

**UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA**

**Faculté des Sciences et de La Technologie et Sciences de La Matière**

**Département Mathématique Et Informatique**



**Mémoire**

**MASTER ACADEMIQUE**

**Domaine : Mathématique et Informatique**

**Filière : Mathématique Académique**

**Spécialité : Analyse**

**Par: Ghezal Dalila**

**Thème**

**Modélisation asymptotique du problèmes  
de Signorini dynamique pour  
les plaques minces**

**Soutenu publiquement**

**Le : 07 /2013**

**Devant le Jury :**

**Mr. Merabet Smail**

**M. C. université de KASDI Merbah-Ouargla Président**

**Mr. Mezabia Mohamed Elhadi**

**M. A. université de KASDI Merbah-Ouargla Examineur**

**Mr. Bensayah Abdallah**

**M. A. université de KASDI Merbah-Ouargla Rapporteur**

# Dédication

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents,

-A mes frères,

- A mes sœurs,

-A toute la famille

- A ma chère amie " Nawal "

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

# Remerciement

Tout d'abord, je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse monsieur **Bensayah Abdallah** qui m'a soutenue tout au long de ce travail et dont les conseils m'ont été d'un précieux secours.

Je désire aussi remercier toute ma famille pour la patience qu'elle a consentie devant les changements d'humeur occasionnés par ce travail.

Je souhaite également présenter mes remerciements à mes enseignants M.**Ghezal Abderrazak** et M.**Merabet Smail** pour leurs aides.

Je remercie tous mes collègues surtout Henka Ahmed pour leur soutien tout au long de la préparation de ce mémoire.

Enfin, je ne saurais remercier assez tous les enseignants ainsi pour les efforts qu'ils ont déployés durant ces cinq années d'étude. Merci à tous pour votre aide de près ou de loin.

Merci pour tout.

# Table des matières

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Préliminaires	v
Introduction	1
<b>1 Préliminaires mathématiques</b>	<b>3</b>
1.1 Rappels sur les espaces fonctionnels . . . . .	3
1.2 La formule de Green généralisée et théorème de trace . . . . .	7
1.3 Lemme de Grönwall discrétisé . . . . .	9
1.4 La convergence faible, faible* . . . . .	9
<b>2 Étude asymptotique du problème de contact unilatérale d'une plaque mince contre un obstacle rigide dans l'élasticité linéaire</b>	<b>10</b>
2.1 Position du problème . . . . .	10
2.2 le problème classique( $P^{\varepsilon}C$ ) . . . . .	11
2.3 Le problème variationnelle . . . . .	12
2.4 Étude asymptotique . . . . .	16
2.4.1 Mise à l'échelle des déplacements : . . . . .	17
2.4.2 Mise à l'échelle des forces : . . . . .	17
2.4.3 Mise à l'échelle du problème variationnel : . . . . .	18
2.4.4 Problème bidimensionnel : . . . . .	19
<b>3 Etude de convergence d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince contre un obstacle rigide dans l'élasticité linéaire</b>	<b>28</b>

3.1	Étape 1 : Existence de la limite faible * de $(u(\varepsilon), \kappa(\varepsilon))$ . . . . .	29
3.2	Étape 2 : Les propriétés de la limite faible * . . . . .	34
3.3	Étape 3 : Caractérisation de la limite faible * . . . . .	36
	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>

# Notations et Préliminaires

On utilise les conventions et les notations suivantes :

Les indices latins varient de 1 à 3 et les indices grecs varient de 1 à 2. La convention des indices répétés (muets) est adoptée.

$u = (u_i)$  vecteur des composantes  $u_i$ .

$u.v = u_i v_i$  produit scalaire euclidien.

$n$  normale unitaire extérieure.

$u_N = u.n$  la composante normale du déplacement.

$u = (u_T, u_N)$ ,  $u_T$  la composante tangentielle du déplacement.

$\sigma_N = (\sigma(u)n) \cdot n$  la composante de la force de pression appliquée sur une section de normale  $n$ .

$\sigma(u)n = (\sigma_T, \sigma_N)$ ,  $\sigma_T$  la composante tangentielle du vecteur  $\sigma(u)n$ .

$\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  dérivée de  $u_j$  par rapport à  $x_i$ .

$\partial_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i^\varepsilon}$  dérivée par rapport à  $x_i$ .

$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}$  dérivée première de  $u$ .

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{u}$  dérivée deuxième de  $u$

$\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker i.e  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j \\ 0 & \text{Si } i \neq j \end{cases}$

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2}$  :Laplacien.

$\Delta^2 = \nabla^4 = \sum_i \frac{\partial^4}{(\partial x_i)^4} + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^4}{(\partial x_i)^2 (\partial x_j)^2}$  :biharmonique ou bilaplacien.

$\text{div } \sigma(u) = \partial_j \sigma_{ij}$  divergence du tenseur  $\sigma(u)$ .

$|u| = \sqrt{u.u}$  norme vectorielle euclidienne.

$A = (A_{ij})$  matrice dont les éléments  $A_{ij}$ .

$A : B = A_{ij} B_{ij}$  produit scalaire des matrices.

$\rightarrow$  la convergence forte.

$\rightrightarrows$  la convergence faible.

# Introduction

Le contact unilatéral des corps élastiques, avec ou sans frottement, est la relation qui existe entre les efforts normaux (pression de contact) et le mouvement relative entre deux corps. La formulation de ce problème (sans frottement) a été décrite par Signorini en 1933. En 1963 Fichera[6] a fait l'analyse de ce problème à travers un problème de minimisation équivalent(méthode d'énergie). Concernant la classe de problème de contact sans frottement, Duvaut et Lions les ont trouvé comme des nouveaux résultats, et aussi pour le cas de frottement non local(lois de Tresca) paru en 1972[5] où ils ont signalé un problème ouvert d'existence et d'unicité dans le cas avec frottement local (loi de Coulomb). A partir de 1980, Nécas, Jarušek et Haslinger[13]ont établi, seulement, l'existence des solutions d'un problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb pour un coefficient de frottement assez petit, ensuite, Jarušek[10], Kato[24], Eck et Jarušek [4] ont donnés des résultats généraux. D'autre, des conditions suffisantes de non unicité des solutions ont trouvé par Récemment, R. Hassani, P.Hild et I.Ionescu[23].

Pour le cas des structures minces qui sont des corps élastiques dont l'une des dimensions (l'épaisseur) est petite devant les autres, par exemple : plaques minces, coques minces et filaments. Ces cas ont été proposés par Kirchhoff, Love, Reissner, Von Kármán et Koiter, ils ont posé des modèles et Parmi ces modèles le modèle de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner. C'est En 1979 que Ciarlet et Destynder[19] ont donné une justification mathématique à ces modèles. L'étude d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince contre un obstacle rigide avec frottement de Coulomb a été faite par Dhia[7] en utilisant une méthode de pénalisation. En 2002, J.C.Paumier[9] réalise une modélisation asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince encastrée, de modèle de Kirchhoff-Love, contre un obstacle rigide où il a prouvé que ce problème tridimensionnel avec frottement tend vers un problème bidimensionnel sans frottement. En suite par Chacha et Bensayah[3] dans le cas non linéaire, ont prouvé le même résultat. Le problème mise à l'échelle linéaire et sans frottement a été étudié par Léger et Miara[2]

qui utilisant la méthode de convergence.

L'objectif de ce mémoire est d'étendre le travail de Paumier[9] à un état dynamique sans frottement, on utilise la méthode de développement asymptotique formelle et puis la méthode de convergence. Premièrement on pose le problème classique de trois dimensions, puis la formulation variationnelle, mise à l'échelle des inconnues et des données. Pour la première méthode l'approche de déplacement-contraintes on injecte le développement asymptotique formel des inconnues dans le problème variationnel. Par l'étude asymptotique formelle et la méthode de convergence, on trouve que le terme dominant du développement asymptotique et la limite des inconnues mise à l'échelle sont caractérisés par le même problème bidimensionnel.

# Chapitre 1

## Préliminaires mathématiques

### 1.1 Rappels sur les espaces fonctionnels

Tout les résultats dans cette section sont dans [1]. Nous rappelons ci-dessous quelques définitions et théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans les chapitres ultérieurs. Ici toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $K \subset \Omega$ ,  $m$  entier positif,  $\alpha$  est un multi-entier,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , alors on définit l'opérateur différentiel  $D^\alpha$  par :

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On note que  $C(\Omega)$  l'espace des fonctions réelles continues sur  $\Omega$ . On dit que  $K$  est relativement compact dans  $\Omega$ , si l'adhérence de  $K$  (i.e.,  $\bar{K}$ ) est un compact (i.e., fermé et borné) inclus dans  $\Omega$ , on note que  $K \subset\subset \Omega$ . Aussi on note que :

$$C^m(\Omega) = \{v \in C(\Omega); D^\alpha v \in C(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

On appelle le support d'une fonction  $v$  définie sur  $\Omega$  l'ensemble fermé

$$\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega; v(x) \neq 0\}}.$$

On dit que la fonction  $v$  a un support compact dans  $\Omega$ , si  $\text{supp } v \subset\subset \Omega$ . On note que

$$C_0^m(\Omega) = \{v \in C^m(\Omega); v \text{ a un support compact dans } \Omega\}.$$

Soit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega).$$

On désigne que  $D(\Omega)$  appelé l'espace des fonctions test, l'espace  $C_0^\infty(\Omega)$  des fonctions indéfiniment différentiables a un support compact dans  $\Omega$  muni de la topologie de limite inductive

comme dans la théorie des distributions de L. Schwartz. On note que  $D'(\Omega)$  est l'espace dual de  $D(\Omega)$ , donc l'espace des formes linéaires continues sur  $D(\Omega)$ . On appelle  $D'(\Omega)$  l'espace des distributions (ou fonctions généralisées) sur  $\Omega$ , et l'on munit de la topologie forte de dual(e,i.  $f_i \rightarrow f$  dans  $D'(\Omega)$  si  $\langle f_i, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \forall \varphi \in D(\Omega)$ ) où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $D'(\Omega)$  et  $D(\Omega)$ . Pour  $p$  donné par  $1 \leq p < \infty$  on désigne que

$$L^p(\Omega) = \{v \text{ mesurables sur } \Omega; \text{ tel que } \|v\|_p = \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{1/p} < \infty \},$$

on rappelle que  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est un espace de Banach, et séparable et, pour  $1 < p < \infty$  est réflexif.

Pour  $p = 2$ , l'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

On va identifier l'espace  $L^2(\Omega)$  avec son dual. Pour  $p = \infty$  on désigne que

$$L^\infty(\Omega) = \{v \text{ mesurable sur } \Omega; \text{ tel que } \|v\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |v(x)| = \inf \{C; |v(x)| \leq C \text{ p.p } x \in \Omega\} < \infty \},$$

on rappelle que  $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach. Pour tout  $1 < p < \infty$  on l'inégalité de Hölder si  $u \in L^p(\Omega)$  et  $v \in L^{p'}(\Omega)$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\int_{\Omega} u(x) v(x) dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

**Théorème 1** *L'espace  $C_0^\infty(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega) \forall 1 \leq p < \infty$ .*

On dit que  $X \hookrightarrow Y$ , pour  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  espaces normés, signifie  $X \subset Y$  avec l'injection continue, c'est-à-dire, il existe une constante  $C$  tel que :

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

Pour  $1 \leq p \leq \infty$  on a  $D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$ . On va définir l'espace de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v; D^\alpha v \in L^p(\Omega), \text{ pour } |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{m,p}} &= \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_p^p \right)^{1/p} \quad \text{si } p \in [1, \infty). \\ \|v\|_{W^{m,\infty}} &= \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_\infty, \end{aligned}$$

est un espace de Banach. On note par  $W_0^{m,p}(\Omega)$  l'adhérence de  $C_0^\infty(\Omega)$  dans l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Pour tout  $p \in [1, \infty)$  on a

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Dans le cas  $p = 2$  on utilise la notation

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ produit scalaire dans } L^2(\Omega)$$

L'espace  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert. On posera aussi  $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ , Les espaces de Sobolev négatives sont les espaces duales des espaces  $W_0^{m,p}(\Omega)$

$$W_0^{-m,p'}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))'.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{W_0^{-m,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega)} \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|_{W_0^{m,p}(\Omega)}}.$$

L'espace  $W_0^{-m,p'}(\Omega)$  est Banach (séparable et réflexive, si  $1 < p < \infty$ ) Puisque  $D(\Omega)$  dense dans  $H_0^1(\Omega)$ . Alors on a  $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ .

**Théorème 2** *Supposons que  $\Omega$  vérifie la propriété du cône et  $1 \leq p < \infty$ . Alors*

1.  $C(\bar{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$  avec l'injection dense.
2. Si  $mp \geq n$  alors  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$  quel que soit  $k$  entier avec  $\frac{mp-n}{p} - 1 \leq k \leq \frac{mp-n}{p}$ .

Maintenant les espaces de fonctions à valeurs vectorielles : On considère un espace de Banach  $X$  de norme  $\|\cdot\|_X$  et un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$ . On note par

$$C^k(I; X) = \{v : I \rightarrow X; D^\alpha v \in C(I, X) \text{ pour } |\alpha| < k\}.$$

Sans aucun doute,  $C^k(\bar{I}; X)$  est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{C^k(\bar{I}, X)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \bar{I}} \|D^\alpha v(x)\|_X.$$

On notera ensuite par  $C^\infty(I; X)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $I$  à valeurs dans  $X$  et par  $D(I; X)$  l'espace  $C_0^\infty(I; X)$ , i.e. l'espace des fonctions de  $C^\infty(I, X)$  à support

compact dans  $I$  muni par la topologie limite inductive. On désigne par  $D'(I; X)$  l'espace des distributions sur  $I$  à valeurs dans  $X$  défini par

$$D'(I; X) = L(D(I; X); X),$$

où  $L(U, V)$  désigne l'espace des fonctions linéaires et continues de  $U$  dans  $V$ . Soit  $p \in [1, \infty]$ . On désigne par  $L^p(I; X)$  l'espace des (classe de) fonctions  $f : I \rightarrow X$  mesurables telles que l'application  $t \rightarrow \|f(t)\|_X$  soit dans  $L^p(I)$ . C'est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(I; X)} &= \left( \int_X \|f\|_X^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad p \neq \infty, \\ \|f\|_\infty &= \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|f\|_X. \end{aligned}$$

On peut montrer les propriétés suivantes :

1.  $D(I; X) \subset L^p(I; X) \subset D'(I; X)$ .
2. Si  $p < \infty$  alors  $D(I; X)$  est dense dans  $L^p(I; X)$ .

On désigne par  $W^{1,p}(I; X)$  l'espace des (classe de) fonctions  $f \in L^p(I; X)$  telles que  $\dot{f} \in L^p(I; X)$  où  $\dot{f}$  est la dérivée faible de  $f$ . Muni par la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}(I; X)} = \|f\|_{L^p(I; X)} + \|\dot{f}\|_{L^p(I; X)},$$

$W^{1,p}(I; X)$  est un espace de Banach.

**Proposition 3** Pour tout  $p \geq 1$  on a :

1.  $W^{1,p}(I, X) \subset L^\infty(I, X) \cap C(\bar{I}, X)$ .
2. Si  $I$  est borné, alors  $C^\infty(\bar{I}, X)$  est dense dans  $W^{1,p}(I, X)$ .

**Définition 4** Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces de Banach,  $X \subset Y$  à enrobage continu,  $C_S([0, T], X)$  espace est défini comme l'espace des fonctions  $v : [0, T] \rightarrow X$  tel que la fonction réelle d'une variable réelle

$$t \rightarrow \langle h, v(t) \rangle_{X', X},$$

est continue sur  $[0, T]$  pour toute  $h \in X'$ .

**Lemme 1** Soient  $X$  et  $Y$  sous les conditions de la dernière définition.

- Si, en plus,  $X$  est un espace de Banach réflexif, alors :

$$L^\infty(0, T; X) \cap C([0, T]; Y) \subset C_s([0, T]; X).$$

- Soit  $U$  un autre espace de Banach tel que  $X \subset U \subset Y$  est l'enrobage et  $X \subset Y$  est compact. Si  $\mathcal{F}$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; X)$  et  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{f; f \in \mathcal{F}\}$  est bornée dans  $L^r(0, T; Y)$ , avec  $r > 1$ , puis  $\mathcal{F}$  relativement compact dans  $C([0, T]; U)$ .

**Preuve.**

- *i)* Ce résultat peut être trouver dans [11], Lemme 8.1, page 297.
- *ii)* Ce résultat peut être trouver dans [14], Corollaire 4, p. 85.

■

## 1.2 La formule de Green généralisée et théorème de trace

Soit  $\gamma$  opérateur linéaire continu, appelé opérateur de trace, de  $H^1(\Omega)$  en  $H^{1/2}(\Gamma)$  tel que :

$$\gamma(v) = v|_\Gamma, \text{ si } v \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^n.$$

Il est bien connu que si le domaine  $\Omega \in C^{1,1}$ , ils existent des applications linéaires sont uniquement déterminés  $\gamma_n$  de  $H^1(\Omega)$  en  $H^{1/2}(\Gamma)$  et  $\gamma_T$  de  $H^1(\Omega)$  en  $H_T^{1/2}(\Gamma)$  tel que :

$$\gamma(v) = \gamma_n(v)n + \gamma_T(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

où  $H_T^{1/2}(\Gamma) = \{\phi \in H^{1/2}(\Gamma); \gamma_n(\phi) = 0\}$ . Aussi si  $v \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^n$ ,  $\gamma_n(v) = v|_\Gamma \cdot n$  et  $\gamma_T(v) = v|_\Gamma - \gamma_n(v)n$ . Les applications  $\gamma_n(v)$  et  $\gamma_T(v)$  sont surjective. Ci-après, pour simplifier l'écriture,  $v_n$  et  $v_T$  désignent traces normales de  $v$ ,  $\gamma_n(v)$  et  $\gamma_T(v)$ , respectivement. Soit  $V$  l'espace définie par

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma(v) = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

et

$$K(\Omega) = \{v \in V; v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_+\},$$

le sous-ensemble convexe fermé des déplacements admissibles.

On note par  $\gamma_\Sigma^0 : V \rightarrow H^{1/2}(\Sigma)$  l'opérateur de tracer que relative  $v \in V$  avec la restriction de  $\gamma(v)$  sur  $\Sigma$ . Cet opérateur, ce qui conduit  $V$  en  $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$  est linéaire, continue et surjective pour les frontières  $\partial \Sigma$  que sont  $C^\infty$

**Lemme 2** *Si le domaine  $\Omega$  est  $C^{1,1}$  ils existent des applications linéaires, continues et surjectives*

$$\gamma_{\Sigma_n}^0 : V \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Sigma), \gamma_{\Sigma_T}^0 : V \rightarrow H_{T00}^{1/2}(\Sigma),$$

avec  $H_{T00}^{1/2}(\Sigma) = \{\phi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma); \phi_n = 0\}$  et tel que :

$$\gamma_{\Sigma}^0(v) = \gamma_{\Sigma_n}^0(v)n + \gamma_{\Sigma_T}^0(v)v \in V.$$

Considérons le champs des espace des contraintes :

$$\mathbf{L}_s^2(\Omega) = \{\tau = (\tau_{\alpha\beta}) \in [L^2(\Omega)]^{n^2}; \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}\}, \quad (1.1)$$

muni de la norme

$$\|\tau\|_{\mathbf{L}_s^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \tau : \tau dx \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

est un espace de Hilbert.

Soit  $E$  le sous-espace de  $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$  définie par :

$$E = \{\tau \in \mathbf{L}_s^2(\Omega); \operatorname{div}(\tau) \in L^2(\Omega)\}, \quad (1.3)$$

qui aussi est un espace de Hilbert avec la norme :

$$\|\tau\|_E = \|\tau\|_{\mathbf{L}_s^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.4)$$

**Lemme 3** Soit  $\Omega \in C^{0,1}$ . Alors il existe une unique application,  $\pi$  linéaire et continue de  $E$  en  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  tel que :

$$\pi(\tau) = \tau|_{\Gamma} n, \text{ si } \tau \in [C^1(\bar{\Omega})]^{n^2}.$$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine Lipschitzien et  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ .

On définit l'opérateur de trace  $\gamma_0$  est borné inversé.  $\gamma_0^- : H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^s(\Omega)$ . i.e.,  $\gamma_0 \gamma_0^- \omega = \omega$ ,  $\omega \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et

$$\|\gamma_0^-(\omega)\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|\omega\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

En outre, la formule de Green généralisée suivante vérifiée pour chaque  $\tau \in E$  et pour  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \tau : \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\tau) \cdot v dx = \langle \pi(\tau), \gamma(v) \rangle_{\Gamma}, \quad (1.6)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$  désigne le produit de dualité en  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ .

**Lemme 4** Si  $\Omega \in C^{1,1}$  Alors il existe des applications uniquement déterminé  $\pi_n$  de  $E$  en  $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)$  tel que

$$\langle \pi(\tau), \gamma(v) \rangle_{\Gamma} = \langle \pi_n(\tau), v_n \rangle_{n,\Gamma} + \langle \pi_T(\tau), v_T \rangle_{T,\Gamma},$$

Pour tout  $\tau \in E$  et  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , et

$$\pi_n(\tau) = \tau n \cdot n \quad \text{et} \quad \pi_T(\tau) = \tau n - \tau_n n,$$

pour tout  $\tau \in C^1(\bar{\Omega})$  où  $\tau_n \equiv \pi_n(\tau)$  Ci-après désigner simplement  $\tau_T \equiv \pi_T(\tau)$  s'il n'y a pas de confusion.

Ces résultats peuvent être étendus à l'espace  $V$  en utilisant l'application de trace  $\pi_{\Sigma}^0$  au lieu de  $\pi$ , comme suite :

**Théorème 5** Soit  $\Omega \in C^{0,1}$ . Alors il existe une application linéaire uniquement déterminée  $\pi_{\Sigma}^0$  de  $E$  en  $\left(\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma)\right)'$  tel que :

$$\pi_{\Sigma}^0(\tau) = \tau|_{\Sigma} n \text{ si } \tau \in C^1(\bar{\Omega}),$$

et la formule de Green générale est valable pour chaque  $\tau \in E$  et pour tout  $v \in V$

$$\int_{\Omega} \tau : \varepsilon(v) dV'_X + \int_{\Omega} \text{div} \tau \cdot v dV_X = {}_{00} \langle \pi_{\Sigma}^0(\tau), \gamma_{\Sigma}^0(v) \rangle_{\Sigma}, \quad (1.7)$$

où  ${}_{00} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma}$  désigne le produit de dualité  $\left(\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma)\right)' \times \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma)$ .

Aussi, si  $\Omega \in C^{1,1}$ ,  $\pi_{\Sigma}^0$  les opérateurs peuvent être décomposées en  $\pi_{\Sigma n}^0, \pi_{\Sigma T}^0$  tel que :

$${}_{00} \langle \pi_{\Sigma}^0(\tau), \gamma_{\Sigma}^0(v) \rangle_{\Sigma} = {}_{00} \langle \pi_{\Sigma n}^0(\tau), \gamma_{\Sigma n}^0(v) \rangle_{n; \Sigma} + {}_{00} \langle \pi_{\Sigma T}^0(\tau), \gamma_{\Sigma T}^0(v) \rangle_{T; \Sigma},$$

Pour tout  $\tau \in E$  et  $v \in V$ , et

$$\pi_{\Sigma n}^0(\tau) = \tau|_{\Sigma} n \cdot n \quad \text{et} \quad \pi_{\Sigma T}^0(\tau) = \tau|_{\Sigma} n - \tau_{n, \Sigma} n,$$

pour  $\tau \in C^1(\bar{\Omega})$ , où  $\tau_{n, \Sigma} \equiv \pi_{\Sigma n}^0(\tau)$ . Pour Plus de détails voir [17]

### 1.3 Lemme de Grönwall discrétisé

Soit  $y$  et  $g$  deux fonctions intégrables non négatives et  $C \geq 0$ . Si

$$y(t) \leq c + \int_0^t g(s)y(s)ds \text{ pour } t \geq 0.$$

Alors

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right) \text{ pour } t \geq 0.$$

### 1.4 La convergence faible, faible\*

**Proposition 6** Soit  $(x_n)$  une suite de  $E$  (espace de Banach) et soit  $f \in E'$  (Le dual de  $E$  muni de la norme duale  $\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|\langle f, x \rangle\|$ ,  $f_n$  une suite de  $E'$  alors :

$$\begin{aligned} - \left[ x_n \rightharpoonup x \text{ pour } \sigma(E, E') \right] &\iff \left[ \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \forall f \in E' \right]. \\ - \left[ f_n \xrightarrow{*} f \text{ pour } \sigma(E', E) \right] &\iff \left[ \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \forall x \in E \right]. \end{aligned}$$

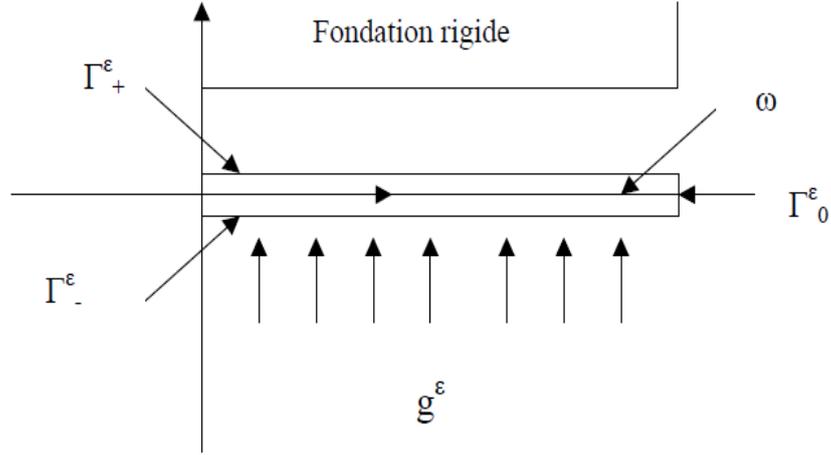
**Preuve.** Voir [8] ■

## Chapitre 2

# Étude asymptotique du problème de contact unilatérale d'une plaque mince contre un obstacle rigide dans l'élasticité linéaire

### 2.1 Position du problème

Soit  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine borné avec bord lipschitzien  $\gamma$ . On considère une plaque de dimension trois qui occupe le volume  $\Omega^\varepsilon = \omega \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  tel que  $\varepsilon$  paramètre assez petit ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ). On note le bord latérale par  $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , la face supérieurement et la face inférieurement respectivement par  $\Gamma_+^\varepsilon = \omega \times \{+\varepsilon\}$  et  $\Gamma_-^\varepsilon = \omega \times \{-\varepsilon\}$ . On note par  $\bar{v}$  le trace de  $v$  sur  $\Gamma_+^\varepsilon$  et par  $\underline{v}$  le trace de  $v$  sur  $\Gamma_-^\varepsilon$ , ou  $v$  simplement si il n'existe pas de confusion. On restreint notre étude dans le cas de corps élastique homogène et isotrope avec constants de Lamé  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$  dans la configuration nature où  $\rho^\varepsilon$  désigne la densité volumique. Cette plaque est soumise à une force volumique  $f^\varepsilon$  sur  $\Omega^\varepsilon \times ]0, +\infty[$  et un force surfacique  $g^\varepsilon$  sur  $\Gamma_-^\varepsilon \times ]0, +\infty[$  et entre en contact unilatéral avec un obstacle rigide occupant le domaine  $\sigma^\varepsilon = \{x^\varepsilon \in \mathbb{R}^3 (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \in \omega, x_3^\varepsilon > \varepsilon\}$ . La condition de contact est définie par l'inégalité  $\bar{v}_3 \leq 0$ . On rappelle que cet système dans le cas dynamique et que le contact est sans frottement.



## 2.2 le problème classique( $P^\varepsilon C$ )

nous employons les notations précédentes pour pose le problème classique.

Trouver  $(u^\varepsilon, \sigma^\varepsilon) := (u^\varepsilon(x^\varepsilon, t), \sigma^\varepsilon(u^\varepsilon))$  pour tout  $t \geq 0$  :

$$\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} - \partial_j^\varepsilon \sigma_{ij}^\varepsilon = f_i^\varepsilon \text{ sur } \Omega^\varepsilon \times ]0, +\infty[ \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon n_j^\varepsilon = g_i^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_-^\varepsilon \times ]0, +\infty[ \quad (2.2)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \times ]0, +\infty[, \quad (2.3)$$

Avec les conditions aux limites de Signorini

$$u_3^\varepsilon \leq 0, \sigma_{33}^\varepsilon \leq 0, \sigma_{33}^\varepsilon u_3^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon \times ]0, +\infty[ \quad (2.4)$$

Le contact sans frottement i.e  $\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon = 0$  sur  $\Gamma_+^\varepsilon \times ]0, +\infty[$  et les conditions initiales sont

$$u^\varepsilon(\cdot, 0) = p^\varepsilon, \dot{u}^\varepsilon(\cdot, 0) = q^\varepsilon, \quad (2.5)$$

Où  $\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \lambda e_{pp}^\varepsilon(u^\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon)$  sont les composantes du tenseur des contraintes ainsi représente la loi du comportement du matériau élastique de la matière élastique,  $e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left( \partial_i^\varepsilon u_j^\varepsilon + \partial_j^\varepsilon u_i^\varepsilon \right)$  sont les composants des déformations tenseur linéaire. Le champs de vecteurs  $\sigma_{ij}^\varepsilon n_j^\varepsilon$  représente la force agissant sur la surface de section  $ds$ , dont le vecteur normale unitaire extérieur  $n^\varepsilon$ . La quantité  $\sigma_N^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon n_j^\varepsilon n_i^\varepsilon$  le composant de force de pression et  $\sigma_T^\varepsilon = \sigma^\varepsilon n^\varepsilon - \sigma_N^\varepsilon n^\varepsilon$  la force de frottement. Dans notre cas,  $\sigma_N^\varepsilon = \sigma_{33}^\varepsilon$  et  $\sigma_T^\varepsilon = (\sigma_{13}^\varepsilon, \sigma_{23}^\varepsilon, 0)$  sur  $\Gamma_+^\varepsilon$ . Nous signalons que nous allons noter de la fonction et leur trace de la même notation.

Pour réécrit le problème classique ( $P^\varepsilon C$ ) de formulation variationnelle nous utilisons la formule de Green, nous montrons que toute solution en douceur du problème de la valeur limite satisfait également le problème variationnelle ( $P^\varepsilon V$ ).

### 2.3 Le problème variationnelle

$$\text{Trouver } (u^\varepsilon(t), \sigma^\varepsilon(t)) \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \times \mathbf{L}_S^2(\Omega^\varepsilon), t \geq 0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \ddot{u}_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon + a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \langle \sigma_{33}^\varepsilon, \bar{v}_3^\varepsilon \rangle, \forall v^\varepsilon \in \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon), t > 0 \quad (2.6)$$

$$\langle \sigma_{33}^\varepsilon, v_3^\varepsilon - u_3^\varepsilon \rangle \geq 0, \forall v_3^\varepsilon \in K(\Omega^\varepsilon), t > 0 \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \lambda e_{pp}^\varepsilon(u^\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) \quad (2.8)$$

$$u^\varepsilon(\cdot, 0) = p^\varepsilon, \dot{u}^\varepsilon(\cdot, 0) = q^\varepsilon \quad (2.9)$$

tel que :

$$V(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon), v^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\}, K(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon \in V(\Omega^\varepsilon), \bar{v}_3^\varepsilon \leq 0 \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon\}, \\ \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon) = V(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon), \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) = V(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon) \times K(\Omega^\varepsilon),$$

$$\mathbf{L}_S^2(\Omega^\varepsilon) = \{\tau = (\tau_{ij}^\varepsilon) \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^9; \tau_{ij}^\varepsilon = \tau_{ji}^\varepsilon\}$$

**Preuve.** :formulation variationnelle de ( $P^\varepsilon C$ )

On utilise la formule de Green

$$\rho^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \ddot{u}_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon + a(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\partial\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) n_j^\varepsilon \cdot v_i^\varepsilon dx^\varepsilon \quad (2.10)$$

$$= \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) n_j^\varepsilon \cdot v_i^\varepsilon d\Gamma + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) n_j^\varepsilon \cdot v_i^\varepsilon d\Gamma + \int_{\Gamma_+^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) n_j^\varepsilon \cdot v_i^\varepsilon d\Gamma \quad (2.11)$$

on

$$\int_{\Gamma_0^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) n_j^\varepsilon \cdot v_i^\varepsilon dx^\varepsilon = 0 \text{ puisque } u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \quad (2.12)$$

et

$$\int_{\Gamma_-^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) n_j^\varepsilon \cdot v_i^\varepsilon d\Gamma^\varepsilon = \int_{\Gamma_-^\varepsilon} g_i^\varepsilon v_i^\varepsilon d\Gamma \quad (2.13)$$

et

$$\langle \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) n_j^\varepsilon \cdot v_i^\varepsilon \rangle_{\Gamma_+^\varepsilon} = \langle \sigma_N^\varepsilon n^\varepsilon + \sigma_T^\varepsilon v_T^\varepsilon + v_N^\varepsilon n \rangle_{\Gamma_+^\varepsilon} = \langle \sigma_N^\varepsilon, v_N^\varepsilon \rangle_{\Gamma_+^\varepsilon} \quad (2.14)$$

on a

$$\langle \sigma_{33}^\varepsilon, v_3^\varepsilon - u_3^\varepsilon \rangle = \langle \sigma_{33}^\varepsilon, v_3^\varepsilon - 0 + 0 - u_3^\varepsilon \rangle \quad (2.15)$$

$$= \langle \sigma_{33}^\varepsilon, v_3^\varepsilon - 0 \rangle + \langle \sigma_{33}^\varepsilon, 0 - u_3^\varepsilon \rangle$$

$$= \langle \sigma_{33}^\varepsilon, v_3^\varepsilon \rangle \geq 0$$

d'où (2.7) Avec

$$\begin{aligned} a(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) \partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} [\lambda e_{ii}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{jj}^\varepsilon(v^\varepsilon) + 2\mu e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(v^\varepsilon)] dx^\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} (\partial_i^\varepsilon u_j^\varepsilon + \partial_j^\varepsilon u_i^\varepsilon).$$

$$L^\varepsilon(v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon v dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} g^\varepsilon v d\Gamma^\varepsilon. \quad (2.17)$$

$$\langle \sigma_{33}^\varepsilon, \bar{v}_3^\varepsilon \rangle = \int_{\Gamma_+^\varepsilon} \sigma_{33}^\varepsilon \bar{v}_3^\varepsilon d\Gamma. \quad (\text{le produit de dualité}) \blacksquare$$

**Théorème 7** :Étant donné les hypothèses suivantes :

$$f_i^\varepsilon \in W^{2,\infty}(0, T, L^2(\Omega^\varepsilon)), \quad g_i^\varepsilon \in W^{2,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_-^\varepsilon) \cap H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-^\varepsilon)).$$

Et les conditions initiales  $p_i^\varepsilon, q_i^\varepsilon$  sur  $H^1(\Omega^\varepsilon)$  avec  $\text{div}\sigma^\varepsilon(p^\varepsilon) \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3$ ,

Alors, le problème  $(P^\varepsilon V)$  admet une solution  $u^\varepsilon$  vérifié :

$$u^\varepsilon \in L^\infty(0, T, \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon)), \dot{u}^\varepsilon \in L^\infty(0, T, (L^2(\Omega^\varepsilon))^3) \text{ et } \ddot{u}_i^\varepsilon \in \mathfrak{D}'(0, T, (L^2(\Omega^\varepsilon))^3)$$

Le tenseur des contraintes

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon) \text{ appartient } \mathfrak{D}'(0, T, E_{ad}(g^\varepsilon)) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega^\varepsilon))^{3 \times 3})$$

avec

$$E_{ad}(g^\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \tau^\varepsilon \in \mathbf{L}_s^2(\Omega^\varepsilon); \text{div}\tau^\varepsilon \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3, \tau_{\alpha 3}^\varepsilon = 0 \\ \text{et } \tau_{33}^\varepsilon \leq 0 \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon; \tau^\varepsilon n^\varepsilon = g^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_-^\varepsilon \end{array} \right\}$$

Le produit de dualité  $\langle \sigma_{33}^\varepsilon, \phi_3^\varepsilon \rangle$  sur  $\Gamma_+^\varepsilon$  on peut utiliser le note l'intégrale sur  $\Gamma_+^\varepsilon$ .

Ainsi, on a  $\sigma_{33}^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$  et  $\partial_3^\varepsilon \sigma_{33}^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$  alors  $\sigma_{33}^\varepsilon \in L^2(\Gamma_+^\varepsilon)$ , de la sens de trace, avec  $\|\sigma_{33}^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_+^\varepsilon)} \leq c(\|\sigma_{33}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \|\partial_3^\varepsilon \sigma_{33}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2)^{1/2}$  (voir [22], page 219). Généralement, les éléments de

$$H(\text{div}, \Omega^\varepsilon) = \{ \tau^\varepsilon = (\tau_{ij}^\varepsilon) \in L^2(\Omega^\varepsilon); \text{div}\tau^\varepsilon \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3 \}$$

ont des traces normales  $\gamma_N(\sigma^\varepsilon)$  sur  $\Gamma_+^\varepsilon$ .

**Preuve.** La preuve est composé de cinq étape.

**étape 1** : premièrement, l'intervalle  $[0, T]$  est on divise en sous intervalles régulières.

On introduit le problème d'approximation  $(P^\varepsilon VD)$  au temps  $t = t_i, 1 \leq i \leq 2^I$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u^{\varepsilon, i} \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon), \dot{u}^\varepsilon \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3 \text{ et } \ddot{u}^{\varepsilon, i} \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3, \\ \rho^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \left( \frac{\ddot{u}^{\varepsilon, i} + \ddot{u}^{\varepsilon, i-1}}{2} \right) (v^\varepsilon - u^{\varepsilon, i}) dx^\varepsilon + a^\varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^{\varepsilon, i} + \ddot{u}^{\varepsilon, i-1}}{2}, v^\varepsilon - u^{\varepsilon, i} \right) \geq L^{\varepsilon, i} (v^\varepsilon - u^{\varepsilon, i}) \\ \forall v^\varepsilon \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \end{array} \right.$$

Où

$$L^{\varepsilon, i}(v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^{\varepsilon, i} v dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} g^{\varepsilon, i} v d\Gamma^\varepsilon \quad (2.18)$$

avec la notation  $\phi^{\varepsilon, i} = \phi^\varepsilon(t_i), \dot{\phi}^\varepsilon = \frac{d}{dt} \phi^\varepsilon$ , et  $\ddot{\phi}^\varepsilon = \frac{d^2}{dt^2} \phi^\varepsilon$ .

Le déplacement discrétisé, la vitesse et l'accélération sont approximées par la méthode de Newmark suivant :

$$u^{\varepsilon, i} = u^{\varepsilon, i-1} + \Delta t \dot{u}^{\varepsilon, i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\ddot{u}^{\varepsilon, i} + \ddot{u}^{\varepsilon, i-1}}{2} \quad (2.19)$$

$$\dot{u}^{\varepsilon, i} = \dot{u}^{\varepsilon, i-1} + \Delta t \frac{\ddot{u}^{\varepsilon, i} + \ddot{u}^{\varepsilon, i-1}}{2} \quad (2.20)$$

**Lemme 5** : Pour toute temps  $t_i, u^{\varepsilon, i-1} \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon), \dot{u}^{\varepsilon, i-1} \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3$  et  $\ddot{u}^{\varepsilon, i-1} \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3$  alors le problème  $(P^\varepsilon VD)$  admet une solution unique.

**Preuve.** : voir [16] ■

**étape 2** : on approxime les fonctions d'approximations :

$$h^{\varepsilon,I}(t) = u^{\varepsilon,i-1} + \dot{u}^{\varepsilon,i-1}(t - t_{i-1}) + \frac{\ddot{u}^{\varepsilon,i} + \ddot{u}^{\varepsilon,i-1}}{4}(t - t_{i-1})^2 \quad (2.21)$$

$$u_*^{\varepsilon,I}(t) = u^{\varepsilon,i}, \forall t \in [t_{i-1}, t_i[ \quad (2.22)$$

$$h_*^{\varepsilon,I}(t) = \frac{u^{\varepsilon,i} + u^{\varepsilon,i-1}}{2}, h^{\varepsilon,2I}(t) = u^{\varepsilon,2I}, h_t^{\varepsilon,2I}(t) = u_t^{\varepsilon,2I}. \quad (2.23)$$

**étape 3** : Puis, on traite la condition de contact avec les multiplicateurs de Lagrange

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{2dt} \left[ \rho^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \left| \dot{h}^{\varepsilon,I}(t) \right|^2 dx^\varepsilon + a^\varepsilon(h^{\varepsilon,I}(t), h^{\varepsilon,I}(t)) \right] dt \quad (2.24)$$

$$\leq L^{\varepsilon,i}(u^{\varepsilon,i} - u^{\varepsilon,i-1}), \forall t \in ]t_{i-1}, t_i[. \quad (2.25)$$

**étape 4** : Cette estimation nous permet de montrer la convergence faible des solutions approximatives et que ces limites sont égales .

$$h^{\varepsilon,I}(t) \rightharpoonup u^\varepsilon(t), \dot{h}^{\varepsilon,I}(t) \rightharpoonup \dot{u}^\varepsilon(t) \text{ faible } * \text{ sur } L^\infty(0, T, (L^2(\Omega^\varepsilon))^3). \quad (2.26)$$

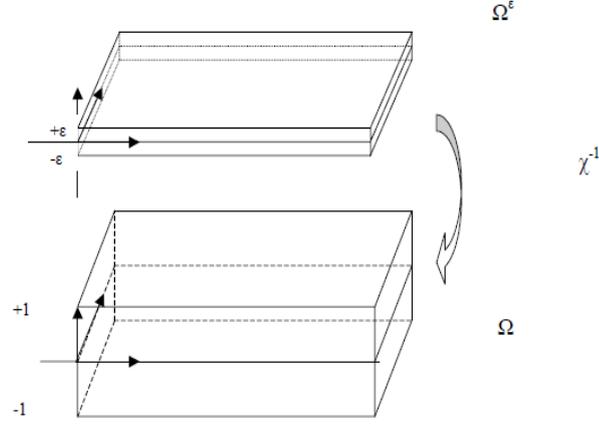
$$h_*^{\varepsilon,I}(t) \rightharpoonup u^\varepsilon(t), u_*^{\varepsilon,I}(t) \rightharpoonup u^\varepsilon(t) \text{ faible } * \text{ sur } L^\infty(0, T, (H^1(\Omega^\varepsilon))^3). \quad (2.27)$$

**étape 5** : Finalement, on montre que cette limite est solution du problème ( $P^\varepsilon V$ ).

**Remarque 8** : le problème ( $P^\varepsilon V$ ) est formellement équivalent à l'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon : [0, T] \rightarrow \vec{K}(\Omega^\varepsilon) \text{ tel que} \\ \rho^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \ddot{u}_i^\varepsilon (v_i^\varepsilon - \dot{u}_i^\varepsilon) dx^\varepsilon + a^\varepsilon(u^\varepsilon, v_i^\varepsilon - \dot{u}_i^\varepsilon) \geq L^\varepsilon(v^\varepsilon - \dot{u}^\varepsilon), \forall v^\varepsilon \in \vec{K}(\Omega^\varepsilon), \text{ pour tout } t \geq 0 \\ u^\varepsilon(., 0) = p^\varepsilon, \dot{u}^\varepsilon(., 0) = q^\varepsilon \end{array} \right.$$

■



## 2.4 Étude asymptotique

Dans cette section, on transforme d'abord le problème variationnel  $(P^\varepsilon V)$  vers un problème variationnel mise à l'échelle  $(P(\varepsilon)V)$  sur le domaine  $\Omega$  indépendant de  $\varepsilon$ , puis, par rapport l'Anstaz de la base de la méthode de développement asymptotique formel, on injecte la mise à l'échelle des inconnues dans  $(P(\varepsilon)V)$ . Finalement, on identifie le premier terme du développement asymptotique formel de la mise à l'échelle de déplacement et la mise à l'échelle de tenseur des contraintes.

Soit l'application :

$$\chi^\varepsilon : \Omega \rightarrow \Omega^\varepsilon$$

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) / x_1^\varepsilon = x_1, x_2^\varepsilon = x_2, x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3 \quad (2.28)$$

D'où :

$$\chi^\varepsilon(\Omega) = \Omega^\varepsilon; \Omega = \omega \times ]-1, +1[;$$

$$\chi^\varepsilon(\Gamma_-^\varepsilon) = \Gamma_- = \omega \times \{-1\}$$

$$\chi^\varepsilon(\Gamma_+^\varepsilon) = \Gamma_+ = \omega \times \{+1\};$$

$$\chi^\varepsilon(\Gamma_0^\varepsilon) = \Gamma_0 = \partial\omega \times [-1, +1]$$

L'application inverse de  $\chi^\varepsilon$  est une dilatation de  $\Omega^\varepsilon$ .

### 2.4.1 Mise à l'échelle des déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 u_\alpha(\varepsilon) \quad , \quad u_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^1 u_3(\varepsilon) \\ v_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 v_\alpha(\varepsilon) \quad , \quad v_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^1 v_3(\varepsilon) \\ \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon) \quad , \quad \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-3} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon(u^\varepsilon), \quad \sigma_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-4} \sigma_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon) \end{array} \right. \quad (2.29)$$

La condition de contact mise à l'échelle est définie, pour un déplacement  $v^\varepsilon \in \vec{V}(\Omega^\varepsilon)$  par :

$$\bar{v}_3 \leq 0. \quad (2.30)$$

On note ainsi :

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega)/v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}, \\ K(\Omega) &= \{v \in V(\Omega), \bar{v}_3 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_+\}, \\ \vec{V}(\Omega) &= V(\Omega) \times V(\Omega) \times V(\Omega), \\ \vec{K}(\Omega) &= V(\Omega) \times V(\Omega) \times K(\Omega) \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_s^2(\Omega) = \{\tau = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega))^{3 \times 3}; \tau_{ij} = \tau_{ji}\}.$$

### 2.4.2 Mise à l'échelle des forces :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 f_\alpha, \quad f_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^3 f_3 \\ g_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^3 g_\alpha, \quad g_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^4 g_3 \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Mise à l'échelle des opérateurs différentiels et la densité volumique :

$$\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha, \quad \partial_3^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \partial_3. \quad (2.32)$$

$$\rho^\varepsilon = \varepsilon^2 \rho. \quad (2.33)$$

Finalement supposons qu'ils existent  $p, q$  indépendant de  $\varepsilon$  d'où :

$$p_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^2 p_\alpha^0, \quad p_3^\varepsilon = \varepsilon p_3^0, \quad q_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^2 q_\alpha^0, \quad q_3^\varepsilon = \varepsilon q_3^0 \quad (2.34)$$

il vient de (2.28),(2.29),(2.31)et(2.32) que

$$L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \varepsilon^5 L(v) \text{ où } L(v) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_-} g_i \underline{v}_i d\Gamma \quad (2.35)$$

$$e_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \varepsilon^2 e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)), \quad e_{\alpha 3}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \varepsilon e_{\alpha 3}(u(\varepsilon)), \quad e_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon) = e_{33}(u(\varepsilon)) \quad (2.36)$$

après insertion de (2.35) et (2.36) dans (2.8), on trouve que :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \varepsilon^2[\lambda e_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon))\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))] + \lambda e_{33}(u(\varepsilon)) \\ \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \varepsilon 2\mu e_{\alpha 3}(u(\varepsilon)) \\ \sigma_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon) = (\lambda + 2\mu)e_{33}(u(\varepsilon)) + \varepsilon^2 \lambda e_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon)) \end{cases} \quad (2.37)$$

### 2.4.3 Mise à l'échelle du problème variationnel :

On introduit (2.28), (2.29) et (2.32) dans (2.16), Il vient que :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon) \partial_\beta^\varepsilon v_\alpha^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon(u^\varepsilon) \partial_3^\varepsilon v_\alpha^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{3\alpha}^\varepsilon(u^\varepsilon) \partial_\beta^\varepsilon v_3^\varepsilon dx^\varepsilon \\ &\quad + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon) \partial_3^\varepsilon v_3^\varepsilon dx^\varepsilon \\ &= \varepsilon^3 \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon) \partial_\beta v_\alpha dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon(u^\varepsilon) \partial_3 v_\alpha dx \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \sigma_{3\alpha}^\varepsilon(u^\varepsilon) \partial_\alpha v_3 dx + \varepsilon \int_{\Omega} \sigma_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon) \partial_3 v_3 dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

En divisant (2.38) par  $\varepsilon^5$  et on posant :

$$\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon), \quad \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-3} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon(u^\varepsilon), \quad \sigma_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-4} \sigma_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon). \quad (2.39)$$

On trouve, avec (2.37) que

$$a^\varepsilon(u(\varepsilon), v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\varepsilon) \partial_j v_i dx \quad (2.40)$$

Tels que :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \lambda e_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon))\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) + \varepsilon^{-2} \lambda e_{33}(u(\varepsilon)) \\ \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2} 2\mu e_{\alpha 3}(u(\varepsilon)) \\ \sigma_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-4} (\lambda + 2\mu) e_{33}(u(\varepsilon)) + \varepsilon^{-2} \lambda e_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon)) \end{cases} \quad (2.41)$$

avec

$$e_{ij}(u(\varepsilon)) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j(\varepsilon) + \partial_j u_i(\varepsilon))$$

**Proposition 9** *Le problème variationnel  $(P^\varepsilon V)$  est équivalent au problème  $(P(\varepsilon) V)$  :*

*Trouver  $(u(\varepsilon)(t), \sigma(\varepsilon)) \in \vec{K}(\Omega) \times \mathbf{L}_s^2(\Omega)$ ,  $t \geq 0$*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \int_{\Omega} u_3(\varepsilon) v_3 dx + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \int_{\Omega} u_\alpha(\varepsilon) v_\alpha dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\varepsilon) \partial_j v_i dx \\ &= L(v) + \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 \rangle, \forall v \in \vec{V}(\Omega), t > 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \geq 0, \forall v_3 \in K(\Omega), t > 0 \quad (2.43)$$

$$u(\varepsilon)(\cdot, 0) = p^0, \dot{u}(\varepsilon)(\cdot, 0) = q^0$$

**Preuve.** Il suffit d'introduire (2.28), (2.29), (2.34) et (2.35) dans (2.6) et (2.7) pour avoir  $(P(\varepsilon)V)$ . La réciproque est obtenue en faisant une mise à l'échelle inverse "de-scaling". ■

Depuis que le problème variationnel  $(P^\varepsilon V)$  admet une solution  $u^\varepsilon$  alors le problème  $(P(\varepsilon)V)$  admet aussi une solution  $u(\varepsilon)$  avec la régularité

$$u(\varepsilon) \in L^\infty(0, T, \overrightarrow{K}(\Omega)), \dot{u}(\varepsilon) \in L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^3) \text{ et } \ddot{u}(\varepsilon) \in \mathfrak{D}'(0, T, (L^2(\Omega))^3)$$

Le tenseur  $\sigma(\varepsilon)$  appartient  $\mathfrak{D}'(0, T, E_{ad}(g)) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^{3 \times 3})$  avec

$$E_{ad}(g) = \left\{ \begin{array}{l} \tau \in \mathbf{L}_s^2(\Omega); \operatorname{div} \tau \in (L^2(\Omega))^3, \tau_{\alpha 3} = 0 \\ \text{et } \tau_{33} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_+; \tau n = g \text{ sur } \Gamma_- \end{array} \right\}$$

#### 2.4.4 Problème bidimensionnel :

Nous supposons que le déplacement-contrainte mise à l'échelle  $(u(\varepsilon)(t), \sigma(\varepsilon))$  admet un développement asymptotique formelle de la forme :

$$(u(\varepsilon)(t), \sigma(\varepsilon)) = (u^0, \sigma^0) + \varepsilon(u^1, \sigma^1) + \varepsilon^2(u^2, \sigma^2) + \dots, \quad (2.44)$$

$$u^q \in \overrightarrow{V}(\Omega), u^q \in (H^1(\Omega))^3, \sigma^q, \sigma^q \in \mathbf{L}_s^2(\Omega), q \in \{1, 2, \dots\}, t > 0$$

Donc le développement du tenseur de déformation devient :

$$e_{ij}(\varepsilon) = e_{ij}(u^0) + \varepsilon e_{ij}(u^1) + \varepsilon^2 e_{ij}(u^2) + \dots \quad (2.45)$$

Le système (2.41) et le développement (2.45) nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2} \sigma_{\alpha\beta}^{-2} + \varepsilon^{-1} \sigma_{\alpha\beta}^{-1} + \varepsilon^0 \sigma_{\alpha\beta}^0 + \dots \\ \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2} \sigma_{\alpha 3}^{-2} + \varepsilon^{-1} \sigma_{\alpha 3}^{-1} + \varepsilon^0 \sigma_{\alpha 3}^0 + \dots \\ \sigma_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-4} \sigma_{33}^{-4} + \varepsilon^{-3} \sigma_{33}^{-3} + \varepsilon^{-2} \sigma_{33}^{-2} + \varepsilon^{-1} \sigma_{33}^{-1} + \varepsilon^0 \sigma_{33}^0 + \dots \end{cases} \quad (2.46)$$

Après insertion de (2.45) dans (2.41), on trouve :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^{-2} = \lambda \partial_3 u_3^0 \delta_{\alpha\beta}; \sigma_{\alpha\beta}^{-1} = \lambda \partial_3 u_3^1 \delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta}^0 = \lambda \partial_\gamma u_\gamma^0 \delta_{\alpha\beta} + \mu (\partial_\alpha u_\beta^0 + \partial_\beta u_\alpha^0) + \lambda \partial_3 u_3^2 \delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha 3}^{-2} = \mu (\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0); \sigma_{\alpha 3}^{-1} = \mu (\partial_\alpha u_3^1 + \partial_3 u_\alpha^1); \sigma_{\alpha 3}^0 = \mu (\partial_\alpha u_3^2 + \partial_3 u_\alpha^2); \\ \sigma_{33}^{-4} = (\lambda + 2\mu) \partial_3 u_3^0; \sigma_{33}^{-3} = (\lambda + 2\mu) \partial_3 u_3^1; \sigma_{33}^{-2} = (\lambda + 2\mu) \partial_3 u_3^2 + \lambda \partial_\gamma u_\gamma^0; \\ \sigma_{33}^{-1} = (\lambda + 2\mu) \partial_3 u_3^3 + \lambda \partial_\gamma u_\gamma^1; \sigma_{33}^0 = (\lambda + 2\mu) \partial_3 u_3^4 + \lambda \partial_\gamma u_\gamma^2; \end{cases} \quad (2.47)$$

On introduit (2.46) dans (2.42). Après identification des coefficients de  $\varepsilon^q$ ,  $q = -4, -3, -2, -1, 0$ .

On obtient :

A l'ordre  $\varepsilon^{-4}$  :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-4} \partial_3 v_3 dx = \langle \sigma_{33}^{-4}, \bar{v}_3 \rangle; \forall v \in V(\Omega) \quad (2.48)$$

A l'ordre  $\varepsilon^{-3}$  :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-3} \partial_3 v_3 dx = \langle \sigma_{33}^{-3}, \bar{v}_3 \rangle; \forall v \in V(\Omega) \quad (2.49)$$

A l'ordre  $\varepsilon^{-2}$  :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-2} \partial_3 v_3 dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{-2} \partial_\beta v_\alpha dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{-2} (\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha) dx = \langle \sigma_{33}^{-2}, \bar{v}_3 \rangle; \forall v \in V(\Omega) \quad (2.50)$$

A l'ordre  $\varepsilon^{-1}$  :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-1} \partial_3 v_3 dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{-1} \partial_\beta v_\alpha dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{-1} (\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha) dx = \langle \sigma_{33}^{-1}, \bar{v}_3 \rangle; \forall v \in V(\Omega) \quad (2.51)$$

A l'ordre  $\varepsilon^0$  :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^0 \partial_3 v_3 dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^0 (\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha) dx = L(v) + \langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 \rangle; \forall v \in V(\Omega) \quad (2.52)$$

Les intégrales précédentes sont bien définies. En effet, tout les coefficients

$\sigma_{\alpha\beta}^{-2}, \sigma_{\alpha\beta}^{-1}, \dots$ , trouvés dans (2.47), appartiennent à  $L^2(\Omega)$ .

**Lemme 6** : Si une fonction  $\phi \in L^2(\Omega)$ , vérifiant  $\int_{\Omega} \phi \partial_3 \psi dx = 0$ , pour tout  $\psi \in \vec{V}(\Omega)$  tel que  $\bar{\psi} = 0$  sur  $\Gamma_+$  Alors,  $\phi = 0$  p.p sur  $\Omega$ .

**Preuve.** : Soit  $\varphi \in D(\Omega)$ , on prend  $\psi = -\int_{x_3}^1 \varphi(x_1, x_2, t) dt$  qui appartient à  $\vec{V}(\Omega)$ , vérifie  $\bar{\psi} = 0$  et  $\partial_3 \psi = \varphi$ .

Donc  $\int_{\Omega} \phi \partial_3 \psi dx = 0$  implique que  $\int_{\Omega} \phi \varphi dx = 0$  ce qui entraine  $\phi = 0$  p.p sur  $\Omega$ . ■

On introduit l'espace des déplacements de type Kirchhoff-Love  $V_{KL}$  tel que :

$$V_{KL}(\Omega) = \{v = (v_i) \in (H^1(\Omega))^3 / \partial_i v_3 + \partial_3 v_i = 0\}$$

**Corollaire 10** :

$$\begin{aligned}
V_{KL}(\Omega) &= \{v = (v_i) \in (H^1(\Omega))^3, e_{i3}(v) = 0\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} v = (v_i) \in (H^1(\Omega))^3 / v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, v_3 = \eta_3 \\ \text{pour tout } \eta_\alpha \in H_0^1(\omega), \eta_3 \in H_0^2(\omega) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Supposons qu'ils existent  $\varphi_i, \psi_i$  indépendant de  $x_3$  telque

$$p_\alpha^0 = \varphi_\alpha - x_3 \partial_\alpha \varphi_3, p_3^0 = \varphi_3 \text{ et } q_\alpha^0 = \psi_\alpha - x_3 \partial_\alpha \psi_3, q_3^0 = \psi_3.$$

De plus cet espace est isomorphe à l'espace :

$$V(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$$

**Preuve.** : Soit  $v \in V_{KL}(\Omega)$  alors  $\partial_3 v_3 = 0$  dans  $\Omega$  et  $v_3 = 0$  sur  $\Gamma_0$  donc  $v_3$  est indépendant de  $x_3$ . Par conséquent, il existe  $\eta_3 \in H_0^1(\omega)$  telle que  $v_3 = \eta_3$ .

L'équation  $\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha = 0$  implique que  $\partial_{33} v_\alpha = -\partial_\alpha(\partial_3 v_3) = 0$  (au sens des distributions). D'où, avec  $v_\alpha = 0$  sur  $\Gamma_0$ , il existe  $\eta_\alpha, \eta_\alpha^1 \in H_0^1(\omega)$  telles que

$v_\alpha = \eta_\alpha + x_3 \eta_\alpha^1$ . On a  $\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha = \partial_\alpha \eta_3 + \eta_\alpha^1 = 0$ , d'où  $\eta_3 \in H_0^2(\omega)$ . Inversement, si  $v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, v_3 = \eta_3$  avec  $(\eta_\alpha, \eta_3) \in H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$ ,

il est claire que  $v \in \vec{V}(\omega)$ , et  $\partial_i v_3 + \partial_3 v_i = 0$ . Pour avoir l'isomorphisme, il

suffit de montrer le homomorphisme, ce qui est facile à établir. ■

**Proposition 11** : Si  $(u(\varepsilon)(t), \sigma(\varepsilon))$  est solution du problème variationnel  $(P(\varepsilon)V)$  et définie par 2.44, alors  $(u^0, \sigma^0)$  est une solution du problème  $(P_{KL}^0 V)$  :

Trouver  $(u^0(t), \sigma^0(t)) \in (V_{KL}(\Omega) \cap \vec{K}(\Omega)) \times \mathbf{L}_s^2(\Omega), t \geq 0$  tel que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \int_\Omega u_3^0 v_3 dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha dx = L(v) + \langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 \rangle, \forall v \in V_{KL}(\Omega), t > 0 \quad (2.53)$$

$$\langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 - \bar{u}_3^0 \rangle \geq 0, \forall v_3 \in K(\Omega), t > 0 \quad (2.54)$$

tel que :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \lambda^* e_{\gamma\gamma}(u^0) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(u^0) \text{ avec } \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \quad (2.55)$$

$$u^0(., 0) = p^0, \dot{u}^0(., 0) = q^0$$

Avec

$$e_{\alpha\beta}(u^0) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta^0 + \partial_\beta u_\alpha^0).$$

**Preuve.** Loi de comportement inversée  $e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \lambda_1 \sigma_{pp}^\varepsilon \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}^\varepsilon$  avec  $\lambda_1 = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$ .

Alors le tenseur de déformation à l'échelle :

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) = \lambda_1 \sigma_{\gamma\gamma}(\varepsilon) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) + \varepsilon^2 \lambda_1 \sigma_{33}(\varepsilon) \delta_{\alpha\beta}, \\ e_{\alpha 3}(u(\varepsilon)) = \varepsilon^2 \frac{1}{2\mu} \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \\ e_{33}(u(\varepsilon)) = \varepsilon^2 \lambda_1 \sigma_{\gamma\gamma}(\varepsilon) + \varepsilon^4 \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{33}(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.56)$$

Après insertion de (2.44) dans le système (2.56) on obtient

$$e_{\alpha\beta}(u^0) = -\lambda_1 \sigma_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{\alpha\beta}^0, \quad (2.57)$$

$$e_{\alpha 3}(u^0) = 0, \quad (2.58)$$

$$e_{33}(u^0) = 0. \quad (2.59)$$

De(2.58)-(2.59) et avec le condition de contact, on deduit que  $u^0 \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$ .

En prenant  $\bar{v}_3 = 0$  dans (2.48), on trouve :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-4} \partial_3 v_3 dx = 0, \forall v \in V(\Omega),$$

par le moyen du lemme6,  $\sigma_{33}^{-4} = 0$ , ce qui donne :

$$\partial_3 u_3^0 = 0. \quad (2.60)$$

De (2.49), on a  $\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-3} \partial_3 v_3 dx = 0$ , pour  $v_3 \in V(\Omega)$  et  $\bar{v}_3 = 0$ ,

ce qui entraine  $\sigma_{33}^{-3} = 0$ ,

D'où :

$$\partial_3 u_3^1 = 0. \quad (2.61)$$

De (2.56) et (2.57), on déduit que :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{-2} = 0 \text{ et } \sigma_{\alpha\beta}^{-1} = 0.$$

Dans (2.50), on pose  $v_3 = 0$ , on obtient  $\int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{-2} \partial_3 v_{\alpha} dx = 0; \forall v_{\alpha} \in V(\Omega)$ . Ce qui reste vraie pour les éléments qui vérifient  $v = 0$  sur  $\Gamma_+$ , donc on peut appliquer le lemme 6.

D'où,

$$\sigma_{\alpha 3}^{-2} = 0 \text{ et } \partial_{\alpha} u_3^0 + \partial_3 u_{\alpha}^0 = 0. \quad (2.62)$$

Toujours, dans (2.50) on pose  $v_\alpha = 0$  puis  $\bar{v}_3 = 0$ , on trouve que :

$$\sigma_{33}^{-2} = 0. \quad (2.63)$$

En utilisant le même procédé, dans (2.51) on trouve que  $\sigma_{\alpha 3}^{-1} = 0$ .

On remarque de (2.56) et (2.59) que  $u^0$  est de type Kirchhoff-Love. Donc l'espace des déplacements admissibles avec contact est  $V_{KL}(\Omega) \cap \vec{K}(\Omega)$ . Ce qui réduit (2.52) à :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \int_{\Omega} u_3^0 v_3 dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha dx = L(v) + \langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 \rangle, \forall v \in V_{KL}(\Omega), t > 0.$$

Avec

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \lambda \partial_\gamma u_\gamma^0 \delta_{\alpha\beta} + \mu (\partial_\alpha u_\beta^0 + \partial_\beta u_\alpha^0) + \lambda \partial_3 u_3^0 \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.64)$$

D'où (2.53). Puis on tire  $\partial_3 u_3^0$  de l'équation  $\sigma_{33}^{-2} = 0$ , et on l'introduit dans (2.61), on trouve (2.55).

Après introduction de (2.44) dans (2.41) et de l'écriture de  $\sigma_{33}(\varepsilon)$ ; les produits qui en dérivent ont un sens. Ceci est dû à la condition dans (2.44), le premier membre de (2.41) devient un polynôme en  $\varepsilon > 0$ , positif, donc sa constante à l'origine est positive.

D'où (2.54).

On note  $\vec{K}(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times K(\omega)$  avec  $K(\omega) = \{v \in H_0^2(\omega) / v \leq 0\}$ . ■

**Remarque 12** D'après le corollaire 10 chercher  $u^0 \in V_{KL}(\Omega) \cap \vec{K}(\Omega)$  revient à chercher  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  dans  $\vec{K}(\Omega)$ , d'où on peut ramener notre problème tridimensionnel ( $P_{KL}^0 V$ ) à un problème bidimensionnel ( $P^b(0)$ ).

Le champ de vecteur  $(\zeta_i)$ . De déplacement représente la mise à l'échelle de la surface du milieu de la plaque.

**Proposition 13** Si  $(u^0, \sigma^0)$  est la solution de ( $P_{KL}^0 V$ ) tel que  $u_\alpha^0 = \zeta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \zeta_3$ . Et  $u_3^0 = \zeta_3$ , avec  $\zeta_\alpha, \zeta_3$  sont assez réguliers. Alors  $\zeta_\alpha, \zeta_3$  vérifient avec  $\sigma_{33}^0$  le problème bidimensionnel ( $P^b(0)$ ) suivant :

Trouver  $\zeta_\alpha \in H^1(\omega), \zeta_3 \in H_0^2(\omega), \zeta_3 \leq 0$ , pour tout  $t \geq 0$  tel que

$$2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \zeta_3 + k \Delta^2 \zeta_3 = h_1^1 + h_2^1 + h_3^0 + \sigma_{33}^0 \text{ sur } \omega \times ]0, +\infty[ \quad (2.65)$$

$$-\partial_\beta n_{\alpha\beta} = h_\alpha^0 \text{ sur } \omega \times ]0, +\infty[ \quad (2.66)$$

$$\sigma_{33}^0 \zeta_3 = 0 \text{ sur } \omega \times ]0, +\infty[, \sigma_{33}^0 \leq 0 \text{ sur } H^{-2}(\omega) \quad (2.67)$$

$$\zeta_i(\cdot, 0) = \varphi_i, \frac{\partial \zeta_i}{\partial t}(\cdot, 0) = \psi_i.$$

Avec

$$k = \frac{8}{3}\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, h_i^0 = \int_{-1}^{+1} f_i dx_3 + g_i^-, h_i^1 = \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_i f_i dx_3 - \partial_i g_i^-, \quad (2.68)$$

$$g_i^- = g_i(x_1, x_2, -1)n_{\alpha\beta} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} e_{\gamma\gamma}(\zeta)\delta_{\alpha\beta} + 4\mu e_{\alpha\beta}(\zeta). \quad (2.69)$$

**Preuve.** Soit  $u^0$  est solution du problème  $(P_{KL}^0 V)$  alors  $\zeta_\alpha, \zeta_3$  vérifient  $\zeta_\alpha \in H_0^1(\omega), \zeta_3 \in H_0^2(\omega), \zeta_3 \leq 0$ .

On introduit  $u^0$  dans l'expression de  $e_{\alpha\beta}(v)$ , on obtient :

$$e_{\alpha\beta}(u^0) = e_{\alpha\beta}(\zeta) - x_3 \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \quad (2.70)$$

On substitut (2.70) dans (2.55), on obtient :

$$e_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2}n_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}x_3 m_{\alpha\beta}.$$

Avec

$$\begin{aligned} n_{\alpha\beta} &= \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} e_{\gamma\gamma}(\zeta)\delta_{\alpha\beta} + 4\mu e_{\alpha\beta}(\zeta). \\ m_{\alpha\beta} &= -\frac{4}{3} \left( \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta \zeta_3 \delta_{\alpha\beta} + \mu \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

On prend  $v = (-x_3 \partial_1 \eta_3, -x_3 \partial_2 \eta_3, \eta_3)$ , donc le premier élément de l'équation d'équilibre de le problème  $(P_{KL}^0 V)$  revient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha dx &= \int_{\Omega} -\frac{1}{2} n_{\alpha\beta} x_3 \partial_{\alpha\beta} \eta_3 dx + \int_{\Omega} -\frac{3}{2} x_3^2 m_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \eta_3 dx. \\ &= \int_{\Omega} x_3^2 \left( \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta \zeta_3 \Delta \eta_3 + 2\mu \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \partial_{\alpha\beta} \eta_3 \right) dx. \\ &= \frac{4}{3} \int_{\omega} \left( \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta \zeta_3 \Delta \eta_3 + 2\mu \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \partial_{\alpha\beta} \eta_3 \right) dx'. \end{aligned}$$

On a pour  $\zeta_3, \eta_3 \in D(\Omega)$  :

$$\begin{aligned}\int_{\omega} \Delta \zeta_3 \Delta \eta_3 dx' &= \int_{\omega} \Delta^2 \zeta_3 \eta_3 dx' \\ \int_{\omega} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \partial_{\alpha\beta} \eta_3 dx' &= \int_{\omega} \Delta^2 \zeta_3 \eta_3 dx',\end{aligned}$$

ce qui, par densité, restent vraie pour les éléments de  $H_0^2(\omega)$ . D'où,

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_{\beta} v_{\alpha} dx = \frac{8}{3} \mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} \Delta^2 \zeta_3 \eta_3 dx'. \quad (2.72)$$

D'autre part, le deuxième membre de (2.53) devient :

$$\begin{aligned}L(v) + \langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 \rangle &= \int_{\Omega} f_{\alpha} v_{\alpha} dx + \int_{\Omega} f_3 v_3 dx + \int_{\Gamma_-} g_{\alpha}^- v_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma_-} g_3^- v_3 d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_+} \sigma_{33}^0 \bar{v}_3 d\Gamma \\ &= \int_{\omega} \left\{ \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_{\alpha} f_{\alpha} dx_3 - \partial_{\alpha} g_{\alpha}^- \right\} \eta_3 dx' \\ &\quad + \int_{\omega} \left\{ \int_{-1}^{+1} f_3 dx_3 + g_3^- \right\} \eta_3 dx' + \int_{\omega} \sigma_{33}^0 \eta_3 dx' \\ &= \int_{\omega} (h_3^0 + h_{\alpha}^1 + \sigma_{33}^0) \eta_3 dx'.\end{aligned} \quad (2.73)$$

Avec  $h_i^0 = \int_{-1}^{+1} f_i dx_3 + g_i^-$ ,  $h_i^1 = \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_i f_i dx_3 - \partial_i g_i^-$ ,  $g_i^-$  le trace de  $g_i$  sur  $\Gamma_-$ .

D'où, de (2.72) et (2.73) on trouve (2.65), au sens des distributions. On prend  $\bar{v}_3 = 0$  (resp  $\bar{v}_3 = 2u_3^0$ ) dans (2.54) on trouve  $\langle \sigma_{33}^0, \zeta_3 \rangle = 0$  (resp  $\langle \sigma_{33}^0, \eta_3 \rangle \geq 0$ ) pour tout  $\eta_3 \in H_0^2(\omega)$  avec  $\eta_3 \leq 0$ , ce qui entraine  $\sigma_{33}^0 \leq 0$  sur  $H^{-2}(\omega)$ . D'où (2.67).

On prend maintenant  $v = (\eta_1, \eta_2, 0)$  toujours pour le deuxième élément de l'équation d'équilibre de le problème  $(P_{KL}^0 V)$  on obtient :

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_{\beta} \eta_{\alpha} dx = \int_{\Omega} f_{\alpha} \eta_{\alpha} dx + \int_{\Gamma_-} g_{\alpha}^- \eta_{\alpha} d\Gamma, \forall \eta_1, \eta_2 \in H_0^1(\omega).$$

ce qui donne :

$$\int_{\omega} n_{\alpha\beta} \partial_{\beta} \eta_{\alpha} dx' = \int_{\omega} h_{\alpha}^0 \eta_{\alpha} dx', \forall \eta_1, \eta_2 \in H_0^1(\omega),$$

par conséquent, on trouve (2.66) au sens des distributions. ■

**Proposition 14** : Si  $(u^0, \sigma^0)$  est la solution du problème  $(P_{KL}^0 V)$  et  $\zeta_{\alpha}, \zeta_3$  vérifient le problème  $(P^b(0))$ , alors  $u^0$  et  $\sigma^0$  sont écrits :

$$u_{\alpha}^0 = \zeta_{\alpha} - x_3 \partial_{\alpha} \zeta_3, u_3^0 = \zeta_3, \quad (2.74)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2}n_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}x_3m_{\alpha\beta}, \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^0 &= \frac{3}{4}(1-x_3^2)\partial_\beta m_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(1+x_3) \int_{-1}^{+1} f_\alpha dy_3 - \int_{-1}^{x_3} f_\alpha dy_3 \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_3-1)g_\alpha^-. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Finalemnt,  $\sigma_{33}^0$  au sens de distribution satisfait :

$$\partial_3 \sigma_{33}^0 = \rho \ddot{\zeta}_3 - \partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}^0 - f_3 \text{ sur } \Omega \times ]0, +\infty[, \quad (2.77)$$

$$\sigma_{33}^0 = -g_3^- \text{ sur } \Gamma_- \times ]0, +\infty[, \quad (2.78)$$

$$\sigma_{33}^0 \zeta_3 = 0, \sigma_{33}^0 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_+ \times ]0, +\infty[. \quad (2.79)$$

**Preuve.** Les équations (2.74)-(2.75) sont automatiquement obtenues dans proposition 13. Pour prouver cette proposition on utilise la fonction de test  $v = (v_1, v_2, 0)$  dans l'équation (2.53), on obtient, la formulation de  $\sigma_{\alpha 3}^0$  au sens de distribution vérifie le problème quasi-statique aux limites :

$$\begin{cases} \partial_3 \sigma_{\alpha 3}^0 = -\partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}^0 - f_\alpha \text{ sur } \Omega \times ]0, +\infty[, \\ \sigma_{\alpha 3}^0 = -g_\alpha^- \text{ sur } \Gamma_- \times ]0, +\infty[, \\ \sigma_{\alpha 3}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \times ]0, +\infty[. \end{cases}$$

On intègre la première équation sur  $[-1, x_3]$  et on prend en considération les conditions aux limites, on obtient, (2.76).

Pour le calcul de  $\sigma_{33}^0$ , on prend la fonction de test  $v = (0, 0, v_3)$  dans l'équation (2.53) alors on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \int_{\Omega} u_3^0 v_3 dx + \int_{\Omega} \sigma_{33}^0 \partial_3 v_3 dx &= - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_\alpha v_3 dx + \int_{\Omega} f_3 v_3 dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_-} g_3 v_3 d\Gamma + \int_{\Gamma_+} \sigma_{33}^0 \bar{v}_3 d\Gamma, \forall v_3 \in V(\Omega), t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

et d'autre part, par la formule de Green et sous les conditions sur  $\Gamma_0$ , on peut écrire la formule suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{33}^0 \partial_3 v_3 dx &= - \int_{\Omega} \partial_3 \sigma_{33}^0 v_3 dx + \int_{\Gamma_+} \sigma_{33}^0 \bar{v}_3 d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_-} \sigma_{33}^0 v_3 d\Gamma, \forall v_3 \in V(\Omega). \end{aligned} \quad (2.81)$$

et

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_\alpha v_3 dx = - \int_{\Omega} \partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}^0 v_3 dx, \forall v_3 \in V(\Omega), t \geq 0. \quad (2.82)$$

et avec l'insertion de(2.81) et (2.82) sur (2.80) on obtient que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \int_{\Omega} u_3^0 v_3 dx + \int_{\Omega} \partial_3 \sigma_{33}^0 v_3 dx = & - \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \sigma_{\alpha 3}^0 v_3 dx - \int_{\Omega} f_3 v_3 dx \\ & - \int_{\Gamma_-} g_3 v_3 d\Gamma - \int_{\Gamma_-} \sigma_{33}^0 v_3 d\Gamma, \forall v_3 \in V(\Omega). \end{aligned}$$

On dérive de l'inégalité (2.54) que  $\sigma_{33}^0$  sa formule doit être vérifier (2.79).

En résumé la valeur du problème aux limites (2.77) – (2.79) est formellement satisfait. ■

## Chapitre 3

# Etude de convergence d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince contre un obstacle rigide dans l'élasticité linéaire

Dans cette partie, on suppose que  $u(\varepsilon)$  est une solution du problème  $(P(\varepsilon)V)$ , les forces sont vérifient  $f, \dot{f} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$  et  $g, \dot{g} \in L^\infty(0, T, L^2(\Gamma_-))$ ; et on va étudier la limite de la suite  $(u(\varepsilon))$ , puis on va comparer les résultats .

Etant donné  $u(\varepsilon)$  solution du problème  $(P(\varepsilon)V)$ .

On définit le tenseur

$$\kappa_{\alpha\beta}(\varepsilon, v) = e_{\alpha\beta}(v), \kappa_{\alpha 3}(\varepsilon, v) = \varepsilon^{-1}e_{\alpha 3}(v), \kappa_{33}(\varepsilon, v) = \varepsilon^{-2}e_{33}(v). \quad (3.1)$$

On introduit (3.1), avec  $v = u$  dans (2.41), on trouve :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \lambda\kappa_{pp}(\varepsilon, u)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\kappa_{\alpha\beta}(\varepsilon, u) \\ \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}2\mu\kappa_{\alpha 3}(\varepsilon, u) \\ \sigma_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}(\lambda\kappa_{pp}(\varepsilon, u) + 2\mu\kappa_{33}(\varepsilon, u)). \end{cases} \quad (3.2)$$

Donc, en utilisant (3.2) dans la forme bilinéaire  $a^\varepsilon(u(\varepsilon), v)$ , qui devient :

$$a^\varepsilon(u(\varepsilon), v) = \int_{\Omega} [\lambda\kappa_{ii}(\varepsilon)\kappa_{jj}(\varepsilon, u) + 2\mu\kappa_{ij}(\varepsilon)\kappa_{ij}(\varepsilon, u)] dx.$$

où  $\kappa(\varepsilon)$  notée  $\kappa(\varepsilon) := \kappa(\varepsilon, u(\varepsilon))$ .

L'espace  $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$  de les tenseurs symétriques et carré sommables, i.e, est un espace de Hilbert réel. Muni du produit scalaire  $\langle \sigma, \tau \rangle = \int_{\Omega} \sigma_{ij}\tau_{ij}dx$ . On définit sur  $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$  la forme bilinéaire  $A(., .)$

par :

$$\langle A\sigma, \tau \rangle = \int_{\Omega} (\lambda\sigma_{ii}\tau_{jj} + 2\mu\sigma_{ij}\tau_{ij})dx.$$

**Corollaire 15** : La norme associée à  $A$ , i.e,

$$\|\sigma\|_A = \langle A\sigma, \sigma \rangle^{\frac{1}{2}}, \|\sigma\|_{0,\Omega}. \quad (3.3)$$

Définit une norme sur  $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$  équivalente à la norme euclidienne :  $\|\sigma\|_{0,\Omega} = \langle \sigma, \sigma \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

**Preuve.** On a :  $\|\sigma\|_A^2 = \int_{\Omega} (\lambda\sigma_{ii}\sigma_{jj} + 2\mu\sigma_{ij}\sigma_{ij})dx$ .

Puisque  $\sigma_{ii}\sigma_{jj} \geq 0$  il vient que  $\|\sigma\|_A^2 \geq 2\mu \|\sigma\|_{0,\Omega}^2$  d' où  $\|\sigma\|_A \geq (2\mu)^{\frac{1}{2}} \|\sigma\|_{0,\Omega}$ .

D'autre part, on a  $\|\sigma\|_A^2 \leq (\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} + \sigma_{ij}\sigma_{ij})dx$ . Du fait que  $\sigma_{ii}\sigma_{jj} \leq 3\sigma_{ii}\sigma_{ii}$  alors  $\|\sigma\|_A^2 \leq 4(\lambda + 2\mu) \|\sigma\|_{0,\Omega}^2$  par conséquent

$$\|\sigma\|_A \leq 2(\lambda + 2\mu)^{\frac{1}{2}} \|\sigma\|_{0,\Omega}.$$

■

**Théorème 16** Si  $u(\varepsilon)$  est une solution du problème  $(P(\varepsilon)V)$  alors

$$u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0) \text{ sur } L^\infty(0, T, \vec{V}(\Omega)) \text{ faible } *.$$

$$\sigma_{33}(\varepsilon) \rightharpoonup \sigma_{33}(0) \text{ sur } L^\infty(0, T, H^{-2}(\omega)) \text{ faible } *.$$

Où  $u(0)$  est une solution du problème  $(P_{KL}(0)V)$  :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u(0) &\in V_{KL}(\Omega) \cap \vec{K}(\Omega), t \in ]0, T[ \text{ p.p tels que} \\ \rho(\ddot{u}_3(0), v_3) + a_*^0(u(0), v) &= L(v) + \langle \sigma_{33}(0), v_3 \rangle, \forall v_3 \in V_{KL}(\Omega). \\ \langle \sigma_{33}(0), v_3 - u_3(0) \rangle &\geq 0, \forall v_3 \in K(\Omega), \\ u|_{t=0}(0) &= p(0), \dot{u}|_{t=0}(0) = q(0). \end{aligned}$$

avec

$$a_*^0(u(0), v) = \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}(0) \partial_\beta v_\alpha dx, \sigma_{\alpha\beta}(0) = \lambda^* e_{\gamma\gamma}(u(0)) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(0)), \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

La démonstration de ce théorème est basée sur trois étapes.

### 3.1 Etape 1 : Existence de la limite faible \* de $(u(\varepsilon), \kappa(\varepsilon))$

**Proposition 17** : Si  $u(\varepsilon)$  est le solution du problème  $(P(\varepsilon)V)$  alors, pour toute  $\varepsilon$  assez petit, les suites  $(u(\varepsilon), \kappa_{ij}(\varepsilon))$  sont bornées, respectivement, sur  $L^\infty(0, T, \vec{V}(\Omega))$  et  $L^\infty(0, T, \mathbf{L}_s^2(\Omega))$ , alors ils existent des sous suites notées  $(u(\varepsilon))$  et  $(\kappa_{ij}(\varepsilon))$  sont admis une limite faible star respectivement sur  $L^\infty(0, T, \vec{V}(\Omega))$  et  $L^\infty(0, T, \mathbf{L}_s^2(\Omega))$  notée respectivement par  $(u(0))$  et  $(\kappa_{ij}(0))$ .

**Preuve.** supposons que les solutions approximatives  $h^{\varepsilon,I}$  et  $h_*^{\varepsilon,I}$ , ont la même mise à l'échelle en comparaison de le déplacement  $u^\varepsilon$  i.e.,  $h_\alpha^{\varepsilon,I} = \varepsilon^2 h_\alpha^I(\varepsilon)$ ,  $h_3^{\varepsilon,I} = \varepsilon h_3^I(\varepsilon)$ ,  $h_{*\alpha}^{\varepsilon,I} = \varepsilon^2 h_{*\alpha}^I(\varepsilon)$  et  $h_{*3}^{\varepsilon,I} = \varepsilon h_{*3}^I(\varepsilon)$ .

$$h^{\varepsilon,I} \rightharpoonup u^\varepsilon \text{ faible } * \text{ sur } L^\infty(0, T, (L^2(\Omega^\varepsilon))^3), \quad (3.4)$$

i.e

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int_0^T \langle h_\alpha^{\varepsilon,I}, g_\alpha^\varepsilon(t) \rangle_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega^\varepsilon))^3)} dt \rightarrow \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^T \langle u_\alpha^\varepsilon, g_\alpha^\varepsilon(t) \rangle_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega^\varepsilon))^3)} dt, \forall g_\alpha^\varepsilon \in L^1(0, T, (L^2(\Omega^\varepsilon))^3).$$

et

$$\int_0^T \langle h_3^{\varepsilon,I}, g_3^\varepsilon(t) \rangle_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega^\varepsilon))^3)} dt \rightarrow \int_0^T \langle u_3^\varepsilon, g_3^\varepsilon(t) \rangle_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega^\varepsilon))^3)} dt, \forall g_3^\varepsilon \in L^1(0, T, (L^2(\Omega^\varepsilon))^3).$$

Alors

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^2 \varepsilon^2 \int_0^T \langle h_\alpha^I(\varepsilon), g_\alpha(\varepsilon)(t) \rangle_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega))^3)} dt \rightarrow \\ & \sum_{\alpha=1}^2 \varepsilon^2 \int_0^T \langle u_\alpha(\varepsilon), g_\alpha(\varepsilon)(t) \rangle_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega))^3)} dt, \forall g_\alpha \in L^1(0, T, (L^2(\Omega))^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_0^T \langle h_3^I(\varepsilon), g_3(\varepsilon)(t) \rangle_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega))^3)} dt \rightarrow \\ & \varepsilon \int_0^T \langle u_3(\varepsilon), g_3(\varepsilon)(t) \rangle_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega))^3)} dt, \forall g_3 \in L^1(0, T, (L^2(\Omega))^3) \end{aligned}$$

Lorsque  $I \rightarrow \infty$  et  $0 < \varepsilon < 1$  et avec la simplicité, on obtient

$$h^I(\varepsilon) \rightharpoonup u(\varepsilon) \text{ faible } * \text{ sur } L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^3). \quad (3.5)$$

De la même manière on peut montrer que

$$h_*^I(\varepsilon) \rightharpoonup u(\varepsilon) \text{ faible } * \text{ sur } L^\infty(0, T, (H^1(\Omega))^3). \quad (3.6)$$

Où

$$h_*^{\varepsilon,I} \rightharpoonup u^\varepsilon \text{ faible } * \text{ sur } L^\infty(0, T, (H^1(\Omega^\varepsilon))^3). \quad (3.7)$$

Les mise à l'échelle précédent avec mise à l'échelle des  $f^\varepsilon$  et  $g^\varepsilon$  devient :

$$\rho^\varepsilon \left\| \dot{h}^{\varepsilon,I}(t) \right\|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^3}^2 = \rho^{\varepsilon^7} \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \dot{h}_\alpha^I(\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \rho^{\varepsilon^5} \left\| \dot{h}_3^I(\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2, \quad (3.8)$$

$$a^\varepsilon(h^{\varepsilon,I}(t), h^{\varepsilon,I}(t)) = \varepsilon^5 a(h^I(t), h^I(t)), \quad (3.9)$$

$$L^{\varepsilon,I}(v^\varepsilon) = \varepsilon^5 L^i(v(\varepsilon)), \quad (3.10)$$

Où les formules de  $a$  et  $L^i$  sont indépendants de  $\varepsilon$ . Pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq 2^I$ . En déduit

$$\sum_{i=1}^k \frac{\rho \varepsilon^2}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \dot{h}_\alpha^I(\varepsilon)(t) \right\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 dt = \frac{\rho \varepsilon^2}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left\| \dot{h}_\alpha^I(\varepsilon)(t_k) \right\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 - \left\| \dot{h}_\alpha^I(\varepsilon)(0) \right\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \right) \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\rho}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{dt} \left\| \dot{h}_3^I(\varepsilon)(t) \right\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 dt = \frac{\rho}{2} \left( \left\| \dot{h}_3^I(\varepsilon)(t_k) \right\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 - \left\| \dot{h}_3^I(\varepsilon)(0) \right\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \right) \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{2dt} a(h^I(\varepsilon)(t), h^I(\varepsilon)(t)) = \frac{1}{2} (a(h^I(\varepsilon)(t_k), h^I(\varepsilon)(t_k)) - a(h^I(\varepsilon)(0), h^I(\varepsilon)(0))) \quad (3.13)$$

De (3.11), (3.12) et (3.13), on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho \varepsilon^2}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \dot{h}_\alpha^I(\varepsilon)(t_k) \right\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{\rho}{2} \left\| \dot{h}_3^I(\varepsilon)(t_k) \right\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{1}{2} a(h^I(\varepsilon)(t_k), h^I(\varepsilon)(t_k)) \\ c \leq & \frac{\rho \varepsilon^2}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \dot{h}_\alpha^I(\varepsilon)(0) \right\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{\rho}{2} \left\| \dot{h}_3^I(\varepsilon)(0) \right\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{1}{2} a(h^I(\varepsilon)(0), h^I(\varepsilon)(0)) \\ & + \sum_{i=1}^k L^i(u^i(\varepsilon) - u^{i-1}(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Maintenant, on va borné la forme linéaire, continue  $L^i$  de l'inégalité 3.15.

Etant donné que

$$u^i(\varepsilon) - u^{i-1}(\varepsilon) = h^I(\varepsilon)(t_i) - h^I(\varepsilon)(t_{i-1}),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k L^i(u^i(\varepsilon) - u^{i-1}(\varepsilon)) = \sum_{i=1}^k L^i(h^I(\varepsilon)(t_i) - h^I(\varepsilon)(t_{i-1})), \\ & = \sum_{i=1}^k \left[ \left( \int_{\Omega} f^i [h^I(\varepsilon)(t_i) - h^I(\varepsilon)(t_{i-1})] dx + \int_{\Gamma_-} g^i [h^I(\varepsilon)(t_i) - h^I(\varepsilon)(t_{i-1})] d\Gamma \right) \right] \\ & = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} (f^i - f^{i-1}) h^I(\varepsilon)(t_i) + f^k h^I(\varepsilon)(t_k) - f^1 h^I(\varepsilon)(0) \right] dx. \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_-} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} (g^i - g^{i-1}) h^I(\varepsilon)(t_i) + g^k h^I(\varepsilon)(t_k) - g^1 h^I(\varepsilon)(0) \right] d\Gamma, \quad (3.15)$$

tel que

$$\|f^i\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \|f(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} = \|f\|_{L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^3)}, \quad (3.16)$$

et

$$\|f^i - f^{i-1}\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq \Delta t \left\| \dot{f} \right\|_{L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^3)}. \quad (3.17)$$

On peut borné le terme de  $g$  sur  $\Gamma_-$  de le même façons. Après l'applique de Cauchy-Schwartz et l'utilise de (3.16), (3.17) la formule (3.15) devient :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^k L^i (u^i(\varepsilon) - u^{i-1}(\varepsilon)) \right| &\leq C \left\| \dot{f} \right\|_{L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^3)} \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \|h^I(\varepsilon)(t_i)\|_{(L^2(\Omega))^3} \\ &\quad + \|f\|_{L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^3)} \left( \|h^I(\varepsilon)(t_k)\|_{(L^2(\Omega))^3} - \|h^I(\varepsilon)(0)\|_{(L^2(\Omega))^3} \right). \\ &+ \|\dot{g}\|_{L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^3)} \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \|h^I(\varepsilon)(t_i)\|_{(L^2(\Omega))^3} \\ &+ \|g\|_{L^\infty(0, T, [L^2(\Gamma)]^3)} \left( \|h^I(\varepsilon)(t_k)\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_-))^3} - \|h^I(\varepsilon)(0)\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_-))^3} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Où  $C$  est une constante positive. avec les conditions initiales

$$h^I(\varepsilon)(0) = p^0, \dot{h}^I(\varepsilon)(0) = q^0. \quad (3.19)$$

De (3.18) et (3.19), l'inégalité (3.15) devient :

$$\begin{aligned} \rho \varepsilon^2 \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \dot{h}_\alpha^I(\varepsilon)(t_k) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho \left\| \dot{h}_3^I(\varepsilon)(t_k) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(h^I(\varepsilon)(t_k), h^I(\varepsilon)(t_k)) \\ \leq \rho \varepsilon^2 \sum_{\alpha=1}^2 \|q_\alpha^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho \|q_3^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(p^0, p^0) \\ + \sum_{i=1}^k L^i (h^I(\varepsilon)(t_i) - h^I(\varepsilon)(t_{i-1})), \end{aligned} \quad (3.20)$$

Par conséquence on obtient l'estimation à priori suivant :

$$\rho \varepsilon^2 \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \dot{h}_\alpha^I(\varepsilon)(t_k) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho \left\| \dot{h}_3^I(\varepsilon)(t_k) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu_1 \|h^I(\varepsilon)(t_k)\|_{(H^1(\Omega))^3}^2.$$

$$\leq \mu_2 + \mu_3 \|h^I(\varepsilon)(t_k)\|_{(H^1(\Omega))^3} + \mu_4 \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t \|h^I(\varepsilon)(t_i)\|_{(H^1(\Omega))^3}, \quad (3.21)$$

Où  $\mu_k, k = 1, 2, 3, 4$  sont indépendant de  $\varepsilon$  et vérifient :

$$\mu_1 : \text{ constant de coercivité de la forme } a, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = & \rho \sum_{\alpha=1}^2 \|q_\alpha^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho \|q_3^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(p^0, p^0). \\ & + \|f\|_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega^\varepsilon))^3)} \cdot \|p^0\|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^3} \\ & + \|g\|_{L^\infty(0,T,(L^2(\Gamma_-))^3)} \cdot \|p^0\|_{(L^2(\Gamma_-))^3}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\mu_3 = \|f\|_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega^\varepsilon))^3)} + \lambda_1 \|g\|_{L^\infty(0,T,(L^2(\Gamma_-))^3)}. \quad (3.24)$$

$$\mu_4 = \|\dot{f}\|_{L^\infty(0,T,(L^2(\Omega^\varepsilon))^3)} + \lambda_2 \|\dot{g}\|_{L^\infty(0,T,(L^2(\Gamma_-))^3)}. \quad (3.25)$$

Sans perdre la généralité, supposons que  $\mu_2 \geq 1$ . Alors on obtient :

$$\mu_1 \|h^I(\varepsilon)(t_k)\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t \|h^I(\varepsilon)(t_i)\|_{(H^1(\Omega))^3}. \quad (3.26)$$

En utilisant le lemme de Grönwall discrétisé

$$\mu_1 \|h^I(\varepsilon)(t_k)\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq (\mu_2 + \mu_3) e^{T\mu_4/\mu_1}. \quad (3.27)$$

Alors aussi la suite  $(h_*^I(\varepsilon)(t_k))$  est bornée de façon indépendante de  $k$  et  $\varepsilon$  sur  $L^\infty(0, T, (H^1(\Omega))^3)$ .

Puisque la norme est semi - continue inférieurement faible, on a

$$\|u(\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T,(H^1(\Omega))^3)} \leq \liminf_{I \geq 0} \|h_*^I(\varepsilon)(t)\|_{L^\infty(0,T,(H^1(\Omega))^3)} < C. \quad (3.28)$$

tel que  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ . on conclu que :

$$u(\varepsilon) \in L^\infty(0, T, \vec{V}(\Omega)) \text{ et } \dot{u}_3(\varepsilon), \varepsilon \dot{u}_\alpha(\varepsilon) \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \quad (3.29)$$

**Lemme 7** *les sous suites  $u(\varepsilon), \varepsilon \dot{u}_\alpha(\varepsilon)$  et  $\dot{u}_3(\varepsilon)$  sont admises des limites faibles star respectivement sur  $L^\infty(0, T, \vec{V}(\Omega))$ ,  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$  et  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$  notée respectivement par  $u(0)$ ,  $\dot{u}_\alpha(0)$  et  $\dot{u}_3(0)$  .i.e*

$$u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0) \text{ faible * sur } L^\infty(0, T, \vec{V}(\Omega)).$$

$$\varepsilon \dot{u}_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup 0 \text{ faible * sur } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)).$$

$$\dot{u}_3(\varepsilon) \rightharpoonup \dot{u}_3(0) \text{ faible * sur } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)).$$

**Preuve.** Puisque l'espace  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) = [L^1(0, T, L^2(\Omega))]'$  et  $L^1(0, T, L^2(\Omega))$  est un espace de Banach séparable, le résultat est direct voir([8]). Notez que la limite de  $\dot{u}(\varepsilon)$  est  $\dot{u}(0)$ , en raison de l'unicité de la limite dans  $D'(0, T, L^2(\Omega))$  (pour plus de détail voir([12])). ■ Utilisant la continuité de la forme  $a^\varepsilon(., .)$ , les hypothèses (3.1) et l'équivalence des normes(3.3), nous obtenons :

$$\|e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leq c, \|e_{\alpha 3}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leq \varepsilon c, \|e_{33}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leq \varepsilon^2 c, \quad (3.30)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . ■

## 3.2 Étape 2 : Les propriétés de la limite faible \*

**Proposition 18** : *Les limites faibles  $u(0), \kappa(0)$  vérifient :*

$$u(0) \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega), \text{ Pour tout } t \in [0, T]$$

$$\kappa_{\alpha\beta}(0) = e_{\alpha\beta}(u(0)), \kappa_{\alpha 3}(0) = 0, \kappa_{33}(0) = \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu} e_{\alpha\alpha}(u(0)). t \in [0, T] \text{ p.p}$$

**Preuve.** De(3.30), puisque la norme est semi-continue inférieure, on a :

$$\|e_{ij}(u(0))\|_{0,\Omega} \leq \liminf_{\varepsilon>0} \|e_{ij}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} t \in [0, T], \text{ p.p.} \quad (3.31)$$

On conclut que  $e_{33}(0) = e_{\alpha 3}(0) = 0, t \in [0, T]$  p.p.

Puisque  $\overrightarrow{K}(\Omega)$  est fermé pour la topologie faible, d'où

$$u(0) \in \overrightarrow{K}(\Omega), t \in [0, T] \text{ p.p.}$$

Alors

$$u(0) \in L^\infty(0, T, V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega))$$

On a  $u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0)$  dans  $(H^1(\Omega))^3$ , donc  $e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \rightharpoonup e_{\alpha\beta}(u(0))$  dans  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ .

D'autre part  $\kappa_{\alpha\beta}(\varepsilon) \rightharpoonup \kappa_{\alpha\beta}(0)$  dans  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ , puisque la limite faible est unique. On conclut que  $\kappa_{\alpha\beta}(0) = e_{\alpha\beta}(u(0))$ .

Pour montre que  $\kappa_{\alpha 3}(0) = 0, t \in [0, T]$  pour tout , on peut choisit une fonction de test  $\phi(t)(\varepsilon v_1, \varepsilon v_2, 0), v_\alpha \in V(\Omega)$  et  $\phi(t) \in D(0, T)$  sur (2.42) puis on intégré de 0 à T, on obtient :

$$\rho \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \varepsilon^2 \ddot{u}_\alpha \varepsilon v_\alpha dx dt + \int_0^T \phi(t) a^\varepsilon(u(\varepsilon), \varepsilon v) dt = \int_0^T \phi(t) L(\varepsilon v) dt. \quad (3.32)$$

le terme  $\rho \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \varepsilon^2 \ddot{u}_\alpha \varepsilon v_\alpha dx dt$  quand vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Et par l'intégration par partie nous obtenons  $\rho \int_0^T \dot{\phi}(t) \int_\Omega \varepsilon^2 \dot{u}_\alpha \varepsilon v_\alpha dx dt \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Rappelant que  $(\dot{\phi}(t)v_\alpha \in L^1(0, T, L^2(\Omega)))$ .

Le terme

$$\begin{aligned}
\int_0^T \phi(t) a^\varepsilon(u(\varepsilon), \varepsilon v) dt &= \varepsilon^2 \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \lambda \kappa_{ii}(\varepsilon, u) \kappa_{jj}(\varepsilon, v) + 2\mu \kappa_{ij}(\varepsilon, u) \kappa_{ij}(\varepsilon, v) dx dt \\
&= \varepsilon \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \lambda \kappa_{ii}(\varepsilon, u) e_{\beta\beta}(v) + 2\mu \kappa_{\alpha\beta}(\varepsilon, u) e_{\alpha\beta}(v) dx dt \\
&\quad + \int_0^T \phi(t) \int_\Omega 2\mu \kappa_{\alpha 3}(\varepsilon, u) (\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha) dx dt \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \phi(t) \int_\Omega (\lambda \kappa_{33}(\varepsilon, u) + 2\mu \kappa_{33}(\varepsilon, u)) e_{33}(v) dx dt. \\
&= \varepsilon \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \lambda \kappa_{ii}(\varepsilon, u) e_{\beta\beta}(v) + 2\mu \kappa_{\alpha\beta}(\varepsilon, u) e_{\alpha\beta}(v) dx dt \\
&\quad + \int_0^T \phi(t) \int_\Omega 2\mu \kappa_{\alpha 3}(\varepsilon, u) \partial_3 v_\alpha dx dt.
\end{aligned}$$

En raison du choix de la fonction de test. Nous passons maintenant à la limite dans(3.33) et obtenir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \phi(t) \int_\Omega 2\mu \kappa_{\alpha 3}(\varepsilon, u) \partial_3 v_\alpha dx dt = 0, \quad \forall \phi \in D(0, T).$$

Alors

$$\int_\Omega 2\mu \kappa_{\alpha 3}(u(0)) \partial_3 v_\alpha dx dt = 0, \quad t \in ]0, T], \quad \text{p.p. } \forall v_\alpha \in V(\Omega),$$

**Théorème 19** soit  $\omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  avec bord  $\gamma$  soit  $\Omega = \omega \times ]-1, 1[$  et soit  $\mu \in L^p(\Omega)$ ,  $p > 1$  est une fonction tel que :  $\int_\Omega \mu \partial_3 v dx = 0$  pour tout  $v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow v = 0$  sur  $\gamma \times [-1, +1]$ . Alors  $\mu = 0$ .

**Preuve.** voir[22], p.166. ■

On déduit que  $\kappa_{\alpha 3}(u(0)) = 0$ , sur  $\Omega$  au sens de distribution presque par tout  $t \in ]0, T]$ . Pour preuve  $\kappa_{33}(0) = \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu} e_{\alpha\alpha}(u(0))$  on utilise la fonction test  $\phi(t)(0, 0, \varepsilon^2 v_3)$ ,  $\bar{v}_3 = 0$ ,  $v_3 \in V(\Omega)$  et  $\phi \in D(0, T)$  dans (2.42) puis on intègre de 0 à  $T$ , on obtient :

$$\rho \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \varepsilon^2 \ddot{u}_{\alpha\beta} \varepsilon v_\alpha dx dt + \int_0^T \phi(t) a^\varepsilon(u(\varepsilon), \varepsilon v) dt = \int_0^T \phi(t) L(\varepsilon v) dt. \quad (3.33)$$

le terme  $\rho \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \varepsilon^2 \ddot{u}_\alpha \varepsilon v_\alpha dx dt$  quand vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Et par l'intégration par partie nous obtenons  $\rho \int_0^T \dot{\phi}(t) \int_\Omega \varepsilon^2 \dot{u}_\alpha \varepsilon v_\alpha dx dt \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Rappelant que  $(\dot{\phi}(t) v_3 \in L^1(0, T, L^2(\Omega)))$ .

Le terme

$$\int_0^T \phi(t) a^\varepsilon(u(\varepsilon), \varepsilon v) dt = \varepsilon \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \lambda \kappa_{ii}(\varepsilon, u) \kappa_{jj}(\varepsilon, v) + 2\mu \kappa_{ij}(\varepsilon, u) \kappa_{ij}(\varepsilon, v) dx dt.$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon^2 \int_0^T \phi(t) \int_{\Omega} \lambda \kappa_{ii}(\varepsilon, u) e_{\beta\beta}(v) + 2\mu \kappa_{\alpha\beta}(\varepsilon, u) e_{\alpha\beta}(v) dx dt \\
&\quad + \varepsilon \int_0^T \phi(t) \int_{\Omega} 2\mu \kappa_{\alpha 3}(\varepsilon, u) (\partial_{\alpha} v_3 + \partial_3 v_{\alpha}) dx dt \\
&\quad + \int_0^T \phi(t) \int_{\Omega} (\lambda \kappa_{ii}(\varepsilon, u) + 2\mu \kappa_{33}(\varepsilon, u)) e_{33}(v) dx dt. \\
&\quad = \varepsilon^2 \int_0^T \phi(t) \int_{\Omega} \lambda \kappa_{ii}(\varepsilon, u) e_{\beta\beta}(v) \\
&\quad + \int_0^T \phi(t) \int_{\Omega} (\lambda \kappa_{ii}(\varepsilon, u) + 2\mu \kappa_{33}(\varepsilon, u)) \partial_3 v_3 dx dt \\
&\quad + \varepsilon \int_0^T \phi(t) \int_{\Omega} 2\mu \kappa_{\alpha 3}(\varepsilon, u) \partial_{\alpha} v_3 dx dt.
\end{aligned}$$

En raison du choix de la fonction de test. Nous passons maintenant à la limite dans(3.33) et obtenir

$$\int_{\Omega} (\lambda \kappa_{ii}(0) + 2\mu \kappa_{33}(0)) \partial_3 v_3 dx dt = 0, t \in ]0, T], \text{ p.p } \forall v_{\alpha} \in V(\Omega).$$

D'où :

$$\kappa_{33}(0) = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha}(u(0)).$$

■

### 3.3 Étape 3 : Caractérisation de la limite faible \*

**Proposition 20** : La suite  $(\sigma_{33}(\varepsilon))$  vérifie :

$\sigma_{33}(\varepsilon) \rightharpoonup \sigma_{33}(0)$  faible \* sur  $L^{\infty}(0, T, H^{-2}(\omega))$ , vérifie avec  $u(0)$ , l'inégalité :

$$\langle \sigma_{33}(0), u_3(0) \rangle \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle \text{ sur } L^{\infty}(0, T).$$

**Preuve.** on rappel que parmi les inconnues du problème est la contrainte de contact  $\sigma_{33}(\varepsilon)$  sur  $\Gamma_+$ . Maintenant, on montre que cette quantité a également limite faible lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Puisque  $\dot{u}_3(\varepsilon) \rightharpoonup \dot{u}_3(0)$  sur  $L^{\infty}(0, T, L^2(\Omega))$  faible \* et  $\dot{\phi} v_3 \in L^1(0, T, L^2(\Omega))$  alors

$$\int_0^T \int_{\Omega} \dot{u}_3(\varepsilon) \dot{\phi}(t) v_3 dx \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \dot{u}_3(0) \dot{\phi}(t) v_3 dx = - \int_0^T \int_{\Omega} \ddot{u}_3(\varepsilon) \phi(t) v_3 dx.$$

De(2.42), on obtient pour tout  $v \in V_{KL}(\Omega)$  et  $\phi \in D(0, T)$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \phi(t) \langle \sigma_{33}(\varepsilon), v_3 \rangle dt &= - \int_0^T \phi(t) L(v) dt + \rho \int_0^T \phi(t) \langle \ddot{u}_3(\varepsilon), v_3 \rangle dt \\
&\quad + \varepsilon^2 \rho \int_0^T \phi(t) \langle \ddot{u}_{\alpha}(\varepsilon), v_{\alpha} \rangle dt + \int_0^T \phi(t) a^{\varepsilon}(u(\varepsilon), v) dt.
\end{aligned}$$

quand  $\varepsilon$  tend vers 0, on obtient pour tout  $v \in V_{KL}(\Omega)$  et  $\phi \in D(0, T)$

$$\int_0^T \phi(t) \langle \sigma_{33}(\varepsilon), v_3 \rangle dt \rightarrow \int_0^T \phi(t) a_*^0(u(0), v) - L(v) + \rho \langle \ddot{u}_3(0), v_3 \rangle dt.$$

Alors

$$\langle \sigma_{33}(\varepsilon), v_3 \rangle \rightarrow a_*^0(u(0), v) - L(v) + \rho \langle \ddot{u}_3(0), v_3 \rangle \text{ sur } D'(0, T).$$

Tel que

$$a_*^0(u(0), v) = \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}(0) \partial_{\beta} v_{\alpha} dx, \sigma_{\alpha\beta}(0) = \lambda^* e_{\gamma\gamma}(u(0)) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(0)), \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$$

L'application  $v_3 \rightarrow a_*^0(u(0), v) - L(v) + \rho \langle \ddot{u}_3(0), v_3 \rangle$  définie une forme linéaire continue dans  $H_0^2(\omega)$ .

Alors la suite  $\sigma_{33}(\varepsilon)$  admet une limite faible star dans  $L^{\infty}(0, T, H^{-2}(\omega))$  notée par  $\sigma_{33}(0)$  qui vérifie l'équation :

$$\rho \langle \ddot{u}_3(0), v_3 \rangle + a_*^0(u(0), v) = L(v) + \langle \sigma_{33}(0), v_3 \rangle, \forall v \in V_{KL}(\Omega), t \in ]0, T[ \text{ p.p.} \quad (3.34)$$

de (3.34), on déduit que  $\sigma_{33}(0)$  vérifie avec  $u(0)$  l'équation :

$$\rho \langle \ddot{u}_3(0), u(0) \rangle + a_*^0(u(0), u(0)) = L(u(0)) + \langle \sigma_{33}(0), u_3(0) \rangle, t \in ]0, T[ \text{ p.p.} \quad (3.35)$$

on montre maintenant que

$$\langle \sigma_{33}(0), v_3 - u_3(0) \rangle \geq 0, \forall v_3 \in \{\Omega\}, t \in ]0, T[ \text{ p.p.} \quad (3.36)$$

Pour ce faire, nous devons vérifier que

$$\langle \sigma_{33}(0), u_3(0) \rangle \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle, t \in ]0, T[ \text{ p.p.} \quad (3.37)$$

Puis laisser  $\varepsilon$  tend vers 0, d' ou (3.36). On a

$$\|\kappa(0)\|_A^2 = a_*^0(u(0), u(0)).$$

Ou  $t \in ]0, T[ \text{ p.p.}$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{33}(0), u_3(0) \rangle &= \|\kappa(0)\|_A^2 - L(u(0)) + \rho \langle \ddot{u}_3(0), u_3(0) \rangle \\ &\leq \liminf_{\varepsilon > 0} (\|\kappa(\varepsilon)\|_A^2 - L(u(\varepsilon)) + \rho \langle \ddot{u}_3(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle) \\ &\leq \liminf_{\varepsilon > 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle. \end{aligned}$$

En effet, d'après  $u_3(\varepsilon)$  converge faible star vers  $u_3(0)$  sur  $H_0^1(\Omega)$  pour tout  $t \in ]0, T[$  alors converge fortement sur  $L^2(\Omega)$  et  $\dot{u}_3(\varepsilon)$  converge faible star vers  $\dot{u}_3(0)$  dans  $\mathcal{D}'(0, T, (L^2(\Omega^\varepsilon)))$  presque par tout  $t \in ]0, T[$  puis, on a la preuve de (3.37) à partir de(3.36). Pour les conditions initiales,  $u(0)$  vérifies  $u|_{t=0}(0) = p(0), \dot{u}|_{t=0}(0) = q(0)$ . ■

# Conclusion

Dans ce travail, on vient d'appliquer deux méthodes, la méthode des développements asymptotiques formels et la méthode de convergence d'un problème de contact unilatéral sans frottement d'une plaque mince contre un obstacle rigide. On a trouvé le même résultat obtenue par Paumier.i.e, que le problème tridimensionnel sans frottement tend vers un problème bidimensionnel sans frottement, aussi on remarque que la solution  $(u^0, \sigma^0)$  du problème  $(P_{KL}^0.V)$  est également une solution de problème  $(P_{KL}(0).V)$  mais l'unicité de la solution n'est pas garanti, donc on peut pas conclure que  $(u^0, \sigma^0) = (u(0), \sigma(0))$ .

# Bibliographie

- [1] A. Capatina. Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement. 10/2011, Bucaresti, ISSN 0250 3638.
- [2] A. Léger, B. Miara, Mathematical justification of the obstacle problem in the case of a shallow shell. J. Elasticity. Vol. 90, 2008, Pages 241-257.
- [3] D. A. Chacha, A. Bensayah, Asymptotic modeling of a Coulomb frictional Signorini problem for the von kármán plates, C. R. Mécanique 336(2008), 846 – 850.
- [4] C.Eck et J. Jarušek, Existence results for the static contact problem with Coulomb friction, math, Models Methods Appl. Sci., 8, 445-468(1998).
- [5] G. Duvaut, J.-L. Lions, les inéquation en mécanique et en physique. Dunod(1972).
- [6] G.Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali :il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, Mem. Accad. Naz. Lincei ser., VIII(7), 91-140 (1964).
- [7] H. B. Dhia, Equilibre d'une plaque mince élastique avec contact unilatéral et frottement de type Coulomb, C. R. Acad. Sci. Paris.Scr. I, 308 (1989) 293-296.
- [8] H. Brézis, Analyse fonctionnelle : Théorie et application, Masson, (1987).
- [9] J. C. Paumier, Contact unilat éral des structures minces : modelisation, calcul et applications. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 30, (2003), Pages 177-187.
- [10] J. Jarušek, Contact Problem with Bounded Friction :Coercive case, Czechoslovak Math. J., 33(108), 237-261 (1983).
- [11] J.L. Lions et E. Magenes, problèmes aux limites non homogènes et applications, 1,Dunod, 1968.
- [12] Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non homogènes et application, 1, Dunod 1968.

- [13] J. Nécas, J. Jarušek and J. Haslinger, On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction, *Boll. U.M.I.*4(17B), 796-811 (1980).
- [14] J. Simon, Compact sets in the space  $L^p(0; T; B)$ . *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 146, no 1, pages 65 - 96 ; (1987).
- [15] María Teresa Cao Rial, Problemas de contacto en elasticidad dinámica con XFEM, Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela. (2011), P 45 – 92.
- [16] M. T. Cao, P. Quintela, Existence of solutions for a dynamic Signorini's contact problem, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 343 (2006) 355-360.
- [17] M. T. C. Rial, Contacter des problèmes avec élasticité dynamique XFEM, 31/06/2011
- [18] N. Kikuchi, J. T. Oden, Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods, SIAM, Studies in applied mathematics, (1988).
- [19] P. G. Ciarlet, P. Destuynder : A justification of the two dimensional plate model, *J. Mécanique* 18 (1979) 315-344.
- [20] P.G.Ciarlet, Plates and Junctions in elastic multistructures. Masson 1990.
- [21] P. G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, vol *II*, Theory of plates, North-Holland, Amsterdam,(1997).
- [22] P. G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, vol *III*, Theory of Shells, North-Holland, Amsterdam,(1999).
- [23] R. Hassani, P. Hild and I. Ionescu, Sufficient conditions of non-uniqueness for the Coulomb friction problem. *Math. Meth. Appl. Sci.* (2004) ; 2727 :47-67.
- [24] Y. Kato, Signorini problem with friction in linear elasticity, *Japan J. Appl. Math.*, 4, 237-268(1987).

## Résumé

Le but de ce travail est de trouver un modèle bidimensionnel d'un problème dynamique de Signorini sans frottement pour une plaque mince. A cette fin, deux méthodes asymptotiques sont élaborées, celle des développements asymptotiques formels et l'autre une méthode de convergence. En fin, compare les problèmes obtenus.

**Mots clés** dynamique, Signorini, sans frottement, plaque mince.

## Abstract

The aim of this work is to find a two-dimensional model of a dynamic Signorini problem without friction in a thin plate. To this end, two asymptotic methods are developed, the formal asymptotic expansions and the other a method of convergence. In the end, comparing the obtained problems.

**Keywords** : dynamic, Signorini, without friction, thin plate.

## المخلص

الهدف من هذا العمل هو إيجاد نموذج ثنائي البعد لمسألة Signorini الديناميكية، بدون احتكاك على صفيحة رقيقة. من أجل تحقيق هذا، استخدمت طريقتين مقاربتين، النشر التقاربي الشكلي والأخرى طريقة التقارب. و في الأخير نقوم بمقارنة المسألتين ثنائيي البعد المتحصل عليهما.

**الكلمات المفتاحية:** الديناميكية، Signorini، بدون احتكاك، صفيحة رقيقة.