جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي

ميدان: رياضيات وإعلام الي

فرع: رياضيات

اختصاص: تحليل

من إعداد الطالب: فريجات العيد

الموضوع

تمديد المؤثر الناظمي غير المحدود

نوقشت يوم 01-06-2017 من طرف لجنة المناقشة :

عماره عبد القادر	أستاذ مساعد.أ.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
السعيد محمد السعيد	أستاذ محاضر. أ.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
عسيلة مصطفى	أستاذ محاضر.ب.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

شكر وعرفان

الحمد لله لرب العالمين حمدا يليق بجلال وجهه وعظيم سلطانه والصلاة والسلام على قدوة المربين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين .

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم :

<<من لم يشكر القليل لم يشكر الكثير ومن لم يشكر الناس لم يشكر الله >>

رواه أحمد والترميذي .

نتقدم بالشكر الجزيل والعرفان الجميل :

إلى الأستاذ المشرف عسيله مصطفى الذي لم يبخل علينا بنصائحه وتوجيهاته، لك منا كل معاني التقدير والعرفان .

إلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الجامعي .

إلى كل من ساهم في إنجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد .

إلى أعضاء اللجنة المناقشة لقبولهم مناقشة وإثراء هذه المذكرة .

إهداء

إليك أمي الغالية...يامن ضحيتي من أجلي بكل شيء...
جزاك الله عني كل خير...
إليك والدي الحبيب...لقد كنت نعم الأب ومازلت...
أسأل الله أن يحفظك لنا وأن يبارك لنا في عمرك...
إليكم إخوتي وأخواتي...لقد كنتم نعم السند...
أدعوا الله أن يوفقكم في حياتكم...
إلى كل من قاسمني حلو الحياة الجامعية ومرها...
إلى كل من عرفتهم وأخص بالذكر أصدقاء الثانوية...
إلى كل من كنت يوما تلميذا أو طالبا عنده...
إلى كل من نساه قلمي ولم ينساه قلبي...

فريجات العيد.

ترميز

الرمز	مدلوله	الصفحه
X	مجموعه غير خاليه	02
$P(X)$	مجموعة اجزاء X	02
τ	تبولوجيا	02
(X, d)	فراغ متري	02
X	فضاء شعاعي	03
$(X. \Vert\Vert)$	فضاء شعاعي نظيمي	03
K	الحقل	03
$\mathbb{R}$	مجموعة الاعداد الحقيقيه	03
C	مجموعة الاعداد المركبه	03
$\langle , \rangle$	تطبيق الجداء السلمي	04
$(X, \langle , \rangle)$	فراغ شبه هلبرتي	04
H	فراغ هيلبار	04
$X^{\perp}$	مجموعة العناصر العموديه على X	04
$\oplus$	الجمع المباشر التبولوجي	05 *
$\dot{+}$	الجمع المباشر الجبري	05
$P_{X_1}x_1$	المسقط العمودي لعنصر x_1 على X_1	05
$F : X \longmapsto Y$	مؤثر من X في Y	06
$D(F)$	مجموعة تعريف المؤثر F	06
$E(F)$	مجموعة قيم المؤثر F	06
Γ_F	بيان المؤثر F	06
$kerF$	نواة المؤثر F	07
$L(X, Y)$	فراغ المؤثرات الخطيه من X في Y	07
X^*	فراغ الاشكال الخطيه على X	07
$\Vert . \Vert_F$	نظيم بيان F	08
$\delta(F)$	طيف المؤثر F	14
$\rho(F)$	مجموعة النقط النظاميه للمؤثر F	14
$\rho_0(F)$	النقط من الصنف النظامي للمؤثر F	14
$r_\delta(F)$	نصف قطر الطيف	15

الفهـــــــرس

مقدمة

يعتبر مفهوم المؤثر من أهم مفاهيم التحليل الدالي وهو تعميم لمفهوم الداله والتطبيق
ودراسة المؤثرات جاءت لتعميم مفاهيم الجبر الخطي في الأبعاد غير المنتهية وهذه الدراسه تنقسم الى عدت أقسام عامه من حيث كونها خطيه - غير خطيه - محدودة ، وهذا كله من أجل تسهيل حلول المعادلات الداليه .
اختيارنا للمؤثر المغلق ضروري ذلك لأن المؤثر المغلق معلوم أن طيفه كل المستوي المركب لايملك نقط نظاميه مما يجعل المعادلات الداليه مستحيلة الحل أما بالنسبه للمرثؤ المغلق الناظمي F هو مؤثر قريب جدا من المؤثر القرين لنفسه ويتميز بصفات طيفية جيده ،أهمها أن نصف قطر الطيف له يساوي نظيمه أي:
$r_\delta(F) = \| F \|$ وهذا يسهل إيجاد الحيز الهندسي للأعداد المركبه λ التي من أجلها يكون المؤثر F_λ قابل للقلب باستمرار لكن مع جودة هذا الصنف من المؤثرات يبقى تعريفه على مجموعة جزئية من فراغ هيلبار H و بالتالي جائت فكرة تمديد هذا المؤثر للحصول على مؤثر يحمل نفس الصفات و معرف على كل الفراغ.
و على هذا الأساس أختير موضوع المذكرة.
" التمديد الناظمي للمؤثر الناظمي غير المحدود "
المذكرة تحتوي على فصلين:
الفصل الأول: مفاهيم أساسية.
يتناول أهم المفاهيم الأساسية من التبولوجيا و بالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات.
الفصل الثاني: تمديد المؤثر الناظمي غير المحدود.
تناول هذا الفصل النقاط التالية:

1. تمديد المؤثر المغلق المتناظر.
2. تمديد المؤثر الناظمي المغلق القابل للقلب.
3. تمديد المرثر الناظمي المغلق المتناظر الموجب.
4. نمديد المؤثر الناظمي.

الفصل الأول
مفاهيم اساسية

1.1 الفراغ التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية، $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X.

تعريف 1.1.1 تعرف التبولوجيا على X ويرمز لها بالرمز τ على أنها أسرة جزئية من $P(X)$، تحقق:

1. $X \in \tau$, $\varnothing \in \tau$
2. $\forall O_1, O_2 \in \tau;\ O_1 \bigcap O_2 \in \tau$
3. $\bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \tau$;$(O_i \in \tau / i \in I)$، I مجموعة دلائل كيفية .

- الزوج (X, τ) يسمى فراغا تبولوجيا .
- عناصر الأسرة τ تسمى مفتوحات الفراغ التبولوجي (X, τ).

2.1 الفراغ المتري

لتكن X مجموعة كيفية غير خالية .

تعريف 2.1.1 نقول أن الزوج (X, d) فراغا متريا، إذا عرفنا تطبيق d من $X \times Y$ في $\mathbb{R}$ يحقق من أجل كل f ، g ، k من X مايلي :

1. $d\left(f, g\right) = 0 \Leftrightarrow f = g$
2. $d\left(f, g\right) = d\left(g, f\right)$
3. $d\left(f, g\right) \leqslant d\left(f, k\right) + d\left(k, g\right)$

التطبيق d يسمى مسافة ، والعدد الحقيقي $d(f,g)$ المسافة بين f وg ، والزوج (X,d) يسمى فراغا متريا .

نتائج 1.2.1 إذا كان (X,d) فراغا متريا ، فإنه من أجل كل k,g,f من X يتحقق مايلي :

1. $d(f,g) \geqslant 0$
2. $|d(f,k) - d(k,g)| \leqslant d(f,g)$

3.1 الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 3.1.1 يسمى فراغا شعاعيا نظيميا، كل زوج $(X, \|.\|)$، حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K}$ أحد الحقلين ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)، و $\|.\|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}_+$ و يحقق الشروط التالية:

$$X \mapsto \mathbb{R}_+$$

$$f \mapsto \|f\|$$

1. $\forall f \in X, \quad \|f\|_X = 0 \Longleftrightarrow f = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in X, \quad \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
3. $\forall f, g \in X, \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

الرمز $\|.\|$ يسمى نظيما، والعدد $\|f\|$ يسمى نظيم العنصر f.

تعريف 3.2.1 نقول أن المتتاليه $(f_n)_{n\geq 0}$ أنها متقاربه في فضاء شعاعي نظيمي اذا كان

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N \ \ , \forall n \geq N \quad \| f_n - f \| < \epsilon$$

تعريف 3.3.1 نقول أن المتالية $(f_n)_{n\geq 0}$ لكوشي في X اذا تحقق

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_\epsilon \geqq 0 \ \ \forall n, m \geqq n_\epsilon \longrightarrow \| f_n - f_m \| < \epsilon$$

تعريف 3.4.1 نقول أن الفضاء الشعاعي النظيمي أنه تام اذا كانت كل متتالية كوشي متقاربه فيه

4.1 فراغ هيلبار

1.4.1 الجداء السلمي

ليكن X ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C}$أو$\mathbb{R})$.

تعريف 4.1.1 يعرف الجداء السلمي على X بأنه تطبيق من الجداء $X \times X$ نحو $\mathbb{K}$ أي :

$$h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

يحقق من أجل كل f ، g ، k من X ومن أجل كل α من $\mathbb{K}$ مايلي:

1. $h(f,f) \geqslant 0\ ,\ h(f,f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$
2. $h(\alpha f, f) = \alpha h(f,f)$
3. $h(f,g) = \overline{h(g,f)}$
4. $h(f+g,k) = h(f,k) + h(g,k)$

يرمز للجداء السلمي بالرمز $\langle , \rangle$ عندها الزوج $(X, \langle , \rangle)$ يسمى فراغا شبه هيلبرتيا .

نتيجة 4.1.1 كل فراغ شبه هيلبرتي يكون فراغا شعاعيا نظيميا مع النظيم :

$$\|f\| = \sqrt{h(f,f)}$$

تعريف 4.2.1 الفراغ الهيلبرتي هو كل فراغ شبه هيلبرتي تام ويرمز له بالرمز H.

2.4.1 التحليل العمودي

ليكن H فراغ هيلبار و X فرغا جزئيا منه .

تعريف 4.3.1 يعرف المتمم العمودي للفراغ X البنسبه للفراغ H بأنه مجموعة كل العناصر من H العموديه على X ونرمز لها بـ $X^{\perp}$.

نتيجة 4.2.1 اذا كان X فراغا جزئيا مغلقا من H فإن:
$H = X \oplus X^{\perp}$ عندها نقول أن $X^{\perp}$، X هما التحليل العمودي للفراغ H

3.4.1 الجمع المباشر التبولوجي

تعريف 4.4.1 يقال أن الفراغ X يكتب بشكل جمع مباشر جبري للفراغين $X_1.X_2$ ونكتب

$$X = X_1 \dot{+} X_2$$

اذا كتب كل عنصر x من X بشكل وحيد كالتالي

$$x = x_1 + x_2 \ \ / \ \ x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \ \ \text{و} \ \ X_1 \cap X_2 = \{0\}$$

عندها يقال أن X_1, X_2 كلا منهما متمم جبري للاخر بالنسبه للفراغ X

تعريف 4.5.1 يعرف الجمع المباشر التبولوجي لفراغات هيلبار $H_1.H_2.....H_n$ بأنه الفراغ H حيث

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n \tag{1.1}$$

الصيغة(1 . 1) هي التحليل العمودي لـ H حيث :

$$H \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \ / \ \xi_n \in H_n, \ \ n \geqslant 1$$

والسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_{H_n}^2$ متقاربة .

نتائج 1.4.1

1. المجموع $X = X_1 + X_2$ يكون جمعا مباشرا جبريا اذا وفقط اذا كان
$$X_1 \cap X_2 = \{0\}$$

2. كل فراغ جزئي من X على الاقل يملك متمما جبريا له بالنسبه للفراغ X

3. الكتابه $X = X_1 \dot{+} X_2$ تقتضي وجود تطبيقي إسقاط P_{x_1}, P_{x_2} معرفين كالتالي

$$P_{x_1} : X \longrightarrow X_1 / P_{x_1}(x_1 + x_2) = x_1$$

$$P_{x_2} : X \longrightarrow X_2 / P_{x_2}(x_1 + x_2) = x_2$$

التطبيقات P_{x_2}, P_{x_1} وضح أنهما خطيان لكن في الحاله العامه قد يكونان غير مستمرين

4. استمرار أحد التطبيقين P_{x_1}وP_{x_2} يقتضي استمرار الاخر ذلك لأن

$$x = P_{x_1} + P_{x_2}$$

تعريف 4.6.1 الجمع المباشر الجبري $X = X_1 \dot{+} X_2$ يسمى جمعا مباشر تبولوجا اذا كان على الاقل احد التطبيقين P_{x_1}, P_{x_2}
مستمرا و نكتب $X = X_1 \oplus X_2$ عندها يقال أن X_2, X_1 كلا منهما متمما تبولوجي للاخر بالنسبه للفراغ X

5.1 المؤثرات الخطية

ليكن $(X, \| \ . \ \|)$ $(Y, \| \ . \ \|)$ فراغان شعاعيان نظيميان على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن D مجموعة جزئية غير خالية من X.

تعريف 5.1.1 إذا أرفق بكل عنصر f من D عنصرا معينا g من Y ، يقال أنه قد عرف مؤثرا من X في Y ، يرمز له بالرمز F ونكتب

$$F(f) = g \quad \text{أو} \quad Ff = g$$

.

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر F ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر g من Y حيث $Ff = g$ و $f \in D(F)$ تسمى مجموعة قيم المؤثر F ويرمز لها بالرمز $E(F)$ ونكتب:

$$E(F) = \{g \in Y / \ g = Ff, \ f \in D(F)\}$$

- صيغة المؤثر F تكتب كالتالي:

$$X \supset D(F) \overset{F}{\to} E(F) \subset Y$$

- مجموعة الأزواج (f, Fg) من فراغ الجداء $X \times Y$ حيث $f \in D(F)$ تسمى بيان المؤثر F ويرمز لها بالرمز Γ_F ونكتب:

$$\Gamma_F = \{(f, Fg) / \ f \in D(F)\} \subset X \times Y$$

- مجموعة أصفار المؤثر F تسمى نواة المؤثر F ويرمز لها بالرمز $\ker F$ ونكتب:

$$\ker F = \{f \in D(F)/ \;\; Ff = 0\}$$

تعريف 5.2.1 اذا كان F T مؤثرين من X في Y، يقال إن:

1. المؤثرين F T منطبقان، اذا تحقق مايلي:
   - أ. $D(F) = D(T) = D$.
   - ب. $\forall f \in D \longrightarrow Tf = Ff$.
2. المؤثر T تمديد للمؤثر F اذا تحقق مايلي:
   - أ. $D(F) \subset D(T)$.
   - ب. $\forall \in D(F) \longrightarrow Tf = Ff$.

عندها نقول إن F اقتصار للمؤثر T على $D(F)$ ونكتب $F = T/_{D(F)}$

تعريف 5.3.1 المؤثر F من X في Y يقال إنه خطي إذا تحقق مايلي:

1. المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X.
2. $\forall f_1, f_2 \in D(F), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Bbbk \longrightarrow F(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 F(f_1) + \alpha_2 (Ff_2)$
   يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y بالرمز $L(X, Y)$.

- في حالة $X = Y$ إختصارا نكتب $L(X, X) = L(X)$
- في حالة $Y = \mathbb{K}$ المجموعة $L(X, \mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية على X، وعناصرها تسمى شكل دالي أو خطي، ويرمز لها بالرمز X^* وتسمى الثنوي الجبري للفراغ X.

تعريف 5.4.1 يقال أن المؤثر F قابل للقلب إذا كانت المعادلة

$$Ff = g$$

تقبل حلا وحيدا f من $D(F)$ وذلك من أجل كل g من $E(F)$.
يسمى المؤثر من $E(F)$ في $D(F)$ الذي يلحق بـ f العنصر g مقلوب F ونرمز له بالرمز F^{-1}.

نتائج 1.5.1 اذا كان المؤثر F من $L(X, Y)$، فإن المجموعات Γ_F $E(F)$ $kerF$ تكون فرغات شعاعية جزئية من الفراغات $X \times Y$ Y X على التوالي .

نتائج 2.5.1 اذا كان المؤثر F من $L(X,Y)$، فإن الاثباتات التالية:

1. F مستمر .
2. F مستمر في الصفر .
3. F مستمر يانتظام .

تعريف 5.5.1 نقول أن المؤثر F أنه قابل للقلب باستمرار اذا كان

$$\exists F^{-1} \ / \ F^{-1} \in l(H)$$

تعريف 5.6.1 نسمي المؤثر F في فضاء هيلبار H مؤثر متقايس اذا كان

$$\| Ff \| = \| f \|$$

وذلك من اجل كل $f \in H$

قضية 1.5.1 بيان المؤثر F فراغ شبه هلبرتي بالنسبه للجداء السلمي $<,>$ المعرف كالتالي:

$$(f,g)_F = (f,g) + (Ff, Fg)$$

برهان. لاحظ من أجل كل $f,g \in D(F)$ يكون

$$\begin{aligned} ((f,Ff),(g,Fg)) &= (f,g) + (Ff,Fg) \\ &= (f,g)_F \end{aligned}$$

هذا يعني المؤثر V المعرف على $D(F)$ كالتالي

$$\begin{aligned} V : D(F) &\longrightarrow \Gamma_F \\ f &\longrightarrow (f, Ff) \end{aligned}$$

يكون تقايسيا بين $D(F)$ و Γ_F ومنه يكون Γ_F فراغ شبه هلبرتي (بحكم التقايس)، ومنه $\| . \|_F$ المشارك للجداء السلمي $<,>_F$ يسمى نظيم البيان، ويعرف بالعلاقة التالية

$$\| f \|_F = \| f \| + \| Ff \|$$

■

ملاحظة 1.5.1 من أجل دراسة المؤثر F عن طريق بيانه نعرف مؤثرين U،W في $H \oplus H$ كالتالي

$$U(f,g) = (g,f)$$

$$W(f,g) = (-g,f)$$

قضية 2.5.1 كل من المؤثرين U W يكون وحدويا يحقق

$$U^2 = I \quad , \quad W^2 = I \quad , \quad WU = -UW$$

البرهان [المرجع 1.] ■

1.5.1 فراغ المؤثرالخطية

تعريف 5.7.1 من أجل كل مؤثرين كيفيين F_1 F_2 من $L(X,Y)$ يعرف:

1. جمع المؤثرين F_1, F_2 كالتالي

$$(F_1 + F_2)f = F_1 f + F_2 f \quad , \quad f \in D(F_1) \bigcap D(F_2)$$

2. ضرب المؤثر F_1 بعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي:

$$(\alpha F_1)\, f = \alpha F_1 f \quad , \quad f \in D(F_1)\ ,\ \alpha \in \mathbb{K}$$

نتائج 3.5.1

1. المؤثران F, T حيث $T = \alpha F_1$, $F = F_1 + F_2$ يكونا من $L(X,Y)$.
2. المجموعتان X^* $L(X,Y)$ تكونا فراغين شعاعين على الحقل $\mathbb{K}$.
   نلبه هنا في الحاله عندما يكون بعد احد الفراغين X أو X^* منتهي يكون بعد الاخر منتهيا أيضا،عندها يكون $\dim X^* = \dim X$.
   لكن في الحاله العامه $\dim X^* \geq \dim X$.

تعريف 5.8.1 اذا كان F, T مؤثرين من $L(X,Y)$ $L(Y,Z)$ على التوالي ، (Z ف.ش.ن.على الحقل $\mathbb{K}$)، فإن جداء المؤثرين (تركيب) المؤثرين F, T يعرف كالتالي $FT = F \circ T$، أي أن:

$$(TF)\, f \quad / \quad f \in D(F), Ff \in D(T)$$

تعريف 5.9.1 يعرف نظيم المؤثر F من $L(X,Y)$ بالصيغة التالية:

$$\| F \|= \sup_{\|f\|\leq 1} \| Ff \| \qquad \| F \|= \sup_{\|f\|=1} \| Ff \| \qquad \| F \|= \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{\| Ff \|}{\| f \|}$$

في حالة وجود الحد الاعلى أي: $\| F \|< +\infty$

$$\| F \|= \{M/ \| Ff \|\leq M \| f \|\}$$

عندها يسمى المؤثر F محدود ويرمز لهذه المجموعة من المؤثرات بالرمز $l(X,Y)$

عندها يمكن تعريف المؤثر المحدود كالتالي:

تعريف 5.10.1 يقال إن المؤثر F محدود على $D(F)$، اذا حول كل مجموعة من $D(F)$ محدوده في X الى مجموعة محدودة في Y.
في حالة $D(F) \equiv X$ يقال إن F محدود على X اختصارا يقال المؤثر F محدود .

تعريف 5.11.1 يقال إن المؤثر F محدود ،اذا وجد ثابت k, $(k > 0)$ يحقق المتراجحة التالية:

$$\| Ff \|_Y\leq k \| f \|_X \quad , \quad f \in X$$

نتائج 4.5.1

1. $l(X,Y) \subset L(X,Y)$
2. $l(X,Y)$ مزود بإحدى النظم في التعريف (5.9.1) هو فراغ شعاعي نظيمي .
3. اذا كان الفراغ Y لبناخ، فإن الفراغ $l(X,Y)$ يكون لبناخ أيضا .

ملاحظة 2.5.1 في حالة $Y \equiv \mathbb{K}$ الفراغ $l(X,Y)$ يسمى الثنوي الجبري التبولوجي ويرمز له بالرمز X' وهو جبر بناخ .
في حالة $Y \equiv X$ الفراغ اختصارا يكتب كالتالي $l(X)$

نتائج 5.5.1 الاثباتات التالية

1. $F \in l(X,Y)$.
2. F محدود على كرة الوحدة المغلقة .
3. F محدود على سطح كرة الوحدة المغلقة .

متكافئة .

نظرية 5.1.1 (التمديد بالاستمرار):ليكن X ف.ش.ن.،و Y فراغا لبناخ .
ليكن F مؤثر من $l(D(F),Y)$، حيث $\overline{D(F)}$ يملك تمديد $\hat{F}$ من $l(X,Y)$ ويحقق $\| \hat{F} \|=\| F \|$
أي:

$$\exists \hat{F} \in l(X,Y) \ / \ \hat{F}f = Ff \ , \ f \in D(F) \ , \| \hat{F} \|=\| F \|$$

البرهان [المرجع 1.] ■

2.5.1 قابلية القلب باستمرار

تعريف 5.12.1 المؤثر F من $L(X,Y)$ يقال أنه قابل للقلب بإستمرار اذا وجد له مؤثر عكسي معرف ومحدود على كل الفراغ .
أي $\exists F^{-1} \in l(X,Y)$

نظرية 5.2.1 اذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ تقابلا حيث X,Y لبناخ،فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار .

البرهان [المرجع 1.] ■

نتائج 6.5.1 ليكن المؤثر F من $l(X,Y)$ حيث Y,X فراغين لبناخ .

1. اذاوجد مؤثر T من $l(X,Y)$ يحقق:

$$TF = I_Y \ , \ FT = I_X$$

فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار، عندها يكون $F^{-1} = T$

2. اذا كان T مؤثر من $l(X,Y)$ حيث Z لبناخ و $E(T) = Z$ يحقق $kerT \subset kerF$، فإن:

$$\exists S \in l(Z,Y) \ /F = ST$$

قضية 3.5.1 يكون للمؤثر F، ($F \in L(X,Y)$) مؤثر عكسي محدود على $E(F)$، اذا وفقط اذا وجد عدد ثابت $(c > 0)$ يحقق

$$f \in D(F) \longmapsto \| Ff \| \geq c \| f \|$$

3.5.1 المؤثر العكسي وقابلية القلب باستمرار

ليكن F من $L(X,Y)$، X، Y ف.ش.ن على نفس الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 5.13.1 المؤثر F من $L(X,Y)$ يكون قابل للقلب من $D(F)$ على $E(F)$ اذا وفقط اذا تحقق أحد الشروط التاليه:

1. $\forall g \in E(F) \ \ \exists! f_g \in D(F) \ \ / \ \ g = F f_g$
2. $ker F = 0$

نرمز للمؤثر العكسي F بالرمز F^{-1} ونكتب $F^{-1}g = f_g$

نتائج 7.5.1 يكون المؤثر F $(F \in L(X,Y))$ قابل للقلب باستمرار اذا تحقق :

1. $E(F) = Y$
2. $\forall f \in D(F) \longmapsto \| Ff \| \geq c \| f \|$

قضية 4.5.1 اذا كان المؤثر F من $l(X)$ حيث X لبناخ و $1 > \| F \|$، فإن المؤثر $I - F$ قابل للقلب باستمرار، عندها يكون:

$$\| I - (I-F)^{-1} \| \leq \frac{\| F \|}{1 - \| F \|} \quad , \quad \| (I-F)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| F \|}$$

البرهان [المرجع 1.] ■

تعريف 5.14.1 المؤثر F يقال أنه مغلق في فضاء هيلبار اذا تحققت إحد الشروط التاليه

1. بيانه Γ_F مجموعه مغلقه في $H \oplus H$
2. من اجل كل متتاليه $(f_n)_{n \geqslant 0}$ من $D(F)$ حيث

$$\left\{ \begin{array}{l} F f_n \longrightarrow g \\ f_n \longrightarrow f \end{array} \right. \text{ لما } n \longrightarrow +\infty$$

يكون

$$Ff = g \ \text{ و } \ f \in D(F)$$

3. الفراغ $D(F)$ تام بالنسبه لـ F- نطيم

لنعتبر أن $\quad F \in L(H) \quad \overline{D(F)} = H$

تعريف 5.15.1 يسمى المؤثر F^* قرينا للمؤثر F اذا كان

$$\forall f.g \in H_1, H_2 \longrightarrow (Ff.g) = (f.F^*g)$$

تعريف 5.16.1 يقال أن المؤثر F متناضر اذا كان

$$(Ff.g) = (f.Fg) \quad \forall f, g \in D(F)$$

المؤثر المتناضر يسمى هرميتي

نظرية 5.3.1 يكون F متناظر اذا وفقط اذا كان $F \subset F^*$ أي F^* تمديد لـ F

البرهان [المرجع 1.] ■

تعريف 5.17.1 يقال أن المؤثر F قرين لنفسه اذا تحقق $F = F^*$ أي اذا كان متناظر و $D(F) = D(F^*)$

نتيجة 5.1.1

1. كل مؤثر قرين لنفسه يكون متناظر
2. المؤثر القرين لنفسه مغلق

6.1 المؤثر النصف محدودالمؤثر الموجب

تعريف 6.1.1 المؤثر F من $L(H)$ يقال أنه نصف محدود من الأسفل اذا وجد عددا m من $\mathbb{R}$ يحقق

$$(Ff, f) \geq m\,(f, f) \tag{2.1}$$

أكبر الأعداد التي تحقق الصيغه (2.1) تسمى الحد الأدنى للمؤثر F ويرمز له بالرمز m_F ويعطى بالعلاقه

$$m_F = \inf_{0 \neq f \in D(F)} \frac{(Ff, f)}{(f, f)}$$

تعريف 6.2.1 المؤثر F من $L(H)$ يقال أنه

1. غير سالب اذا كان $m_F = 0 \quad F \equiv 0$
2. موجب اذا كان $m_F > 0$

نتيجة 6.1.1 المؤثر الموجب المعرف بكثافه يكون متناظرا

7.1 مفهوم الطيف

ليكن F مؤثرا من $L(H)$ ، حيث H فراغ هيلبار مركب ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
مفهوم الطيف للمؤثر F له علاقة بقابلية الحل للمعادلة الدالية التالية:

$$Ff - \lambda If = g \tag{3.1}$$

أو إختصارا نكتب:

$$F_\lambda f = g/ \ F_\lambda \equiv F - \lambda I$$

حيث I المؤثر الحيادي من H في نفسه و f مجهول من $D(F)$ و g معطى من H و λ وسيط مركب .
في حالة $g = 0$ المعادلة (3.1) تسمى متجانسة .

تعريف 7.1.1 يعرف طيف المؤثر F ويرمز له بالرمز $\delta(F)$، بأنه متمم مجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالنسبة للمستويالمركب ،أي : $\delta(F) = \mathbb{C}/\rho(F)$.

تعريف 7.2.1 العدد λ من K يقال إنه قيمة ذاتية للمؤثر F إذا كان للمعادلة المتجانسه حلا غير معدوم . عندها الحل غير المعدوم يسمى الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F.

تعريف 7.3.1 العدد المركب λ يقال إنه نقطة نظامية للمؤثر F إذا كان المؤثر F_λ قابلا للقلب باستمرار . أي

$$\exists (F_\lambda)^{-1} \in l(H)$$

يرمز لمجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالرمز $\rho(F)$.
ونكتب

$$\rho(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}/ \ \ (F_\lambda)^{-1} \in l(H)\}$$

تعريف 7.4.1 العدد المركب λ يقال أنه نقطة من الصنف النظامي للمؤثر F اذا وجد ثابت c بحيث

$$\| \ (F - \lambda I)\ f \ \| \geq c \ \| \ f \ \|$$

ونرمز لها بالرمز $\rho_0(F)$

نتائج 1.7.1

1. كل نقطه نظاميه للمؤثر F هي نقطه من الصنف النظامي له أي:

$$\rho(F) \subset \rho_0(F)$$

2. مجموعة القيم الذاتيه للمؤثر F لا تكون نقطه من الصنف النظامي أي:

$$\rho_\sigma(F) \subset \mathbb{C} \setminus \rho_0(F)$$

قضية 1.7.1 اذا كان F مؤثر متناظر فإن:

$$\lambda \notin \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \in \rho_0(F)$$

برهان. نضع $\beta \neq 0$ $\lambda = \alpha + i\beta$ من أجل كل f من $D(F)$

$$\begin{aligned}
\| (F - \lambda I)f \|^2 &= \| (F - \alpha I - i\beta I) \|^2 \\
&= ((F - \alpha I)f - i\beta f, (F - \alpha I)f - i\beta f) \\
&= \| (F - \alpha I)f \|^2 + \| \beta f \|^2 + \\
&\quad ((F - \alpha I)f, -i\beta f) + (-i\beta f, (F - \alpha I)f) \\
&\geq \| \beta f \|^2 + i\,((F - \alpha I)f, \beta f) - i\,(\beta f, (F - \alpha I)f) \\
&= |\beta|^2 \| f \|^2
\end{aligned}$$

ومنه

$$\| (F - \lambda I)f \| \geq \beta \| f \|$$

ومنه $\lambda \in \rho_0(F)$ ■

قضية 2.7.1 اذا كان المؤثر F نصف محدود من الأسفل فإن:

$$]-\infty, m_F[\subset \rho_0(F)$$

برهان. من أجل كل λ حيث $\lambda < m_F$

$$\| (F-\lambda I)f \| \| f \| \geq ((F - \lambda I)f, f) = ((F - m_F I)f, f) - (\lambda - m_F)(f, f) \geq (m_F - \lambda) \| f \|^2$$

ومنه

$$\| (F - \lambda I)f \| \geq c \| f \|$$

حيث

$$c = m_F - \lambda$$

وبالتالي

$$\lambda \in \rho_0(F)$$

■

نتيجة 7.1.1 اذا كان المؤثر F موجبا أي $m_F > 0$ فإن الصفر من $\rho_0(F)$ أي أن F تقابل $(\exists F^{-1})$

قضية 3.7.1 النهاية $\lim_{n\longmapsto+\infty}(\| F^n \|)^{\frac{1}{n}}$ موجودة وتحقق الصيغة التالية:

$$\lim_{n\longmapsto+\infty}(\| F^n \|)^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1}(\| F^n \|)^{\frac{1}{n}}$$

تسمى هذه النهاية بنصف القطر الطيفي للمؤثر F ويرمز له بالرمز $r_\delta(F)$

البرهان [المرجع 2.] ■

نتائج 2.7.1 اذا كان $F \in L(H)$ و λ من $\mathbb{C}$ فإن:

1. $r_\delta(F) \leq \| F \|$
2. $r_\delta(\lambda F) = |\lambda| r_\delta(F)$
3. نصف قطر الطيف هو نصف قطر اصغر دائرة حاوية للطيف .

الفصل الثاني
تمديد المؤثر الناظمي غير المحدود

1.2 المؤثر الناظمي

تعريف 1.1.2 المؤثر F من $l(H)$ المغلق والكثيف في H
يقال أنه ناظيمي إذا كان

$$FF^* = F^*F$$

نتيجة 1.1.2 المؤثر القرين لنفسه ناظمي

قضية 1.1.2 المؤثر F من $L(H)$، (H مركب) يكون ناظميا، إذا تحققت الصيغه التاليه:

$$\forall f \in H \longrightarrow \| Ff \| = \| F^*f \| \tag{1.2}$$

برهان. نعتبر $\| Ff \| = \| F^*f \|$
لاحظ أن

$$\begin{cases} \| Ff \|^2 = (Ff, Ff) = (F^*Ff, f) \\ \| F^*f \|^2 = (F^*f, F^*f) = (FF^*f, f) \end{cases} \Leftrightarrow ((F^*F - FF^*)f, f) = 0, \forall f \in H (H \text{ مركب})$$

$$\Leftrightarrow F^*F - FF^* = 0$$

$$\Leftrightarrow F^*F = FF^*$$

■

ملاحظة 1.1.2 الشرط (1.2) لازم حتى في حالة H غير مركب .

قضية 2.1.2 اذا كان المؤثر F من $l(H)$ ناظميا، فإن

$$kerF = kerF^* = (E(F))^{\perp}$$

برهان.حسب القضية السابقة من أجل كل f من H يتحقق

$$f \in kerF \Rightarrow Ff = 0 \Rightarrow F^*f = 0 \Rightarrow f \in kerF^*$$

أي أن

$$kerF \subset kerF^*$$

بنفس الطريقه نجد

$$kerF^* \subset kerF$$

وبالتالي يكون

$$kerF = kerF^*$$

■

قضية 3.1.2 إذا كان المؤثر F من $l(H)$ ناظميا

1. يوجد f من $l(H)$ و λ من $\mathbb{C}$ تحقق

$$Ff = \lambda f$$

فإن

$$F^*f = \bar{\lambda} f$$

2. ξ, λ $(\xi \neq \lambda)$ قيم ذاتية للمؤثر F، فإن الفراغين الذاتيين المرفقين بهما يكونان متعامدين .

برهان.

1. حسب القضيه السابقه يكون

$$ker(F - \lambda I) = ker(F^* - \bar{\lambda} I)$$

ومنه نستنتج إذا كان

$$(F - \lambda I)f = 0$$

فإن

$$(F^* - \bar{\lambda} I) = 0$$

أي أن

$$Ff = \lambda f \Rightarrow F^*f = \bar{\lambda} f$$

2. أذا كان f و g كيفيين من الفراغين الذاتيين المرفقين بالقيمة ξ و λ على التوالي، فإن

$$Ff = \lambda f \quad , \quad Fg = \xi g$$

لاحظ أن :

$$\begin{aligned} \lambda (f, g) &= (Ff, g) \\ &= (f, F^* g) \\ &= \left(f, \bar{\xi} g\right) \\ &= \xi (f, g) \end{aligned}$$

ومنه يكون

$$(\lambda - \xi)(f, g) = 0$$

بما أن $\xi \neq \lambda$، فإن من الصيغه الاخيره تكون

$$(f, g) = 0$$

أي أن

$$f \perp g$$

وعليه يكون الفراغان المرفقان بالقيمة ξ و λ متعامدين.

■ التعاريف والقضايه تبقى سارية المفعول في حالة المؤثر غير المحدود

2.2 تمديد المؤثر المغلق

نظرية 2.1.2 $F \in L(H)$ $\left(\overline{D(F)} = H\right)$ يكون قابل للإغلاق إذا وفقط إذا كان $\overline{D(F^*)} = H$

برهان.($\Rightarrow$) عندنا

$\overline{D(F^*)} = H$ و $\Gamma_{F^*} = H \subset W\bar{\Gamma}_F$ و F^* مغلق.

$$\Gamma_{F^{**}} = H \subset W\bar{\Gamma}_{F^*} = H \subset W\Gamma_{F^*}$$

بماأن

$$W^2 - I \quad , \quad \bar{\Gamma}_F = ((\Gamma_F)^{\perp})^{\perp}$$

فإن

$$\bar{\Gamma}_F = ((\Gamma_F)^{\perp})^{\perp} = (W^2(\Gamma_F)^{\perp})^{\perp} \tag{2.2}$$

بماأن

$$(W\Gamma_F)^{\perp} = W\Gamma_F^{\perp}$$

فإن الصيغة (2.2) تكتب كالتالي

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_F &= ((\Gamma_F)^{\perp})^{\perp}\\ &= ((WW\Gamma_F)^{\perp})^{\perp}\\ &= (W\Gamma_{F^*})^{\perp}\end{aligned}$$

ومنه

$$\bar{\Gamma}_F = \Gamma_{F^{**}}$$

هذا يعني أن $\bar{\Gamma}_F$ تمثل بيان للمؤثر F^{**} ومنه F قابل للتمديد المغلق وغلاقته $\bar{F} = F^{**}$
($\Leftarrow$) نفرض $\overline{D(F^*)} \neq H$ ومنه

$$\begin{aligned}&\exists f \in H \ \ , \ \ (f \neq 0)/f \perp D(F^*)\\ &f \perp D(F^*) \Rightarrow (0, f) \perp (-F^*g, g) \ \ /g \in D(F^*)\\ &\Rightarrow (0, f) \perp W(g, F^*g) \ \ /g \in D(F^*)\\ &(0, f) \in (W\Gamma_{F^*})\end{aligned}$$

ومنه المجموعه $(W\Gamma_{F^*})^{\perp}$ لاتمثل بيان لمؤثر ما من $L(H)$
بما أن

$$\bar{\Gamma}_F = (W\Gamma_{F^*})^{\perp}$$

فإن $\bar{\Gamma}_F$ لاتمثل بيان لمؤثر ما من $L(H)$ أي F غير قابل للإغلاق ومنه اذا كان $\overline{D(F^*)} = H$ فإن F قابل للإغلاق

■

نتيجة 2.1.2 اذا كان F قابل للإغلاق فإن

$$F^* = \bar{F}^* = F^{***} = (\bar{F})^*$$

قضية 1.2.2 اذا كان المؤثر F متناظر فإنه يكون قابل للإغلاق عندها يكون $\bar{F}$ متناظر

برهان. $F \in L(H)$ متناظر $F \subset F^*$ لاحظ بماأن F^* مغلق ويحقق $F \subset F^*$ فإنه تمديد مغلق لـ F ومنه F قابل للإغلاق .
بماأن غلاقة $F(\bar{F} = F^*)$ أصغر تمديد مغلق لـ F فإن

$$F \subset F^{**} \subset F^* \tag{3.2}$$

لبرهان F^{**} متناظر يكفي برهان

$$F^{**} \subset F^{***} \quad \text{و} \quad \overline{D(F^{**})} = H$$

بماأن

$$D(F^{**}) \subset D(F^*)$$

فإن

$$\overline{D(F^{**})} = H$$

من (3.2) نستنتج

$$F^{**} \subset F^{***}$$

أي

$$\bar{F} = F^{**}$$

متناظر ■

3.2 تمديد المؤثر الناظمي المغلق القابل للقلب

ليكن $F_0 \in L(H)$ مغلق و $\overline{D(F_0)} = H$ نفرض أن F_0 يملك عكسي محدود أي

$$\exists F_0^{-1} \in l(H)/ \quad \| F_0^{-1} \| < +\infty$$

عندها مجموعة قيم F_0 أي المجموعه $E(F_0)$ تكون مغلقه
وليكن $T_0 \in L(H)$ مغلق $\overline{D(T_0)} = H$ نفرض أن T_0 يملك عكسي محدود أي

$$\exists T_0^{-1}/ \quad \| T_0^{-1} \| < +\infty$$

بحيث

$$(F_0 f_0, g_0) = (f_0, T_0 g_0)\, \forall f_0 \in D(F_0), g_0 \in D(T_0)$$

$E(T_0)$ مغلق في H

قضية 1.3.2 اذا كان T_0, F_0 يحققان الشروط السابقه فإن

$$E(T_0^*) = E(F_0^*) = H$$

برهان.نبرهن أن

$$E(F_0^*) = H$$

لهذا يكفي برهان أن المعادله

$$F_0^* g = h$$

من أجل كل طرف ثاني h يملك على الأقل حل واحد g من $D(F_0^*)$ نضع

$$h = F_0^{-1}\varphi_0 \;\;,\;\; F_0 h = \varphi_0$$

نعرف على $E(F_0)$ الشكل الخطي

$$\psi_h(\varphi_0) = \big(h, F_0^{-1}\varphi_0\big)$$

واضح أن من أجل كل h الشكل الخطي $\psi_h(\varphi_0)$ مستمر بالنسبه لـ φ_0 هذا يوؤدي إلى وجود عنصر g من $E(F_0)$ يحقق

$$\psi_h(\varphi_0) = \big(h, F_0^{-1}\varphi_0\big) = (g, \varphi_0)$$

أو نكتب

$$(h, k) = (g, F_0 h)$$

ومنه نستنتج أن

$$F_0^* g = h \;\; \text{و} \;\; g \in D(F_0^*)$$

ومنه

$$E(F_0^*) = H$$

■ بنفس الطريقه نبرهن $E(T_0^*) = H$

نظرية 3.1.2 يوجد على الأقل تمديد واحد F_0'' للمؤثر F_0 محتوى في T_0^* (ويملك عكسي محدود $F_0''^{-1}$ معرف على كل الفراغ)يكون قابلا للقلب باستمرار

برهان. لاحظ أن

$$(u \perp E(F_0)) \Leftrightarrow (F_0 f_0, u) = 0 \;\; \forall f \in D(F_0)$$

هذا يعني أن

$$u \in D(F_0^*) \text{ و } F_0^* u = 0$$

ومنه يمكن تحليل فراغ هيلبار H كالتالي

$$H = E(F_0) \oplus U$$

حيث U هو فراغ حلول المعادله

$$F_0^* u = 0 \ / \ u \in D(F_0^*)$$

على المجموعه $D(F_0)$ التمديد المطلوب للمؤثر $F_0^{''}$ ينطبق مع F_0 أي

$$F_0^{''} f = F_0 f \ / \ f \in D(F_0)$$

من القضيه السابقه لدينا

$$E(T_0^*) = H$$

وعليه توجد مجموعه W من H تحقق

$$T_0^* W = V$$

واضح أن فراغ حلول المعادله

$$F_0^* u = 0$$

الذي نرمز له ب U يحقق

$$U \subset W$$

لاحظ أن

$$W = U^\perp \oplus U$$

حيث $U^\perp$ المتمم العمودي لـ U في W

نضع

$$F_0^{''} u^\perp = T_0^* u^\perp \quad \forall u^\perp \in U^\perp$$

نلاحظ أن

$$F_0^{''} U^\perp = T_0^* U^\perp = T_0^* (U^\perp \oplus U) = T_0^* W = V$$

ومنه المؤثر $F_0^{''}$ يطبق $U^\perp$ على كل V إختصار المؤثر $F_0^{''}$ على $U^\perp$ واضح أنه يملك عكسي $F_0^{''}$ عندها يكون

$$U^\perp = F_0^{''-1} V$$

نضع

$$D(F_0'') = D(F_0) \oplus U^{\perp}$$

و

$$F_0''(f_0 + u^{\perp}) = F_0'' f_0 + F_0'' u^{\perp} \quad \forall f_0 \in D(F_0), u^{\perp} \in U^{\perp}$$

بهذه الكيفيه يكون F_0'' هو التمديد المطلوب
من ناحيه ثانيه

$$E(F_0'') = F_0'' D(F_0'') = F_0''(D(F_0) + U^{\perp}) = E(F_0) \oplus U = H$$

واضح أن F_0'' مؤثر مغلق و $F_0''^{-1}$ مغلق ومعرف على كل الفراغ اي أنه محدود ومنه F_0'' قابل للقلب باستمرا ■

نظرية 3.2.2 مجموعة تعريف المؤثر T_0^* أي المجموعه $D(T_0^*)$ تحلل عن طريق المجموع المباشر كالتالي

$$D(T_0^*) = D(F_0) \oplus \hat{F}^{-1} V \oplus U$$

حيث V فراغ حلول المعادله

$$F_0^* v = 0$$

و U قراغ حلول المعادله

$$T_0^* u = 0$$

و $\hat{F}$ هو أحد تمديدات المؤثر F_0 المحتوى في T_0^* ويحقق شروط النظريه السابقه

برهان. عندنا

$$H = E(T_0^*) \oplus V \tag{4.2}$$

بادخال على الصيغه (4.2) المؤثر $\hat{F}^{-1}$ نحصل على الصيغه

$$D(\hat{F}) = D(F_0) \oplus \hat{F}^{-1} V \tag{5.2}$$

ذلك لأنه

$$\hat{F}^{-1} E(F_0) = F_0^{-1} E(F_0) = D(F_0)$$

من ناحيه ثانيه

من أجل كل f كيفي من $D(T_0^*)$ و $T_0^* f = h$

وبما أن

$$E(\hat{F}_0) = H$$

فإنه يوجد عنصر وحيد $\hat{f}$ من $D(\hat{F})$ يحقق

$$\hat{F}\hat{f} = h$$

لاحظ أن

$$u = f - \hat{f} \in U$$

ومنه

$$f = \hat{f} + u$$

هذا يعني أن

$$D(T_0^*) = D(\hat{F}) \oplus U \tag{6.2}$$

من (5.2) و (6.2) نستنتج أن

$$D\left(T_0^*\right) = D\left(F_0\right) \oplus \hat{F}^{-1}V \oplus U$$

■

4.2 تمديد المؤثر الناظمي المغلق المتناظر الموجب

قضية 1.4.2 المؤثر المغلق المتناظر الموجب F يملك تمديدات تكون قرينه لنفسها , على الأقل أحداهما يملك حد أدنى يساوي m_F ويكون موجبا هذا التمديد نرمز له بالرمز F_m

البرهان [المرجع 8].

■

نتائج 1.4.2 المؤثر F يملك جذر تربيعي $F_m^{\frac{1}{2}}$ يحقق

$$D(F) \subset D(F_m) \subset \overline{D(F)} = \overline{D(F_m)} = D(F_m^{\frac{1}{2}})$$

$$\left(\hat{F}f, g\right) = \left(\hat{F_m}f, g\right) = \left(F_m^{\frac{1}{2}}f, F_m^{\frac{1}{2}}g\right)$$

حيث $\hat{F}$ تمديد F على $\overline{D(F)}$

$\hat{F}_m$ تمديد F_m على $\overline{D(F_m)}$

قضية 2.4.2 اذا كان F مؤثرا مغلقا و متناظرا وموجبا و X فراغ حلول المعادله المرافقه $X = H \ominus E(F)$

$$F^{*}u = 0$$

فأن من أجل كل F_0 تمديد للمؤثر F قرين لنفسه وموجب يحقق

$$\overline{D(F_0)} = \overline{D(F)} \oplus \overline{D(F_0)} \cap X$$

عندها يكون

$$\left(\hat{F}_0 f, g\right) = \left(\hat{F} f, g\right), f, g \in \overline{D(F)}$$

$$\left(\hat{F}_0 f, h\right) = \left(\hat{F}_0 h, f\right) = 0 \quad , f \in \overline{D(F)}, h \in \overline{D(F)} \cap X$$

حيث $\hat{F}$ تمديد لـ F على $\overline{D(F)}$
$\hat{F}_0$ تمديد لـ F_0 على $\overline{D(F_0)}$

البرهان [المرجع 8 .] ■

قضية 3.4.2 اذا كان F', F'' تمديدين قرينين لنفسهما نصف محدودين من الأسفل للمؤثر F فإنه

$$(F' + \alpha I)^{-1} \le (F'' + \alpha I)^{-1} \ \forall \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{D(F')} \cap X \subset \overline{D(F'')} \cap X \\ \left(\hat{F''} u, u\right) \le \left(\hat{F'} u, u\right) \quad u \in \overline{D(F')} \cup X \end{cases}$$

حيث $\hat{F''}$ تمديد لـ F'' على $\overline{D(F'')}$
$\hat{F'}$ تمديد لـ F' على $\overline{D(F')}$

البرهان [المرجع 8 .] ■

قضية 4.4.2 اذا كان F مؤثرا مغلقا ومتناظرا وموجبا $(m_F > 0)$ فإن مجموعة تعريف المؤثر القرين F^{*} تكتب كالتالي

$$D(F^{*}) = D(F) \oplus F_m^{-1} X \oplus X \tag{7.2}$$

F_m هو تمديد المؤثر F الذي يملك حد أدنى m_F
X هو فراغ حلول المعادله المرافقه

$$F^{*}u = 0$$

برهان.بماأن

$$D(F) \subset D(F^*) \qquad X \subset D(F^*)$$

و

$$F_m^{-1}X \subset D(F_m) \subset D(F^*)$$

فإن

$$D(F) \oplus F_m^{-1}X \oplus X \subset D(F^*) \tag{8.2}$$

نبرهن الإحتواء العكسي

$$D(F^*) \subset D(F) \oplus F_m^{-1}X \oplus X$$

لتكن

$$g \in D(F^*) \qquad F^*g = h$$

$$f = F_m^{-1}h$$

بماأن

$$\begin{aligned} F^*(g-f) &= F^*g - F_m f \\ &= h - h \\ &= 0 \end{aligned}$$

فإن

$$u = g - f \in X$$

بماأن

$$H = E(F) \oplus X$$

فإن

$$h = h_0 + u^{'}/h_0 \in E(F), \quad u^{'} \in X$$

ومنه يكون

$$f = F_m^{-1}(h_0 + u^{'}) = F^{-1}h_0 + F_m^{-1}u^{'}$$

$$g = f_0 + F_m^{-1}u^{'} + u/f_0 = F^{-1}h_0 \in D(F)$$

ومنه يكون

$$D(F^*) \subset D(F) \oplus F_m^{-1}X \oplus X \tag{9.2}$$

من (8.2) و(9.2) نجد

$$D(F^*) = D(F) \oplus F_m^{-1}X \oplus X$$

■

نظرية 4.1.2 يكون المؤثر F_0 تمديدا قرينا لنفسه للمؤثر F المغلق المتناظر الموجب اذا وفقط اذا كان F_0 هو اقتصار لـ F^* على الجمع المباشر

$$D(F_0) = D(F) \oplus (F_m^{-1} + A)X_1' \oplus X_0$$

حيث A مؤثر قرينا لنفسه في فراغ جزئي X_1 من X و X_1' مجموعه كثيفه في X_1,$(X_1' = D(A))$

$$X_0 = X \ominus X_1$$

حيث X فراغ حلول المعادله المرافقه

برهان.نفرض أن F_0 تمديد قرين لنفسه للمؤثر F و X_0 فراغ حلول المعادله

$$F_0^* u = 0$$

لاحظ أن

$$H_+ = H \ominus X_1 = E(F) \oplus X_1$$

نضع

$$X_1 = X \ominus X_0$$

بماأن

$$\overline{E(F_0)} = H_+$$

فإن

$$E(F_0) = E(F) \oplus X_1' \qquad (10.2)$$

حيث X_1' مجموعه كثيفه في X_1

إقتصار F_0 على H_+ أي المؤثر F_0/H_+ يملك مؤثرا عكسيا F_0^{-1} يكون قرينا لنفسه ويحقق

$$F_0^{-1}E(F_0) = P_+D(F_0)$$

حيث P_+ الاسقاط على H_+

لاحظ أنه يمكن تمديد F_0^{-1} على كل H ذلك يجعل

$$F_0^{-1}u_0 = 0 \qquad u_0 \in X_0$$

من الصيغه (9.2) نستنتج أن

$$P_+D(F_0) = P_+D(F) \oplus F_0^{-1}X_1' \qquad (11.2)$$

بماأن

$$D(F_0) = P_+D(F_0) \oplus X_0$$

فإن (11.2) تكافئ

$$D(F_0) = D(F) \oplus F_0^{-1}X_0^{-1} \oplus X_0 \qquad (12.2)$$

لاحظ أن المؤثر A المعرف كالتالي

$$A = F_0^{-1} - P_+F_m^{-1}P_+$$

يكون قرينا لنفسه ومعرف بكثافه في H

$$D(A) = D(F_0^{-1}) = E(F_0) \oplus X_0$$

ويحقق

$$AX_0 = 0$$

لوحظ من أجل كل h من $E(F)$ $(f = F_0^{-1}h)$ يكون

$$\begin{aligned} Ah &= F_0^{-1}h - P_+F_m^{-1}P_+h \\ &= P_+f - P_+F_M^{-1}h \\ &= P_+f - P_+f \\ &= 0 \end{aligned}$$

أي أن

$$AE(F) = 0$$

وعليه يكون الفراغين $X_0, E(F)$ ثابتين بالنسبه للمؤثر A وبالتالي المؤثر A اذا أقتصرى على X_1' يكون قرين لنفسه على X_1 وعليه من الصيغه (12.2) تكون

$$\begin{aligned} D(F_0) &= D(F) + [P_+F_m^{-1}P_+ + (F_0^{-1} - P_+F_m^{-1}P_+)]X_1' + X_0 \\ &= D(F) + (P_+F_m^{-1} + A)X_1' + X_0 \\ &= D(F) + P_+(F_m^{-1} + A)X_1' + X_0 \end{aligned}$$

بما أن

$$P_+(F_m^{-1}+A)X_1'+X_0=(F_m^{-1}+A)X_1'+X_0$$

فإن

$$D(F_0)=D(F)+(F_m^{-1}+A)X_1'+X_0$$

الجمع الأخير يكون جمعا مباشرا ذلك لأنه يعتبر جزء من الجمع المباشر المعرف في الصيغه (2.1)
($\Rightarrow$) ليكن X_0 فراغ جزئي من X و A مؤثر قرين لنفسه في الفراغ

$$X_1=X\ominus X_0$$

نرمز لمجموعة تعريفه $D(A)$ بالرمز X_1'
نرمز بالرمز $D(F_0)$ للجمع المباشر

$$D(F)\oplus(F_m^{-1}+A)X_1'\oplus X_0$$

نعرف على $D(F_0)$ مؤثر F_0 $(F_0=F/D(F_0))$ من تعريف F_0 نستنتج أن F_0 هو تمديد للمؤثر F
نبرهن أن F_0 قرين لنفسه :
من أجل كل $g\in D(F_0)$ نضع

$$(F_0g,f)=(g,f^*) \tag{13.2}$$

نبرهن أن

$$f\in D(F_0) \text{ و } F_0f=f^*$$

بما أن

$$f\in D(F_0),f^*=F^*f$$

فإنه باعتبار الجمع المباشر (2.1) يكون

$$f=\phi_0+F_m^{-1}v'+v,f^*=F\phi_0+v'$$

بحيث

$$\phi_0\in D(F),v',v\in X\ ,\ v=v_0+v_1/v_0\in X_0,v_1\in X_1$$

لاحظ الصيغه (13.2) تكتب كالتالي

$$(f^*,u_0)=(f,F_0u_0)=0\ \ u_0\in X_0$$

أي أن

$$f^* \perp X_0$$

بما أن

$$f^* = F\phi_0 + v', F\phi_0 \perp X$$

فإن

$$v' \in X_1$$

نكتب الأن العنصر g في الصيغه (13.2) كالتالي

$$g = h_0 + F_0^{-1}u_1 + Au_1 / h_0 \in D(F), u_1 \in X_1'$$

بوضع

$$\phi = \phi_0 + F_m^{-1}v', h = h_0 + F_m^{-1}u_1, \phi, h \in D(F_m)$$

وباعتبار

$$F_0 g = F^* g = F^* h + F^* A u_1 = F_m h$$

$$f^* = F^* f = F_m \phi$$

فان الصيغه (13.2) تكتب كالتالي

$$(F_m h, \phi + v_1 + v_0) = (h + Au_1, F_m \phi) \tag{14.2}$$

بما أن

$$(F_m h, \phi) = (h, F_m \phi)$$

$$F_m h = F h_0 + u_1$$

$$F_m \phi = F\phi_0 + v'$$

فإن الصيغه (14.2) تكتب كالتالي

$$(F h_0 + u_1, v_1 + v_0) = \left(Au_1, F\phi_0 + v'\right)$$

بماأن

$$Au_1 \perp F\phi_0 \ , \ u_1 \perp v_0 \ , \ F h_0 \perp v_1 + v_0$$

فإنه يكون

$$\left(Au_1, v'\right) = (u_1, v_1) \tag{15.2}$$

من الصيغه (15.2) وبإعتبار u_1 كيفي من $X_1' = D(A)$ و $v_1', v_1 \in X_1$ و A قرين لنفسه في X_1 نستنتج أن

$$v' \in D(A)\ ,\ v_1 = Av'$$

عندها يكون

$$f = \phi_0 + (F_m^{-1} + A)v' + v_0$$

أي أن

$$f \in D(F_0)$$

وبالتالي F_0 قرينا لنفسه ■

5.2 تمديد المؤثر الناظمي

قضية 1.5.2 اذا كان F_0 من $L(H)$ ناظمي ويملك مقلوب F_0^{-1} محدوود و F تمديده الناظمي فإنه يكون

$$D(F) = D(F_0) \oplus (F_0^{''-1} + C)\hat{V} \oplus W \tag{16.2}$$

$$D(F^*) = D(\bar{F}_0) \oplus (F_0^{''*-1} + C^*)\hat{U} \oplus W \tag{17.2}$$

حيث W فراغ جزئي من $V \cap U,$ $(U = E(\bar{F}_0^*) \quad V = E(F_0^*))$
و $\hat{V}_1, \hat{U}_1$ مجموعتان كثيفتان في V_1, U_1 على التوالي
حيث

$$V_1 = V \ominus W, U_1 = U \ominus W$$

C مؤثر مغلق مجموعة تعريف $\hat{V}_1$ و مجموعة قيمه $E(C) \subset U_1$
C^* المؤثر المرافق للمؤثر C مجموعة تعريفه $\hat{U}_1$ و مجموعة قيمه $E(C^*) \subset V_1$ بحيث

$$(C^*u, v) = (u, Cv) \quad \forall u \in \hat{U}_1, v \in \hat{V}$$

عندها يكون المؤثر

$$\left(F_0^{''-1} + C\right)^{-1} \left(F_0^{''*-1} + C^*\right) \tag{18.2}$$

من $\hat{U}_1$ في $\hat{V}_1$ مؤثر تقايسي

برهان.
اذا كان F تمديدا ناظميا لـ F_0 فإن :

$$F_0 \subset F \subset \bar{F_0^*}, \bar{F_0} \subset F^* \subset F_0^* \qquad (19.2)$$

ليكن W فضاء جزئي صفري للمؤثرين F و F^* أي

$$\forall f \in W \longrightarrow Ff = F^*f = 0$$

واضح أن

$$W \subset U, W \subset V$$

نضع

$$U_1 = U \ominus W, V_1 = V \ominus W$$

ليكن

$$H_+ = H \ominus W = E(F_0) \oplus V_1$$

ونكتب أيضا $H_+ = E(\bar{F_0}) \oplus U_1$، بما أن $E(F)$ كثيفه في H_+ فإن $E(F)$ يمكن كتابتها كالتالي

$$E(F) = E(F_0) \oplus \hat{V_1} \qquad (20.2)$$

حيث $\hat{V_1}$ مجموعه كثيفه في V_1 بنفس الطريفه نجد

$$E(F^*) = E(\bar{F_0}) \oplus \hat{U_1} \qquad (21.2)$$

حيث $\hat{U_1}$ مجموعه كثيفه في U_1 اذا إقتصرنا المؤثرين F و F^* على H_+ فإنهما يكونا قابلين للقلب عندها يكون

$$F^{-1}E(F) = P_+D(F)$$

$$F^{*-1}E(F^*) = P_+D(F^*)$$

حيث P_+ الإسقاط على H_+ نركب F^{-1} للصيغه (20.2) نحصل على

$$P_+D(F) = P_+D(F_0) + F^{-1}\hat{V_1} \qquad (22.2)$$

بنفس الطريقه نجد

$$P_+D(F^*) = P_+D(\bar{F_0}) + F^{*-1}\hat{U_1} \qquad (23.2)$$

بما أن

$$D(F) = P_+D(F) + W$$
$$D(F^*) = P_+D(F^*) + W$$

و

$$P_+D(F_0) + W = D(F_0) + W$$
$$P_+D(\bar{F_0}) + W = D(\bar{F_0}) + W$$

فإن من العلاقه (22.2), (23.2) نحصل على

$$D(F) = D(F_0) + F^{-1}\hat{V_1} + W \tag{24.2}$$

$$D(F^*) = D(\bar{F_0}) + F^{*-1}\hat{U_1} + W \tag{25.2}$$

نعرف الآن المؤثر

$$B = F^{-1} - P_+F_0^{''-1}P_+$$

نرمز لأقتصار B على $\hat{V_1}$, بالرمز C أي $C = B/\hat{V_1}$ نبرهن أن

$$Ch \in U \quad , \quad h \in \hat{V_1}$$

فعلا اذا كان

$$h \in \hat{V_1} \quad , \quad f \in D(\bar{F_0})$$

فإن

$$\begin{aligned}
\big(Ch, \bar{F_0}f\big) &= \big(F^{-1}h, \bar{F_0}f\big) - \Big(P_+F_0^{''-1}P_+h, \bar{F_0}f\Big) \\
&= \big(F^{-1}h, \bar{F_0}f\big) - \Big(P_+F_0^{''-1}h, \bar{F_0}f\Big) \\
&= \big(F^{-1}h, \bar{F_0}f\big) - \Big(F_0^{''-1}h, \bar{F_0}f\Big) \\
&= \big(\bar{F_0^*}F^{-1}h, f\big) - \Big(\bar{F_0}F_0^{''-1}h, f\Big) \\
&= (h, f) - (h, f) \\
&= 0
\end{aligned}$$

وذلك لأن

$$F \subset \bar{F_0}, F_0^{''-1} \subset \bar{F_0^*}$$

وعلى هذا الأساس يكون

$$Ch \in U$$

بماأن

$$Ch \perp W$$

فإن

$$Ch \in U_1 \quad , \quad h \in \hat{V}_1$$

الأن لدينا

$$\begin{aligned} D(F) &= D(F_0) + F^{-1}\hat{V}_1 + W \\ &= D(F_0) + [P_+ F_0^{''-1} P_+ + (F^{-1} - P_+ F_0^{''-1} P_+)]\hat{V}_1 + W \\ &= D(F_0) + \left(P_+ F_0^{''-1} + C\right)\hat{V}_1 + W \\ &= D(F_0) + P_+\left(F_0^{''-1} + C\right)\hat{V}_1 + W \\ &= D(F_0) + \left(F_0^{''-1} + C\right)\hat{V}_1 + W \end{aligned} \tag{26.2}$$

ذلك لأن

$$P_+(F_0^{''-1} + C)\hat{V}_1 + W = (F_0^{''-1} + C)\hat{V}_1 + W$$

المجموع(26.2)يكون جمعا مباشرا لأنه يشكل مجموعه جزئيه من المجموع المباشر

$$D(\bar{F}_0^*) = D(F_0) \oplus F_0^{''-1}V \oplus U$$

بنفس الطريقه نجد المجموع المباشر الخاص بـ $D(F^*)$ ذلك باستعمال المؤثر C^* الذي يكتب كالتالي :

$$C^* = F^{*-1} - P_+ F_0^{''*-1} P_+ / \hat{U}_1$$

بما أن المؤثر F ناظمي فإن

$$D(F) = D(F^*)$$

وعليه يكون

$$D(F_0) + (F_0^{''-1} + C)\hat{V}_1 + W = D(\bar{F}_0) + (F_0^{''-1} + C)\hat{U}_1 + W \tag{27.2}$$

نبرهن أن

$$(F_0^{''-1} + C)\hat{V}_1 = (F_0^{''*-1} + C^*)\hat{U}_1$$

لتكن $f \in D(F)$ ولتكن

$$f = f_0 + (F_0^{''-1} + C)u_1 + w_1, f_0 \in D(F_0), u_1 \in \hat{U}_1, w_1 \in W \tag{28.2}$$

ولتكن ايضا

$$f = f_0^{'} + (F_0^{''*-1} + C^*)v_1 + w_1^{'}, f_0 \in D(\bar{F}_0), v_1 \in \hat{V}_1, w_1^{'} \in W \tag{29.2}$$

نبرهن أن

$$(F_0^{''-1} + C)u_1 = (F_0^{''*-1} + C^*)v_1, w_1 = w_1^{'}, f_0^{'} = f_0$$

من أجل كل g من $D(F_0) \subset D(F)$ عندنا

$$(Ff, Fg) = (F^*f, F^*g) \tag{30.2}$$

من الصيغ (28.2),(29.2) (30.2) ,نستنتج أن

$$\left(F_0 f_0 + \bar{F}_0^* F_0^{''-1} v_1, F_0 g\right) = \left(\bar{F}_0 f_0^{'} + F_0^* F_0^{''*-1} u_1, \bar{F}_0 g\right)$$

أو

$$(F_0 f_0, F_0 g) + (v_1, F_0 g) = \left(\bar{F}_0 f_0^{'}, \bar{F}_0 g\right) + \left(u_1, \bar{F}_0 g\right) \tag{31.2}$$

لكن

$$(v_1, F_0 g) = 0, \left(u_1, \bar{F}_0 g\right) = 0$$

ذلك لأن

$$v_1 \in \hat{V}_1 \subset V_1 \subset V$$

و

$$\left(\bar{F}_0 f_0^{'}, \bar{F}_0 g\right) = \left(F_0 f_0^{'}, F_0 g\right)$$

ذلك لأن F_0 ناظمي وبالتالي من الصيغه (31.2)نحصل على

$$\left(F_0(f_0 - f_0^{'}), F_0 g\right) = 0, \forall g \in D(F_0)$$

بوضع

$$g = f_0 - f_0^{'}$$

نجد

$$F_0(f_0 - f_0^{'}) = 0$$

بماأن المؤثر F_0^{-1} موجود
فإن

$$f_0 = f_0^{'}$$

ومنه من الصيغه (28.2),(29.2) نحصل على

$$[(F_0^{''-1} + C)v_1 - (F_0^{''*-1} + C^*)u_1] + (w_1 - w_1^{'}) = 0 \qquad (32.2)$$

من الصيغه (32.2) وباعتبار (3.1.2) فإن حدود المجموع (29.2) تكون متعامده
اذا كان $F_0^{''-1}V$ عمودي على U ومنه على W و $F_0^{''-1}U$ ومنه على W
ومنه نستنتج أن

$$C\hat{V}_1 \perp W \quad \text{و} \quad C^*\hat{U}_1 \perp W$$

وبالتالي من الصيغه (32.2) تكون

$$w_1 = w_1^{'}, (F_0^{''-1} + C)v_1 = (F_0^{''*-1} + C^*)u_1 \qquad (33.2)$$

ومنه نحصل على

$$(F_0^{''-1} + C)\hat{V}_1 = (F_0^{''*-1} + C^*)\hat{U}_1$$

من ناظمية المؤثر F نستنتج أنه اذا كان $u_1 \in \hat{U}_1, v_1 \in \hat{V}_1$ يحققان (33.2) فإن

$$\| v_1 \| = \| u_1 \|$$

وعليه يوجد المؤثر العكسي $(F_0^{''*-1} + C)^{-1}$
وعندها يكون المؤثر $(F_0^{''-1} + C)^{-1}(F_0^{''*-1} + C^*)$ تقايسي
■

نظرية 5.1.2 ليكن F_0 من $L(H)$ ناظمي ويملك مقلوب F_0^{-1} محدود

نضع $V = E(F_0^*)$ و $U = E(\bar{F}_0^*)$

اذا كان C مؤثر من $L(H)$ مغلقا مجموعة تعريفه $D(C) = \hat{V}_1$ كثيفه في فراغ جزئي V_1 من V ومجموعة قيمه
$E(C) \subset U \ominus W$ حيث $W = V \ominus V_1$
و C^* المؤثر المرافق للمؤثر C مجموعة تعريفه $\hat{U}_1 = U \ominus W$ ومجموعة قيمه $E(C^*) \subset V_1$
والصيغه

$$\left(F_0^{''-1} + C\right)\hat{V}_1 = \left(F_0^{''*-1} + C^*\right)\hat{U}_1 \qquad (34.2)$$

تعرف مؤثر

$$\left(F_0''^{-1}+C\right)\left(F_0''^{*-1}+C^*\right) \qquad (35.2)$$

يكون تقايسيا

لنعتبر الشرطين (34.2) و(35.2) محققين عندها المؤثر F الذي يعطى بالعلاقه

$$D(F)=D(F_0)+(F_0''^{-1}+C)\bar{V}+W \qquad (36.2)$$

$$Ff=\hat{F}_0^*f \qquad f\in D(F)$$

هو تمديد ناظمي للمؤثر F_0

برهان.ليكن W فضاء جزئي من $U\cap V$

و نرمز بـ

$$V_1=V\ominus W, U_1=U\ominus W$$

وليكن C مؤثر خطي مغلق مجموعة نعريفه $D(C)=\hat{V}_1$ كثيفه في V_1 و $E(C)\subset U_1$ ويحقق الشرطين (34.2) (35.2)

نعرف على الجمع المباشر

$$D(F)=D(F_0)\oplus(F_0''^{-1}+C)\hat{V}_1\oplus W$$

كاقتصار المؤثر F على $\bar{F}_0^*$

واضح أن المؤثر F تمديد لـ F_0

نبرهن أن F مؤثر ناظمي

من أجل كل g من $D(F)$ نضع

$$(Fg,h)=(g,h^*) \qquad (37.2)$$

واضح أن

$$h^*=F_0^*h \text{ و } h\in D(F_0^*)$$

وباعتبار النضريه (3.2.2) يكون

$$h=\phi_0+F_0''^{*-1}u+v \ \ / \ \ \phi_0\in D(\bar{F}_0), u\in U, v\in V$$

عندها يكون

$$h^*=\bar{F}_0\phi_0+U\ ,\ \bar{F}_0\phi_0\perp U$$

بتعويض g في الصيغه (37.2)بأي عنصر w من W نحصل على

$$(h^*, w) = (h, Fw) = 0 \tag{38.2}$$

أي أن

$$h^* \perp W$$

بما أن

$$h^* = \bar{F}_0\phi_0 + u$$

فإنه من (38.2) يكون $u \in U_1$
لتكن

$$v = v_1 + w_1 \ \ / \ \ v_1 \in V_1, w_1 \in W$$

الان g الموجود في الصيغه (38.2) يكتب كالتالي

$$g = f_0 + F''^{-1}_{0v_z} + C_{v_z} \ \ / \ \ f_0 \in D(F_0), v_z \in \hat{V_1}$$

من أجل تسهيل الحسابات نعتمد الرموز المختصره التاليه

$$\phi_0 = F_0''^{*-1} u = \phi \ \ , \ \ f_0 + F''^{-1}_{0v_z} = f$$

بماأن

$$Fg = F_0^* g = \bar{F}_0^* f + \bar{F}_0^* C_{v_z} = \bar{F}_0^* f = F_0'' f$$

و

$$h^* = F_0^* h = F_0^* \phi + F_0^* v = F_0^* \phi = F_0''^* \phi$$

فإن

$$\phi \in D(F_0'') \ \ , \ \ f \in D(F_0'')$$

;منه من (37.2) يكون

$$\Big(F_0'' f, \phi + v_1 + w_1\Big) = \Big(f + C_{v_z}, F_0''^* \phi\Big) \tag{39.2}$$

لكن بما أن

$$\Big(F_0'' f, \phi\Big) = \Big(f, F_0''^* \phi\Big)$$

$$F_0'' f = F_0 f_0 + v_z \ , \ F_0''^* \phi = \bar{F}_0 \phi_0 + u$$

فإنه من (39.2) يكون

$$(F_0 f_0 + v_z, v_1 + w_1) = \big(C_{v_z}, \bar{F}_0 \phi_0 + u\big)$$

ومنه وباعتبار

$$F_0 f_0 \perp v_1 + w_1, v_z \perp w_1, C_{v_z} \perp \bar{F}_0 \phi_0$$

نحصل على

$$(C_{v_z}, u) = (v_z, v_1) \tag{40.2}$$

حيث

$$v_z \in D(C) = \hat{V}_1, v_1 \in V_1, u \in U_1, C_{v_z} \in U_1$$

ومنه من (40.2) نستنتج أن

$$C^* u = v_1 \;\; \text{و} \;\; u \in D(C^*)$$

وعليه يكون

$$h = \varphi_0 + (F_0^{''*-1} + C^*)u + w_1$$

هذا يعني أن

$$D(F^*) \subset D(\bar{F}_0) + (F_0^{''*-1} + C^*)\hat{U}_1 + W$$

ومن ناحيه ثانيه

$$D(F^*) \supset D(\bar{F}^0) + (F_0^{''*-1} + C^*)\hat{U}_1 + W$$

وعليه يكون

$$D(F^*) = D(\bar{F}_0) + (F_0^{''*-1} + C^*)\hat{U}_1 + W$$

بما أن الصيغه (34.2) محققه فإن

$$D(F) = D(F^*)$$

نبرهن أن

$$\| Fh \| = \| F^* h \| \quad , \quad h \in D(F)$$

ليكن $h \in D(F)$ ويحقق

$$h = f_0 + (F_0^{''-1} + C)v_1 + w_1, f_0 \in D(F_0), v_1 \in \hat{V}_1, w_1 \in W$$

و

$$h = f_0 + (F_0^{''*-1} + C^*)u_1 + w_1, f_0 \in D(F_0), u_1 \in \hat{U}_1, w_1 \in W$$

لاحظ أن

$$Fh = F_0 f_0 + v_1$$

$$F^*h = \bar{F}_0 f_0 + u_1$$

ومنه نستنتج أن

$$\| Fh \|^2 = \| F_0 f_0 \|^2 + \| v_1 \|^2$$

$$\| F^*h \|^2 = \| \bar{F}_0 f_0 \|^2 + \| u_1 \|^2$$

من الشرط (34.2) المؤثر

$$(F_0^{''-1} + C)^{-1}(F_0^{''*-1} + C^*)$$

متقايس فإن

$$\| v_1 \| = \| u_1 \|$$

وبالتالي يكون

$$\| Fh \| = \| F^*h \|, h \in D(F)$$

ومنه يكون المؤثر F ناظمي . ■

خاتمة

يندرج محتوى المذكره في العمل على توضيح الشروط اللازمه والكافيه من أجل تمديد المؤثر الناظمي غير المحدود القابل للقلب الى مؤثر ناظمي لهذا الغرض جمعنا أهم المقالات والمراجع التي تناولت هذا الموضوع .

لتوصيح هذه الشروط عملنا على :

تمديد المؤثر المغلق المتناظر ثم تمديد المؤثر الناظمي المغلق القابل للقلب وبعدها تمديد المؤثرالناظمي المتناظر الموجب وفي الأخير خلصنا الى تمديد المؤثر الناظمي .

المراجع العلمية

المصادر باللغة العربية

[1] مصطفى . عسيلة؛ دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي، د.م.ج-الجزائر- 2009.

[2] مصطفى . عسيلة؛ دروس في المؤثرات ونظرية الأطياف،الجزء الأول ،المؤثرات المحدودة، UKMO,2013.

المصادر باللغة الأجنبية

[3] Gokhberg I., Gokhberg S.,Kaashoek M.A. ; Classes of Linear Oparators, Part I, Birkhauser Verlag, 1990.

[4] Gokhberg I., Gokhberg S.,Kaashoek M.A. ; Classes of Linear Oparators, Part II, Birkhauser Verlag, 1990.

[5] Gokhberg.I and M. G. Krein , Introduction to the Theory of Nonselfadjoint Operators,Am. Math. Soc. (1969).

[6] Hutson V.C.L.,Pym J.S. ;Functional Analysis and Operator Theory,Academic Press,London, 1980.

[7] E.A. Coddington, Normal extensions of formally normal operators. Pacific J. Math, 10, 1203-1209 (1960).

[8] K.Friedrichs, Spektraltheorie halbbesehrankter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Ann, 109 (1934), 465—487.

[9] M.I.Vishik, On the general boundary value problems for elliptic differential equations. Tr.Mosk. Matem. Soc., 1, 187-246 (1952).

[10] M.Sh.Birman,On the theory of self-adjoint extensions of positively defined operators.Matem sb., 38, No.4,431-450 (1956).

[11] Polyakov, V.N. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR (1967) 2 : 859. doi :10.1007/BF01473467.

الملخص

الملخص هذا العمل يهدف الى توضيح الشروط اللزمه والكافيه من أجل تمديد المؤثر الناظمي غير المحدود الى مؤثر ناظمي
أعتمد في كيفية التمديد على مؤثر ناظمي غير محدود قابل للقلب وهذا إنطلاقا من تمديد المؤثر المغلق القابل للقلب ثم المؤثر المغلق المتناظر الموجب .

الكلامات المفتاحية:
مؤثر مغلق -مؤثر ناظمي -مؤثر متناظر-المؤثر الموجب -تمديد المؤثر.

: Abstract

extending for condition necessary and sufficient the explain to aimed work a This
. operator normal to operator normal unbounded
then operator, closed inversable unbounded on extension of act the in debonded we
operator. closed symetric the positively the
operator -positively operator -semetric operator -normal operator closed **: words key**
operator. -extenting