UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionelle

Par : BELAKEHAL Hadda

Thème

Étude des systèmes différentiels linéaires non homogènes à coefficients périodiques

Soutenu publiquement le : 30/05/2017

Devant le jury composé de :

Dr. ACILA . Mustafa	M.C.B. UKMO université-Ouargla	Président
Dr. GUERFI . Amara	M.C. A. UKMO université-Ouargla	Examinateur
Dr. SAID . Mohamed .Said	M.C. A. UKMO université-Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Et je prie Allah pour conférer sur l'âme de mon père avec compassion et le pardon et les faire incliner à ban de gène.

A toute ma famille.

A tous les amis.

Remerciement

En premier lieu , je tient à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant , de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .
Je tient à exprimer mon profond respect , et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire , **Docteur : SAID Mohamed Said** , pour ces conseils , et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .

Je remercier sincèrement les membres du jury :

- **Docteur : ACILA Mustafa** , d'avoir accepté la présidence du jury .
  Aussi je remercier vivement , mon professeur :
- **Docteur : GUERFI Amara** d'avoir accepté l'examinateur de ce travail .

Je les remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail .
Et remercier tous ceux qui m'a aidé à singulariser **Dr :Mohamed Amine Bahiyou**.
Il est important de remercier ma famille.
Et je prie Allah pour conférer sur l'âme de mon père avec compassion et le pardon et les faire incliner à ban de gène.

Table des matières

Notations

- $\mathbb{R}$ Corps des réels
- I un intervalle de $\mathbb{R}$
- U ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$
- D l'ensemble de U
- Tr trace matrice $n \times n$ est total élément diagonale la matrice
- $\det$ déterminair matrice $n \times n$
- $\Phi(t)$ matrice fondamentale
- $A(t)$ matrice non autonome
- A matrice autonome
- $A(t+\omega)$ matrice périodiques de période ω
- $\Phi(\omega)$ une matrice monodromie
- ρ multiplicateurs Floquet
- $\mathbb{C}^n$ Corps des complexes
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de dimension $n \times n$ à coefficients réels
- $(a_{ij})_{i,j=,..,n}$ coefficient de la matrice A
- $P_n(\lambda)$ un polynôme caractéristique d'ordre n d'une matrice A
- ρ valeurs propres de le matrice Mondromy
- $C^k[a,b]$ espace fonctionnel continue dérivable k fois sur $[a,]$

- $Sp(A)$ l'ensemble de valeurs propres de la matrice A.
- $Vect(A)$ vecteur propres de valeurs propres de la matrice A.
- EDO équation différentielle ordinaire.

INTRODUCTION

Il existe un grand nombre de façons de résoudre une équation différentielle , et aucune méthode n'est clairement supérieure à toutes les autres dans toutes les circonstances .
On trouve les équations différentielles un peu partout :
en physique (ex : pendule , équation de la chaleur , des ondes ,.....) ; en chimie (ex : cinétique chimique ,..........) ; en biologie (dynamique de populations ,.....) ; en économie (dynamique de croissance exponentielle ,.........) .
Les systèmes linéaires périodiques continus sont des systèmes linéaires décrits par des équations différentielles ordinaires à coefficients périodiques en fonction du temps. De tels systèmes (déterministes ou stochastiques) sont utilisés pour modéliser des phénomènes naturels ou artificiels de type périodiques. Dans ce sens, ils revêtent un grand intérêt dans de nombreux champs d'application. C'est le cas par exemple, de certains systèmes considérés en physique du solide [Ziegler, 19771, en mécanique céleste [Sigrist,1976] [Iswar, 19801, en optique [Elachi,1976], en aéronautique [Borri , Montegazza, 19731 [Pardoux , Pignol, 19851, en automatique [Meerkov, 1973,19801, en électrotechnique [Chassande, 198 11 [Lesenne 82 al, 198 11, en mécanique quantique [Barone , Narcowich, 19771. De plus, les systèmes périodiques jouent un rôle clé dans la théorie de commande optimale périodique. Celle-ci repose sur l'observation suivante : il existe de nombreux systèmes d'intérêt pratique significatif, pour lesquels la meilleur opération est de type périodique (il peut

être plus économique de passer périodiquement par un point de consigne que d'y rester en permanence).
La théorie générale des équations différentielles linéaires dépendant de la variable temps $X(t) = A(t)X(t)$ est toujours incroyablement incomplète. Seulement pour certaines classes de fonctions $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avons-nous une compréhension satisfaisante du comportement qualitatif des solutions. Historiquement, la première théorie complète pour une classe de systèmes linéaires variables dans le temps a été initiée par Floquet en 1883 pour le cas périodique.

Le théorème de Floquet, donne une forme canonique pour chaque solution fondamentale de matrice de ce système linéaire commun. cela transforme le système périodique à un système linéaire traditionnel avec des coefficients constants et entier.

Dans la physique du solide, le résultat analogue est connue comme théorème de Bloch. En mathématiques, et en particulier les équations différentielles ordinaires, une matrice de la monodromie est la matrice fondamentale d'un système d'EDO évalué à la période des coefficients du système. Il est utilisé pour l'analyse de solutions périodiques d'EDO dans la théorie de Floquet

Nous allons étudier dans ce mémoire les solution périodiques du systèmes différentiels linéaire non homogène.
Dans le premier chapitre on rappelle quelques notions d'analyse fonctionnelle qui permettent l'existence et l'unicité de la solution d'équations différentielles ordinaires, et un système différentiel.

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)x^{'}(t) + a_0(t)x(t) = g(t)$$

Dans le second chapitre on étudie des équations différentielles à coefficients périodiques

$$x^{'}(t) + b(t)x = c(t) \qquad \text{équation différentielle de prémière d'ordre}$$

avec b et c deux fonctions réelles continues et $\omega-$ périodiques.

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \qquad \text{équation différentielle de deuxième d'ordre} \tag{1}$$

avec a, b et c trois fonctions réelles continues et $\omega-$ périodiques, on donner et quelques exemples sur équations différentielles linaires à coefficients périodiques d'ordre un et deux
.

Dans le troisième chapitre on étudie les systèmes différentiels linéaires homogène et non homogène des coefficients périodiques et quelques exemples.
Les système s'écrit

$$X' = A(t)X + F(t) \tag{2}$$

telle que

$$X \in \mathbb{C}^n, \qquad A, F \in C(\mathbb{R})$$

$$A(t+\omega) = A(t), \qquad F(t+\omega) = F(t), \qquad \omega > 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$

On utilise dans étude de système différentielle linaire à coefficients périodiques le théorème de Floquet .
On a la question suivante :
Est ce que touts système différentiel linéaire homogène à coefficients périodiques admette une solution périodique ? Si elle existe Est-elle trouvé unique ?.

Chapitre 1

Préliminaires

Pour étudier les système différentiels , il faut préciser dans quel espace fonctionnel on cherche les solutions .

Nous allons passer en revue dans cette section sur les notations des fonctions utiles en pratique, de la notion la plus faible, à la notion la plus forte .

1.1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace $C[a, b]$

Définition 1.1.1 *C'est l'espace continues sur $[a, b]$, de norme $\|x\| = \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$.*

1.1.2 Espace $C^k[a, b]$

Définition 1.1.2 *C'est l'espace $x = x(t)$ k fois continument dérivable sur $[a, b]$, munide la normé $\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max|x^i(t)|$.*

1.2 Généralités sur les équations différentielles ordinaire linéaires et les systèmes différentiells linéaires

Équation Différentielle ordinaire

Définition 1.2.1 *Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \to x(t)$ et ses dérivées $x, x^{'}, x^{''}, ..., x^{(n)}$ au point t, elle est définie par :*

$$F(t, x, x^{'}, x^{''}, ..., x^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier). La solution x en général sera à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$

Définition 1.2.2 *On appelle ordre d' une EDO, d'ordre de la derivée le plusélère dans cette équation c'est à dire* $F(t, x, x^{'}, x^{''}) = 0$ *est d'ordre 2 ;* $F(t, x, x^{'}, x^{''}, ..., x^{(n)}) = 0$ *est d'ordre* n *.*

Exemple 1.2.1

$$x^{''} + (x^{'})^2 = 0 \quad \text{où} \quad F(t, x, x^{'}, x^{''}) = x^{''} + (x^{'})^2 \qquad \text{est une équatione d'ordre deux.}$$

Équation différentielle linéaire

Définition 1.2.3 *[1] Une EDO du type (1) d'ordre* n *est linéaire si elle est de la forme :*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)x^{'}(t) + a_0(t)x(t) = g(t)$$

avec tous les $x^{(i)}$ *de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de* t*. Si* g *est nulle, alors l'équation est dite homogène ou sans second membre. L'équation différentielle*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)x^{'}(t) + a_0(t)x(t) = 0$$

est appelée équation différentielle homogène associée. Si $a_j(t), 0 \leq j \leq n$*, sont des constantes, on parle d'équation différentielle linéaire à coefficients constants.*

Exemple 1.2.2

$$x^{''} - 2x^{'} + x = 0$$

est un équation différentielle linéaire.

Notion de solution

Définition 1.2.4 *Soient* (x, I) *et* $(\tilde{x}, \tilde{I})$ *deux solutions d'une même équation différentielle. On dira que* $(\tilde{x}, \tilde{I})$ *est un prolongement de* (x, I) *si* $I \subset \tilde{I}$ *et* $\tilde{x}\backslash_I = x$*.*

Définition 1.2.5 *On appelle solution (ou intégrale) de l'EDO (1.1) toute fonction x vérife l'equation différentielle (1.1) en chaque point d'intervalle $[t_1, t_2] \subseteq I$. L'intervalle $J[t_1, t_2]$ s'appelle intervalle de définition de solution x.*

Définition 1.2.6

1. *On appelle solution* ***générale*** *de l'EDO (1.1) toute fonction $\psi = \psi(t, c)$ qui dépend d'une constante arbitraire c et telle que pour toute valeur de c la fonction ψ vérifie identiquement l'EDO (1.1) en tout point de $]t_0, t_1[$ qui est le domaine de définition de ψ.*

2. *On appelle solution* ***particulière*** *de l'EDO (1.1) toute solution déduite de la solution général en donnant des valeurs concrétés à la constante arbitraire c. Une solution particulière s'écrit : $x(t) = \psi(t, c = c_0)$ c est un valeur, $x(t) = \psi(t, c_0)$.*
   Pour chaque valeur donner à c on a une solution particulière de (1.1)pour une solution particulière trouvé on a en chaque point de $]t_1, t_2[$ l'unicité de la solution.

3. *On appelle solution* ***singulière*** *de l' EDO (1.1) une fonction $x = g(t)$ telle que cette fonction vérifie l'EDO (1.1) et telle que en chaque point l'unicité de la solution n'a pas lieu (c'est à dire en chaque point il y pas d'unicité de la solution).*

Définition 1.2.7 *Soient I_1 et I_2, deux intervalles sur $\mathbb{R}$, tels que $I_1 \subset I_2$.*
On dit qu'une solution (x, I_1) et maximale dans I_2 si et seulement si x n'admet pas de prolongement $(\tilde{x}, \tilde{I})$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneqq \tilde{I} \subset I_2$ (on verra même plus tard que I_1 est nécessairement ouvert).

Définition 1.2.8 *Soit un intervalle $\mathbb{R}$. Une solution (x, I) est dite globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.*

Remarque 1.2.9 *Toute solution globale est maximale, mais une solution maximale peut tout à fait ne pas être globale.*

1.2.1 Quelques méthodes de résolution

Équation à variables séparées

On appelle de façon générale équation à variables séparées, toute équation de la forme

$$b(t)x^{'} = a(t), \tag{1.2}$$

Où a et b sont deux fonctions définies respectivement sur I et K, et où I et K sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2.3 *Considérons l'EDO d'ordre 1 sous sa forme normal données par :*

$$x^{'} = f(t,x)$$

L'idée est d'exprimer $f(t,x)$ sous la forme $g(t)h(t)$, où $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ce qui permettra de résoudre une équation du type

$$x^{'} = g(t)h(t).$$

Cas particulier *: Les équations les plus simples sont de la forme*

$$x^{'} = f(t).$$

avec $h = 1$ et $g(t) = f(t)$ pour tout $t \in I$. On suppose en outre $x(t_0) = x_0$ pour un $t_0 = I$. Si on suppose que f est continue sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$ d'intérieur non vide les solution de cette équation sont données par

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

Théorème 1.2.10 *Supposons que les applications a et b continues respectivement sur I et K, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $J \subset \mathbb{R}$, alors $x = x(t)$est solution de l'équation*

$$b(x)x^{'} = a(t), \tag{1.3}$$

Si et seulement si :

1. *x est dérivable sur I.*

2. *Il existe $c \in \mathbb{R}$, constante telle que $B(x(t)) = A(t) + c$, pour tout $t \in I$, avec A est une primitive de a sur J, et B est une primitive de b sur K.*

Définition 1.2.11 *Soit $F(t, x, x^{'}) = 0$, où $t \in I$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une équation différentielle. On dit que une équation différentielle à variables séparables si cette équation peut s'écrire sous la forme*

$$b(x)x^{'} = a(t), \quad \text{pour} \quad t \in I, \quad \text{et} \quad x \in K \subset \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.4 *Soit à résoudre l'équation*

$$y^{'} = 2xy^2/(1-x^2)$$

On sépare les variables :

$$\frac{y^{'}}{y^2} = \frac{2x}{1-x^2}$$

En intégrant les deux membres, on obtient :

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2xdx}{1-x^2}$$

où

$$\frac{-1}{y} = -\log|1-x^2| + c$$

;

$$y(\log|1-x^2| - c) = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} = -\log|1-x^2| - c$$

$$y = \frac{1}{\log|1-x^2| - c}$$

Équations différentielles linéaires

Définition 1.2.12 *Une équation différentielle du premier ordre $F(t, x, x') = 0$ est dite linéaire si F linéaire est par rapport à la fonction inconnue x et par rapport à sa dérivée $x^{'}$. Une telle équation peut toujours sous la forme*

$$a(t)x^{'} + b(t)x = d(t). \tag{1.4}$$

Dans toute la suite, on supposera que a, b et d sont continus sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

- Cas $d(t) = 0$,

Il est à noter que $x \equiv 0$ est une solution de l'équation linéaire homogène ci-dessus. On l'appelle solution triviale comme dans le cas des équations autonomes.

Proposition 1.2.13 *L'ensemble des solution de l'équation linéaire homogène*

$$a(t)x^{'} + b(t)x = 0.$$

Sur la domaine I, avec pour un certain t_0 dans I tel que $x(t_0) = x_0$ est définie pour tout $t \in I$ par

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} -\dfrac{b(s)}{a(s)}}, \tag{1.5}$$

Proposition 1.2.14 *Si une solution de l'équation linéaire homogène s'annule en au-moins un point t_0 alors elle est identiquement nulle(solution triviale).*

Remarque 1.2.15 *La solution $x \equiv 0$ sur I est appelée intégrale dégénérée de l'équation linéaire homogène.*

Proposition 1.2.16 *La solution générale de l'équation*

$$a(t)x^{'} + b(t)x = d(t),$$

Sur I avec pour un certain t_0 dans I tel que $x_0(t_0) = x_0$ est donnée par

$$x(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds\right)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{d(s)}{a(s)} \exp\left(\int_{t_0}^{s} \frac{b(\sigma)}{a(\sigma)} d\sigma\right) ds\right). \tag{1.6}$$

Remarque 1.2.17 *La méthode fréquemment utilisée pour trouver une solution de l'équation non homogène est appelée méthode de variation de la constante.*

Cas particulier :Formule de Duhamel

Proposition 1.2.18 *Soient une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, α une constante réelle et $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = x_0$.*
La solution générale de l'équation scalaire

$$x^{'} = \alpha + f(t),$$

est donnée par

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s) ds.$$

où α est constante arbitraire.

Équations différentielles ordinaires non linéaire

Équations de Bernoulli

Définition 1.2.19 *Une équation de Bernoulli est une équation différentielle du 1^{me} ordre scalaire non linéaire de la forme*

$$x^{'} + P(t)x + Q(t)x^{r} = 0 \tag{1.7}$$

Où $r \in \mathbb{R}$, P et Q sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.2.20 *Une fonction dérivable strictement positive (le cas où $r = 1/2$ par exemple, où $r \leq 0$) x sur I est solution de l'équation de Bernoulli si et seulement si $u = x^{1-r}$ est une solution strictement positive de l'équation linéaire*

$$u^{'} + (1-r)P(t)u + (1-r)q(t) = 0 \tag{1.8}$$

Exemple 1.2.5 *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$x^{'} - tx = -tx^3 \tag{1.9}$$

Divisons les deux membres de l'équation par x^3 *avec* $x \neq 0$

$$\frac{x^{'}}{x^3} - t\frac{1}{x^2} = -t \tag{1.10}$$

Effectuons le changement de variable

$$\frac{1}{x^2} = Z, \qquad \frac{-2x^{'}}{x^3} = z^{'}.$$

D'où

$$\frac{x^{'}}{x^3} = \frac{-1}{2}z^{'}$$

Après la substitution, la dernière équation se transforme en une équation linéaire du type :

$$-\frac{1}{2}z^{'} - tz = -t$$

$$z^{'} + 2tz = 2t$$

dont la solution générale est :

$$z = 1 + ce^{-t^2}$$

On en déduit l'intégrale générale de l'équation donnée de la forme :

$$\frac{1}{y^2} = 1 + ce^{-t^2}$$

où

$$x = \sqrt{\frac{1}{1 + ce^{-t^2}}}$$

Équations de Lagrange et de Clairaut

Définition 1.2.21 *On appelle équation de Lagrange toute équation du premier ordre scalaire non linéaire de la forme :*

$$x = tf(x^{'}) + g(x^{'}). \tag{1.11}$$

Où f et g sont définies, dérivables sur un certain intervalle J de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.22 *On appelle équation de Clairaut toute équation de Lagrange avec $f \equiv Id$ (où Id est la fonction identité, c'est à dire $Id(x) = x$), autrement dit elle est de la forme*

$$x = tx^{'} + g(x^{'}). \tag{1.12}$$

Où g définie, dérivable sur un certain intervalle J de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2.23 *Une équation de Clairaut est un cas particulier de l'équation de Lagrange.*

Proposition 1.2.24 *Les seules solutions affines de l'équation de Lagrange sont les fonctions de la forme :*

$$x(t) = mt + g(m). \tag{1.13}$$

Où m est une racine de l'équation $m = f(m)$ avec $m \in J$.

Remarque 1.2.25 *Si de telles fonctions existent, alors elles sont globales sur $\mathbb{R}$.*
En particulier, pour tout $m \in J$ les fonctions $t \to mt + g(m)$ sont les seules fonctions affines solutions de d'équations de Clairaut et elles sont globales sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2.6

$$x = 2t\acute{x} + m\acute{x} \tag{1.14}$$

on pose $\acute{x} = m \Longrightarrow x = 2tm + mm$

$$dt = d(2tm + mm)$$

$$mdt = 2mdt + 2tdm + \frac{dm}{m}$$

$$m\frac{dt}{m} = 2m\frac{dt}{dm} + 2t + \frac{1}{m}$$

$$m\frac{dt}{m} + 2dt = -\frac{1}{m}$$

$$\frac{dt}{m}+\frac{2dt}{m}=-\frac{1}{m^2} \tag{1.15}$$

la solution de équation homogène est de le forme :

$$\frac{dt}{dm}+\frac{1}{m^2}=0 \tag{1.16}$$

$$t=Ke^{-2mm}=\frac{K}{m^2}$$

$$t(m)=\frac{K(m)}{m^2}\Longrightarrow \acute{t}(m)=\frac{\acute{K}}{m^2}-\frac{2K}{m^3}$$

on remplaçant dans (1.15) on obtient :

$$\frac{\acute{K}(m)}{m^2}-\frac{2K(m)}{m^2}+\frac{2K(m)}{m^2}=-\frac{1}{m^2}$$

$$\acute{K}(m)=-1\Longrightarrow K(m)=-m+c$$

donc : $t(m)=(\frac{-m+c}{m^2})$

$$\Longrightarrow x=2m(\frac{-m+c}{m^2})+mm=-2+\frac{2c}{m}+mm$$

Équation de Ricatti

Définition 1.2.26 *Une équation différentielle de Riccati est de la forme :*

$$a(t)x'+b(t)x=c(t)y^2+d(t) \tag{1.17}$$

où a, b, c *et* d *sont des fonctions continues de* t*. Pour les valeurs de* t *où le coefficient* $a(t)$ *ne s'annule pas, nous obtenons après division par* $a(t)$ *simplification, l'équation suivante :*

$$x'+A(t)x=B(t)x^2+C(t). \tag{1.18}$$

Si $C(t)=0$*, nous retrouvons un cas particulier d'équation de Bernoulli(*$r=2$*).*

Résolution

L'intégration d'une équation différentielle de Riccati nécessite la connaissance d'une solution particulière x_p de cette équation

Le changement de fonction inconnue $z(t) = x(t) - x_p(t)$: transforme l'équation différentielle :

$$x' + A(t)x = B(t)x^2 + C(t). \tag{1.19}$$

En

$$(z + x_p)' + A(t)(z + x_p)^2 + C(t)$$

$$z' + A(t)z + x_p' + A(t)x_p = B(t)z^2 + 2B(t)zx_p + B(t)x_p^2 + C(t)$$

Or x_p solution particulière de l'équation de Riccati vérifie :

$$x_p' + A(t)x_p = B(t)x_p^2 + C(t)$$

. Cette simplification nous conduit à l'équation de Bernoulli $(r = 2)$

$$z' + [A(t) - 2B(t)x_p]z = B(t)z^2. \tag{1.20}$$

On posera un nouveau changement de fonction $u(t) = \frac{1}{z(t)}$ pour se ramener à une équation différentielle linéaire en $u(t)$:

$$-u' + [A(t) - 2B(t)x_p]u = B(t). \tag{1.21}$$

Après résolution de cette dernière équation, la solution $x(t)$ de l'équation de Riccati sera obtenue par :

$$x(t) = z(t) + x_p(t)$$

avec $z(t) = 1/u(t)$ et où $x_p(t)$ est donné.

Exemple 1.2.7 *Soit l'équation suivante :*

$$x^{'} - x^2 + 2e^t x = e^{2t} + e^t \tag{1.22}$$

$$x_0(t) = e^t \tag{1.23}$$

$$\tag{1.24}$$

On posons $z(t) + e^t = x(t)$ et portons dans l'équation(1.22) il vient

$$\frac{dz}{x} = z^2$$

d'où

$$-\frac{1}{z} = t - c$$

ou

$$z = \frac{1}{c-t}$$

Ainsi la solution générale de l'équation (1.22) est

$$x = e^t + \frac{1}{c-t}$$

1.2.2 Théorème De Cauchy-Lipschitz

Problème de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction.

Définition 1.2.27 *[7] Étant donnée une équation différentielle du premier ordre sous la forme normale suivante :*

$$x^{'} = f(t,x)$$

Pour $(x, x(t)) \in U$, et un point $(t_0, x_0) \in U$, le problème de Cauchy correspondant consiste à chercher des solutions $x = x(t)$ telle que

$$x(t_0) = x_0$$

On note le problème de Cauchy de la façon suivante

$$\begin{cases} x^{'} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.25}$$

Théorème 1.2.28 *[7] Supposons $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue sur U. Soit $(t_0, x_0) \in U$ et une fonction $x = x(t)$ définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et à valeurs dans K^n. Une fonction x est solution de problème de Cauchy sur I si seulement si*

- *pour* $t \in I, (t, x(t)) \in U$,
- x *est continue sur* I,
- *pour tout* $t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$.

1.2.3 Existence et unicité de la solution du problème (1.25)

Soit f une application définie sur un ouvert $U \subseteq I \times \mathbb{R}^2$. Oú I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

$$f : U \subseteq I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(t, x) \to f(t, x)$$

Théorème 1.2.29 *[7](**Cauchy Lischiptz**)*

1/ Si f *est continu sur l'ensemble* $D \subseteq U$ *de définie par :*

$D = \{(t, x) \in I \times \mathbb{R}/|t - t_0| \leq a; |x - x_0| \leq b, \quad (a, b) \in \mathbb{R} \quad \textit{données}\}$.

2/ Et si f *est Lipschitzienne par rapport à* x *sur* $\mathbb{R}$ *alors l'EDO* $x' = f(t, x)$ *admet une solution et une seule* $x = x(t)$.

Cette solution est définie sur l'intervalle ferme $J = [t_0 - d, t_0 + d] \subseteq I; d \leq a$. d *donnée, est cette solution vérifie* $x(t_0) = x_0$.

C'est à dire si les conditions (1) et (2) du théorème sont vérifies alors : Il existe une seule solution du problème de Cauchy (1.25). Cette solution $x = x(t)$ *définie sur* $J = [t_0 - d, t_0 + d]$

Remarque 1.2.30 *Les conditions (1) et (2) du théorème sont des conditions suffisantes et non nécessaires.*

Lemme 1.2.31 ***(Gronwall)****[7] Soit $u(t)$, $v(t)$ des fonctions non négatives et continues dans $[a,b]$;$C \geq 0$ une constante ; et si on a :*

$$v(t) \leq C + \int_a^t v(s)u(s)ds \qquad \forall a \leq t \leq b \tag{1.26}$$

Alors

$$v(t) \leq C \exp \int_a^t u(s)ds \qquad \forall a \leq t \leq b \tag{1.27}$$

en particulier, si $C = 0$, alors $v(t) = 0$.

Preuve. Voir [7](p :24) ■

Notions sur le calcul matriciel

Définition 1.2.32 *[9]*

On appelle trace d'un matrice carré $A = (a_{ij})_{i,j=1...n}$, qu'un note TrA, la somme de ses éléments diagonaux

$$TrA = \Sigma_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Théorème 1.2.33 *[9] Pour tout opérateur linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:*

$$\det e^A = e^{TrA}$$

Preuve. [9]

■

Proposition 1.2.34

a. $\dfrac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$

b. Si $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^A \times e^B$.

c. Pour toute matrice A on a $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

d. $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(comA)^T \qquad avec \quad \det A \neq 0$

Définition 1.2.35 *Soit $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de le matrice A c'est à dire il admet les valeurs propres $(\lambda_i)_{1<i\leq n}$ comme solutions. On a donc :*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Si A est une matrice triangularie on diagonale, alors les valeurs propres de A sont les élément de la diagonale de A. C'est à dire si A est triangularie ou diagonale les racines de $P(\lambda)$sont $(a_{ii})_{1<i\leq n}$ donc $\lambda_i = a_{ii}$ (éléments diagonaux).

1.2.4 Systèmes différentiels linéaires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, a_{ij} : I \to \mathbb{R}, ij = 1, ..., n$ et $f_i : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur I.

L'objectif est de trouver des fonction $x_1, ..., x_n : I \to \mathbb{R}, n$ fonctions de classe C^1 sur I telles que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^{'} & = & a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ & \vdots & \\ x_n^{'} & = & a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{array} \right. \tag{1.28}$$

On peut écrire ce système sous la forme matricielle suivante :

$$X^{'}(t) = A(t)X(t) + F(t) \tag{1.29}$$

Où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \; et \qquad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

En général il peut y avoir une infinité de solutions de cette équation.
Soient $t_0 \in I$ et $X(t_0) \in \mathbb{R}^n$ données

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1^0(t_0) \\ \vdots \\ x_n^0(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

Le but est de trouver X solution de l'équation (1.28) satisfaisants à la condition initiale (1.30). Autrement dit, existe-t-il X fonction dérivable définir sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} X'(t) = & A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) = & X^0, \end{cases} \tag{1.31}$$

Pour tout $t \in I$.

Théorème 1.2.36 *[8] Si les coefficients de $A(t)$ sont continu, dans l'intervalle $[0, t_0]$. Alors là existe une solution unique des problème*

$$X'(t) = A(t)X(t); \qquad X(0) = c \tag{1.32}$$

définie dans cet intervalle $[0, t_0]$.

Preuve. Voir [8] ■

Systèmes homogènes

Les systèmes (1.29) est dit homogène si $F = 0$,
C'est à dire

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{1.33}$$

et nous avons l'existence et l'unicité des solutions de ce systèmes dans le théorème ci-dessus

Rappel Les fonctions $X^1, X^2, ..., X^n : I \to \mathbb{R}^n$, sont dites indépendantes si pour tous $c_1, .., c_n \in \mathbb{R}$

On a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X^i(t) = 0, \text{pour tout} \quad t \in I \Longrightarrow c_1 = c2 =, ..., = c_n = 0.$$

Lemme 1.2.37 *Soient $X^1, ..., X^n : I \to \mathbb{R}^n$ des solutions de (1.33), alors les trois propositions sont suivantes équivalentes*

1. *$X^1, ..., X^n$ sont indépendantes,*
2. *Il existe $t_0 \in I$ tel que la matrice définie par :*

   $$\big(X^1(t_0)|...|X^n(t_0)\big)$$

   où inversible, $X^1(t_0), ..., X^n(t_0)$ soit des vecteurs colones
3. *La matrice*

   $$\big(X^1(t_0)|...|X^n(t_0)\big) \tag{1.34}$$

   est inversible pour tout $t \in I$

   ***Notation** : Le déterminaur de la matrice (1.34) est appelé Wronskien*

   On notera par $\quad M(t) = (X^1(t_0)|...|X^n(t_0))$ la matrice $n \times n$ qu'on appellera matrice fondamentale du système (1.34)

Théorème 1.2.38 *Soient $X^1, ..., X^n$ un système fondamental de solutions (1.34). Alors toutes solution X de* (1.33) *sur de la forme*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X^i(t) \quad avec \quad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R} \tag{1.35}$$

Remarque 1.2.39 *Si on parvient à trouver n solutions indépendantes* (1.34) *alors on connait toutes les solutions de* (1.32).

Mais attention, ça ne marche que parce que (1.34) est linéaire et homogène .

Théorème 1.2.40 *La matrice* $M(t) = e^{tA} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}$ *est une solution fondamentale de* (1.33), *Elle est donc inversible et satisfait* $M^{'}(t) = A(t)M(t)$.

Systèmes différentiels linéaires non homogènes

Revenons ar système non homogène (1.29) avec F non identiquement nulle.

Théorème 1.2.41 *Soient* $X^1, ..., X^n$ *un système fondamental de solutions du problème homogène (1.33) et* X_p *une solution particulière de (1.29). Alors toute solution* X *de (1.29) est de la forme :*

$$X(t) = X_p + \sum_{i=1}^{n} c_i X^i(t) \quad avec \quad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$$

Équation différentielle d'ordre n

Définition 1.2.42 *[4] On appelle équation différentielle d'ordre* n *l'équation*

$$x^{(n)} = G(t, x, x^{'}, x^{''}, ..., x^{(n-1)}).$$

Si on considère $a_0, a_2, ..., a_{n-1}$ n fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, on appelle équation différentielle linéaire d'ordre n l'équation

$$x^n + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_1(t)x + a_0(t) = 0$$

Réduction de l'ordre d'une equation différentielle ordinaire d'ordre n

On va donner une méthode qui transforme une EDO d'ordre n en un système différentielle d'ordre 1.
Soit l'EDO

$$F(t, x, x^{'}, x^{''}, ..., x^{(n)}) = 0 \tag{1.36}$$

Si (1.36) est résoluble par rapport $x^{(n)}$on peut l'écrire sous la forme

$$x^{(n)} = G(t, x, x^{'}, x^{''}, ..., x^{(n-1)}). \tag{1.37}$$

pour transformer (1.37) en un système différentiel d'ordre 1 , on introduit les inconnues auxiliaires suivantes :

$$x^{(n)} = G(t, x, x^{'}, x^{''}, ..., x^{(n-1)})$$

$$z^{'} = G(t, z_1, z_2, z_3, ..., z_{(n)})$$

$$\begin{cases} z_1^{'} = & z_2 \\ z_2^{'} = & z_3 \\ z_3^{'} = & z_4 \\ z_4^{'} = & z_5 \\ z_{n-1}^{'} = & z_n \\ \vdots & \\ z_n^{'} & = \quad G(t, z_1, z_2, z_3, ..., z_{(n)}) \end{cases} \tag{1.38}$$

Exemple 1.2.8 *Soit l'équation différentielle*

$$x^{'''} = x^{''} \tag{1.39}$$

On pose

$$x^{'} = y(t)$$
$$x^{''} = y^{'}(t)$$
$$x^{'''} = y^{''}(t)$$

en remplaçant dans (1.39) en trouve

$$y^{''} - y^{'} = 0$$
$$\frac{y^{''}}{y^{'}} - 1 = 0$$

On pose $y^{'} = z$ il vient

$$\frac{z^{'}}{z} = 1 \Rightarrow \frac{dz}{z} = dt$$

On intégrie

$$ln|z| = t + c$$

$$z = ke^t$$

$$y' = ke^t$$

$$y = ke^t + c$$

en retour à l'équation suivant :

$$x'(t) = c_1 + c_2 e^t$$

On aura la solution d' équation(1.39) s'écrit

$$x(t) = c_1 x + c_2 e^t + c_3$$

Exemple 1.2.9 *Soit le système différentiel suivante :*

$$\begin{cases} x' = & 4x - 2y \\ y' = & x + y \end{cases} \tag{1.40}$$

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène son écrire d matricielle est :

$$X' = AX$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$Sp(A) = \{2, 3\}$ *et* $E_2(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_3(A) = Vect \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a $A = PDP^{-1}$ *avec,*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$, *avec*

$$X^{'} = AX \Leftrightarrow Y^{'} = DY \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{3t} \end{pmatrix} \textit{avec} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Finalement on aura :

$$X^{'} = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \textit{avec} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Chapitre 2

Équations différentielles linéaires à coefficients périodiques

Dans ce chapitre, nous allons étudier les équations différentielles à coefficients périodiques : nous allons commencer à étudier les EDO 1^{me} ordre elle s'ecriruer :

$$x^{'}(t) + b(t)x = c(t) \qquad \text{EDO du 1 ordre}$$

avec b et c sur deux fonctions réelles continues et $\omega-$ périodiques. Puis on étudiera les EDO du2^{me} ordre commue l'équation différentielle suivante :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \qquad \text{EDO du deuxième d'ordre} \tag{2.1}$$

avec a, b et c trois fonctions réelles continues et $\omega-$ périodiques.

2.1 Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients périodiques

Considérons l'équation non homogène du premier ordre suivante :

$$x^{'} = a(t)x(t) + b(t) \tag{2.2}$$

avec a, b deux fonctions réelles continues et $\omega-$ périodiques.

Exemple 2.1.1 *Soit l'EDO suivante :*

$$x^{'}(t) = -\cos(t)x + \cos(t) \tag{2.3}$$

$a(t) = -\cos(t)$ *est périodique de période* 2π, $b(t) = \cos(t)$ *avec* $x(0) = \alpha$. *Déterminons la solution de l'EDO homogène (2.3), on aura*

$$x(t) = Ke^{-\sin t}$$

La solution de l'EDO non homogène de (2.3) est

$$x(t) = Ke^{-\sin t}$$

Donc

$$x^{'}(t) = K^{'}(t)e^{-\sin t} + K(t)\cos te^{-\sin t}$$

On remplace dans (2.3), on obtient :

$$K^{'}(t)e^{-\sin t} + K(t)\cos te^{-\sin t} = \cos tK(t)e^{-\sin t} + \cos t$$

$$\Rightarrow K^{'}(t) = \cos te^{\sin t}$$

$$\Rightarrow K(t) = e^{\sin t} + C$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\sin t}(e^{\sin t} + C)$$

$$x(t) = 1 + Ce^{-\sin t}$$

On a :

$$x(0) = \alpha \Rightarrow x(0) = 1 + C = \alpha$$

$$\Rightarrow C = \alpha - 1$$

$$\Rightarrow x(t) = 1 + (\alpha - 1)e^{-\sin t}$$

$$\Rightarrow x(t) = 1 + \alpha e^{-\sin t} - e^{-\sin t}$$

On a :

Cette solutions est périodique et de période 2π

Exemple 2.1.2 *Soit l'équation*

$$x^{'}(t) = -\cos(t)x + 1$$

,$a(t) = -\cos(t)$, $b(t) = 1$ *;*

sont périodiques de période 2π, $x(0) = x(\alpha)$, $\quad \alpha \in R$

Donc

$$x(t) = e^{-\sin t}\int_0^t e^{sins}ds + \alpha e^{-\sin t}$$

$$x(2\pi) - x(0) = \int_0^{2\pi} e^{\sin s}ds > 0.$$

On remarque que cette solution n'est pas périodique.

2.2 Les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients périodiques

Soit l' équation différentielle linéaire suivante :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \tag{2.4}$$

avec a, b et c trois fonctions réelles continues et $\omega-$ périodiques.

Lemme 2.2.1 *[4] L'équation différentielle (2.4) admet une solution ω-périodique si et seulement s'il existe une solution x vérifiant la condition de périodicité :*

$$x(\omega) = x(0) \quad x'(\omega) = x'(0) \tag{2.5}$$

Preuve. [4]

- Sens nécessaire : il est évident que si x est une solution $\omega-$périodique alors x est au moins de classe $\mathbb{C}^2$ et on a (2.5).
- Sens suffisant : supposons que x est une solution vérifiant (2.5). Alors x vérifie le problème de Cauchy .

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t) \\ x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta. \end{cases}$$

on pose y telle que : $y(t) = x(t + \omega)$.
y vérifie alors le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y''(t) + a(t+\omega)y'(t) + b(t+\omega)y(t) = c(t+\omega) \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta. \end{cases}$$

comme a, b et ,c sont des fonctions $\omega-$périodiques , on obtient exactement le même problème de Cauchy pour x et y , donc par unicité des solutions , on a que x est une solution $\omega-$périodique de (2.4).

■

Théorème 2.2.2 *[4] Considérons une équation du type (2.4) .*

L'équation homogène associée s'écrit alors : sous la forme :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{2.6}$$

Alors (2.4) admet une solution ω-périodique pour toute fonction $c(t)$ si et seulement si (2.6) n'en a pas .

Preuve. [4] Considérons maintenant l'équation homogène (2.6). On détermine (x_1, x_2) une base de solutions de (2.6) elle telle que :

$$\begin{array}{ll} x_1(0) = 1 & x_1^{'}(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 & x_2^{'}(0) = 1 \end{array}$$

.

La solution $\tilde{x}$ de l'équation (2.6) vérifiant $\tilde{x}(0) = A$ et $\tilde{x^{'}} = B$ s'écrit alors :

$$\tilde{x}(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

. De là, par la méthode de la variation des constantes, on en déduit la solution x de (2.4) avec $x(0) = A$ et $x^{'}(0) = B$:

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) - x_1(t)\int_0^t \frac{c(u)x_2(u)}{W(x_1, x_2)(u)}du + x_2(t)\int_0^t \frac{c(u)x_1(u)}{W(x_1, x_2)(u)}du$$

oú $W(x_1, x_2)$ est le Wronskien de x_1, x_2 au point t. On injecte cette expression dans la condition de périodicité :

$$x(0) = x(\omega)$$

$$x(0) = Ax_1(0) + Bx_2(0) - x_1(0)\int_0^0 \frac{c(u)x_2(u)}{W(x_1, x_2)(u)}du + x_2(0)\int_0^0 \frac{c(u)x_1(u)}{W(x_1, x_2)(u)}du$$
$$= A$$
$$x(\omega) = Ax_1(\omega) + Bx_2(\omega) - x_1(\omega)\int_0^\omega \frac{c(u)x_2(u)}{W(x_1, x_2)(u)}du + x_2(\omega)\int_0^\omega \frac{c(u)x_1(u)}{W(x_1, x_2)(u)}du$$
$$= Ax_1(\omega) + Bx_2(\omega) + C_1$$

alors

$$A = Ax_1(\omega) + Bx_2(\omega) + C_1$$

. et pour la dérivée, on obtient de la même manière ce qui suit :

$$x^{'}(0) = x^{'}(\omega)$$

$$B = Ax_1^{'}(\omega) + Bx_2^{'}(\omega) + C_2$$

où C_1, C_2 sont les termes intégraux dépendants de $c(t)$ pris en ω. Donc, de (2.5), on déduit le système suivant sur A et B :

$$\begin{aligned}(1 - x_1(\omega))A - x_2(\omega)B =& C_1 \\ -x_1^{'}(\omega)A + (1 - x^{'}(\omega))B =& C_2\end{aligned}$$

On obtient un unique vecteur $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, solution du système si et seulement si la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} (1 - x_1(\omega)) & -x_2(\omega) \\ -x_1^{'}(\omega) & (1 - x^{'}(\omega)) \end{pmatrix}$$

, est inversible et donc on obtiendrait une unique solution périodique pour (2.4). Or on est en dimension finie, donc cela équivaut à l'injectivité de la matrice, ie :

$$P \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Par conséquent, cela revient à montrer que P est injective si et seulement si les fonctions x_1, x_2 ne sont pas ω-périodiques.

- On montre le sens nécessaire : supposons que P est injective. Alors une solution x de (2.4) est périodique si et seulement si $A = 0$ et $B = 0$, ce qui revient à dire que $\tilde{x}$ est périodique si et seulement si c'est la fonction nulle. On en déduit que x_1 et x_2 ne sont périodiques.

- Montrons le sens suffisant par contra posée : supposons que P n'est pas injective. Alors il existe un vecteur $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ non nul tel que

$$\begin{aligned}(1 - x_1(\omega))A - x_2(\omega)B =& 0 \\ -x_1^{'}(\omega)A + (1 - x_2^{'}(\omega))B =& 0\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une solution $\tilde{x}$ de (2.6) qui serait périodique :

$$\tilde{x}(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

A et B étant des constantes, on a clairement qu'il est nécessaire et suffisant que x_1 ou x_2 est périodique. ■

Remarque 2.2.3 *[4] Ce théorème est un théorème d'unicité : pour toute fonction $c(t)$ il existe une solution périodique . Par conséquent, on obtient un unique vecteur solution $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ donnant une unique solution périodique pour (2.4) si et seulement si x_1 et x_2 ne sont pas ω-périodiques.*

Théorème 2.2.4 *[4] on suppose que $a(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Donc l'équation (2.4) s'écrit :*

$$x''(t) + b(t)x(t) = c(t) \tag{2.7}$$

ou b et c sont des fonctions $\omega-$périodiques .

Alors ,(2.7) admet une solution périodique si et seulement si on a :

$$\int_0^\omega \Phi(u)c(u)du = 0$$

pour tout solution périodique Φ de l'équation homogène à (2.7).

Preuve. Voir [4]

■

Exemple 2.2.1 *Soit l'équation d'ordre 2 suivant de période $\omega = 2\pi$*

$$x^{''}(t) + x(t) = 1 \tag{2.8}$$

la solution de l'équation (2.8) homogène s'écrit

$$x(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

la solution de l'équation non homogène s'écrit

$$x(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{t}{2}\sin(t)$$

il existe une solution périodique de l'équation non homogène si et seulement si :

$$\int_0^{2\pi} (A\cos(t) + B\sin(t))dt = 0$$

Alors l'équation (2.8)admet un solution périodique.

Exemple 2.2.2 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$x^{''}(t) + n^2 x(t) = c(t) \tag{2.9}$$

où n est un entier non nul et c une fonction 2π-périodique. Montrons que (2.9) admet une solution périodique si et seulement si on a :

$$\int_0^{2\pi} c(u)\cos(nu)du = \int_0^{2\pi} c(u)\sin(nu)du = 0$$

**Sens direct : Déterminons d'abord les solutions de l'équation homogène associée à (2.9). On cherche en effet x_1, x_2 vérifiant*

$$x_1(0) = 1, \quad x^{'}(0) = 0; \quad x_2(0) = 0 \quad x_2^{'}(0) = 1$$

On considère le polynôme caractéristique de l'équation homogène dont on a une racine réelle double n. De là, on obtient les solutions x_1, x_2 qui satisfont :

- Pour x_1

$$x_1(t) = A_1\cos(nt) + B_1\sin(nt)$$

$$x_1(0) = 1$$

$$x_1^{'}(0) = 0$$

d'où $x_1(t) = \cos(nt)$.

-Pour x_2

$$x_2(t) = A_2\cos(nt) + B_2\sin(nt)$$

$$x_2(0) = 0$$

$$x_2^{'}(0) = 1$$

d'où $x_2(t) = \sin(nt)$.

Donc on obtient la base fondamentale de solutions $(\cos(nt), \sin(nt))$ *dont le Wronskien en tout point est*

$$W(\cos(nt), \sin(nt) = \begin{pmatrix} \cos(nt) & \sin(nt) \\ -n\sin(nt) & n\cos(nt) \end{pmatrix} = n\cos^2(nt) + n\sin^2(nt) = n \neq 0.$$

Maintenant, revenons à l'équation (2.9). Soit x *une solution périodique de (2.9). Il existe deux réels* A *et* B *tels que*

$$x(t) = A\cos(nt) + B\sin(nt) - \cos(nt)\int_0^{2\pi}\frac{c(u)\sin(nu)}{W(\cos(nu), \sin(nu)}du + \sin(nt)\int_0^{2\pi}\frac{c(u)\cos(nu)}{W(\cos(nu), \sin(nu)}du$$

x *étant* 2π*-périodique,elle vérifie la condition de périodicité et on a alors le système :*

$$x(0) = x(2\pi)$$

$$A\cos(n0) + B\sin(n0) - \cos(n0)\int_0^{0}\frac{c(u)\sin(nu)}{n}du + \sin(n0)\int_0^{0}\frac{c(u)\cos(nu)}{n}du$$
$$= A\cos(2n\pi) + B\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi)\int_0^{2\pi}\frac{c(u)\sin(nu)}{n}du + \sin(2n\pi)\int_0^{2\pi}\frac{c(u)\cos(nu)}{n}du$$
$$A = A + \int_0^{2\pi}\frac{c(u)\sin(nu)}{n}du$$

De la manier on a :

et on fait la même chose pour

$$x^{'}(t) = -n\sin(nt) + n\cos(nt) + n\sin(nt)\int_0^{t}\frac{c(u)\cos(nu)}{W(\cos(nu), \sin(nu)}du$$
$$+ n\cos(nt)\int_0^{t}\frac{c(u)\sin(nu)}{W(\cos(nu), \sin(nu)}du$$

$$x^{'}(0) = x^{'}(2\pi)$$

$$nB = nB + n\int_0^{2\pi} \frac{c(u)\cos(nu)}{n} du$$

Donc on a les égalités suivantes :

$$n\int_0^{2\pi} \frac{c(u)\cos(nu)}{n} du = 0, et \quad \int_0^{2\pi} \frac{c(u)\sin(nu)}{n} du = 0$$

On en déduit que :

$$\int_0^{2\pi} c(u)\cos(nu)du = 0, et \quad \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} c(u)\sin(nu)du = 0$$

d'où le résultat attendu pour

$$b(t) = n^2$$

*** Sens réciproque :*

On suppose que pour toute fonction c 2π-périodique, on a :

$$\int_0^{2\pi} c(u)\cos(nu)du = \int_0^{2\pi} c(u)\sin(nu)du = 0$$

On reprend ce qu'on a déjà fait dans le sens direct. Si x est une solution de (2.9) pour une certaine fonction c , alors elle s'écrit sous la forme :

$$x(t) = A\cos(nt) + B\sin(nt) - \cos(nt)\int_0^t \frac{c(u)\sin(nu)}{n} du + \sin(nt)\int_0^t \frac{c(u)\cos(nu)}{n} du$$

On a donc facilement que

$$x(0) = A, \qquad x^{'}(0) = nB$$

$$x(2\pi) = A, \qquad x^{'}(2\pi) = nB$$

car les termes intégraux sont nuls. Donc x vérifie la condition de périodicité et est solution de (2.9), c'est-à-dire que x est 2π-périodique.

Chapitre 3

Systèmes différentiels linéaires à coefficients périodique

Dans ce chapitre nous allons étudier les systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques. Soit de système non homogène suivant :

$$X' = A(t)X + F(t) \qquad \text{un système non homogène} \tag{3.1}$$

tel que

$$X \in \mathbb{C}^n, \qquad A, F \in C(\mathbb{R})$$

$$A(t+\omega) = A(t), \qquad F(t+\omega) = F(t), \qquad \omega > 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Si $F(t) \equiv 0$ alors le système est homogène

3.1 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients périodiques

Dans le cas des systèmes à coefficients périodiques . L'équation considérée s'écrit donc :

$$X' = A(t)X \tag{3.2}$$

Où A est une matrice $n \times n$ de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$A(t+\omega) = A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

Le nombre $\omega \in \mathbb{R}$ est appelle période de A. Bien que ces systèmes ne puissent pas être résolus explicitement, comme dans le cas où A est une matrice constante, on peut trouver une représentation pour la solution générale de (3.2) qui est de temps en temps utile.

Définition 3.1.1 *[5] Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale du (3.2), alors il existe une matrice constante $M \in C^{n\times n}$ unique telle que*

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

. La matrice $M = \Phi^{-1}(t_0)\Phi(t)$ est appelle matrice de Monodromie. Les matrices sont semblables ayant les mêmes valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ appelées multiplicateurs de Floquet.

Théorème 3.1.2 *[4] Soit Φ la matrice fondamentale de solutions de (3.2) .*
Alors Ψ est ω-périodique et vérifie :

$$\Psi(t) = \Phi(t+\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

Alors $\Phi(t+\omega)$ est aussi une matrice fondamentale de solutions pour le système (3.2). De plus, pour toute matrice fondamental Φ ;

on peut associer une matrice inversible ω- périodique P, et une matrice constante R, telles que :

$$\Phi(t) = P(t)e^{tR} \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Démonstration de (3.4)

Soit Φ une matrice fondamentale de solutions pour (3.2). On a :

$$\Phi^{'}(t) = A(t)\Phi(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Soit Ψ une matrice telle que

$$\Psi(t) = \Phi(t+\omega) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Psi^{'}(t) =& \Phi^{'}(t+\omega) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ =& A(t+\omega)\Phi(t+\omega) \\ =& A(t)\Psi(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

car A est ω-périodique. Donc Ψ vérifie l'équation (3.2). De plus, comme Φ est une matrice fondamentale de solutions, son déterminant est non nul :

$$det\Phi(t) \neq 0$$

$$det\Phi(t+\omega) \neq 0$$

Par conséquent, Ψ est inversible et vérifie (3.2). C'est une matrice fondamentale de solutions de (3.2).

Proposition 3.1.3 *[5]*

Quelques propriétés des matrices fondamentales de solution systèmes(3.2).

1) Si $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale, alors $\Phi(t+\omega)$ est également une matrice fondamentale. En effet, par la condition nous avons

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t) \qquad\qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

Posons $t = t+\omega$ de cette identité, nous obtenons

$$\frac{d\Phi(t+\omega)}{dt} = A(t+\omega)\Phi(t+\omega) = A(t)\Phi(t+\omega) \qquad\qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

2) Quand l'argument est augmenté par la période, la matrice fondamentale acquiert un facteur non singulier de matrice du côté droit. Puisque les matrices $\Phi(t)$ et $\Phi(t+\omega)$ sont fondamentales, là existe une non singulieres matrice M tells que

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)M$$

3) Les matrices M correspond à de diverses matrices fondamentales semblables. Soit $\Phi(t)$ et $\Phi_1(t)$ deux matrices fondamentales. Il existe alors une matrice non singuliere C tels que $\Phi_1(t) = \Phi(t)C$. ainsi,

$$\Phi_1(t+\omega) = \Phi(t+\omega)C = \Phi(t)MC = \Phi(t)CC^{-1}pC = \Phi_1(t)M$$

Définition 3.1.4 *[5] Les valeurs propres de la matrice de Monodromy s'appellent les multiplicateurs du système (3.2).*
L'équation

$$\det(M - \rho E) = 0$$

définissant les multiplicateurs, s'appelle caractéristique. Il découle de la dernière égalité et de la formule d'Ostrogradskii-Liouville suivante

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} trA(u)du \qquad t, t_0 \in I$$

qui le produit des multiplicateurs est de la forme :

$$\det M = \exp \int_0^\omega trA(u)du,$$

c-à-d, aucun multiplicateur n'est nul. Les multiplicateurs ne changent pas si le système est soumis à un ω-périodique non singulier transformation $\psi = S(t)\Phi$. En effet, parce que les matrices fondamentales $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ que nous avons verifie

$$\Psi(t+\omega) = S(t+\omega)\Phi(t+\omega) = S(t)\Phi(t)M = \Psi(t)M$$

. L'origine du multiplicateur de limite, c-à-dire, un facteur, est clarifiée par le rapport suivant.

Théorème 3.1.5 *[5] Un nombre ρ est un multiplicateur du système (3.2) si et seulement si il existe un $X(t)$ non trivial de solution de ce système tels que*

$$X(t+\omega) = \rho X(t) \tag{3.8}$$

Définition 3.1.6 *[5] Une identité satisfaisante de $X(t)$ de solution (3.8) s'appelle normale.*

Preuve. [5]

Nécessité :

Soit ρ est un multiplicateur du système (3.2), c-à-d, soit ρ une valeur propre de la matrice de Monodromy $\Phi(\omega)$, où $\Phi(t) = \exp A(t)$. Le vecteur propre v correspondant à ce ρ satisfait la condition $\Phi(\omega)v = \rho v$. montrons que $X(t) = \Phi(t)v$ de solution est exigé. En effet,

$$X(t+\omega) = \Phi(t+\omega)v = \Phi(t)\Phi(\omega)v = \Phi(t)\rho v = \rho X(t)$$

Suffisance :

Prouvons que le nombre de l'identité (3.8) est un multiplicateur. Pour la solution $X(t)$ satisfaisant (3.8) on a :

$$X(\omega) = \rho X(0), \qquad \text{pour} \qquad t = 0$$

Récrivons cette solution comme $X(t) = \Phi(t)X(0)$; ceci implique

$$x(\rho) = X(\omega)x(0) \qquad \text{pour} \qquad t = \omega$$

De ces deux égalités il découle :

$$\Phi(\omega)X(0) = \rho X(0)$$

Comme $\|X(0)\| \neq 0$, nous obtenons $\det[\Phi(\omega) - \rho E] = 0$, c-à-d, ρ est un multiplicateur. ■

Corollaire 3.1.7 *[5] Le système (3.2) a une solution ω-périodique si et seulement si une de ses multiplicateurs est égal à l'unité. Au multiplicateur $\rho = -1$ correspond une anti périodique solution $X(t+\omega) = -X(t)$ de la période 2ω.*

Remarque 3.1.8 *[5](Sur la structure d'une solution normale)*
On conserve réglés $\rho = e^{\lambda\omega}$ et on récrit une solution normale de la forme
$X(t) = e^{\lambda t}\varphi(t)$. Nous montrons que le $\varphi(t+\omega) = \varphi(t)$.
En effet,

$$\begin{aligned}\varphi(t+\omega) =& e^{-i(t+\omega)}X(t+\omega)\\ =& e^{-i(t+\omega)}\rho X(t)\\ =& e^{-i(t+\omega)}e^{\lambda\omega}e^{it}\varphi(t)\\ =& \varphi(t)\end{aligned}$$

Avant le passage à l'étude de la structure de la matrice fondamentale du système (3.2), nous présentons la notion du logarithme d'une matrice.

Définition 3.1.9 *[5] Si l'égalité*

$$e^{\Psi} = \Phi$$

est valide pour deux matrices carrées Φ et Ψ, alors la matrice Ψ s'appelle le logarithme de la matrice Φ et est dénotée par $\Psi = \log\Phi$.

Théorème 3.1.10 *[2] Le système (3.2) peut être représenté ce la forme*

$$\Phi(t) = l(t)e^{\Lambda t} \tag{3.9}$$

telle que $\Lambda = \frac{1}{\omega} \log \Phi(\omega)$ *et* $l(t+\omega) = l(t)$

Preuve. Nous avons l'identité suivante :

$$\Phi(t) = \Phi(t)e^{-\Lambda t}e^{\Lambda t} = l(t)e^{\Lambda t}$$

Vérifions que la matrice $(l(t))$ est ω-périodique :

$$l(t+\omega) = \Phi(t+\omega)e^{-\Lambda(t+\omega)} = \Phi(t)\Phi(\omega)e^{-\Lambda\omega}e^{-\Lambda t} = \Phi(t)e^{-\Lambda t} = l(t)$$

■

Corollaire 3.1.11 *[2] Le système (3.2)possède une solution non nulle de période* ω *si et seulement si il existe une valeur propre* λ *de la matrice* $\Phi(\omega)$ *avec* $\lambda = 1$.

3.2 Systèmes différentiels linéaires Non homogènes à coefficients périodiques

Naturellement, pour la périodicité dans les systèmes non homogènes linéaires de t

$$X' = A(t)X + F(t) \tag{3.10}$$

telle que

$$X \in \mathbb{C}^n, \qquad A, F \in C(\mathbb{R})$$

$$A(t+\omega) = A(t), \qquad F(t+\omega) = F(t), \qquad \omega > 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Lemme 3.2.1 *[5]*

Une solution $X(t)$ *de solution de système (3.10) est* ω*-périodique si et seulement si* $X(0) = X(\omega)$

Preuve. Voir ([5] ; p :20) ■

Théorème 3.2.2 *[5] On considérer ω-périodique homogène linéaire (3.2) ayant $k \leq n$ solutions ω-périodiques linéairement indépendantes $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$ telle que*

1)Le système adjoint

$$z' = -A^*(t)z \tag{3.11}$$

a également des solutions ω-périodiques indépendantes linéairement de k, $\chi_1(t), \chi_2(t), ..., \chi_k(t)$.

2) Le système non homogènes correspondant (3.10) a les solutions ω-périodiques si et seulement si l'orthogonalité conditionne suivante a lieu c'est à dire les équation

$$\int_0^\omega (\chi_s(t), f(t))dt = 0 \qquad s = 1, ..., k \tag{3.12}$$

sont satisfaits et dans ce cas-ci la forme ω-périodique de solutions est une famille k-paramétrique.

Preuve. (Voir [5] ;p :22)

■

Théorème 3.2.3 *Si un système linéaire non homogènes à ω-périodique a pour solution délimitée $X(t)$ pour $t \geq 0$, alors il admet solution a également une solution ω-périodique.*

Preuve. (Voir [5] ;p :23)

■

Théorème 3.2.4 *([2]) Si le système homogène (3.2) n'a pas de solution ω-périodique, c'est-à-dire toutes les valeurs propres de la matrice $\Phi(\omega)$ sont différentes de 1, alors le système non homogène (3.10) a est une unique solution périodique de période ω.*

Théorème 3.2.5 *[5] Si un système homogène linéaire (3.2) n'a aucun ω-périodique et non trivial les solutions, alors le système non homogènes correspondant (3.10) a l'unique ω-périodique solution.*

Preuve. (Voir [5] ;p :21) Soit $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale du système (3.2) et $\Phi(0) = E$, on a :

$$X(t) = \Phi(t)[X(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau] \tag{3.13}$$

Si la solution $X(t)$ est périodique de période ω, on a

$$X(t+\omega) = X(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

d'où

$$X(\omega) = X(0) \tag{3.15}$$

Réciproquement, on va montre que la relation (3.15) entraîre la périodicité de la solution $X(t)$ de période ω. On a deux solutions du système (3.10) $X(t)$ et $X(t+\omega)$. Avec les mêmes valeurs initiales pour $t = 0$, en vertu de (3.15) . Grâce à l'unicité on a $X(t) = X(t+\omega), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$. Ainsi la relation (3.15), est une condition nécessaire et suffisante de la périodicité d'une solution du système (3.10). On vertu de la formule (3.13), il découle de (3.15), la relation :

$$\Phi(\omega)X(0) + \Phi(\omega)[\int_0^\omega \Phi^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau] = X(0) \tag{3.16}$$

On bien la suivante :

$$[\Phi(\omega) - E]X(0) = -\Phi(\omega)[\int_0^\omega \Phi^1(\tau)F(\tau)d\tau]. \tag{3.17}$$

Par hypothèse, toutes les valeurs propres de la matrice $\Phi(\omega)$ sont différentes de 1, d'où

$$\det(\Phi(\omega) - E) \neq 0.$$

Il existe solution unique $X(t)$ par la formule :

$$X(0) = -(\Phi(\omega) - E)^{-1}\Phi(\omega)\int_0^\omega \Phi(\tau)^{-1}F(\tau)d\tau \tag{3.18}$$

D'où, il existe une unique solution périodique de période ω pour le système (3.10) donnée par les formules (3.13) et (3.18) ■

Exemple 3.2.1 *On considérer un oscillateur linéaire obligatoire modélisé par le système linéaire suivante :*

$$X^{'}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \omega t \end{pmatrix}; \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deux solutions indépendantes sont

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Le matrice fondamentale du système est donnée par :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de Mondromy s'écrit :

$$\Phi(\omega) = \Phi^{-1}(t)\Phi(t)$$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

$$\Phi(\omega) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 *est clair qu' une valeurs propre de la matrice Mondromy est un multiplicateur du système :*

$$X(t) = \Phi(\omega)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)F(s)ds$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin s & \cos s \\ \cos s & -\sin s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ sin(\omega s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(t-s)\sin(\omega s) \\ \cos(t-s)\sin(\omega s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(0) + \frac{1}{\omega^2 - 1} \begin{pmatrix} \omega \sin t - \sin(\omega t) \\ \omega \cos t - \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

en prend $\omega = 2\pi$ alors on aura

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(0) + \frac{1}{4\pi^2 - 1} \begin{pmatrix} 2\pi \sin t \\ 2\pi \cos t - 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$X(t) = \frac{1}{4\pi^2 - 1} \begin{pmatrix} 2\pi \sin t \\ 2\pi \cos t - 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t + 2\pi) = \frac{1}{4\pi^2 - 1} \begin{pmatrix} 2\pi \sin(t + 2\pi) \\ 2\pi \cos(t + 2\pi) - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2 - 1} \begin{pmatrix} 2\pi \sin t \\ 2\pi \cos t - 1 \end{pmatrix} = X(t)$$

Exemple 3.2.2 *Soit le système différentiel suivant*

$$X' = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\cos(t)}{2+\sin(t)} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(wt) \end{pmatrix} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

la solution du système homogène s'écrit :

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} e^t(2 + \sin(t)) \\ e^t(1 + \frac{2\sin(t) - \cos(t)}{5}) \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Donc la matrice fondamental s'écrit

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t(2+\sin(t)) & 0 \\ e^t(1+\frac{2\sin(t)-\cos(t)}{5}) & e^{-t} \end{pmatrix}$$

le déterminent de la matrice Φ *est* $\det \Phi(t) = 2 + \sin(t)$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{(2+\sin(t))} & 0 \\ \frac{e^t(1+\frac{2\sin(t)-\cos(t)}{5})}{2+\sin(t)} & e^t \end{pmatrix}$$

Donc

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s)F(s)ds$$

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{e^s}{(2+\sin(s))} & 0 \\ \frac{e^s(1+\frac{2\sin(s)-\cos(s)}{5})}{2+\sin(s)} & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(ws) \end{pmatrix} ds$$

$$X(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^s\sin(ws) \end{pmatrix} ds = \frac{1}{w^2+1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^t(\sin(wt) - w\cos(wt)) \end{pmatrix}$$

alors

$$X(t+2\pi) = \frac{1}{w^2+1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2\pi}(\sin(2w\pi) - wcos(2w\pi)) \end{pmatrix} = e^{2\pi}\frac{1}{w^2+1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(wt) - \cos(wt) \end{pmatrix} = e^{2\pi}X(t)$$

Donc la solution est $2\pi-$*périodique.*

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié des systèmes différentiels linéaires homogène et non homogènes d'ordre 1 et 2 à coefficients périodiques.
Pour ceci nous avons utilisé la méthode décrite par de théorème du Floquet .
Dans le dernier Système différentiel linéaire homogène à coefficients périodiques il n'est pas toujours possible de trouver des solution périodique et qu'il n'y a pas un seul dans ce cas.

Bibliographie

[1] A. Kissélev, M.Krasnovn, G. Makarenko. Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires, Moscou (1987).

[2] A. Tretiak, équation différentiel ordinaire EDO, cour, M108, univ de Constantin.

[3] H . Bresis . Analyse fonctionnelle , Théorie et Applications , Masson (1983).

[4] KRAY . MARIE - Perturbation d'un système différentiel ayant une solution périodique, 2007 .

[5] L. Ya. Adrianova,Introduction to Linear Systems of Differential Equations ,American ,1995.

[6] MARC.DIENER. Équations Défferentielles application .OPU 1983.

[7] P. HARTMAN Ordinary Differential Equations, New york, 1964.

[8] R. BELLMAN .Stabllity Theory of differential equation ,New York ,1953.

[9] V. I. Arnold ,Ordinary Differential Equations ,Maviarhusclts, and London ,1973.