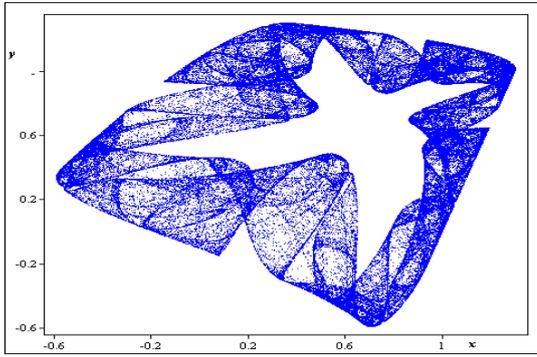
Atracteur de l'application g pour
 $a = 1, b = 0.17$



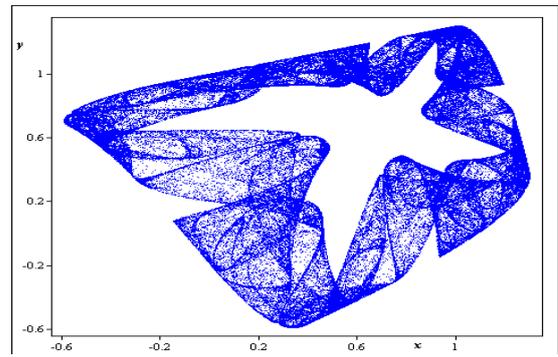
Atracteur chaos de l'application f pour
 $a = 0.7, b = 0.9$



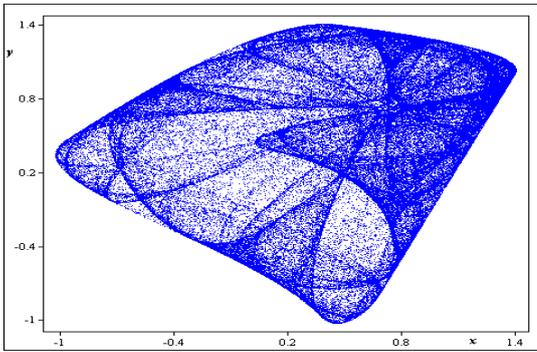
Atracteur chaos de l'application g
pour $a = 0.7, b = 0.9$



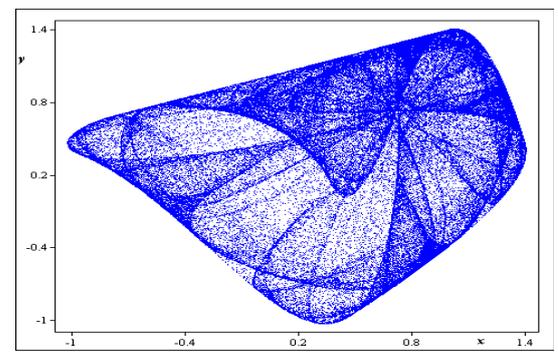
Atracteur chaos de l'application f
pour $a = 1, b = 0.3$



Atracteur chaos de l'application g
pour $a = 1, b = 0.3$



Atracteur chaos de l'application f
pour $a = 1.1, b = 0.4$



Atracteur chaos de l'application g
pour $a = 1.1, b = 0.4$

Conclusion Général

Nous fait dans ce travail une étude sur les systèmes dynamique non linéaire et la conjugaison topologique. Dans le premier chapitre, nous vous proposons des généralités et certains concepts de base sur les systèmes dynamique, les systèmes dynamique continue et les systèmes dynamique discrète dans le temps, Dans le deuxième chapitre nous avons parlé d'attracteur et l'attracteur chaotique et les routes vers le chaos, et Dans la troisième chapitre nous proposons la définition de la conjugaison topologique et leur propriétés en suite nous étudions l'existence des conditions nécessaire pour que deux applications quadratiques en 2D soient topologiquement conjuguées et nous avons vu l'importance de La notion de la conjugaison topologique dans l'identification de les applications discrètes qui ont le même comportement qualitatif.

Résumé

Nous sommes concentrés dans cette étude sur la notion de la conjugaison topologique et les systèmes dynamiques non-linéaires, d'abord nous introduisons des généralités sur

Les systèmes dynamiques, puis nous avons étudié la définition d'attracteur et attracteur chaotique nous avons discuté la Sensibilité aux conditions initiales, en suite nous précisons l'étude sur l'attracteur chaos, et prenons Routes vers le chaos, enfin nous approchons le concept de conjugaison topologique, et nous avons étudié un exemple sur ce sujet.

Mots clé

Systèmes dynamique, attracteur, attracteur chaotique, bifurcation, conjugaison topologique, comportement qualitatif.

Abstract

We are concentrated in this study on the notion of topological conjugation and non-linear dynamic systems, first we introduce generalities on Dynamic systems then we studied the definition of attractor and chaotic attractor we discussed the sensitivity to the initial conditions, following we specify the study on the chaotic attractor, and takes the Roads to chaos, finally we approach The concept of topological conjugation, and we have studied an example about it.

Key words

Dynamic systems, attractor, chaotic attractor, bifurcation, topological conjugation, qualitative behavior.

Bibliographie

- [1] A. Chenciner, Stabilité Structurale et Ergodicité (ou catégorie et mesure), Journal de Physique, (1978).
- [2] Aleksandr L. Fradkov. "Cybernetical Physics : From Control of Chaos to Quantum Control" Springer, (2007) 241 pp.
- [3] C. Robinson. Dynamical Systems : Symbolic Dynamics, and Chaos. CRC Press, (1998).
- [4] C. P. Li, W. H. Deng, D. Xu, Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order, Physica A360, 171-185, (2006).
- [5] E. Zeraoulia. Etude de Quelques Types de Systemes Chaotique : Generalisation d'un Modele Issu du Modele de Chen (2006).
- [6] E. Zeraoulia, J. C. Sprott. On the robustness of chaos in dynamical systems : Theories and applications, 2008.
- [7] H. G. Schuster. Handbook of Chaos Control. Weinheim Wiley-VCH, 1999.
- [8] H. Schuster Georg. "Deterministic Chaos-an Introduction". 4 edition, Wiley, (2005), 288pp.
- [9] J. Palis, On Morse-Smale dynamical systems, Topology no8, 385-404, 1968.
- [10] J.W. Robbin, Topological Conjugacy and Structural Stability for Discrete Dynamical Systems American Mathematical society. Vol. 78, no 6, (1972).
- [11] L. Y. Lu and Z. H. Lu, The Periodicity of chaotic Impact Oscillators in Hausdorff Phase Spaces. Journal of Sound and Vibration, 235(1), 105-116, (2000).

- [12] M. Benedics and L. Carleson. The dynamice of the Henon map. *Annals of mathematics*, 133, 73-169, (1991).
- [13] M. Hénon., A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor, *Comm. Math. Phys.*, 50,1976, 6
- [14] P. Rouchon, *Systèmes Dynamique et Modélisation*, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris France, (1993).
- [15] R. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, (1989).
- [16] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlniear Dynamical Systems and Chaos* , Springer- Werlag, 89-100, (1990).5