N° d'ordre :
N° de série :

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي

فرع: رياضيات

اختصاص: تحليل دالي

من إعداد الطالب: ضيات التجاني

الموضوع

بعض طرق حل المعادلات التكاملية غير الخطية لفريدهولم

نوقشت يوم 29 ماي 2017 من طرف لجنة المناقشة :

عسيلة مصطفى	أستاذ محاضر.ب.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
السعيد محمد السعيد	أستاذ محاضر.أ.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
قرفي عماره	أستاذ محاضر.أ.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

إهداء

إلى التي جعل الله الجنة تحت قدميها وإلى من رعتني بعطفها وغمرتني بحبها , إلى من تألمت لألمي وفرحت لفرحي إلى من يعجز اللسان عن وصف فضائلها , إلى الغالية التي تحن العين وتبكي لرؤيتها , إلى أعز وأغلى شيء أملكه في الوجود.

أمي

حفظها الله وأطال في عمرها وأمدها بالصحة والعافية.

إلى من مهد لي الطريق من أجل الوصول إلى هذا المستوى , إلى من سهر على راحتي صغيرا وحرص على مستقبلي كبيرا , إلى الذي لم يبخل عليا بشيء يوما , إلى من ترقب نجاحاتي.

أبي

حفظه الله وأطال في عمره وأمده بالصحة والعافية.

إلى كل إخوتي وأخواتي وإلى جميع الأقارب.

إلى كل أصحابي و أصدقائي وخاصة رفقاء الدرب منذ الطفولة

زوبير – أسامة– عبد العزيز–علي– خليفة.

إلى كل من يعرفني من قريب أو بعيد.

وإلى كل أساتذة وطلبة جامعة قاصدي مرباح ورقلة.

شكر وعرفان

اللهم لك الحمد حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه , ملء السموات وملء الأرض , وملء ما شئت من شيء بعد , أهل الثناء والمجد , أحق ما قال العبد , وكلنا لك عبد , أشكرك ربي على نعمك التي لا تعد , وآلائك التي لا تحد , أحمدك ربي وأشكرك على أن يسرت لي إتمام هذا العمل على الوجه الذي أرجو أن ترضى به عني.

ثم أتوجه بالشكر إلى من مهد لي هذه الرسالة أستاذي ومشرفي الفاضل الدكتور:

عماره قرفي

الذي له الفضل عليا – بعد الله تعالى – في المذكرة منذ أن كانت مجرد فكرة تراود أذهاننا إلى أن صارت موضوعا ثم رسالة, فله مني كل الشكر والتقدير والعرفان.

كما أقدم شكري في هذا اليوم إلى أساتذتي الموقرين في لجنة المناقشة رئاستا في الأستاذ عسيلة مصطفى وعضوا في الأستاذ السعيد محمد السعيد لتفضلهم علي بقبول مناقشة هذه الرسالة , فهم أهل لسد خللها وتقويم معوجها وتهذيب نتوآتها والإبانة عن مواطن القصور فيها سائلا الله الكريم أن يثيبهم عني خيرا.

وأتوجه بالشكر الجزيل إلى جميع أساتذتي الفضلاء في قسم الرياضيات.

المحتويات

المقدمة

إن ظهور نظرية المعادلات التكاملية، كان لحاجة الرياضياتيين إلى معالجة بعض المشاكل في الهندسة الرياضية ومشاكل الاهتزازات في الميكانيك. فكان أول من ألف في هذا المجال فيتو فولتيرا Vito Volterra في أواخر القرن 19م حيث وضع المفاهيم الأساسية لهذه النظرية، لكنه لم تكن لديه طريقة الحل.
ذلك مما مهد الطريق لفريدهولم Fredholm سنة 1900 م لإعطاء حل لهذه المعادلات وفتح بابا واسعا للبحث في هذا المجال حيث ظهرت فيما بعد أنواع جديدة للمعادلات التكاملية خاصة الغير الخطية منها.
لذا سنحاول في هذه المذكرة إعطاء بعض المفاهيم وطرق الحل المتعلقة بالمعادلات التكاملية غير الخطية وسنبتعد قدر الإمكان عن الجانب النظري البحت ونكثر من الأمثلة العملية دون أن نخل بالدقة العلمية لكي تكون المعلومة سهلة المأخذ عظيمة الفائدة .
سنقدم في الفصل الأول لفته سريعة عن الأشكال المختلفة للمعادلات التكاملية غير الخطية إلى أن نتدرج إلى معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية(صلب بحثنا) أما في الفصل الثاني وهو الأهم سوف نتطرق إلى طرق حل مختلف معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية في صنفيها الأول و الثاني كذلك المتجانسة وغير المتجانسة, أما في الفصل الثالث سنتطرق إلى جمل معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية وكيفية إيجاد حلولها.
إن الشيء الجديد الذي قد نضيفه في بحثنا هذا هو معالجة بعض الأمثلة من المعادلات التكاملية غير الخطية وذلك لتسهيل وتوضيح حلولها للمتصفح لهذا البحث.
كما يسعنا أن ننوه هنا بأن المعادلات التكاملية الخطية لها طرق عامة مألوفة أما المعادلات التكاملية غير الخطية فليس لها نسق واحد للحل.
وفي الأخير نرجو أن نكون قد وفقنا في تقديم هذا الموضوع المتعلق بالمعادلات التكاملية غير الخطية والذي يكتسي أهمية بالغة في الميادين العلمية مثل الميكانيك(الاهتزازات) و التحليل النظري، والحقول ذات العلاقة بالهندسة الرياضية،..الخ.
نأمل أن تكون هذه الرسالة مفيدة للطلبة الذين لهم الرغبة في البحث في هذا المجال.

الفصل 1

مدخل إلى المعادلات التكاملية غير الخطية

تمهيد

في أحيان كثيرة تصادفنا في مسائل فيزيائية أن مفتاح حلها يكون عبارة عن حل لمعادلة تكاملية غير خطية.

1.1 المعادلات التكاملية غير الخطية

تعريف 1.1
المعادلة التكاملية غير الخطية هي معادلة:

1. المجهول فيها دالة غالبا ما نرمز إليها بالرمز u, φ أو حرف آخر .
2. تظهر فيها الدالة المجهولة داخل رمز التكامل وقد تضاف إلى خارجه.
3. نسمي حلا لمعادلة تكاملية غير خطية (E) في مجال I كل دالة u تحقق (E) في I.

وتكون في صورتها العامة:

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)F(u(t))dt$$

أو

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(u(t))dt$$

فإذا كان $b = x$ (متغير) فهي معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية أما إذا كان b ثابت فهي معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية وهي محل دراستنا.

تسميات

1. u هي الدالة المجهولة والتي يطلب تحديدها.

2. f هي دالة معلومة معرفة على المجال $[a,b]$ وهي تلعب نفس دور دالة الطرف الثاني في المعادلات التفاضلية.

3. k تسمى نواة الحالة وهي دالة ذات متغيرين معرفة على المربع $D=[a,b]\times[a,b]$.

4. λ ثابت ويسمى وسيط المعادلة التكاملية.

5. F دالة غير خطية في $u(t)$

ملحوظة هامة

سميت المعادلات التكاملية السابقة بغير الخطية لأن الدالة المجهولة u مركب من دالة غير خطية F .

مثال:

$$F(t)=\exp(t)\rightarrow f(x)=\int_a^b k(x,t)\exp(u(t))dt$$

2.1 بعض المعادلات التكاملية غير الخطية المشهورة

توجد عدة أشكال من المعادلات التكاملية غير الخطية أشهرها.

1. معادلة هامريشتين التكاملية غير الخطية:

تعريف 2.2
نسمي معادلة هامريشتين التكاملية غير الخطية كل معادلة تكتب من الشكل:

$$\mu u(x)=f(x)+\lambda\int_D k(x,t)F(t,u(t))dt, D\in\mathbb{R}^n, n\in\mathbb{N}^*$$

ونميز هنا حالتين مختلفتين:
حالة1: $\mu=0$

$$\mu=0\rightarrow -f(x)=\lambda\int_a^x k(x,t)F(t,u(t))dt$$

وتسمى هذه الأخيرة بمعادلة هامريشتين–فولتيرا التكاملية غير الخطية من الصنف الأول.
حالة2: $\mu=1$

$$\mu=1\rightarrow u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)F(t,u(t))dt$$

وهي أيضا معادلة هامريشتين–فولتيرا التكاملية غير الخطية بيد أنها من الصنف الثاني.

2. معادلة فريدهولم–فولتيرا التكاملية غير الخطية:

تعريف 2.3
نسمي معادلة فريدهولم–فولتيرا التكاملية غير الخطية كل معادلة تكاملية تكتب على الصورة:

$$\mu u(\bar{x},t)+\lambda\int\limits_{\Omega} k(\bar{x}-\bar{\xi},\bar{y}-\bar{s})F(t,u(\bar{\xi},\bar{s}))d\bar{\xi}d\bar{s}+\lambda\int\limits_{0}^{t} G(t,T)u(\bar{x},\bar{y},T)dT=f(\bar{x},\bar{y},t)$$

$$\bar{x}=(x_1,x_2,x_3,...,x_n),\bar{t}=(t_1,t_2,t_3,...,t_n)$$

مع Ω تعتمد على منحنى التكامل.

3. معادلة يورشون–فولتيرا التكاملية غير الخطية:

تعريف 2.4
نسمي معادلة يورشون–فولتيرا التكاملية غير الخطية كل معادلة تكتب على النحو التالي:

$$\mu u(x)=f(x)+\lambda\int\limits_{0}^{x} k(x,t,u(t))dt, 0\leqslant x\leqslant T<+\infty$$

ونميز هنا ثلاث حالات مختلفة:
حالة1: $\mu=0$

$$\mu=0\rightarrow -f(x)=\lambda\int\limits_{0}^{x} k(x,t,u(t))dt$$

وهي معادلة يورشون–فولتيرا التكاملية غير الخطية من الصنف الأول.
حالة2: $\mu=cet\neq 0$

$$\mu=cet\neq 0\rightarrow u(x)=f(x)+\lambda\int\limits_{0}^{x} k(x,t,u(t))dt$$

وهي معادلة يورشون–فولتيرا التكاملية غير الخطية من الصنف الثاني.
حالة3: $\mu=\mu(x)$

$$\mu=\mu(x)\ \rightarrow \mu(x)u(x)=f(x)+\lambda\int\limits_{0}^{x} k(x,t,u(t))dt$$

وهي معادلة يورشون–فولتيرا التكاملية غير الخطية من الصنف الثالث.

4. معادلة كوشي التكاملية الشاذة غير الخطية:

تعريف 2.5
نسمي معادلة كوشي التكاملية الشاذة غير الخطية كل معادلة تكاملية تكتب على الشكل:

$$a(x)u(x) + b(x)\int\limits_{\Gamma} \frac{u(t)}{t-x}dt + \int\limits_{\Gamma} F(x,t,u(t))dt = f(x)$$

حيث a , b و f دوال معطاة في x بينما u دالة مجهولة يطلب تعيينها.

3.1 معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية

تعريف 3.6
نسمي معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية كل معادلة تكاملية تكتب من الشكل:

$$u(x) = f(x) + \lambda\int\limits_{a}^{b} k(x,t)F(u(t))dt$$

وهي من الصنف الثاني وغير متجانسة أما إذا كانت $f = 0$ فهي متجانسة.
*المعادلة التكاملية $f(x) = \int\limits_{a}^{b} k(x,t)F(u(t))dt$ هي معادلة فريدهولم غير الخطية من الصنف الأول.

1.3.1 نظرية وجود الحل لمعادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية

يمكن إعادة صياغة معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية من الصنف الثاني كمايلي:

$$u(x) = f(x) + \lambda\int\limits_{a}^{b} G(x,t,u(t))dt \tag{1.1}$$

إذا كان:

1. f دالة محدودة على المجال $[a,b]$ أي: $\exists\ R>0, \forall\ x\in[a,b] \rightarrow |f(x)|<R$
2. G دالة قابلة للمكاملة و محدودة من أجل كل $a\leq x,t\leq b$ أي: $\exists\ K>0, \forall\ x,t\in[a,b] \rightarrow |G(x,t,u(t))|<K$
3. الدالة G تحقق شرط لبشيتز بثابت M أي:

$$|G(x,t,z_2) - G(x,t,z_1)| < M|z_2 - z_1|$$

فإن المعادلة (1.1) تقبل على الأقل حلا u في المجال $[a,b]$.

البرهان:

أنظر إلى [2]

الفصل 2

بعض طرائق حل المعادلات التكاملية غير الخطية لفريدهولم

1.2 معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية من الصنف الثاني

لنفتتح دراستنا بمعادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية من الصنف الثاني والتي تكتب من الشكل :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(u(t))dt \tag{1.2}$$

بحيث k و f دوال حقيقية معطاه و λ وسيط حقيقي, بينما u هي الدالة المجهولة والتي يطلب تحديدها والدالة F هي دالة غير خطية, وسنوظف هنا أربعة طرق مختلفة في حل هكذا معادلات, نبتدئ بطريقة الحساب المباشر ثم طريقة إستخدام السلاسل الصحيحة وبعدها نمر إلى طريقة التفكك (Adomian) ونختم بطريقة بيكارد للتقريب المتعاقب.

1.1.2 طريقة الحساب المباشر

تستخدم هذه الطريقة في تلك المعادلات التي تملك أنوية منحلة أي أن نواتها تكتب من الشكل.

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t) \tag{2.2}$$

وكأمثلة عن الأنوية المنحلة نذكر مايلي:

$$x-t, x^3-t^3, xt^4+x^4t......$$

سنقدم الآن شرحا موجزا لهذه الطريقة.

الشرح

لتكن لدينا المعادلة التكاملية (1.2)
بتعويض (2.2) في (1.2) نجد

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t)\right) F(u(t))dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \left[g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t) + g_3(x)h_3(t) + ... + g_n(x)h_n(t)\right] F(u(t))dt$$

$$u(x) = f(x)+\lambda g_1(x)\int_a^b h_1(t)F(u(t))dt+\lambda g_2(x)\int_a^b h_2(t)F(u(t))dt+\lambda g_3(x)\int_a^b h_3(t)F(u(t))dt+...+\lambda g_n(x)\int_a^b h_n(t)F(u(t))dt$$

نضع:

$$c_1 = \int_a^b h_1(t)F(u(t))dt, c_2 = \int_a^b h_2(t)F(u(t))dt, c_3 = \int_a^b h_3(t)F(u(t))dt, ..., c_n = \int_a^b h_n(t)F(u(t))dt \quad (3.2)$$

لنحصل على:

$$u(x) = f(x) + \lambda c_1 g_1(x) + \lambda c_2 g_2(x) + \lambda c_3 g_3(x) + ... + \lambda c_n g_n(x) \quad (4.2)$$

نبحث عن قيم التكاملات $c_1, c_2, c_3 ... c_n$ بتعويض (4.2) في (3.2) ثم نعوض قيمها المحصل عليها في (4.2) لنجد أخيرا الحل u.

مثال

بإستخدام الحساب المباشر حل المعادلة التكاملية التالية:

$$u(x) = 1 + \lambda\int_0^1 \sqrt{u(t)}dt$$

الحل
نضع:/

$$c = \int_0^1 \sqrt{u(t)}\ dt$$

$$u(x) = 1 + \lambda c$$

$$c = \int_0^1 \sqrt{1 + \lambda c}\ dt$$

$$c = \sqrt{1 + \lambda c}$$

بتربيع الطرفين

$$c^2 = 1 + \lambda c$$
$$c^2 - \lambda c - 1 = 0$$
$$\Delta = \lambda^2 - 4(1)(-1)$$
$$\Delta = \lambda^2 + 4 > 0, \sqrt{\Delta} = \sqrt{\lambda^2 + 4}$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+4}}{2} \rightarrow u_1(x) = 1 + \lambda \left(\dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+4}}{2} \right) = \dfrac{2 + \lambda(\lambda - \sqrt{\lambda^2+4})}{2} \\ c_2 = \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}}{2} \rightarrow u_2(x) = 1 + \lambda \left(\dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}}{2} \right) = \dfrac{2 + \lambda(\lambda + \sqrt{\lambda^2+4})}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{2 + \lambda(\lambda - \sqrt{\lambda^2+4})}{2}, \frac{2 + \lambda(\lambda + \sqrt{\lambda^2+4})}{2} \right\}$$

2.1.2 طريقة إستخدام السلاسل الصحيحة

شرح الطريقة

لتكن لدينا المعادلة التكاملية (1.2)
نفرض أن الحل u يكتب وفق سلسلة صحيحة أي:

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \tag{5.2}$$

بتعويض الفرض (5.2) في المعادلة (1.2) نحصل على:

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(\sum_{n \geq 0} a_n t^n) dt$$

حيث: $T(f)$ يرمز إلى نشر تيلور للدالة f
وبالتالي:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x,t) F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ...) dt$$

وبعد المكاملة والتبسيط ثم المطابقة نجد المعاملات $a_0, a_1, a_2, ...$ ثم نقوم بتعويضها في الفرض (5.2) لنجد الحل u منشور وفق سلسلة صحيحة.

مثال

بإستخدام السلاسل الصحيحة حل المعادلة التكاملية التالية:

$$u(x) = \frac{2357}{2310} + \frac{892}{945} x - x^2 - x^3 + \frac{1}{18} \int_0^1 (x-t) u^3(t) dt$$

الحل:/
نفرض أن:

$$u(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+..$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+..=\frac{2357}{2310}+\frac{892}{945}x-x^2-x^3+\frac{1}{18}\int_0^1 (x-t)\left[a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+...\right]^3dt$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3..=\frac{2357}{2310}+\frac{892}{945}x-x^2-x^3+\frac{1}{18}\int_0^1 (x-t)\left[a_0^3+3a_0^2a_1t+(3a_0a_1^2+3a_0^2a_2)t^2+(a_1^3+6a_1a_2a_0+3a_3a_0^2)t^3\right]d$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3..=\frac{2357}{2310}+\frac{892}{945}x-x^2-x^3+\frac{1}{18}x\int_0^1 \left[a_0^3+3a_0^2a_1t+(3a_0a_1^2+3a_0^2a_2)t^2+(a_1^3+6a_1a_2a_0+3a_3a_0^2)t^3\right]dt$$
$$-\frac{1}{18}\int_0^1 \left[a_0^3t+3a_0^2a_1t^2+(3a_0a_1^2+3a_0^2a_2)t^3+(a_1^3+6a_1a_2a_0+3a_3a_0^2)t^4\right]dt$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3..=\frac{2357}{2310}+\frac{892}{945}x+\frac{1}{18}x\left[a_0^3+\frac{3}{2}a_0^2a_1+a_0a_1^2+a_0^2a_2+\frac{1}{4}a_1^3+\frac{3}{2}a_1a_2a_0+\frac{3}{4}a_3a_0^2\right]$$
$$-\frac{1}{18}\left[\frac{1}{2}a_0^3+a_0^2a_1+\frac{3}{4}a_0a_1^2+\frac{3}{4}a_0^2a_2+\frac{1}{5}a_1^3+\frac{6}{5}a_1a_2a_0+\frac{3}{5}a_3a_0^2\right]-x^2-x^3$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3..=\left[\frac{2357}{2310}-\frac{1}{36}a_0^3-\frac{1}{18}a_0^2a_1-\frac{1}{24}a_0a_1^2-\frac{1}{24}a_0^2a_2-\frac{1}{90}a_1^3-\frac{1}{15}a_1a_2a_0-\frac{1}{30}a_3a_0^2\right]$$
$$+\left[\frac{892}{945}+\frac{1}{18}a_0^3+\frac{1}{12}a_0^2a_1+\frac{1}{18}a_0a_1^2+\frac{1}{18}a_0^2a_2+\frac{1}{72}a_1^3+\frac{1}{12}a_1a_2a_0+\frac{1}{24}a_3a_0^2\right]x-x^2-x^3$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a_0=\frac{2357}{2310}-\frac{1}{36}a_0^3-\frac{1}{18}a_0^2a_1-\frac{1}{24}a_0a_1^2-\frac{1}{24}a_0^2a_2-\frac{1}{90}a_1^3-\frac{1}{15}a_1a_2a_0-\frac{1}{30}a_3a_0^2\\ a_1=\frac{892}{945}+\frac{1}{18}a_0^3+\frac{1}{12}a_0^2a_1+\frac{1}{18}a_0a_1^2+\frac{1}{18}a_0^2a_2+\frac{1}{72}a_1^3+\frac{1}{12}a_1a_2a_0+\frac{1}{24}a_3a_0^2\\ a_2=-1\\ a_3=-1\\ a_n=0,\forall n\geqslant 4\end{cases}$$

بتعويض كل من قمتي $a_2=-1$ و $a_3=-1$ في المعادلتين الأولى والثانية من الجملة السابقة نجد:

$$\begin{cases} a_0=\frac{2357}{2310}-\frac{1}{36}a_0^3-\frac{1}{18}a_0^2a_1-\frac{1}{24}a_0a_1^2+\frac{1}{24}a_0^2-\frac{1}{90}a_1^3+\frac{1}{15}a_1a_0+\frac{1}{30}a_0^2\\ a_1=\frac{892}{945}+\frac{1}{18}a_0^3+\frac{1}{12}a_0^2a_1+\frac{1}{18}a_0a_1^2-\frac{1}{18}a_0^2a_2+\frac{1}{72}a_1^3-\frac{1}{12}a_1a_0-\frac{1}{24}a_0^2\end{cases}$$

وبحل الجملة الأخيرة نحصل على

$$a_0=a_1=1$$

الخلاصة:

$$a_0=a_1=1,a_2=a_3=-1,a_n=0,\forall n\geqslant 4$$

والحل u للمسألة المعطاة هو $u(x)=1+x-x^2-x^3$

$$S=\{1+x-x^2-x^3\}$$

3.1.2 طريقة التفكك(Adomian)

لتكن لدينا المعادلة التكاملية (1.2)
نفرض أن:

$$u(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x) \quad F(u(t)) = \sum_{n\geq 0} A_n(t) \tag{6.2}$$

بحيث:

$$A_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i(t)\right)\right]_{\lambda=0} \quad n\in\mathbb{N}$$

بتعويض (6.2) في المعادلة التكاملية (1.2) نحصل على:

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\sum_{n\geq 0} A_n(t)dt$$

لنعتبر المتتالية التراجعية $(u_n(x))$ والمعرفة كمايلي:

$$(u_n(x)) = \begin{cases} u_0(x) = f(x) \\ u_{n+1}(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)A_n(t)dt \end{cases}$$

بعد حساب الحدود الأولى للمتتالية التراجعية $(u_n(x))$ وتعويضها في (6.2) نجد الحل u

مثال

حل المعادلة التكاملية التالية بإستعمال طريقة التفكك (Adomian) :

$$u(x) = 4 + \lambda\int_0^1 tu^2(t)dt$$

الحل:/
نفرض أن:

$$u(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x) \quad u^2(t) = \sum_{n\geq 0} A_n(t)$$

حيث أن

$$A_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i(t)\right)^2\right]_{\lambda=0}$$

بتعويض الفرض في المعادلة التكاملية المعطاة نجد:

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) = 4 + \lambda\int_0^1 t\sum_{n\geq 0} A_n(t)dt$$

نضع:

$$(u_n(x)) = \begin{cases} u_0(x) = 4 \\ u_{n+1}(x) = \lambda\int_0^1 tA_n(t)dt \end{cases}$$

$$u_1(x) = \lambda\int_0^1 tA_0(t)dt \ , A_0(t) = u_0^2(t)$$

$$u_1(x) = \lambda\int_0^1 tu_0^2(t)dt$$

$$u_1(x) = \lambda\int_0^1 t(4)^2dt$$

$$u_1(x) = \lambda\int_0^1 16tdt$$

$$u_1(x) = 8\lambda$$

$$u_2(x) = \lambda\int_0^1 tA_1(t)dt \ , A_1(t) = 2u_0(t)u_1(t)$$

$$u_2(x) = \lambda\int_0^1 t(2u_0(t)u_1(t))dt$$

$$u_2(x) = \lambda\int_0^1 t(2\times 4\times 8\lambda)dt$$

$$u_2(x) = \lambda\int_0^1 64\lambda t$$

$$u_2(x) = 32\lambda^2$$

$$u_3(x) = \lambda\int_0^1 tA_2(t)dt \ , A_2(t) = 2u_0(t)u_2(t) + u_1^2(t)$$

$$u_3(x) = \lambda\int_0^1 t(2u_0(t)u_2(t) + u_1^2(t))dt$$

$$u_3(x) = \lambda\int_0^1 t(2\times 4\times 32\lambda^2 + 64\lambda^2)dt$$

$$u_3(x) = \lambda\int_0^1 320\lambda^2 t$$

$$u_3(x) = 160\lambda^3$$

$$u_4(x) = \lambda\int_0^1 tA_3(t)dt \;, A_3(t) = 2u_0(t)u_3(t) + 2u_1(t)u_2(t)$$

$$u_4(x) = \lambda\int_0^1 t(2u_0(t)u_3(t) + 2u_1(t)u_2(t))dt$$

$$u_4(x) = \lambda\int_0^1 t(2(4)(160\lambda^3) + 2(8\lambda)(32\lambda^2))dt$$

$$u_4(x) = \lambda\int_0^1 1792\lambda^3 t$$

$$u_4(x) = 896\lambda^4$$

الخلاصة:/
الحل هو:

$$u(x) = 4 + 8\lambda + 32\lambda^2 + 160\lambda^3 + 896\lambda^4 + ...$$
$$S = \{4 + 8\lambda + 32\lambda^2 + 160\lambda^3 + 896\lambda^4 + ...\}$$

4.1.2 طريقة بيكارد للتقريب المتعاقب

في أحيان كثيرة تقابلنا معادلات تكاملية غير خطية يتعذر حلها بالطرق السابقة, لذا قد نلجأ إلى طريقة تكرارية تعطينا الحل u إن وجد بالتقريب.

شرح الطريقة

لتكن لدينا المعادلة التكاملية (1.2)
نختار قيمة ابتدائية $u_0(x)$ ونعتبرها كتقريب أولي لنجد:

$$u_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)F(u_0(t))dt$$

u_1 هو التقريب الأول لـ u وللحصول على تقريب أفضل نعوض بـ u_1 في الطرف الأيمن للمعادلة (1.2) فنجد:

$$u_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)F(u_1(t))dt$$

وهكذا دواليك إلى أن نجد العلاقة التراجعية للتقريب من الرتبة $n+1$

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)F(u_n(t))dt$$

وبهكذا نكون قد تحصلنا على متتالية دوال من الحلول التقريبية: $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$

مثال

إستخدم طريقة بيكارد للتقريب المتتالي في حل المعادلة التكاملية التالية:

$$u(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}\int_0^1 xtu^2(t)dt$$

الحل:/
نضع:

$$(u_n(x)) = \begin{cases} u_0(x) = 1 \\ u_{n+1}(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}\int_0^1 xtu_n^2(t)dt \end{cases}$$

نحسب الحدود الأولى للمتتالية التراجعية $(u_n(x))$

$$u_1(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}\int_0^1 xtu_0^2(t)dt$$

$$u_1(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}\int_0^1 xtdt$$

$$u_1(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{72}x$$

$$u_1(x) = xe^x - 0.022184222x$$

$$u_2(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}\int_0^1 xtu_1^2(t)dt$$

$$u_2(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}\int_0^1 xt(te^t - 0.022184222t)^2dt$$

$$u_2(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}x\int_0^1 t(t^2e^{2t} - 0.044368444t^2e^t + 0.000492139t^2)dt$$

$$u_2(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}x\int_0^1 (t^3e^{2t} - 0.044368444t^3e^t + 0.000493139t^3)dt$$

$$u_2(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}x\left[(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{8})e^{2t} - 0.044368444(t^3 - 3t^2 + 6t - 6)e^t + 0.000123284t^4\right]_0^1$$

$$u_2(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}x\left[\frac{1}{8}e^2 - 0.044368444(-2)e + 0.000123284 + \frac{3}{8} - 0.266210664\right]$$

$$u_2(x) = xe^x - 0.000690986x$$

$$u_3(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}\int_0^1 xtu_2^2(t)dt$$

$$u_3(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}\int_0^1 xt(te^t - 0.000690986t)^2dt$$

$$u_3(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}x\int_0^1 t(t^2e^{2t} - 0.001381972t^2e^t + 0.000000477t^2)dt$$

$$u_3(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}x\int_0^1 (t^3e^{2t} - 0.001381972t^3e^t + 0.000000477t^3)dt$$

$$u_3(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}x\left[(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{8})e^{2t} - 0.001381972(t^3 - 3t^2 + 6t - 6)e^t + 0.000000119t^4\right]_0^1$$

$$u_3(x) = xe^x - \frac{1}{288}(3+e^2)x + \frac{1}{36}x\left[\frac{1}{8}e^2 + 2(0.001381972)e + 0.000000119 + \frac{3}{8} - 0.008291832\right]$$

$$u_3(x) = xe^x - 0.000062736x$$

.

.

.

ومنه نستنتج:

$$u(x) = \lim u_{n+1}(x) = xe^x$$
$$S = \{xe^x\}$$

2.2 معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية المتجانسة

بأخذ $f \equiv 0$ في المعادلة (1.2) نجد:

$$f \equiv 0 \rightarrow u(x) = 0 + \lambda\int_a^b k(x,t)F(u(t))dt$$

$$u(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)F(u(t))dt \tag{7.2}$$

تسمى المعادلة (7.2) معادلة فريدهولم التكاملية المتجانسة غير الخطية, ولحل هذا النوع من المعادلات سوف نكتفي بطريقة وحيدة هي طريقة الحساب المباشر.

1.2.2 طريقة الحساب المباشر

كما أسلفنا سابقا توظف هذه الطريقة في تلك المعادلات التي تملك أنوية منحلة.
النواة k تسمى منحلة إذا كتبت من الشكل:

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t) \tag{8.2}$$

لتكن لدينا المعادلة التكاملية (7.2)
بتعويض (8.2) في المعادلة (7.2) ينتج لدينا:

$$u(x)=\lambda\int_a^b \ [g_1(x)h_1(t)+g_2(x)h_2(t)+g_3(x)h_3(t)+...+g_n(x)h_n(t)]F(u(t))dt$$

$$u(x)=\lambda g_1(x)\int_a^b h_1(t)F(u(t))dt+\lambda g_2(x)\int_a^b h_2(t)F(u(t))dt+\lambda g_3(x)\int_a^b h_3(t)F(u(t))dt+...+\lambda g_n(x)\int_a^b h_n(t)F(u(t))dt$$

نضع:

$$c_1=\int_a^b h_1(t)F(u(t))dt, c_2=\int_a^b h_2(t)F(u(t))dt, c_3=\int_a^b h_3(t)F(u(t))dt, ..., c_n=\int_a^b h_n(t)F(u(t))dt \tag{9.2}$$

لنحصل على:

$$u(x)=\lambda c_1g_1(x)+\lambda c_2g_2(x)+\lambda c_3g_3(x)+...+\lambda c_ng_n(x) \tag{10.2}$$

نبحث عن قيم التكاملات $c_1, c_2, c_3 ... c_n$ بتعويض (10.2) في (9.2) ثم نعوض قيمها المحصل عليها في (10.2) لنجد أخيرا الحل u.

مثال

بإستخدام الحساب المباشر حل المعادلة التكاملية التالية:

$$u(x)=\lambda\int_0^1 e^{x-2t}u^3(t)dt$$

الحل:

$$u(x)=\lambda e^x\int_0^1 e^{-2t}u^3(t)dt$$

نضع:/

$$c=\int_0^1 e^{-2t}u^3(t)dt$$

$$u(x) = \lambda c e^x$$

$$c = \int_0^1 e^{-2t}(\lambda c e^t)^3 dt$$

$$c = \int_0^1 e^{-2t}(\lambda^3 c^3 e^{3t}) dt$$

$$c = \lambda^3 c^3 \int_0^1 e^t dt$$

$$c = \lambda^3 c^3 \left[e^t\right]_0^1$$

$$c = \lambda^3 c^3 (e-1)$$

$c \neq 0$

$$\frac{1}{c^2} = \lambda^3 (e-1)$$

لما $\lambda \neq 0$ يكون:

$$c^2 = \frac{1}{\lambda^3 (e-1)}$$

إذا كان $\lambda < 0$ فإنه لا توجد حلول
إذا كان $\lambda > 0$

$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{\lambda^3 (e-1)}}$$

ومنه:

$$u(x) = \pm\lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda^3 (e-1)}} e^x$$

$$u(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{\lambda (e-1)}} e^x$$

$$S = \left\{-\sqrt{\frac{1}{\lambda (e-1)}} e^x, \sqrt{\frac{1}{\lambda (e-1)}} e^x\right\}$$

3.2 معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية من الصنف الأول

تعريف 3.7
نسمي معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية من الصنف الأول كل معادلة تكاملية تكتب من الشكل:

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)F(u(t))dt \tag{11.2}$$

أي أن الدالة المجهولة u موجودة داخل رمز التكامل فقط وتسمى أيضا بمعادلات تكاملية تؤول إلى خطية .

المعادلة التكاملية (11.2) تحول إلى خطية عندما نجري التحويل:

$$F(u(t))=v(t)$$

لنجد:

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)v(t)dt \tag{12.2}$$

وهي معادلة تكاملية خطيية في v من الصنف الأول لحلها نوظف إحدى طرق حل المعادلات التكاملية الخطية من الصنف الأول وسنكتفي هنا بإعادة عرض طريقتين مختلفتين فقط وللإطلاع على طرق أخرى أنظر إلى [6].

1.3.2 طريقة التحويل إلى الشكل النظامي

المعادلة (12.2) تحول إلى معادلة من الصنف الثاني في v_μ كمايلي:

$$\mu v_\mu(x)=f(x)-\int_a^b k(x,t)v_\mu(t)dt$$

$$\mu\neq 0\rightarrow v_\mu(x)=\frac{1}{\mu}f(x)-\frac{1}{\mu}\int_a^b k(x,t)v_\mu(t)dt$$

بحل هذه الأخيرة نحصل على $v_\mu(x)$ ثم بأخذ النهاية لـ $v_\mu(x)$ لما μ تؤول إلى الصفر نجد الحل v وبالرجوع للمجهول الأصلي نجد الحل u.

مثال

حل المعادلة التكاملية التالية بعد تحويلها إلى الشكل النظامي :

$$e^{2x}=\int_0^1 e^{2x-3t}u^3(t)dt$$

الحل
نجري التحويل:

$$u^3(t) = v(t)$$

$$e^{2x} = \int_0^1 e^{2x-3t} v(t)dt$$

وهي معادلة تكاملية خطية من الصنف الأول في v والمعادلة المكافئة لها من الصنف الثاني هي:

$$v_\mu(x) = \frac{1}{\mu}e^{2x} - \frac{1}{\mu}\int_0^1 e^{2x-3t} v_\mu(t)dt$$

$$v_\mu(x) = \frac{1}{\mu}e^{2x} - \frac{1}{\mu}e^{2x}\int_0^1 e^{-3t} v_\mu(t)dt$$

بإستعمال طريقة الحساب المباشر نجد:
بوضع:

$$c = \int_0^1 e^{-3t} v_\mu(t)dt$$

$$v_\mu(x) = \frac{1}{\mu}e^{2x} - \frac{1}{\mu}e^{2x}c$$

$$v_\mu(x) = \frac{1}{\mu}e^{2x}(1-c)$$

$$c = \int_0^1 e^{-3t}\left[\frac{1}{\mu}e^{2t}(1-c)\right]dt$$

$$c = \frac{1-c}{\mu}\int_0^1 e^{-t}dt$$

$$c = \frac{c-1}{\mu}\left[e^{-t}\right]_0^1$$

$$c = \frac{c-1}{\mu}\left[e^{-1}-1\right]$$

$$\mu c = (c-1)(e^{-1}-1)$$

$$\mu c = c(e^{-1}-1) + 1 - e^{-1}$$

$$\mu c - c(e^{-1}-1) = 1 - e^{-1}$$

$$c(\mu - e^{-1} + 1) = 1 - e^{-1}$$

$$c = \frac{1-e^{-1}}{\mu - e^{-1}+1}$$

$$v_\mu(x) = \frac{1}{\mu}e^{2x}\left(1 + \frac{e^{-1}-1}{\mu - e^{-1}+1}\right)$$

$$v_\mu(x) = \frac{1}{\mu}e^{2x}\left(\frac{\mu - e^{-1}+1+e^{-1}-1}{\mu - e^{-1}+1}\right)$$

$$v_\mu(x) = \frac{1}{\mu - e^{-1}+1}e^{2x}$$

$$v(x) = \lim_{\mu\to 0} v_\mu(x)$$

$$v(x) = \frac{1}{1-e^{-1}}e^{2x}$$

وبالرجوع للمجهول الأصلي نجد الحل u للمعادلة التكاملية المعطاة:

$$u^3(x) = v(x)$$

$$u^3(x) = \frac{1}{1-e^{-1}}e^{2x}$$

$$u(x) = \frac{1}{(1-e^{-1})^{\frac{1}{3}}}e^{\frac{2}{3}x}$$

$$S = \left\{\frac{1}{(1-e^{-1})^{\frac{1}{3}}}e^{\frac{2}{3}x}\right\}$$

2.3.2 طريقة التشوه المستمر بالتشويش(**The Homotopy Perturbation Method**)

لحل المعادلة (12.2) نعتمد على المتتالية التراجعية $((v_n(x))$ والمعرفة كما يلي:

$$(v_n(x)) = \begin{cases} v_0(x) = 0, v_1(x) = f(x) \\ v_{n+1}(x) = v_n(x) - \int\limits_a^b k(x,t)v_n(t)dt \end{cases}$$

وهي متقاربة نحو الحل v تحت ظل الشرط

$$\left|1 - \int\limits_a^b k(t,t)dt\right| < 1$$

بعد إيجاد v وبالرجوع للمجهول الأصلي نجد الحل المطلوب u.

مثال

حول المعادلة التكاملية التالية إلى معادلة تكاملية خطية تكاملية خطية ثم حلها بإستخدام طريقة التشوه المستمر بالتشويش:

$$e^{2x} = \int_0^1 e^{2x-3t}u^3(t)dt$$

نجري التحويل:

$$u^3(t) = v(t)$$

$$e^{2x} = \int_0^1 e^{2x-3t}v(t)dt$$

وهي معادلة تكاملية خطية من الصنف الأول في v لحلها نضع:

$$(v_n(x)) = \begin{cases} v_0(x) = 0, v_1(x) = e^{2x} \\ v_{n+1}(x) = v_n(x) - \int_0^1 e^{2x-3t}v_n(t)dt \end{cases}$$

$$v_2(x) = v_1(x) - \int_0^1 e^{2x-3t}v_1(t)dt$$

$$v_2(x) = e^{2x} - \int_0^1 e^{2x-3t}e^{2t}dt$$

$$v_2(x) = e^{2x} - e^{2x}\int_0^1 e^{-t}dt$$

$$v_2(x) = e^{2x}(1 + \left[e^{-t}\right]_0^1)$$

$$v_2(x) = e^{2x}(1 + e^{-1} - 1)$$

$$v_2(x) = e^{2x-1}$$

$$v_3(x) = v_2(x) - \int_0^1 e^{2x-3t}v_2(t)dt$$

$$v_3(x) = e^{2x-1} - \int_0^1 e^{2x-3t}e^{2t-1}dt$$

$$v_3(x) = e^{2x-1} - e^{2x-1}\int_0^1 e^{-t}dt$$

$$v_3(x)=e^{2x-1}(1+\left[e^{-t}\right]_0^1)$$

$$v_3(x)=e^{2x-1}(1+e^{-1}-1)$$

$$v_3(x)=e^{2x-2}$$

$$v_4(x)=v_3(x)-\int_0^1 e^{2x-3t}v_3(t)dt$$

$$v_4(x)=e^{2x-2}-\int_0^1 e^{2x-3t}e^{2t-2}dt$$

$$v_4(x)=e^{2x-2}-e^{2x-2}\int_0^1 e^{-t}dt$$

$$v_4(x)=e^{2x-2}(1+\left[e^{-t}\right]_0^1)$$

$$v_4(x)=e^{2x-2}(1+e^{-1}-1)$$

$$v_4(x)=e^{2x-3}$$

ومنه نستنتج:

$$v(x)=e^{2x}\left[1+e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+...\right]$$

$$v(x)=\frac{1}{1-e^{-1}}e^{2x}$$

$$v(x)=\frac{1}{e-1}e^{2x+1}$$

بالعودة للمجهول الأصلي نجد:

$$u^3(x)=\frac{1}{e-1}e^{2x+1}$$

$$u(x)=\frac{e^{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}}{(e-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$S=\left\{\frac{e^{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}}{(e-1)^{\frac{1}{3}}}\right\}$$

الفصل 3

جمل معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية

1.3 جملة معادلتين تكامليتين غير خطيتين لفريدهولم

تعريف 1.8
نسمي جملة معادلتين تكامليتين غير خطيتين لفريدهولم كل جملة تكتب من الشكل:

$$\begin{cases} u(x) = f_1(x) + \int_a^b \left[k_1(x,t)F_1(u(t)) + \tilde{k}_1(x,t)\tilde{F}_1(v(t))\right] dt \\ v(x) = f_2(x) + \int_a^b \left[k_2(x,t)F_2(u(t)) + \tilde{k}_2(x,t)\tilde{F}_2(v(t))\right] dt \end{cases} \tag{1.3}$$

بحيث:/
-) f_2, f_1 دوال حقيقية في x معطاة
-) $\tilde{k}_2, k_2, \tilde{k}_1, k_1$ دوال حقيقية معطاة ذات متغيرين وهي بمثابة أنوية للمعادلتين التكامليتين السابقتين
-) $\tilde{F}_2, F_2, \tilde{F}_1, F_1$ دوال غير خطية متعلقة بالدالتين المجهولتين u و v

ولحل مثل هذه الجمل سوف نعرض طريقتين مختلفتين هما:

1. طريقة الحساب المباشر
2. طريقة التفكك (Adomian)

1.1.3 طريقة الحساب المباشر

تستخدم هذه الطريقة في الجمل التي تحوي معادلات تكاملية لها أنوية منحلة أي:

$$\begin{cases} k_1(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t) & \tilde{k}_1(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}_i(x)\tilde{h}_i(t) \\ k_2(x,t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x)s_i(t) & \tilde{k}_2(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i(x)\tilde{s}_i(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

لتكن لدينا الجملة (1.3)
بتعويض(2.3) في (1.3)
نحصل على:

$$\begin{cases} u(x) = f_1(x) + \int\limits_a^b \left[\sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(t)F_1(u(t)) + \sum_{i=1}^n \tilde{g}_i(x)\tilde{h}_i(t)\tilde{F_1}(v(t))\right] dt \\ v(x) = f_2(x) + \int\limits_a^b \left[\sum_{i=1}^n r_i(x)s_i(t)F_2(u(t)) + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i(x)\tilde{s}_i(t)\tilde{F_2}(v(t))\right] dt \end{cases} \quad (3.3)$$

أي:
(4.3)

$$\begin{cases} u(x) = f_1(x) + \int\limits_a^b \left[[g_1(x)h_1(t) + ... + g_n(x)h_n(t)]F_1(u(t)) + [\tilde{g}_1(x)\tilde{h}_1(t) + ... + \tilde{g}_n(x)\tilde{h}_n(t)]\tilde{F_1}(v(t))\right] dt \\ v(x) = f_2(x) + \int\limits_a^b \left[[r_1(x)s_1(t) + ... + r_n(x)s_n(t)]F_2(u(t)) + [\tilde{r}_1(x)\tilde{s}_1(t) + ... + \tilde{r}_n(x)\tilde{s}_n(t)]\tilde{F_2}(v(t))\right] dt \end{cases}$$

(5.3)

$$\begin{cases} u(x) = f_1(x) + g_1(x)\int\limits_a^b h_1(t)F_1(u(t))dt + ..g_n(x)\int\limits_a^b h_n(t)F_1(u(t))dt + \tilde{g}_1(x)\int\limits_a^b \tilde{h}_1(t)\tilde{F_1}(v(t))dt + ..\tilde{g}_n(x)\int\limits_a^b \tilde{h}_n(t)\tilde{F_1}(v(t))dt \\ v(x) = f_2(x) + r_1(x)\int\limits_a^b s_1(t)F_2(u(t))dt + ..r_n(x)\int\limits_a^b s_n(t)F_2(u(t))dt + \tilde{r}_1(x)\int\limits_a^b \tilde{s}_1(t)\tilde{F_2}(v(t))dt + ..\tilde{r}_n(x)\int\limits_a^b \tilde{s}_n(t)\tilde{F_2}(v(t))dt \end{cases}$$

نضع:/
(6.3)

$$\begin{cases} \alpha_1 = \int\limits_a^b h_1(t)F_1(u(t))dt, ..\alpha_n = \int\limits_a^b h_n(t)F_1(u(t))dt; \beta_1 = \int\limits_a^b \tilde{h}_1(t)\tilde{F_1}(v(t))dt, ..\beta_n = \int\limits_a^b \tilde{h}_n(t)\tilde{F_1}(v(t))dt. \\ \gamma_1 = \int\limits_a^b s_1(t)F_2(u(t))dt, ..\gamma_n = \int\limits_a^b s_n(t)F_2(u(t))dt; \delta_1 = \int\limits_a^b \tilde{s}_1(t)\tilde{F_2}(v(t))dt, ..\delta_n = \int\limits_a^b \tilde{s}_n(t)\tilde{F_2}(v(t))dt \end{cases}$$

لنحصل على:/

$$\begin{cases} u(x) = f_1(x) + \alpha_1 g_1(x) + .. + \alpha_n g_n(x) + \beta_1 \tilde{g}_1(x) + .. + \beta_n \tilde{g}_n(x) \\ v(x) = f_2(x) + \gamma_1 r_1(x) + .. + \gamma_n r_n(x) + \delta_1 \tilde{r}_1(x) + .. + \delta_n \tilde{r}_n(x) \end{cases} \quad (7.3)$$

نعوض (7.3) في (6.3) لنجد:

$$\begin{cases} \alpha_i = \int\limits_a^b h_i(t)F_1(f_1(t) + \alpha_1 g_1(t) + .. + \alpha_n g_n(t) + \beta_1 \tilde{g}_1(t) + .. + \beta_n \tilde{g}_n(t))dt; 1 \leqslant i \leqslant n \\ \beta_i = \int\limits_a^b \tilde{h}_i(t)\tilde{F_1}(f_2(t) + \gamma_1 r_1(t) + .. + \gamma_n r_n(t) + \delta_1 \tilde{r}_1(t) + .. + \delta_n \tilde{r}_n(t))dt; 1 \leqslant i \leqslant n \\ \gamma_i = \int\limits_a^b s_i(t)F_2(f_1(t) + \alpha_1 g_1(t) + .. + \alpha_n g_n(t) + \beta_1 \tilde{g}_1(t) + .. + \beta_n \tilde{g}_n(t))dt; 1 \leqslant i \leqslant n \\ \delta_i = \int\limits_a^b \tilde{s}_i(t)\tilde{F_2}(f_2(t) + \gamma_1 r_1(t) + .. + \gamma_n r_n(t) + \delta_1 \tilde{r}_1(t) + .. + \delta_n \tilde{r}_n(t))dt; 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \quad (8.3)$$

بعد ايجاد $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i; 1 \leqslant i \leqslant n$ ثم تعويضها في (7.3) نجد الحل (u, v) للجملة المعطاة (1.3)

مثال

حل بإستخدام طريقة الحساب المباشر الجملة التالية:

$$\begin{cases} u(x) = x - \frac{4}{7} + \int\limits_{-1}^{1} t(u^2(t) + v^2(t))dt \\ v(x) = x^2 + x^3 + \frac{4}{7} + \int\limits_{-1}^{1} t(u^2(t) - v^2(t))dt \end{cases}$$

الحل:/

$$\begin{cases} u(x) = x - \frac{4}{7} + \int\limits_{-1}^{1} tu^2(t)dt + \int\limits_{-1}^{1} tv^2(t)dt \\ v(x) = x^2 + x^3 + \frac{4}{7} + \int\limits_{-1}^{1} tu^2(t)dt - \int\limits_{-1}^{1} tv^2(t)dt \end{cases}$$

نضع:/

$$\begin{cases} \alpha = \int\limits_{-1}^{1} tu^2(t)dt \\ \beta = \int\limits_{-1}^{1} tv^2(t)dt \end{cases}$$

نحصل على:

$$\begin{cases} u(x) = x - \frac{4}{7} + \alpha + \beta \\ v(x) = x^2 + x^3 + \frac{4}{7} + \alpha - \beta \end{cases} \tag{9.3}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \alpha = \int\limits_{-1}^{1} t(t + \alpha + \beta - \frac{4}{7})^2 dt \\ \beta = \int\limits_{-1}^{1} t(t^3 + t^2 + \alpha - \beta + \frac{4}{7})^2 dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \int\limits_{-1}^{1} t[t^2 + (\alpha + \beta - \frac{4}{7})^2 + 2t(\alpha + \beta - \frac{4}{7})]dt \\ \beta = \int\limits_{-1}^{1} t[t^6 + t^4 + 2t^5 + (\alpha - \beta + \frac{4}{7})^2 + 2(t^3 + t^2)(\alpha - \beta + \frac{4}{7})]dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt + (\alpha + \beta - \frac{4}{7})^2 \int\limits_{-1}^{1} tdt + 2(\alpha + \beta - \frac{4}{7}) \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt \\ \beta = \int\limits_{-1}^{1} t^7 dt + \int\limits_{-1}^{1} t^5 dt + 2\int\limits_{-1}^{1} t^6 dt + (\alpha - \beta + \frac{4}{7})^2 \int\limits_{-1}^{1} tdt + 2(\alpha - \beta + \frac{4}{7}) \int\limits_{-1}^{1} t^4 + t^3 dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{4}{3}(\alpha + \beta - \frac{4}{7}) \\ \beta = \frac{4}{7} + \frac{4}{5}(\alpha - \beta + \frac{4}{7}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha = 4(\alpha + \beta - \frac{4}{7}) \\ 7\beta = 4 + \frac{28}{5}(\alpha - \beta + \frac{4}{7}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta - \dfrac{16}{7} = 0 \\ 35\beta = 20 + 28\alpha - 28\beta + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7\alpha + 28\beta - 16 = 0 \\ 28\alpha - 63\beta + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7\alpha + 28\beta = 16 \\ 28\alpha - 63\beta = -36 \end{cases}$$

$$(\alpha = 0; \beta = \frac{4}{7})$$

بنقل قمتي α و β المحصل عليهما إلى (9.3) نجد الحل $(u(x); v(x)) = (x; x^2 + x^3)$ للجملة المعطاة.

$$S = \{(x; x^2 + x^3)\}$$

2.1.3 طريقة التفكك(Adomian)

لتكن لدينا الجملة (1.3)
نفرض أن:

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n(x) & \tilde{F}_1(u(t)) = \sum_{n\geqslant 0} A_n(t) & F_1(v(t)) = \sum_{n\geqslant 0} B_n(t) \\ v(x) = \sum_{n\geqslant 0} v_n(x) & F_2(u(t)) = \sum_{n\geqslant 0} C_n(t) & \tilde{F}_2(v(t)) = \sum_{n\geqslant 0} D_n(t) \end{cases} \tag{10.3}$$

بحيث:

$$\begin{cases} A_n(t) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[F_1\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i(t)\right)\right]_{\lambda=0} & B_n(t) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[\tilde{F}_1\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i v_i(t)\right)\right]_{\lambda=0} \\ C_n(t) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[F_2\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i(t)\right)\right]_{\lambda=0} & D_n(t) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[\tilde{F}_2\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i v_i(t)\right)\right]_{\lambda=0} \end{cases}$$

نعوض (10.3) في (1.3) لنجد:

$$\begin{cases} \sum_{n\geqslant 0} u_n(x) = f_1(x) + \int_a^b \left[k_1(x,t)\sum_{n\geqslant 0} A_n(t) + \tilde{k}_1(x,t)\sum_{n\geqslant 0} B_n(t)\right] dt \\ \sum_{n\geqslant 0} v_n(x) = f_2(x) + \int_a^b \left[k_2(x,t)\sum_{n\geqslant 0} C_n(t) + \tilde{k}_2(x,t)\sum_{n\geqslant 0} D_n(t)\right] dt \end{cases} \tag{11.3}$$

ولنعتبر المتتاليتين التراجعيتين $(u_n(x))$ و $(v_n(x))$ والمعرفتين كمايلي:

$$\begin{cases} u_0(x) = f_1(x) \\ u_{n+1}(x) = \int_a^b k_1(x,t)A_n(t) + \tilde{k}_1(x,t)B_n(t))dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0(x) = f_2(x) \\ v_{n+1}(x) = \int_a^b k_2(x,t)C_n(t) + \tilde{k}_2(x,t)D_n(t))dt \end{cases}$$

بعد حساب الحدود لكل من المتتاليتين $(u_n(x))$ و $(v_n(x))$ وبتعويضها في الفرض (10.3) نجد الحل $(u; v)$ للجملة المعطاة.

مثال

حل باستخدام طريقة التفكك (Adomian) الجملة التالية:

$$\begin{cases} u(x) = x - \frac{4}{7} + \int\limits_{-1}^{1} t(u^2(t) + v^2(t))dt \\ v(x) = x^2 + x^3 + \frac{4}{7} + \int\limits_{-1}^{1} t(u^2(t) - v^2(t))dt \end{cases} \tag{12.3}$$

الحل:/
نفرض أن:

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \\ v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \end{cases} \tag{13.3}$$

وليكن:

$$\begin{cases} u^2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) \quad /A_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i(t)\right)^2\right]_{\lambda=0} \quad n \in \mathbb{N} \\ v^2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(t) \quad /B_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i v_i(t)\right)^2\right]_{\lambda=0} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{14.3}$$

بتعويض كل من (13.3) و (14.3) في (12.3) نجد:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = x - \frac{4}{7} + \int\limits_{-1}^{1} t(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(t))dt \\ \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = x^2 + x^3 + \frac{4}{7} + \int\limits_{-1}^{1} t(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) - \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(t))dt \end{cases}$$

ولنعتبر المتتاليتين التراجعيتين $(u_n(x))$ و $(v_n(x))$ والمعرفتين كمايلي:

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ u_{n+1}(x) = -\frac{4}{7} + \int\limits_{-1}^{1} t(A_n(t) + B_n(t))dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0(x) = x^2 + x^3 \\ v_{n+1}(x) = \frac{4}{7} + \int\limits_{-1}^{1} t(A_n(t) - B_n(t))dt \end{cases}$$

$$n = 0 \rightarrow u_1(x) = -\frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} t(A_0(t) + B_0(t))dt$$

$$u_1(x) = -\frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} t(u_0^2(t) + v_0^2(t))dt$$

$$u_1(x) = -\frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} t(t^2 + (t^2 + t^3)^2)dt$$

$$u_1(x) = -\frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} t(t^2 + t^4 + t^6 + 2t^5)dt$$

$$u_1(x) = -\frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} (t^3 + t^5 + t^7 + 2t^6)dt$$

$$u_1(x) = -\frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} t^3 dt + \int_{-1}^{1} t^5 dt + \int_{-1}^{1} t^7 dt + 2\int_{-1}^{1} t^6 dt$$

$$u_1(x) = -\frac{4}{7} + 4\int_{0}^{1} t^6 dt$$

$$u_1(x) = -\frac{4}{7} + \frac{4}{7} = 0 \rightarrow \forall j \geqslant 1 \quad u_j(x) = 0 \Rightarrow u(x) = u_0(x) = x$$

$$n = 0 \rightarrow v_1(x) = \frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} t(A_0(t) - B_0(t))dt$$

$$v_1(x) = \frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} t(u_0^2(t) - v_0^2(t))dt$$

$$v_1(x) = \frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} t(t^2 - (t^2 + t^3)^2)dt$$

$$v_1(x) = \frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} t(t^2 - t^4 - t^6 - 2t^5)dt$$

$$v_1(x) = \frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} (t^3 - t^5 - t^7 - 2t^6)dt$$

$$v_1(x) = \frac{4}{7} + \int_{-1}^{1} t^3 dt - \int_{-1}^{1} t^5 dt - \int_{-1}^{1} t^7 dt - 2\int_{-1}^{1} t^6 dt$$

$$v_1(x) = \frac{4}{7} - 4\int_{0}^{1} t^6 dt$$

$$v_1(x) = \frac{4}{7} - \frac{4}{7} = 0 \rightarrow \forall j \geqslant 1 \quad v_j(x) = 0 \Rightarrow v(x) = v_0(x) = x^2 + x^3$$

الخلاصة:

$$(u(x); v(x)) = (x; x^2 + x^3)$$
$$S = \left\{(x; x^2 + x^3)\right\}$$

وهو نفس الحل المحصل عليه في المثال السابق بطريقة الحساب المباشر.

الخاتمة

يندرج محتوى هذه المذكرة في عرض طرق حل مختلف المعادلات التكاملية غير الخطية لفريدهولم.
وتتجلى أهمية هذا النوع من المعادلات في المسائل الفيزيائية كالاهتزازات وعلم المرونة ومشاكل الهندسة الرياضية.
لذلك اخترنا دراسة هذا الموضوع وقمنا بتقسيمه إلى ثلاثة فصول في الفصل الأول عرضنا بعض الأشكال عن المعادلات التكاملية غير الخطية كما تطرقنا إلى نظرية وجود الحل لمعادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية من الصنف الثاني, أما في الفصل الثاني فتناولنا طرق حل مختلف أنواع معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية, وختمنا الدراسة في الفصل الثالث بعرض طريقتين مختلفتين في حل جمل معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية من الصنف الثاني.

المصادر

[1] Abdul-majid wazwaz ,Linear and non- linear integral equtions methods and applications ,Sait xavier university Chicago .USA. 2011 .

[2] A. Jerri ,Introduction to Integral Equations with Applications ,Wiley ,New York , 1999.

[3] H.T. Davis ,Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations ,Dover Publications ,New York ,1962.

[4] Juren appell espedito de pascale alfonso vignoli ,Non-linear spectral theory , Walter de gruyter ,Berlin ,Now york ,2004.

[5] M.rahaman ,integral equations and their applications ,Dalhousie university ,Canada ,2007.

[6] S.Krasnov ,A.Kisslev ,G.Makarenko ,equations intgrales ,problmes et exercices ; ditions Mir ,Moscou ,1981.

الملخص :
تكمن أهمية هذا العمل في دراسة بعض طرق حل المعادلات التكاملية غير الخطية لفريدهولم من الصنفين الأول والثاني.
كما قمنا بدراسة طرق حل جمل المعادلات التكاملية غير الخطية لفريدهولم من الصنف الثاني.
الكلمات المفتاحية: معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية ,جمل معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية ,معادلات فريدهولم التكاملية المتجانسة ,معادلات فريدهولم التكاملية غير المتجانسة.

Abstract :
The importance of this work lies some methods of solving the integral equations and the non linear Fredholm in two kinds, the first and second.
Also, we study the methods of solving the systems of the integral equations and non-liear Fredholm integral of the second kind.
key words :
non-linear Fredholm integral equations.
systems of nonlinear Fredholm integral equations.
homogeneous nonlinear Fredholm integral equations.
nonhomogeneous nonlinear Fredholm integral equations.