logo2.JPG

logons2.pdf

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Facultï¿½ des Mathï¿½matiques et des Sciences de la Matiï¿½re

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spï¿½cialitï¿½ : Mathï¿½matiques

Option : Modï¿½lisation et Analyse Numï¿½rique

Par :Chettouh Afraa

Thï¿½me

Etude de quelques problèmes aux limites fractionnaires non liniaires

Soutenu publiquement le : 25/05/2017

Devant le jury composï¿½ de :

M. Amara Abdelkader	M.A. Universitï¿½ KASDI Merbah - Ouargla	Prï¿½sident
M. Tellab Brahim	M.A. Universitï¿½ KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur
M. Abbassi Hocine	M.A. Universitï¿½ KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
M. Badidja Salim	M.A. Universitï¿½ KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur

Annï¿½e universitaire 2016/2017

Dï¿½dicaces

Je dï¿½die ce modeste travail ï¿½ ma chï¿½re mï¿½re,
A mon chï¿½r pï¿½re qui m'ont toujours soutenu,
Qui m'ont aide ï¿½ affronter les difficultï¿½s,
A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persï¿½vï¿½rance
.
A mes trï¿½s chï¿½res soeurs et mon frï¿½re.
A mon encadreur **M.Tellab brahim** qui m'a bien aidé dans ce travail
A toute ma famille.
A tous les amis.
A tous les ï¿½tudiants d'universitï¿½ de KASDI Merbah-Ouargla.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donnï¿½e la patience, la volontï¿½ et l'ï¿½nergie pour poursuivre ce travail.

* Je tiens ï¿½ remercier mon encadreur **Brahim Tellab** de m'avoir fait l'honneur D'examiner ce mï¿½moire et d'en être rapporteur. Je tiens ï¿½ le remercier aussi pour la pertinence de ses remarques et sa partience pendant ce travail. J'admit beaucoup ses travaux et sa maniï¿½re de direction qui furent pour moi une grande source d'inspiration et de motivation.*

*J'adresse ï¿½galement des vifs remerciements ï¿½ **M.Amara Abdelkader**, Je le remercie d'avoir accepter d'être le prï¿½sident du jury de soutenance, et je lui adresse toute ma gratitude.*

*J'adresse mes remerciements ï¿½ **M.Badidja Salim** et **M. Abassi Hociine**qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail.*

Je ne pourrais terminer sans remercier mes parents et ma famille qui m'ont soutenue et encouragï¿½e pour terminer ce travail.

Je remercie tous ceux qui ont contribuï¿½ de prï¿½s ou de loin ï¿½ l'ï¿½laboration de ce mï¿½moire.

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le calcul diffï¿½rentiel fractionnaire est un sujet prï¿½sque aussi ancien que le calcul diffï¿½rentiel classique, ces premiï¿½res notions remontent à la fin du 17ïï¿½me (voir [**?**]), l'ï¿½poque or Newton et Leibniz ont dï¿½veloppï¿½ les fondements du calcul diffï¿½rentiel et intï¿½gral. En particulier, Leibniz a prï¿½sentï¿½ le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ pour dï¿½signer la $n$ïï¿½me dï¿½rivï¿½e d'une fonction f. Quand il a annoncï¿½ en 1695 dans une lettre ï¿½ l'Hôpital, l'Hôpital a rï¿½pondu, que signifie $\frac{d^n}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$

Beaucoup de problèmes pour rï¿½soudre les ï¿½quations faisant intervenir diffï¿½rents types d'opï¿½rateurs d'ordre non entier peuvent être trouvï¿½es dans la littï¿½rature. Pas mal de mathï¿½maticiens ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20-iï¿½me siï¿½cle. Nous citons ici quelques exemples :

P.S. Laplace(1812), J.B.J. Fourier(1822), N.H. Abel(1823-1826), J. Liouville(1832-1873), B. Riemann(1847), H. Holmgren(1865-1867), A.K. Grunwald(1867-1872), A.V. Letnikov(1868-1872), H. Laurent(1884), P.A. Nekrassov(1888), A. Krug(1890), J. Hadamard(1892), O. Heaviside(1892-1912), S. Pincherle(1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood(1917-1928), H. Weyl(1917), P. Levy (1923), A. Marchaud(1927), H.T. Davis(1924-1936), A. Zygmund(1935-1945), E.R. Amour(1938-1996), H. Kober(1940), D.V. Widder(1941), M. Riesz(1949)

De nombreuses dï¿½finitions ont ï¿½tï¿½ alors donnï¿½es sur la dï¿½rivation et l'intï¿½gration fractionnaire. Pour plus de dï¿½tails sur ce sujet on poura consulter ([**?**], [**?**], [**?**], [**?**]).

Le travail prï¿½sentï¿½ dans ce mï¿½moire porte sur lï¿½tude de quelques problèmes aux limites pour des ï¿½quations diffï¿½rentielles ordinaires fractionnaires.

Ce mï¿½moire se dï¿½compose de trois châpitres organisï¿½s de la maniï¿½re suivante :

Premier chapitre : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et dï¿½finitions des fonctions spï¿½cifiques et quelques approches sur les dï¿½rivï¿½es fractionnaires utiles tout au long de ce mï¿½moire.

Deuxième chapitre : le deuxiï¿½me chapitre est rï¿½servï¿½ pour l'ï¿½tude de l'existence et l'unicitï¿½ d'un problï¿½me diffï¿½rentiel fractionnaire semi-linï¿½aire avec des conditions aux limites de Dirichlet.

Troisiï¿½me chapitre : Ce chapitre a pour but l'ï¿½tude de l'existence et l'unicitï¿½ d'un problï¿½me diffï¿½rentiel d'ordre fractionnaire semi-linï¿½aire avec des conditions aux limites fractionnaire.

Chapitre 1

Eli¿½ments du calcul fractionnaire

1.1 fonctions ï¿½lï¿½mentaires du calcul fractionnaire

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$, qui est dï¿½finie par l'intï¿½grale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction strictement dï¿½croissante pour $0 < z \leq 1$.

Doc000-page0001.jpg

FIGURE 1.1 – Courbe reprï¿½sentative de la fonction Gamma

La fonction Gamma $\Gamma(z)$ vï¿½rifie la relation de rï¿½currence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.2}$$

qui se dï¿½montre par une intï¿½gration par parties, en effet :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \Big[- t^z e^{-t} \Big]_{t=0}^{t=+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction gamma d'Euler gï¿½nï¿½ralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$, et en utilisant (**??**) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ \dots & \quad \dots. \quad \dots \quad \dots \\ \Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n! \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nous montrons maintenant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
De la dï¿½finition (**??**) nous avons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Si nous posons $t = y^2$, alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.4}$$

De façon ï¿½quivalente, on peut ï¿½crire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{1.5}$$

Si nous multiplions ensemble (**??**) et (**??**) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy. \tag{1.6}$$

L'ï¿½quation (**??**) est une intï¿½grale double, qui peut être ï¿½valuï¿½e en coordonnï¿½es polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} drd\theta = \pi. \tag{1.7}$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

L'ï¿½quation fonctionnelle (**??**) entraine pour les entiers relatifs positifs n (voir [6])

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \\
\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9...(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),
\end{aligned}$$

et pour les valeurs nï¿½gatives,

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

1.1.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta est dï¿½finie par une intï¿½grale dï¿½finie de la faï¿½on suivante :

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad p,q \in \mathbb{R}_+ \tag{1.8}$$

La fonction de Bêta peut aussi être dï¿½finie en termes de la fonction Gamma :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p,q \in \mathbb{R}_+ \tag{1.9}$$

1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est nommï¿½e d'aprï¿½s un mathï¿½maticien suï¿½dois qui l'a dï¿½fini en 1903. Cette fonction est une gï¿½nï¿½ralisation directe de la fonction exponentielle, e^x, et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire. Les reprï¿½sentations de la fonction Mittag-Leffler ï¿½ un et ï¿½ deux paramï¿½tres peuvent être dï¿½finies en terme d'une sï¿½rie de puissances :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha > 0, \tag{1.10}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.11}$$

De la dï¿½finition (**??**), il en rï¿½sult que :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).$$

En effet, par dï¿½finition on a,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{xx^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x). \end{aligned} \tag{1.12}$$

La fonction Mittag-Leffler se rï¿½duit ï¿½ des fonctions simples. Par exemple,

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \\ E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x-1}{x} \\ E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x). \end{aligned}$$

doc13-page0001.jpg

FIGURE 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler ï¿½ un seul paramï¿½tre

doc12-page0001.jpg

FIGURE 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler ï¿½ deux paramï¿½tres

1.2 Dï¿½rivï¿½e et intï¿½grale fractionnaires de Riemann-Liouville

1.2.1 Intï¿½grale fractionnaire de Riemann-Liouville

Dï¿½finition 1.2.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. L'intï¿½grale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f est dï¿½finie par la formule suivante :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.13}$$

oï¿½ α est un nombre rï¿½el positif.

Thï¿½orï¿½me 1.2.1 *Soient $f \in L^1[a,b]$ et $\alpha > 0$, alors l'intï¿½grale $I_a^\alpha f(t)$ existe pour tout $t \in [a,b]$ et la fonction $I_a^\alpha f$ elle même est un ï¿½lï¿½ment de $f \in L^1[a,b]$.*

Preuve :
Pour la dï¿½monstration, on pourra consulter **[?]**.

■

Thï¿½orï¿½me 1.2.2 *Supposons que $\alpha, \beta > 0$ et $\phi \in L^1[a,b]$. Alors*

$$I_a^\alpha I_a^\beta \phi(x) = I_a^{\alpha+\beta} \phi(x),$$

Pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve :
On a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} \phi(\tau) d\tau dt$$

,
pour tout $x \in [a,b]$.
En utilisant le thï¿½orï¿½me de Fubini, nous pouvons ï¿½crire :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_\tau^x (x-\tau)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} \phi(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \phi(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} dt d\tau \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $t = \tau + (s-\tau)$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \phi(\tau) \int_0^1 [(x-\tau)(1-s)]^{\alpha-1} . [s(x-\tau)]^{\beta-1} (x-\tau) ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \phi(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds d\tau \end{aligned}$$

D'aprï¿½s la dï¿½finition de la fonction Bêta, on a $\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} s^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, et par la suite, il vient :

$$I_a^\alpha I_a^\beta \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \phi(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = I_a^{\alpha+\beta} \phi(x).$$

■

Exemple 1.2.1

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (t-a)^n &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^n d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+n} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^n dx \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} (t-a)^{\alpha+n}.
\end{aligned}$$

En prenant $\alpha = 0.5, n = 1$ et a=0, on obtient :

$$I_0^{0.5} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5}.$$

1.2.2 Dï¿½rivï¿½e fractionnaire de Riemann-Liouville

Dï¿½finition 1.2.2 *Soit f une fonction intï¿½grable sur $[a, t]$. Alors la dï¿½rivï¿½e fractionnaire d'ordre p ($n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est dï¿½finie par :*

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{d^n}{dt^n} (I_a^{n-p} f(t)).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Exemple 1.2.2 *Dans cet exemple on va calculer la dï¿½rivï¿½e fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^\alpha$ Soient $n-1 \leq p < n$ et $\alpha > -1$. Alors on a :*

$${}_a^R D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau - a) d\tau.$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^\alpha ds \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) \beta(n-p, \alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 *En gï¿½nï¿½rale, la dï¿½rivï¿½e fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle ni constante, mais elle est dï¿½finie par :*

$${}_a^R D_t^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}.$$

Dï¿½finition 1.2.3 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'une fonction f est définie par :*

$$\forall t > a, \quad {}_a^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'une fonction f est définie par :

$$\forall t > a, \quad {}_a^R D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Dï¿½finition 1.2.4 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'une fonction f est définie par :*

$$\forall t < b, \quad {}_t^R D_b^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau-t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'une fonction f est définie par :

$$\forall t < b, \quad {}_t^R D_b^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \int_t^b (\tau-t)^{m-\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

1.2.3 Propriï¿½tï¿½s

1. Composition avec les intï¿½grales fractionnaires[?]

• ${}_a^R D_t^p (I_t^p f(t)) = f(t)$. Autrement dit, l'opï¿½rateur de diffï¿½rentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opï¿½rateur d'intï¿½gration fractionnaire, et en gï¿½nï¿½rale on a

$${}_a^R D_t^p (I_t^q f(t)) = {}_a^R D_t^{p-q} f(t).$$

En particulier, si $p - q < 0$, on ï¿½crit souvent

$${}_a^R D_t^{p-q} f(t) = I_t^{q-p} f(t).$$

• ${}_a^R D_t^{-p} \big({}_a^R D_t^q f(t)\big) = {}_a^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{k=1}^{m} \left[{}_a^R D_t^{q-k} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}, \quad (m-1 \leq q < m).$

C'est-ï¿½-dire que la diffï¿½rentiation et l'intï¿½gration fractionnaire ne commutent pa en gï¿½nï¿½ral.

2. Composition avec les dï¿½rivï¿½es d'ordre entier[?]

$$\frac{d^n}{dt^n}\big({}_a^R D_t^p f(t)\big) = {}_a^R D_t^{n+p} f(t)$$

et

$${}_a^R D_t^p \Big(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\Big) = {}_a^R D_t^{n+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}.$$

On dï¿½duit alors que la diffï¿½rentiation fractionnaire et la diffï¿½rentiation conventionnelle ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

3. Composition avec les dï¿½rivï¿½es fractionnaires[?]
Pour $m-1 \leq q < m$ et $n-1 \leq q < n$, on a :

$$ {}_a^R D_t^p \left({}_a^R D_t^q \right) = {}_a^R D_t^{p+q} - \sum_{k=1}^{m} \left[{}_a^R D_t^{q-k} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(-p-k+1)} $$

et

$$ {}_a^R D_t^q \left({}_a^R D_t^p \right) = {}_a^R D_t^{p+q} - \sum_{k=1}^{n} \left[{}_a^R D_t^{p-k} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)}. $$

Donc, les deux opï¿½rateurs de dï¿½rivations fractionnaires ${}_a^R D_t^p$ et ${}_a^R D_t^q$ ne commutent que dans le cas trivial $p=q$ ou si

$$ \left[{}_a^R D_t^{p-k} f(t) \right]_{t=a} = 0, \text{pour tout } k = 1, 2, ..., n $$

et

$$ \left[{}_a^R D_t^{q-k} f(t) \right]_{t=a} = 0, \text{pour tout } k = 1, 2, ..., m. $$

1.3 Dï¿½rivï¿½e fractionnaire de Caputo

Dans la modï¿½lisation mathï¿½matique l'utilisation des dï¿½rivï¿½es fractionnaires de Riemann-Liouville mï¿½ne ï¿½ des conditions contenant les valeurs limites des dï¿½rivï¿½es fractionnaires en la borne infï¿½rieure $t=a$.

Une certaine solution de ce problï¿½me a ï¿½tï¿½ proposï¿½e par M. Caputo.

Dï¿½finition 1.3.1 *Soient $p \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^\star$ avec $n-1 \leq p < n$ et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in [a,b]$. La dï¿½rivï¿½e fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est dï¿½finie par :*

$$ \begin{aligned} {}_a^C D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right). \end{aligned} $$

Dï¿½finition 1.3.2 *La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'une fonction $f(t)$ est définie par :*

$$ \forall t > a, \quad {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, $$

Dï¿½finition 1.3.3 *La dérivée fractionnaire de Caputo ï¿½ droite d'une fonction $f(t)$ est définie par :*

$$ \forall t < b, \quad {}_t^C D_b^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} (-1)^m \int_t^b (\tau-t)^{m-\beta-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. $$

1.3.1 Lien avec la dï¿½rivï¿½e Riemann-Liouville

[**?**] Soient $p \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^\star$ avec $n-1 \leq p < n$. Si ${}_a^C D_t^p f(t)$ et ${}_a^R D_t^p f(t)$ existent, alors on a :

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}, \tag{1.15} $$

de (**??**), on dï¿½duit que

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t), $$

si $f^{(k)} = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

1.3.2 Composition avec l'opï¿½rateur d'intï¿½gration fractionnaire

[**?**] Si f est une fonction continue, alors :

$$ {}_a^C D_t^p I_a^p f(t) = f(t) \tag{1.16} $$

et

$$ I_a^p {}_a^C D_t^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!}. \tag{1.17} $$

Alors on dï¿½duit que l'opï¿½rateur de dï¿½rivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opï¿½rateur d'intï¿½gration fractionnaire mais il n'est pas un inverse droit en gï¿½nï¿½ral.

Exemple 1.3.1 • ***La dï¿½rivï¿½e de la fonction*** $f(t) = (t-a)^\alpha$
Soient n un nombre entier et p un nombre non entier avec $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > n-1$. Alors :

$$ f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}, $$

d'oï¿½

$$ {}_a^C D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau. $$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ nous obtenons :

$$ \begin{aligned} {}_a^C D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned} $$

Remarque 1.3.1 *La dï¿½rivï¿½e fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit : ${}_a^C D_t^p C = 0$.*

Chapitre 2

Existence et unicitï¿½ de solution d'un problï¿½me diffï¿½rentiel fractionnaire semi-linï¿½aire avec conditions aux limites de Dirichlet

2.1 Introduction

Les ï¿½quations diffï¿½rentielles fractionnaires ont jouï¿½ un rôle important en raison de leurs applications ï¿½tendues dans les domaines de l'ingï¿½nierie, de l'ï¿½conomie et d'autres domaines. De nombreux livres et documents sur le calcul fractionnaire, les ï¿½quations diffï¿½rentielles fractionnaires et les ï¿½quations fractionnaires intï¿½grales sont apparus (voir par exemple [**?**], [**?**], [**?**]).

Rï¿½cemment, pas mal d'auteur ont ï¿½tudiï¿½ l'existence et l'unicitï¿½ des solutions pour des ï¿½quations diffï¿½rentielles fractionnaires, voir par exemple [**?**], [**?**], [**?**] et ses rï¿½fï¿½rences. Il semble y avoir un nouvel intï¿½rï¿½t dans l'ï¿½tude des problï¿½mes aux limite pour les ï¿½quations diffï¿½rentielles fractionnaires.

Yu and Jiang [**?**] ont discutï¿½ le problï¿½me diffï¿½rentiel fractionnaire suivant :

$$\begin{aligned} &D^{\alpha}_{0^+}u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ &u(0) = u(1) = u'(0) = 0, \end{aligned}$$

oï¿½ $2 < \alpha \leq 3$ est un nombre rï¿½el et $D^{\alpha}_{0^+}$ dï¿½signe la dï¿½rivï¿½e fractionnaire de Riemann-Liouville d'odre α.

Dans [**?**], Kelley et Peterson ont ï¿½tabli le rï¿½sultat suivant :

Thï¿½orï¿½me 2.1.1 *Supposons que $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et vï¿½rifie une condition de Lipshitz uniforme par rapport ï¿½ x dans $[a, b] \times \mathbb{R}$, c'est-ï¿½-dire :*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \tag{2.1}$$

pour tout $(t, x), (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. *Si*

$$b - a < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}},$$

alors, le problï¿½me aux limites suivant :

$$u''(t) = -f(t, u(t)), \quad a < t < b,$$

$$u(a) = A, \;\; u(b) = B, \;\; A, B \in \mathbb{R},$$

admet une solution unique.

Preuve : Pour la preuve, on renvoit ï¿½ **[?]**

■

2.2 Notions prï¿½liminaires

Dans cette section, nous prï¿½sentons quelues dï¿½finitions et lemmes utils pour la suite de nos rï¿½sultats.

Dï¿½finition 2.2.1 *Soit* $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, *une fonction continue. L'intï¿½grale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* α *de la fonction* f *est dï¿½finie par :* $I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f(s) ds$.

Dï¿½finition 2.2.2 *La dï¿½rivï¿½e fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* α *d'une fonction continue* $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, *est dï¿½finie par :*

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t - s)^{n - \alpha - 1} f(s) ds = \left(\frac{d}{dt} \right)^n I^{n - \alpha} f(t),$$

oï¿½, $n = [\alpha] + 1$ *et* $[\alpha]$ *dï¿½signe la partie entiï¿½re du rï¿½el* α.

Lemme 2.2.1 *Pour* $\alpha > 0$, *la solution gï¿½nï¿½rale de l'ï¿½quation homogï¿½ne* $D^{\alpha} u(t) = 0$ *dans*
$C(a, b) \cap L^1(a, b)$ *est donnï¿½e par :*

$$f(t) = c_0 t^{\alpha - n} + c_1 t^{\alpha - n - 1} + ... + c_{n-2} t^{\alpha - 2} + c_{n-1} t^{\alpha - 1},$$

oï¿½ c_i *sont des constantes rï¿½elles (i=1,2,...,n-1).*

Lemme 2.2.2 *Supposons que* $f \in C(a, b) \cap L^1(0, 1)$ *telle que* $D^{\alpha} f \in C(a, b) \cap L^1(a, b)$. *Alors,*

$$I^{\alpha} D^{\alpha} f(t) = u(t) + c_0 t^{\alpha - n} + c_1 t^{\alpha - n - 1} + ... + c_{n-2} t^{\alpha - 2} + c_{n-1} t^{\alpha - 1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, ..., n - 1)$.

Lemme 2.2.3 *Supposns que $1 < \alpha \leq 2$ et $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Alors, le problï¿½me aux limites :*

$$
\begin{aligned}
{}_aD^{\alpha}u(t) &= -h(t), \quad a < t < b && (2.2)\\
u(a) &= A, \quad u(b) = B, && (2.3)
\end{aligned}
$$

admet une solution unique dï¿½finie par :

$$u(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)h(s)ds,$$

oï¿½

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}, & a \leq s \leq t \leq b \\ \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}, & a \leq t \leq s \leq b \end{cases}$$

Preuve :
Supposons que u est solution du problï¿½me (**??**)-(**??**). Alors le lemme **??** nous donne :

$$u(t) = -I^{\alpha}h(t) + c_0 + c_1 t, \tag{2.4}$$

on a d'aprï¿½s les conditions au bords :

$$u(a) = A \Longleftrightarrow c_0 + c_1 a = A$$

et

$$u(b) = B \Longleftrightarrow c_0 + c_1 b - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-s)^{\alpha-1}h(s)ds = B,$$

c'est-ï¿½-dire :

$$\begin{cases} c_0 + c_1 a = A \\ c_0 + c_1 b = B + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-s)^{\alpha-1}h(s)ds. \end{cases}$$

En rï¿½solvant ce dernier systï¿½me, on obtient :

$$c_1 = \frac{B-A}{b-a} + \frac{1}{(b-a)\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

et

$$c_0 = A - \frac{a(B-A)}{b-a} - \frac{a}{(b-a)\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-s)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

Par substitutions dans (**??**), on arrive ï¿½ :

$$
\begin{aligned}
u(t) &= A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[-\int_a^t \big[(t-s)^{\alpha-1} + \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}\big] h(s)ds \\
&+ \frac{t-a}{b-a} \int_t^b (b-s)^{\alpha-1}h(s)ds \Big]
\end{aligned}
$$

autrement dit :

$$u(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)h(s)ds,$$

avec,

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}, & a \le s \le t \le b \\ \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}, & a \le t \le s \le b \end{cases}$$

■

Par le lemme **??**, on trouve immï¿½diatement le lemme suivant

Lemme 2.2.4 *Considï¿½rons le problï¿½me aux limites :*

$$u''(t) = -f(t,u(t)), \quad a < t < b, \tag{2.5}$$

$$u(a) = A, \ \ u(b) = B, \ \ A, B \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

*Supposons que f soit continue. Une fonction $u \in C[a,b]$ est une solution du problï¿½me (**??**)-(**??**), si est seulement si u satisfait l'ï¿½quation intï¿½grale suivante :*

$$u(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)f(s,u(s))ds,$$

oï¿½ $G(t,s)$ est la fonction de Green dï¿½finie au lemme **??**

Lemme 2.2.5 *La fonction de Green dï¿½finie ci-dessus vï¿½rifie la condition :*

$$G(t,s) \ge 0$$

pour tout $a \le t, s \le b$.

Preuve :
on a :

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1} & a \le s \le t \le b \\ \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1} & a \le t \le s \le b \end{cases}$$

On dï¿½finit deux fonctions G_1 et G_2 par :

$$G_1(t,s) = -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1} \qquad a \le s \le t \le b$$

et

$$G_2(t,s) = \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1} \qquad a \le t \le s \le b.$$

Il est clair que

$$G_2(t,s) = \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1} \ge 0$$

car (b$\ge a$, $t \ge a$ et $b \ge s$.)

Il reste ï¿½ verifier que $G_1(t,s) \geq 0$:

Pour tout $t \in [a,b]$, on a : $0 \leq \frac{t-a}{b-a} \leq 1$ et par consï¿½quent on arrive ï¿½ :

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{t-a}{b-a} \leq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 \leq \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} \leq \frac{t-a}{b-a} \leq 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1} \leq \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1} \\
&\Longleftrightarrow \quad -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1} \leq G_1(t,s).
\end{aligned}$$

Donc pour montrer que $G_1(t,s) \geq 0$, il suffit de montrer que :

$$h_1(t,s) = -(t-s)^{\alpha-1} + \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1} \geq 0.$$

Pour cela, il suffit d'ï¿½crire $h_1(t,s)$ sous la forme :

$$h_1(t,s) = -\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}\left[b - (a + \frac{(s-a)(b-a)}{t-a})\right]^{\alpha-1} + \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1}.$$

Maintenant, notons que :

$$\begin{aligned}
a + \frac{(s-a)(b-a)}{t-a} \geq s \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{a(t-a)+(s-a)(b-a)}{t-a} \geq s \\
&\Longleftrightarrow \quad a(t-a)+(s-a)(b-a) - s(t-a) \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (s-a)(b-t) \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad s \geq a,
\end{aligned}$$

et on sait que l'inï¿½galitï¿½ $s \geq a$ est toujours vï¿½rifiï¿½e, alors : $h_1(t,s) \geq 0$ ce qui implique que $G_1(t,s) \geq 0$, et par la suite :

$$G(t,s) \geq 0, \quad \text{pour tout} \quad a \leq t, s \leq b.$$

■

Lemme 2.2.6 *La fonction de Green G vï¿½rifie*

$$\int_a^b |G(t,s)|ds \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha^{2\alpha-1/\alpha-1}}(b-a)^{\alpha}.$$

Preuve :

Par lemme **??**, on a $G(t,s) \geq 0$ pour tout $a \leq t, s \leq b$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |G(t,s)|ds &= \int_a^b G(t,s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^t \left(\frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}\right) ds + \int_t^b \frac{t-a}{b-a}(b-s)^{\alpha-1}ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\left[-\frac{t-a}{b-a}.\frac{(b-s)^\alpha}{\alpha} + \frac{((t-s)^\alpha)}{\alpha}\right]_a^t - \left[\frac{t-a}{b-a}.\frac{(b-s)^\alpha}{\alpha}\right]_t^b\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{t-a}{b-a}.\frac{(b-t)^\alpha}{\alpha} + \frac{t-a}{b-a}\frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + \frac{t-a}{b-a}.\frac{(b-t)^\alpha}{\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(t-a)(b-a)^{\alpha-1} - (t-a)^\alpha}{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Maintenant on dï¿½finit une fonction $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\psi(t) = \frac{(t-a)(b-a)^{\alpha-1} - (t-a)^\alpha}{\alpha}$$

En calculant la dï¿½rivï¿½e de la fonction ψ et aprï¿½s simplifications on obtient :

$$\psi'(t) = \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\alpha}\left[\left(\frac{b-a}{t-a}\right)^{\alpha-1} - \alpha\right].$$

Le maximum de la fonction ψ est atteint pour la valeur :

$$t_1 = \frac{b-a}{\alpha^{1/\alpha-1}} + a.$$

Par substitution, on trouve

$$\psi(t_1) = \frac{\alpha-1}{\alpha^{2\alpha-1/\alpha-1}}(b-a)^\alpha,$$

et par consï¿½quent, on arrive ï¿½ :
$\int_a^b |G(t,s)|ds \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\frac{\alpha-1}{\alpha^{2\alpha-1/\alpha-1}}(b-a)^\alpha.$

■

2.3 Existence et unicitï¿½ de solution

Thï¿½orï¿½me 2.3.1 *Supposons que $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et vï¿½rifie une condition de Lipschitz par rapport ï¿½ x dans $[a,b] \times \mathbb{R}$ avec une constante de Lipschitz k; c'est-ï¿½-dire :*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y|$$

pour tout $(t,x), (t,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$. Si

$$b - a < \frac{\Gamma^{1/\alpha}(\alpha).\alpha^{2\alpha-1/\alpha(\alpha-1)}}{k^{1/\alpha}.(\alpha-1)^{1/\alpha}}, \tag{2.7}$$

alors le problï¿½me aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}_aD^{\alpha}u(t) = -f(t,u(t)), & a < t < b \\ \\ u(a) = A, u(b) = B & A, B \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.8}$$

avec $1 < \alpha \leq 2$, *admet une solution unique .*

Preuve :
soit B l'espace de Banach des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme :

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

par le lemme **??**, une fonction $u \in C[a,b]$ est une solution du problï¿½me (**??**) si est seulement si u satisfait l'ï¿½quation intï¿½grale suivante :

$$u(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)f(s,u(s))ds$$

Maintenant, on dï¿½finit l'opï¿½rateur $T : B \longmapsto B$ par :

$$Tx(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)f(s,x(s))ds$$

pour $t \in [a,b]$.

On va montrer que l'opï¿½rateur T admet un point fixe .
soit x, y deux ï¿½lï¿½ments de B. Alors :

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= \left| \int_a^b G(t,s)f(s,x(s))ds - \int_a^b G(t,s)f(s,y(s))ds \right| \\ &\leq \int_a^b |G(t,s)||f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\ &\leq \int_a^b |G(t,s)|k|x(s) - y(s)| \\ &\leq k\|x-y\| \int_a^b |G(t,s)|ds. \end{aligned}$$

Par lemme **??**, on, obtient :

$$\|Tx - Ty\| \leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}.\frac{\alpha-1}{\alpha_{2\alpha-1/\alpha-1}}(b-a)^{\alpha}\|x-y\|$$

En exploiatant l'inï¿½galitï¿½ (**??**), on en dï¿½duit que l'opï¿½rateur T est contractant et par consï¿½quent T admet un point fixe qui reprï¿½sente la solution unique du problï¿½me (**??**).

■

Remarque 2.3.1 *Si on prend $\alpha = 2$ dans le theoreme **??**, on obtient immï¿½diatement le rï¿½sultat du thï¿½orï¿½me 2.1.1.*

Exemple 2.3.1 *On considï¿½re le problï¿½me aux limites non linï¿½aire d'ordre fractionnaire suivant :*

$$ {}_aD^{3/2}u(t) = -\frac{e^{-t}}{1+e^t}u(t), \quad 0 < t < 1 \tag{2.9}$$
$$ u(0) = 1, \quad u(1) = 2, \tag{2.10}$$

Dans cet exemple

$$1 < \alpha = 3/2 \leq 2, \qquad f(t,u(t)) = \frac{e^{-t}}{1+e^t}u(t).$$

$$\begin{aligned} |f(t,x(t)) - f(t,y(t))| &= \left|\frac{e^{-t}}{1+e^t}x(t) - \frac{e^{-t}}{1+e^t}y(t)\right| \\ &= \frac{e^{-t}}{1+e^t}|x(t)-y(t)| \\ &\leq \frac{1}{2}|x(t)-y(t)| \end{aligned} \tag{2.11}$$

et

$$\frac{\Gamma^{1/\alpha}(\alpha).\alpha^{2\alpha-1/\alpha-1}}{L^{1/\alpha}(\alpha-1)^{1/\alpha}} = \frac{\pi^{1/3}.3^{8/3}}{4} > 1.$$

*D'aprï¿½s le thï¿½orï¿½me **??**, on en dï¿½duit que le problï¿½me aux limites (**??**)-(**??**) admet une solution unique.*

Chapitre 3

Existence et unicitï¿½ de solution d'un problï¿½me diffï¿½rentiel fractionnaire semi-linï¿½aire avec conditions aux limites fractionnaires

3.1 Introduction

Au cours des derniï¿½res annï¿½es, de nombreux chercheurs ont ï¿½tudiï¿½ les problï¿½mes aux limites pour des ï¿½quations diffï¿½rentielles fractionnaires non linï¿½aires.

Les ï¿½quations diffï¿½rentielles fractionnaires apparaissent naturellement dans divers domaines de la science et de l'ingï¿½nierie et constituent un domaine de recherche trï¿½s important.

Certains travaux rï¿½cents sur les problï¿½mes aus limites pour des ï¿½quations diffï¿½rentielles fractionnaires peuvent être trouvï¿½s par exemple dans les rï¿½fï¿½rences suiantes **[?]**, **[?]**, **[?]**, **[?]**, **[?]**, **[?]**.

In **[?]**, S. Q. Zhang a considï¿½rï¿½ l'existence et l'unicitï¿½ de solutions positives pour le problï¿½me aux limites d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0^+}u(t) = f(t, u(t)), \qquad 0 < t < 1 \\ \\ u(0) + u'(0) = 0, \qquad u(1) + u'(1) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

oï¿½ $D^{\alpha}_{0^+}$ dï¿½signe la dï¿½rivï¿½e fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo , $1 < \alpha \leq 2$ est un nombre rï¿½el et $f : [0, 1] \times [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ est une fonction continue.

Z. Bai et H. Lü **[?]** ont discutï¿½ l'existence et l'unicitï¿½ de solutions positives pour le problï¿½me aux limites d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0^+}u(t) + f(t, u(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1 \\ \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

oï¿½ $1 < \alpha \leq 2$ est un nombre rï¿½el, D_{0+}^{α} dï¿½signe la dï¿½rivï¿½e fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville et $f : [0,1] \times [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ est une fonction continue.

Dans cette partie nous discuterons l'existence et l'unicitï¿½ de solution de l'ï¿½quation :

$$D^{\alpha}u(t) = f(t,u(t)), \qquad 1 < \alpha \leq 2 \tag{3.3}$$

avec les conditions aux limites fractionnaires suivantes :

$$D^{\alpha-2}u(0^+) + a_0 D^{\alpha-1}u(0^+) = 0, \tag{3.4}$$

$$D^{\alpha-2}u(1^-) + a_1 D^{\alpha-1}u(1^-) = 1, \tag{3.5}$$

Remarque 3.1.1 • *Pour $\alpha = 2$ et $a_0 = a_1 = 1$, le problï¿½me (**??**)- (**??**) se rï¿½duit au problï¿½me aux limites classique :*

$$\begin{cases} u''(t) = f(t,u(t)), & 0 < t < 1 \\ \\ u(0) + u'(0) = 0, & u(1) + u'(1) = 1, \end{cases}$$

et pour $\alpha = 2$ et $a_0 = a_1 = 0$, nous obtenons le problï¿½me :

$$\begin{cases} u''(t) + f(t,u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ \\ u(0) = 0, & u(1) = 1, \end{cases}$$

3.2 Prï¿½liminaires

Dans cette section, nous rappelons quelques dï¿½finitions utiles ï¿½ la suite de ce chapitre.

Dï¿½finition 3.2.1 *Pour $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, l'intï¿½grale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville est dï¿½finie par :*

$$I^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds,$$

Dï¿½finition 3.2.2 *La dï¿½rivï¿½e fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction continue $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, est dï¿½finie par :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha}f(t), \end{aligned}$$

oï¿½ $n = [\alpha] + 1$ ($[\alpha]$ dï¿½signe la partie entiï¿½re du nombre rï¿½el α).

Lemme 3.2.1 *Pour tout $\lambda > -1$, on a :*

$$D^{\alpha}t^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha} \tag{3.6}$$

et

$$D^{\alpha}t^{\alpha-k} = 0, \quad k = 1, 2, 3...., n \tag{3.7}$$

avec $n = [\alpha]$.

Dans le cas particulier $f(t) = 1$, nous avons :

$$D^{\alpha}1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}, \quad \alpha \notin \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

et pour $\alpha \in \mathbb{N}$, nous avons $D^{\alpha}1 = 0$.

Lemme 3.2.2 *Pour $\alpha > 0$, La solution gï¿½nï¿½rale de l'ï¿½quation homogï¿½ne :*

$$D^{\alpha}f(t) = 0$$

dans $C(0,1) \cap L(0,1)$ est donnï¿½e par :

$$f(t) = c_0t^{\alpha-n} + c_1t^{\alpha-n-1} + ... + c_{n-2}t^{\alpha-2} + c_{n-1}t^{\alpha-1},$$

oï¿½ c_i des nombres rï¿½els constants (i=1,2,...,n-1).

Lemme 3.2.3 *Supposons que $f \in C(0,1) \cap L(0,1)$ telle que $D^{\alpha}f \in C(0,1) \cap L(0,1)$. Alors*

$$I^{\alpha}D^{\alpha}f(t) = f(t) + c_0t^{\alpha-n} + c_1t^{\alpha-n-1} + ... + c_{n-2}t^{\alpha-2} + c_{n-1}t^{\alpha-1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, ..., n-1)$.

Lemme 3.2.4 *Pour $1 < \alpha \leq 2$ et $a_0 - a_1 \neq 1$, alors pour toute fonction continue g, le problï¿½me aux limites :*

$$D^{\alpha}u(t) = g(t), \quad t \in [0,1] \tag{3.9}$$

$$D^{\alpha-2}u(0^+) + a_0D^{\alpha-1}u(0^+) = 0, \tag{3.10}$$

$$D^{\alpha-2}u(1^-) + a_1D^{\alpha-1}u(1^-) = 1, \tag{3.11}$$

admet une solution unique donnï¿½e par :

$$u(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)} - \frac{a_0t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)} + \int_0^1 G(t,s)g(s)ds \tag{3.12}$$

oï¿½

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \dfrac{(1+a_1-s)t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)} + \dfrac{[a_0(1+a_1)-a_0s]t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}, & 0 \leq s < t \leq 1 \\ -\dfrac{(1+a_1-s)t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)} + \dfrac{[a_0(1+a_1)-a_0s]t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}, & 0 \leq t < s \leq 1. \end{cases} \tag{3.13}$$

Preuve :
Pour $1 < \alpha \leq 2$, la solution gï¿½nï¿½rale de l'ï¿½quation

$$D^{\alpha}u(t) = g(t), \quad t \in [0,1],$$

est donnï¿½e par :

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_0 t^{\alpha-2} + I^{\alpha}g(t), \tag{3.14}$$

oï¿½ I^{α} est l'intï¿½grale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville.
La relation (**??**) implique que :

$$D^{\alpha-1}u(t) = c_1 D^{\alpha-1}(t^{\alpha-1}) + c_0 D^{\alpha-1}(t^{\alpha-2}) + D^{\alpha-1}(I^{\alpha}g(t)), \tag{3.15}$$

en exploitant (**??**) et (**??**), on en dï¿½duit que :

$$D^{\alpha-1}u(t) = c_1\Gamma(\alpha) + I^1 g(t). \tag{3.16}$$

Donc,

$$D^{\alpha-1}u(0) = c_1\Gamma(\alpha), \tag{3.17}$$

et

$$D^{\alpha-1}u(1) = c_1\Gamma(\alpha) + \int_0^1 g(s)ds, \tag{3.18}$$

D'une faï¿½on analogue, si on applique l'opï¿½rateur $D^{\alpha-2}$ ï¿½ l'ï¿½galitï¿½ (**??**), on obtient :

$$D^{\alpha-2}u(t) = c_1 D^{\alpha-2}(t^{\alpha-1}) + c_0 D^{\alpha-2}(t^{\alpha-2}) + I^2 g(t), \tag{3.19}$$

exploitons une autre fois (**??**) et (**??**), nous obtenons :

$$D^{\alpha-2}(t^{\alpha-1}) = \Gamma(\alpha)t$$

et

$$D^{\alpha-2}(t^{\alpha-2}) = \Gamma(\alpha-1)$$

et par consï¿½quent,

$$D^{\alpha-2}u(t) = c_1\Gamma(\alpha)t + c_0\Gamma(\alpha-1) + I^2 g(t), \tag{3.20}$$

ce qui nous donne :

$$D^{\alpha-2}u(0) = c_0\Gamma(\alpha-1),$$

et

$$D^{\alpha-2}u(1) = c_1\Gamma(\alpha) + c_0\Gamma(\alpha-1) + \int_0^1 (1-s)g(s)ds, \tag{3.21}$$

alors les conditions au bord (**??**) et (**??**) nous permet d'ï¿½crire :

$$c_0\Gamma(\alpha-1) + a_0 c_1\Gamma(\alpha) = 0 \tag{3.22}$$

et

$$c_0\Gamma(\alpha-1)+c_1\Gamma(\alpha)(1+a_1)=1-\int_0^1(1-s)g(s)ds-a_1\int_0^1 g(s)ds. \tag{3.23}$$

De (**??**) et (**??**) et par soustraction, on trouve

$$c_1(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)=1-\int_0^1(1-s)g(s)ds-a_1\int_0^1 g(s)ds,$$

c'est-ï¿½-dire que :

$$c_1=\frac{1}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}-\frac{a_1}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 g(s)ds-\frac{1}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)g(s)ds,$$

par substitution dans (**??**), on trouve :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{-a_0}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}+\frac{a_0a_1}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 g(s)ds \\ &+ \frac{a_0}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-s)g(s)ds. \end{aligned}$$

En portant les valeurs de c_0 et c_1 dans (**??**), on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}-\frac{a_1t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 g(s)ds \\ &-\frac{t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)g(s)ds-\frac{a_0t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)} \\ &+\frac{a_0a_1t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 g(s)ds+\frac{a_0t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-s)g(s)ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(t-s)^{\alpha-1}g(s)ds, \end{aligned}$$

autrement ï¿½crit :

$$u(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}-\frac{a_0t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}+\int_0^1 G(t,s)g(s)ds,$$

avec

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} (t-s)^{\alpha-1}-\dfrac{(1+a_1-s)t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}+\dfrac{[a_0(1+a_1)-a_0s]t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}, & 0\le s<t\le 1 \\ -\dfrac{(1+a_1-s)t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}+\dfrac{[a_0(1+a_1)-a_0s]t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}, & 0\le t<s\le 1. \end{cases}$$

■

Thï¿½orï¿½me 3.2.1 *Si u est solution du problï¿½me (**??**)-(**??**), alors*

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)} - \frac{a_0 t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\ &\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1+a_1-s) f(s,u(s))ds \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 a_0(1+a_1-s) f(s,u(s))ds \end{aligned}$$

Preuve :
La preuve se dï¿½duit immï¿½diatement du lemme **??**

■

3.3 Enoncï¿½ des rï¿½sultats

3.3.1 Notations et dï¿½finitions

• On dï¿½signe par $C[0,1]$ l'espace de Banach de toutes les fonctions rï¿½elles v dï¿½finies sur $[0,1]$, muni de la norme :

$$\|v\| = \max\{|v(t)|, \qquad t \in [0,1]\}.$$

• Pour $t \in [0,1]$, on dï¿½finit

$$v_r(t) = t^r v(t), \qquad r \geq O.$$

• $C_r[0,1]$ dï¿½signe l'espace de Banach des fonctions v tel que $v_r \in C[0,1]$ muni de la norme :

$$\|v\|_r = \max\{t^r|v(t)|, \qquad t \in [0,1]\}.$$

• On dï¿½finit l'opï¿½rateur $P : C_{2-\alpha} \longrightarrow C_{2-\alpha}$ par :

$$\begin{aligned} (Pu)(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)} - \frac{a_0 t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\ &\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1+a_1-s) f(s,u(s))ds \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 a_0(1+a_1-s) f(s,u(s))ds \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1 *Le problï¿½me aux limites (**??**)-(**??**) admet des solutions si, et seulement si, l'opï¿½rateur P admet des point fixes.*

3.3.2 Existence et unicitï¿½ de solution

Thï¿½orï¿½me 3.3.1 *Supposons qu'il existe une constante $L > 0$, telle que :*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L|u - v|, \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Si,

$$LA < 1, \tag{3.25}$$

alors le problï¿½me aux limites (**??**)-(**??**) *admet une solution unique dans $C_{2-\alpha}$.*
avec

$$A = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \left|\frac{1 + |a_1|}{(\alpha-1)(1 + a_1 - a_0)\Gamma(\alpha)}\right| + \left|\frac{\alpha|a_0(1+a_1)| + (\alpha-1)|a_0|}{\alpha(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\right|\right].$$

Preuve :
Pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
|(Pu)(t) - (Pv)(t)| \;=\; & \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)ds\right. \\
& + \frac{t^{\alpha-1}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1+a_1-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)ds \\
& \left. + \frac{t^{\alpha-2}}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 a_0(1+a_1-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)ds\right|
\end{aligned}$$

c'est-ï¿½-dire que :

$$\begin{aligned}
& t^{2-\alpha}|(Pu)(t) - (Pv)(t)| \\
\leq \; & \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
+ \; & \left|\frac{t}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\right|\int_0^1 |1+a_1-s||f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
+ \; & \left|\frac{1}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\right|\int_0^1 |a_0(1+a_1) - a_0 s||f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds,
\end{aligned}$$

en utilisant (**??**), on obtient :

$$\begin{aligned}
& t^{2-\alpha}|(Pu)(t) - (Pv)(t)| \\
\leq \; & L\left[\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|u(s) - v(s)|ds\right. \\
+ \; & \left|\frac{t}{(1+a_1-a_0)\Gamma^2(\alpha)}\right|\int_0^1 |1+a_1-s||u(s) - v(s)|ds \\
+ \; & \left.\left|\frac{1}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-1)}\right|\int_0^1 |a_0(1+a_1) - a_0 s||u(s) - v(s)|ds\right].
\end{aligned}$$

Par dï¿½finition de $\|.\|_{2-\alpha}$, on arrive ï¿½ :

$$\begin{aligned}
&\|(Pu)(t)-(Pv)(t)\|_{2-\alpha}\\
\leq\;& L\Bigg[\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\alpha-2}ds\\
&+\left|\frac{t}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\right|\int_0^1 |1+a_1-s|s^{\alpha-2}ds\\
&+\left|\frac{1}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\right|\int_0^1 |a_0(1+a_1)-a_0s|s^{\alpha-2}ds\Bigg]\|u-v\|_{2-\alpha},
\end{aligned}$$

ce qui entraine :

$$\begin{aligned}
&\|(Pu)(t)-(Pv)(t)\|_{2-\alpha}\\
\leq\;& L\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t s^{\alpha-2}ds\\
&+\left|\frac{1}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\right|\int_0^1 \big(1+|a_1|\big)s^{\alpha-2}ds\\
&+\left|\frac{1}{(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\right|\int_0^1 \Big(|a_0(1+a_1)|s^{\alpha-2}+|a_0|s^{\alpha-1}\Big)ds\Bigg]\|u-v\|_{2-\alpha},
\end{aligned}$$

par calcul des intï¿½grales et en tenant compte du fait que $t\in[0,1]$, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\|(Pu)(t)-(Pv)(t)\|_{2-\alpha}\\
\leq\;& \frac{L}{\alpha-1}\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\left|\frac{1+|a_1|}{(\alpha-1)(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha)}\right|\\
&+\left|\frac{\alpha|a_0(1+a_1)|+(\alpha-1)|a_0|}{\alpha(1+a_1-a_0)\Gamma(\alpha-1)}\right|\Bigg]\|u-v\|_{2-\alpha}\\
\leq\;& LA\|u-v\|_{2-\alpha}. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

La derniï¿½re estimation et la condition (**??**) impliquent que l'opï¿½rateur P est contractant et par le thï¿½orï¿½me du point fixe de Banach, on en dï¿½duit que P admet un point fixe, et par consï¿½quent le problï¿½me (**??**)-(**??**) admet une solution unique dans $C_{2-\alpha}[0,1]$.

■

Exemple 3.3.1 *Considï¿½rons le problï¿½mes aux limites suivant :*

$$D^{\frac{3}{2}}u(t)=1+\cos t+\frac{1}{25}\arctan u(t),\quad t\in[0,1] \qquad (3.27)$$

$$D^{-\frac{1}{2}}u(0^+)+\frac{1}{2}D^{\frac{1}{2}}u(0^+)=0 \qquad (3.28)$$

$$D^{-\frac{1}{2}}u(1^-)-D^{\frac{1}{2}}u(1^-)=1. \qquad (3.29)$$

Dans cet exemple, nous avons :

$$\alpha=\frac{3}{2},\quad a_0=\frac{1}{2},\quad a_1=-1.$$

et

$$f(t,u(t)) = 1 + \cos t + \frac{1}{25}\arctan u(t),$$

c'est-ï¿½-dire :

$$\begin{aligned} |f(t,u(t)) - f(t,v(t))| &= \left|\frac{1}{25}u(t) - \frac{1}{25}v(t)\right| \\ &\leq \frac{1}{25}\big|\arctan\arctan u(t) - \arctan\arctan v(t)\big| \\ &\leq \frac{1}{25}\big|u(t) - v(t)\big|. \end{aligned}$$

Donc, $L = \frac{1}{25}$ *et* $A \simeq 21.4925$ *ce qui nous donne :*

$$LA \simeq 0.8597 < 1.$$

Alors tous les hypothï¿½ses du thï¿½orï¿½me **??** *sont satisfaits. Par consï¿½quent, le problï¿½me aux limites (**??**)-(**??**) admet une solution unique.*

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le but de ce mï¿½moire, est l'ï¿½tude de l'existence et l'unicitï¿½ de quelques problï¿½mes aux limites fractionnaires non liniaires, oï¿½ on a s'intï¿½ressï¿½ ï¿½ l'ordre $1 < \alpha \leq 2$. Ce genre de problï¿½mes est trï¿½s important en raison de leurs applications dans divers domaines comme l'ingï¿½niï¿½rie, l'ï¿½conomie,l'ï¿½lectromagï¿½netisme et plusieurs d'autre domaines.

Beaucoup de contributions autant thï¿½oriques que pratiques ont pu montrer l'importance des systï¿½mes d'ordre non entier et leurs intï¿½ret dans des diffï¿½rentes disciplines telles que la chimie, l'ï¿½lectricitï¿½, la biologie, l'automatisme, traitement de signal.....etc. En effet,il a ï¿½tï¿½ montrï¿½ qu'un nombre important de systï¿½mes physiques ont un comportement qui peut être mieux dï¿½crit en utilisant des modï¿½les mathï¿½matiques d'ordre non entier.

Rï¿½cemment , des mathematiciens ont travaillï¿½ sur des systï¿½mes fractionnaires d'ordre α et β , car ils ont remarquï¿½ des phï¿½nomï¿½nes physiques qui exigent des opï¿½rateurs diffï¿½rentiels ï¿½ deux paramï¿½tres .

Bibliographie

[1] I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/London/Toronto, 1999.

[2] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications). Gordon and Breach, Switzerland, 1993.

[3] Z. Bai, H. Lü, Positive solutions for boundary-value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), 495-505.

[4] R. P. Agrawal, M. Benchohra, S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations, Georgian Mathematical Journal, 2009, vol. 16, 3, pp. 401-411.

[5] R. W. Ibrahim, s. Momani, On existence and uniqueness of solutions of a class of fractional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3334(2007), pp. 1-10.

[6] S. Abbas, M. Benchohra, Existence for impulsive partial hperbolic differential equations of fractional order at variable times, Fixed Point Theory, 12(2011), 3-16.

[7] Y. Yu, D. Jiang, Multiple Positive Solutions for the Boundary Value Problem of A Nonlinear Fractional Differential Equation. Northeast Normal University (2009).

[8] W. G. Kelley, A. C. Peterson, The theory of differential equations, second edition, Universitext, Springer, New York, 2010.

[9] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam,2006.

[10] B. Ross, (1977) Developement of Fractional Calculus 1695-1900. Historia Math 4 : 75-89.

[11] I. Podlubny, Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering, vol. 198. New York/London :Springer ;1999.

[12] K.B. Oldham,J. Spanier, (1974). The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order. Academic Pressé Inc.

[13] J. Dieudonné, Cancul infinitésimal, Hermann, Paris, 1968.

[14] R. P. Agrawal, B. Andrade, C. Cuevas, Weighted pseudo-almast periodic solutions of a class of semilinear fractional differential equations. Nonlinear Anal. Real World Appl, 11(2010), 3532-3554.

[15] R. P. Agrawal, V. Lakshmikantham, J.J. Nieto, On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty, Nonlinear Anal., 72(2010), 2859-2862.

[16] B. Ahmed, J.J. Nieto, Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integrodifferential equations with integral boundary conditions, Bound. Value Probl., 2009, Art. ID 708576, 11 PP.

[17] B. Ahmed, J.J. Nieto, Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions, Comput. Math. Appl., 58(2009), 1838-1843.

[18] B. Ahmed, J.J. Nieto, Existence of solutions for ant-periodic boundary value problems involving fractional differential equations via Leray-Schauder degree theory, Topol. Methods Nonlinear Anal., 35(2010), 295-304.

[19] S. Q. Zhang, Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations, Electronic Journal of Differential Equations, 36(2006), 1-12.

[20] B. Ross, (1977) Developement of Fractional Calculus 1695-1900. Historia Math 4 : 75-89.

[21] K.B. Oldham,J. Spanier, (1974). The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order. Academic Pressé Inc.

[22] J. Dieudonné, Cancul infinitésimal, Hermann, Paris, 1968.