UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTE DES SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE ET DES SCIENCES DE LA MATI7RE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ET INFORMATIQUE

Mémoire

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Filière : MATHEMATIQUES

Spécialité : ANALYSE FONDAMENTALLE

Présenté par : Kadri Nadjat

Thème

Théorème de Poincaré Hopf

Théorème de Poincaré Hopf

Soutenu publiquement
Le : 02 /07 / 2013

Devant le jury :

Mr. Merabet Smail	MC	Président	UKM Ouargla
Mr Bensayah Abdallah	MC	Examinateur	UKM Ouargla
Mr. Bahayou Mohammed Amine	MC	Encadreur	UKM Ouargla

Année universitaire 2012/2013

Remerciements

Je remercie premièrement mon directeur de recherche, Monsieur *Mohamed Amine Bahayou*, maître de conférences, pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, ses précieux conseils mais aussi ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.

Je remercie messieurs les membres de jury :
qui ont accepté de participer au jury de soutenance.

Je remercie Monsieur *Nadji Hermas* pour son grand aide et son soutien scientifique et je lui souhaite tout le meilleur. Je voudrais aussi remercier Monsieur *Miloud Reguiat* pour ses conseils et son aide.

Je remercie tous les enseignants et mes collègues de Master Rayonnement et Matière qui m'ont aidé par leurs conseils et leurs encouragements.
Enfin, je remercie toute personne ayant participé à réaliser ce travail.

Table des matières

1
Introduction générale

Dans ce mémoire, nous présentons le Théorème de Poincaré-Hopf.
Ce Théorème qui exprime la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété compacte (un invariant topologique) comme somme des indices d'un champ de vecteur sur la variété (qui est un objet géométrique). L'étude de ce Théorème nécessite toutes les notions de base de topologie différentielle, à savoir : le Théorème de Sard, la théorie des degrés, la transversalité...

Nous terminerons ce mémoire avec quelques applications importantes : Théorème de la boule chevelue, Théorème du point fixe de Brouwer...

Ce mémoire est composé de trois chapitres :
- Dans le premier chapitre, on rassemble quelques notions de base de géométrie différentielle : les variétés différentielles, les variétés à bord, orientation, espaces tangents et applications tangentes, champs de vecteurs et flots.
- Dans le deuxième chapitre, on étudie les éléments de topologie différentielle, à savoir : l'homotopie, le degré d'une application, l'indice d'un champ du vecteurs.
- Dans le troisième, on présente et démontre le Théorème de Poincaré-Hopf, et on donne quelques applications importantes de ces théorème.

1.1 Notations générales

Nous présentons ici les notations utilisées dans notre mémoire. Pour avoir plus des détails nous renvoyons le lecteur aux passages correspondants dans le texte. Nous avons numéroté les différents lemmes, propositions, remarques et théorèmes dans chaque chapitre de manière séquentielle. Quant aux formules, elles sont aussi numérotées dans chaque chapitre d'une manière séquentielle.

Notation

S^n : la sphère de dimension n.
C^k : les fonctions de classe C^k.
M : variété différentielle.
$\chi(M)$: caractéristique d'Euler.
$\det$: déterminant.
$d_a f$: la différentielle de f en a.
R_f : ensemble des valeurs régulières de f.
sign : le signe.
$d(f, a)$: degré de f au point a.
$\mathrm{Ind}(\xi, x_0)$: indice du champ de vecteurs ξ en x_0.
$\varphi^* X$: image inverse du champ de vecteurs X par φ.
$T_x M$: espace tangents à M en x.

2

Éléments de géométrie différentielle

En mathématiques, il y a plusieurs branches parmi lesquelles la géométrie. Cette dernière étudie les propriétés et les relations des formes et des figures dans un espace. La géométrie se divise en deux types : La géométrie analytique et La géométrie différentielle.

La géométrie analytique : Partie de la géométrie ayant recours au calcul algébrique et analytique. Elle facilite l'étude des propriétés géométriques des courbes et des surfaces et de leurs présentations graphiques ou la recherche de "lieux géométriques".

La géométrie différentielle : Branche de la géométrie visant à étudier les propriétés locales (au voisinage d'un point) et intrinsèques des courbes et des surfaces. La géométrie différentielle est née de la possibilité d'une interprétation cinématique que le calcul infinitésimale apporte à l'étude des courbes.

2.1 Variétés différentielles

Soit M un ensemble arbitraire. Une carte locale sur M est un couple (U,φ) où U est un sous ensemble de M et φ est une bijection de U dans un ouvert $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$.
soit (U,φ) et (V,ψ) deux cartes locales de M, l'application :
$\psi\circ\varphi^{-1}$:

$$\varphi(U\cap V)\longrightarrow (U\cap V)\longrightarrow \psi(U\cap V)\subset\mathbb{R}^n$$

est dite changement de cartes locales.
Un C^k-atlas sur M est une famille de cartes locales $(U_\lambda\cap\varphi_\lambda)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $$\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda = M.$$
2. Pour tout $(\lambda,\delta)\in\Lambda\times\Lambda$, $\varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\delta)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et le changement de cartes locales $\varphi_\delta\circ\varphi_\lambda^{-1}:\varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\delta)\longrightarrow\varphi_\delta(U_\lambda\cap U_\delta)$ est de classe C^k.

Une variété différentielle de classe $C^k,(k\geq 1)$ est un ensemble M muni d'un atlas de classe C^k. Dans toute la suite, on ne considère que les variétés lisses, i.e. de classe C^∞.

2.1.1 Variétés à bord

Une variété à bord est un espace topologique dont les points admettent au moins un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (point intérieur) ou bien un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$, ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ dont la n-ième coordonnée est positive (point bordant). L'ensemble des points n'admettant que ce dernier type de voisinage constitue le bord de la variété.
On montre que le bord (s'il existe) d'une variété de dimension n est une variété de dimension $n-1$, sans bord!

Définition. *On note H^n le demi-espace $H^n=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_n\geq 0\}$.
Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété à bord, si et seulement si, en chaque point x_0 de M il existe un voisinage U de x_0 et un difféomorphisme local ϕ de $\mathbb{R}^n$ envoyant x_0 sur 0 tel que l'on ait soit*

$$\phi(U\cap M)=(\mathbb{R}^p\times\{0\})\cap\phi(U) \tag{2.1}$$

ou

$$\phi(U\cap M)=(H^p\times\{0\})\cap\phi(U) \tag{2.2}$$

L'entier p est appelé dimension de M en x_0. On appelle bord de M et on note ∂M l'ensemble des points x_0 correspondant au cas (2).

Remarque. *Les cas (1) et (2) ne peuvent se présenter simultanément pour un même point* x_0*, car il n'existe pas de difféomorphisme local préservant l'origine et envoyant* $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *: en effet, l'image d'un ouvert contenant* 0 *par un difféomorphisme est encore un ouvert contenant* 0*, mais* $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+$ *ne contient pas de tel ouvert.*

Proposition : Toute variété à bord admet un champ de vecteur normal extérieur le long de son bord.

2.2 Espace tangent et application tangente

Pour définir un espace tangent en un point x à une variété différentielle M, en utilisant les courbes passant par x. Nous désignerons par C_x l'ensemble des courbes lisses $c : I \longrightarrow M$ définies sur un intervalle ouvert I contenant 0 et telles que $c(0) = x$.

Définition. *Deux courbes* $c_1 : I_1 \longrightarrow M$ *et* $c_2 : I_2 \longrightarrow M$ *de* C_x *sont tangentes en* x *si s'il existe une carte* (u,φ)*, telle que* $x \in u$ *et*

$$(\varphi\circ c_1)'(0) = (\varphi\circ c_1)'(0).$$

Cette condition ne dépend pas du choix de la carte, puisque, si (V,ψ) *est une carte de* x *le théorème des fonctions composées donne, pour tout* $c \in C_x$

$$(\psi\circ c)'(0) = D_{\varphi(x)}(\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi\circ c)'(0).$$

L'ensemble des vecteurs tangents en x est noté T_xM.
Une autre définition équivalente de l'espace tangent en un point $x \in M$ est donnée par l'ensemble des dérivations : $T_xM =< \partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n} >$, où, pour toute fonction de classe C^∞, $f : M \to \mathbb{R}$, et toute carte (U,φ) en x

$$\partial_{x_i} f = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)).$$

À noter que pour cette définition, il est important que la variété soit lisse.

Théorème 1. *Soit* M *une sous-variété de dimension* d *de* $\mathbb{R}^n$*. L'espace tangent à* M *en* x *est un espace vectoriel de dimension* d*. De plus*

1. *Si localement* $M = f(U)$ *est l'image d'une immersion* f*, alors* $T_{f(x)}M = \mathrm{Im}(D_x f)$*.*

2. *Si* $M = f^{-1}(y_0)$ *est une fibre d'une submersion* f*, alors* $T_xM = \ker(D_xf)$.
3. *Si* $M \subset E \times F$ *est le graphe d'une application* f*, alors* $T_{(x,f(x))}M$ *est le graphe de l'application linéaire* D_xf.

En effet, si $\phi : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme qui redresse M sur $\mathbb{R}^n$ au voisinage de x, alors $T_xM = (D_x\phi)^{-1}(\mathbb{R}^d)$.

2.3 Champs de vecteurs et flots

Fibré tangent

Soit M une variété différentielle de dimension n. L'union disjointe de tout les espaces tangents à M, noté $TM = \coprod_{x\in M} T_xM$ est une variété différentielle de dimension $2n$. En effet, si $\pi : TM \to M$ est l'application définie, pour $\xi \in T_xM$ par $\pi(\xi) = x$ et si $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i),\ i \in I\}$ est un atlas sur M alors $\mathscr{A} = \{(\pi^{-1}(U_i), T\varphi_i),\ i \in I\}$ est un atlas sur TM. Ici,

$$T\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n,$$

est définie par $T\varphi_i(\xi) = (\varphi_i(x), \xi_1, ..., \xi_n)$, pour $\xi = \xi_1\partial_{x_1} + ... + \xi_n\partial_{x_n} \in T_xM$. On vérifie que le changement de cartes est donné par :

$$T\varphi_i \circ (T\varphi_j)^{-1}(x, v) = \left(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x), D_x\left(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\right)(v)\right).$$

Champ de vecteur

Soit M une variété différentielle. On appelle champ de vecteurs sur M toute application $X : M \longrightarrow TM$ de classe C^∞, qui à tout point $x \in M$ associe un vecteur tangent en même point $X(x) \in T_xM$.

Si $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$ est une carte locale de M, on a

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\partial_{x_i},\ x \in U$$

avec $X_i : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞.
On note souvent $\chi(M)$ l'espace des champs de vecteurs sur M.

Le flot d'un champ du vecteurs

Soit X un champ de vecteurs sur M.

Théorème 2. *Pour tout x_0 dans M, il existe un triplet (U,I,φ) formé d'un voisinage ouvert U de x_0, d'un intervalle ouvert I contenant 0, et d'une application $\varphi : I \times U \longrightarrow M$ de classe C^∞, notée $(t,x) \longrightarrow \varphi_t(x)$, vérifiant, pour tous $s \in I$ et x dans U, $\varphi_0(x) = x$ et*

$$\frac{d(\varphi_t(x))}{dt}\Big|_{t=s} = X(\varphi_s(x)).$$

Si $U', I', \varphi')$ est un autre tel triplet, alors φ et φ' coïncident sur $(I \times U) \cap (I' \times U')$. De plus, pour tous $t, s \in I$ et tout $x \in U$:

$$\varphi_s(x) \in U,\ t+s \in I \Longrightarrow (\varphi_t \circ \varphi_s)(x) = \varphi_{t+s}(x). \tag{2.3}$$

φ_t est un difféomorphisme local appelé *flot local* de X, et est aussi noté $\exp tX$, en vertu de la propriété (2.3) ci-dessus.

2.4 Variétés orientables

Définition. *Soit M une variété différentielle. On dit que M est* orientable, *si elle admet un atlas dont touts les changements de cartes $\varphi \circ \phi^{-1}$ sont positivement orientés, i.e. pour tout $x \in M$ et toutes cartes (U, φ) et (V, ϕ) en x,*

$$\det D_{\phi^{-1}(x)}\left(\varphi \circ \phi^{-1}\right) > 0.$$

Une définition équivalente de l'orientabilité est l'existence d'une *forme volume* sur M, c'est-à-dire une forme différentielle de degré maximum qui ne s'annule jamais.

2.4.1 Singularité

Définition (Singularité d'un champ de vecteurs)**.** *Un point singulier d'un champ de vecteurs X est un point x_0 où le champ s'annule $X(x_0) = 0$.*

Définition (Singularité d'une application)**.** *Soit $f : M \to N$ une application lisse. Un point $x \in M$ est dit* point singulier *(ou point critique) de f si $\operatorname{rang} T_x f < \dim N$. Si C est l'ensemble des points critiques de f, alors $f(C)$ est appelé* ensemble des valeurs critiques *et son complémentaire dans N est l'ensemble des valeurs régulières de f.*

Exemple. *L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ possède $(0,0)$ comme unique point critique. L'ensemble des valeurs critiques est 0 et donc l'ensemble des valeurs régulières est $\mathbb{R}^*$.*

3

Éléments de topologie différentielle

La topologie algébrique est la construction et l'étude de foncteurs de la catégorie des espaces topologiques à valeurs dans celle des groupes (ou des modules sur un anneau). Le but est de classer (ou au moins comprendre), par exemple à homéomorphisme près, les espaces topologiques (au moins dans certaines familles) en leur associant des invariants de nature algébrique (nombres entiers, groupes, anneaux, etc).

3.1 Degré d'une application

Théorème 3. *Soient M et N deux variétés différentielles orientables de même dimension m, et soit $f : M \longrightarrow N$ une application propre de classe C^∞. Soit a une valeur régulière de f. Il existe un voisinage ouvert V de a (constitué uniquement de valeurs régulières) tel que, pour tout $b \in V$, l'image inverse $f^{-1}(b)$ est finie et*

$$d(f,b) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} \operatorname{sign}_x(f) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} \operatorname{sign}\det(T_x f), \tag{3.1}$$

avec le nombre de points dans une fibre de f ne dépend pas du choix de a.

Démonstration. Comme f est propre alors les fibres $f^{-1}(a)$, $a \in N$ sont compactes. D'autre part, si a est une valeur régulière de f alors en raison des dimensions égales de M et N, $T_x f$ est un isomorphisme pour tout $x \in f^{-1}(a)$. Par le Théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme au voisinage se chaque point régulier. Ceci veut dire que la fibre $f^{-1}(a)$ est discrète.
La fibre $f^{-1}(a)$ étant discrète et compacte, elle est finie : $f^{-1}(a) = \{x_1, ..., x_k\}$.

Et par le théorème d'inversion locale et par finitude de $f^{-1}(a)$, il existe un voisinage ouvert connexe V de a, que nous supposons contenu dans un domaine de carte de N, et pour tout x dans $f^{-1}(a)$, un voisinage ouvert V_x de x, avec les V_x deux à deux dis- joints, tels que

$$f\,|_{V_x}:\longrightarrow V$$

soit un C^∞ difféomorphisme pour tous x dans $f^{-1}(a)$.
Dans l'étape ou on peut prendre les V_x connexes.
On a $f^{-1}(a) = (x_1, ..., x_k)$ donc
$\exists V \in V_{(a)}, \forall b \in V$,tel que $a \neq b$ alors $f^{-1}(b) = (y_1, ..., y_k) = k$
c'est-à-dire $f^{-1}(b)$ est fini et constant sur V.
et on a d'autre part $SingDetT_x f$ définie par

$$d(f,a) = \sum_{i=1} Singx_i(f) = \sum_{i=1} SingDetT_{x_i} f$$

Et on suppose $\sigma : M \longrightarrow \mathbb{Z}$, tel que $\sigma(x) = SingDetT_x f$.
On sait que le determinant est un application continue et on a
$Sing : \mathbb{R}^* \longrightarrow \{-1, 1\}$ et sa on cour continue.
Et U connexe.
σ continue et U_i connexe ($\sigma(U_i) = -1$ ou $\sigma(U_i) = 1$)) donc $\sigma(U_i)$ connexe
$\sigma : X \longrightarrow Y$ tel que (X est connexe) et Y est discret alors σ est constante.
$\sigma : U_i \longrightarrow \{-1, 1\}$
$x \longrightarrow Sing_x(f)$
$d(f,a) = \sum_{i=1} Sing_{x_i}(f) = \sum_{i=1} Sing_{y_i}(f) = d(f,b)$ □

Exemple. $F : S((0,0),\varepsilon) \longrightarrow S^1$
$(x,y) \longrightarrow (\dfrac{-2xy}{x^2+y^2}, \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2})$
$\gamma(t) = (x(t), y(t)),\ \gamma(0) = (-\varepsilon, 0), x^2(t) + y^2(t) = \varepsilon^2$
$F^{-1}(0,1) = (-\varepsilon, 0), (\varepsilon, 0)$
$T_{(-\varepsilon,0)}F = \dfrac{d}{dt}|_{t=0} F(\gamma(t))$
$T_{(-\varepsilon,0)}S((0,0),\varepsilon) =< (0,1) >$
$T_{(\varepsilon,0)}S((0,0),\varepsilon) =< (0,1) >$
$T_{(1,1)}S^1 =< (1,0) >$
On choisit les bases orientées positivement
$T_{(-\varepsilon,0)}S((0,0),\varepsilon) =< (0,-1) >$
$T_{(\varepsilon,0)}S((0,0),\varepsilon) =< (0,1) >$
$T_{(0,1)}S^1 =< (-1,0) >$
$T_{(-\varepsilon,0)}F((0,-1)) = \dfrac{d}{dt}|_{t=0} F(\gamma(t)) = (\dfrac{-2}{\varepsilon}, 0) = \dfrac{2}{\varepsilon}(-1,0)$
$DetT_{(-\varepsilon,0)}F = \frac{2}{\varepsilon} > 0$
$deg(F,(0,1)) = signDetT_{(-\varepsilon,0)}F + signDetT_{(\varepsilon,0)}F = 1 + 1 = 2$

Définition :

L'application de Gauss envoie un point de la surface sur le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur, représenté par un point de S^2.

3.2 Indice d'un champ de vecteurs

Définition

Soit $\xi : M \longrightarrow \cup T_x M \subset \mathbb{R}^p$ $(M \subset \mathbb{R}^p)$ un champ de vecteurs tel que $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ et soit x_0 point singulier de ξ $(\xi(x_0) = 0$.Et on considère x_0 non dégénéré c'est-à-dire $Det(\frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j}(x_0)_{1\leq i,j\leq n}) \neq 0$ alors l'indice est :

$$Ind(\xi, x_0) = singDet(\frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j}(x_0)_{1\leq i,j\leq n}) \tag{3.2}$$

3.2.1 Application de Gauss

L'application de Gauss définit une correspondance entre chaque point d'une courbe ou d'une surface et un point du cercle ou de la sphère unité ;

Exemples

1. Soit $\xi \in \chi(M)$, tel que $\xi = -y\partial x + x\partial y$, $\overline{\xi} = (-y, x)$
   $(0,0)$ est le point singulier de ξ, alors
   $$Det_{(0,0)}\overline{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   $Ind_{(0,0)}\xi = Sign_{(0,0)}\overline{\xi} = +1$
2. Soit $\xi \in \chi(M)$, tel que $\xi = x\partial x - y\partial y$, $\overline{\xi} = (x, -y)$
   $(0,0)$ est le point singulier de ξ, alors
   $$Det_{(0,0)}\overline{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   $Ind_{(0,0)}\xi = Sign_{(0,0)}\overline{\xi} = -1$
3. Soit $\xi \in \chi(M)$, tel que $\xi = x\partial x + y\partial y$, $\overline{\xi} = (x, y)$
   $(0,0)$ est le point singulier de ξ, alors
   $$Det_{(0,0)}\overline{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $Ind_{(0,0)}\xi = Sign_{(0,0)}\overline{\xi} = +1$

4. Soit $\xi \in \chi(M)$, tel que $\xi = -x\partial x - y\partial y$, $\overline{\xi} = (-x, -y)$
   $(0,0)$ est le point singulier de ξ, alors

$$Det_{(0,0)}\overline{\xi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   $Ind_{(0,0)}\xi = Sign_{(0,0)}\overline{\xi} = +1$
5. Soit $\xi \in \chi(M)$, tel que
   $\xi = xz^2\partial x + yz^2\partial y + z(z^2-1)\partial z$, $\overline{\xi} = (xz^2, yz^2, z(z^2-1))$
   on a $(0,0,-1), (0,0,1)$ sont les points singuliers de ξ
   alors

$$DetD_{(x,y,z)}\overline{\xi} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 & 2xz \\ 0 & z^2 & 2yz \\ 0 & 0 & 3z^2-1 \end{pmatrix} = z^4(3z^2-1)$$

   pour le point singulier $(0,0,-1)$:
   $DetD_{(0,0,-1)}\overline{\xi} = 2 > 0$ donc $Ind_{(0,0,-1)}\overline{\xi} = Sign_{(0,0,-1)}\overline{\xi} = +1$
   pour le point singulier $(0,0,1)$:
   $DetD_{(0,0,1)}\overline{\xi} = 2 > 0$ donc $Ind_{(0,0,1)}\overline{\xi} = Sign_{(0,0,1)}\overline{\xi} = +1$

Remarque : Pour que l'indice en un point soit défini il faut que les variétés soient orientables sinon, l'indice ne sera pas bien défini car il va dépendre du choix des cartes locales.

Proposition : Soit X un champ de vecteurs s'annulant qu'a l'origine sur un ouvert de $M \subset \mathbb{R}^p$.On suppose les zéros de X isolées, et soit x_0 un tel zéro.et soit $S(\varepsilon)$ une sphère de rayon ε centrée en 0.On suppose ε assez petit et on considère l'application $F : S(x_0, \varepsilon) \longrightarrow S^n$ définit par :

$$F_X(x) = \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|} \tag{3.3}$$

3.3 Éléments de topologie algébrique (homotopie)

Homotopie

Définition 01 : Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues.
On dit que f et homotope à g s'il existe une application continue

$$h : X \times [0,1] \longrightarrow Y \text{ telle que}$$
$$h(x,0) = f(x) \text{ et } h(x,1) = g(x), \forall x \in X.$$

On notera alors $f \sim g$,on dira que h une homotopie de f à g.

Définition 02 : Applications homotopes relativement à un sous espace Soient X et Y deux espaces topologiques,A une partie de X, $f,g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues.
On dit que f et homotope à g relativement à A s'il existe une application continue $h : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que

$$h(x,0) = f(x) \text{ et } h(x,1) = g(x), \forall x \in X$$
$$\forall a \in A, \forall t \in [0,1], h(a,t) = f(a) = g(a).$$

On dit alors que h une homotopie relative à A de f à g.

Proposition : Relation d'équivalence Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie de X,La relation d'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence sur $C(X,Y)$ (i.e $\sim$ est une relation d'équivalence sur $C(X,Y)$)

Remarques : $f \sim f$ par l'homotopie constante $h(x,s) = f(x)$;
Si $f \sim g$ par l'homotopie h, alors $g \sim f$ par l'homotopie inverse

$$\overline{h}(x,s) = h(x,1-s)$$

Si $f_1 \sim f_2$ par l'homotopie h_1 et $f_2 \sim f_3$ par l'homotopie h_2, alors $f_1 \sim f_3$ par l'homotopie composée

$$\text{Si } 0 < s \leq \tfrac{1}{2}; h_3(x,s) = h_1(x,2s)$$
$$\text{Si } \tfrac{1}{2} \leq s \leq 1; h_3(x,s) = h_2(x,2s-1)$$

De même $\sim$ rel A est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'applications continues de X dans Y qui coïncident sur A.

Exemple :(chemins) Soit X un espace topologique.
On dit que $c : I \longrightarrow X$ est un chemin dans X si c est une application continue.
Le point $c(0)$ s'appelle l'origine de c, $c(1)$ son extrémité de c.
Soient c et $c^{'}$ deux chemins dans X.
On dit que c et $c^{'}$ sont des chemins homotopes s'ils sont homotopes dans $c(I,X)$ relativement à $\{0,1\}$ c'est-à-dire s'il existe une application $h : I \times I \longrightarrow X$ telle que

$$\forall s \in I, h(s,0) = c(s), h(s,1) = c^{'}(s),$$
$$\forall t \in I, h(0,t) = c(0) = c^{'}(0) \text{ et } \forall t \in I, h(1,t) = c(1) = c^{'}(1)$$

Cette relation est une relation d'équivalence (la proposition précédente).
Par ailleurs, se donner une application continue h de $\{0,1\}$ dans X revient simplement à se donner les images de 0 et 1.
Pour la fonction continue $h : \{0,1\} \longrightarrow X$ définie par $h(0) = x, h(1) = y$.

3.4 Caractéristique d'Euler-Poincaré

Proposition : Soit X un champ de vecteur sur une variété compacte M ayant un nombre fini de zéros.Alors la somme des indices de X est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de M.

Définition : La caractéristique d'Euler ou d'Euler-Poincaré- en mathématiques, et plus précisément en géométrie et en topologie algébrique, est un invariant numérique, c'est-à-dire un nombre qui décrit un aspect d'une forme d'un espace topologique ou de la structure de cet espace. Elle est communément notée par χ.
En mathématiques plus modernes la caractéristique d'Euler apparait dans l'homologie et les méthodes cohomologiques. Elle est donnée en général par la somme alternée des dimensions des groupes de cohomologie considérés :

$$\chi(M) = \sum^{\infty} (-1)^k dim \mathbb{H}^k(M) \tag{3.4}$$

Remarque : Généralement on n'utilise pas la définition pour calculer la caractéristique d'Euler.
Par exemple : calcule la caractéristique de cercle $\chi(S^1)$
$U = S^1 - \{(0,1)\}$, $V = S^1 - \{(0,-1)\}$
$0 \longrightarrow H^0(S^1) \longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V)$
$H^1(S^1) \longrightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \longrightarrow H^1(U \cap V) \longrightarrow 0$
Et on a $\Omega^0(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R}\}$
$B^0(M) = \{0\}$ et $Z^0(M) = \{f \in C^\infty(M), df = 0\}$ fonction localement connexe.
$H^0(M) = Z^0(M) \longrightarrow \mathbb{R}^d$
$f \longrightarrow (f_{c_1}, ..., f_{c_d})$
Tel que d c'est les composantes connexes,car
$(U, V$connexes, $U \cap V = 0)\Longrightarrow$(composantes connexes)
$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$1 - 2 + 2 - dimH^1(S^1) = 0$ donc $dimH^1(S^1) = 1$
alors $\chi(S^1) = dimH^0 - dimH^1 = 1 - 1 = 0$

Exemples

1. La caractéristique d'Euler de la sphère usuelle est $\chi = 2$

2. La caractéristique d'Euler de la sphère S^n est
   $\chi = 2$ si n est pair, et $\chi = 0$ si n est impair.

3. La caractéristique d'Euler de deux sphères disjointes est $\chi = 2+2 = 4$
4. La caractéristique d'Euler de Le tore est $\chi = 0$ (il est possible de le mailler sans introduire de singularité. Plus généralement, le tore à n trous a pour caractéristique $2-2n$.)
   et pour l'espace projectif réel de dimension n a pour caractéristique $\chi = 1$ si n est pair, et 0 sinon.

Remarque : Si une variété différentielle M est décomposée en parties homéomorphes à $\mathbb{R}^p$ dont le nombre est noté c_p.
Alors le nombre $\chi(M) = c_0 - c_1 + c_2 + ... + (-1)^n c_n$ est indépendant de la décomposition cellulaire ; et est appelé caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété.

Exemple : Si $M = \mathbb{R}$ alors pour la décomposition $\mathbb{R} =]-\infty, 0[\cup \{0\} \cup]0, +\infty[$ on a $\chi(\mathbb{R}) = 1 - 2 = -1$.
Je ne comprend pas pourquoi ça coïncide pas avec celle donnée par la cohomologie de de Rham : $\chi(\mathbb{R}) = \dim H^0(\mathbb{R}) - \dim H^1(\mathbb{R}) = 1 - 0 = 1$.

4

Théorème de Poincaré-Hopf

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques notions de base de la théorie de l'intersection modulo 2 et de la théorie de l'intersection orientée. Nous exposerons des notions élémentaires de la théorie de Lefschetz (nombres et Théorèmes des points fixes de Lefschetz). Ensuite, nous donnerons la définition de l'indice d'un champ de vecteurs sur une variété différentielle, et nous donnerons, enfin, une démonstration simple du Théorème de Poincaré-Hopf.

4.1 Transversalité

En algèbre linéaire et en géométrie différentielle, la propriété de transversalité est un qualificatif pour l'intersection de sous-espaces ou de sous-variétés.

Deux sous-espaces vectoriels F, G d'un espace vectoriel E sont dits *transverses* et on écrit $F \pitchfork G$ quand $F+G=E$ ou, de manière équivalente :

$$\mathrm{codim}(F)+\mathrm{codim}(G)=\mathrm{codim}(F\cap G).$$

Deux sous-variétés X et Y d'une variété différentielle M sont dits transverses lorsque, pour tout point x de $X\cap Y$, les espaces tangents T_xX et T_xY sont transverses dans l'espace tangent T_xM, c'est-à-dire si $T_xM = T_xX + T_xY$

Remarques. 1. *La transversalité est fortement liée à la dimension de l'espace ambiant : deux droites non tangentes sont transverses dans le plan, mais elles ne le sont pas dans l'espace.*

2. *Deux sous-variétés disjointes sont transverses.*

Un premier résultat concernant l'intersection de sous-variétés transverses est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1. *Une intersection non vide $X\cap Y$ de deux sous-variétés transverses, d'une variété différentielle M, est une sous-variété de dimension :*

$$\dim(X\cap Y)=\dim X+\dim Y-\dim M. \tag{4.1}$$

4.1.1 Application transverse à une sous-variété

L'ensemble des solutions d'une équation $f(x)=y$ forme une variété différentielle si y est une valeur régulière de $f : X \to Y$. Si Z est maintenant, au lieu d'un point, une sous-variété de Y, quelle condition assure que $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété ? Cette question va nous amener a définir la notion de transversalité comme une extension toute naturelle de celle de régularité.

Soient X et Y deux variétés différentielles et Z une sous-variété de Y. On dit que la fonction $f : X \longrightarrow Y$ est transverse à Z et on écrit $f \pitchfork Z$ si, pour tout $x \in f^{-1}(Z)$

$$\mathrm{Im} D_xf + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}Y.$$

En d'autres termes, f est transverse à Z si, pour tout $x\in f^{-1}(Z)$, $\mathrm{Im}D_xf$ et $T_{f(x)}Z$ sont transverses (en tant que sous-espaces vectoriels de $T_{f(x)}Y$).

Remarques.

1. *Si $f \pitchfork Z$ et si $f^{-1}(Z)$ n'est pas vide alors c'est une sous-variété qui a la même codimension que Z :* $\mathrm{codim} f^{-1}(Z) = \mathrm{codim} Z$.
2. *Si $f(X)$ est une sous-variété (c'est le cas lorsque f est un plongement), alors les deux notions de transversalité ci-dessus sont liées :*

$$f \pitchfork Z \Longleftrightarrow f(X) \pitchfork Z.$$

4.1.2 Homotopie et stabilité

Théorème 4. *Soient X et Y deux variétés différentielles, Z une sous-variété de Y et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction de classe C^∞. Alors il existe une fonction $g \in C^\infty(X, Y)$, qui est à la fois, homotope à f et transverse à Z.*

Rappelons que la définition des applications de classe C^∞ en homotopie est donnée comme suit : étant données des variétés différentielles X et Y, deux applications $f, g \in C^\infty(X, Y)$ et $g \in C^\infty(M; N)$ sont dites homotopes s'il existe une application $F \in C^\infty([0, 1] \times X, Y)$ telle que pour tout $x \in X$

$$F(0, x) = f(x),\ F(1, x) = g(x).$$

Étant données deux sous-variétés X et Y d'une variété M, on dit que X et Y sont de dimension complémentaires dans M si $\dim X + \dim Y = \dim M$.

4.2 Intersection modulo 2

Si X et Y sont deux sous-variétés transverses, et de dimension complémentaires dans M, alors $X \cap Y$ est une sous-variété de dimension nulle dans M, donc discrète. Supposons, en plus, que X et Y sont fermées dans M et que l'une de ces deux sous-variétés est compacte. Dans ce cas, $X \cap Y$ est compacte et donc finie. Dans ce cas on note son cardinal par $\sharp(X \cap Y)$ et on l'appelle *nombre d'intersection* de X et Y.
Soient X et Y deux variétés différentielles et Z une sous-variété fermée de Y. On suppose que X est compacte et soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction transverse à Z avec $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$. On sait que $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété compacte de X, dont sa dimension est donnée par

$$\dim f^{-1}(Z) = \dim X + \dim Z - \dim Y.$$

Donc si on suppose que $\dim X + \dim Z = dimY$, alors $\dim f^{-1}(Z) = 0$, ce qui montre que $f^{-1}(Z)$ est constituée d'un nombre fini de points de X. Dans ce cas, on peut poser

$$I_2(f, Z) = \mathrm{card} f^{-1}(Z)[2] \in \mathbb{N}.$$

Cet entier est, par définition, le *nombre d'intersection modulo* 2 de f avec Z. C'est un invariant homotopique, c'est-à-dire si $g : X \longrightarrow Y$ est une autre application transverse à Z et homotope à f, alors $I_2(f,Z) = I_2(g,Z)$. Cette propriété nous permet de définir $I_2(f,Z)$ pour toute application $f : X \longrightarrow Y$ (pas forcément transverse à Z). En effet, par stabilité, il existe une application $g : X \to Y$ de classe C^∞, qui est, à la fois, homotope à f et transverse à Z. Don on peut poser

$$I_2(f,Z) = I_2(g,Z).$$

Parfois nous utilisons la proposition suivante pour calculer les nombres d'intersection modulo 2.

Proposition 2. *Soient X et Y deux variétés différentielles et $f : X \longrightarrow Y$ une application de classe C^∞. On suppose que X est le bord dune variété compacte $\tilde{X}$ (c'est-à-dire $M = \partial\tilde{X}$) et qui il existe une application $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ telle que $f(x) = \tilde{f}(x)$, pour tout $x \in X$. Alors $I_2(f,Z) = 0$ pour toute sous-variété fermée Z de Y vérifiant* $\dim X + \dim Z = \dim Y$.

La proposition qui suit, donne la définition du degré modulo 2 d'une fonction de classe C^∞.

Proposition 3. *Soient X et Y deux variétés différentielles ayant la même dimension et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction de classe C^∞. On suppose que X est compacte et Y est connexe. Alors*

$$I_2(f,\{y\}) = I_2(f,\{z\}), \forall (y,z) \in Y \times Y.$$

On note $\deg_2$ *cette valeur commune et on l'appelle degré modulo 2 de f.*

Démonstration : On remarque d'abord que, d'après la définition, $I_2(f,\{y\}) = 0$ pour tout $y \in N - f(M)$.
Soit $y \in f(m)$. On peut supposer, selon la proposition 0.2, que f est transversale y. Dans ce cas, on a $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_k\}$ et pour tout $j \in (1, ..., k)$, $Df(x_j)$ est un isomorphisme des espaces vectoriels de $T_{x_j}M$ dans $T_{f(x_j)}N$. Ainsi, en utilisant le théorème d(inversion locale, on peut trouver des ouverts $w_1, ..., w_k$ de M disjoints deux deux tels que, pour tout $j \in \{1, ..., k\}$, $x_j \in W_j$ et f est un difféomorphisme de W_j dans $f(W_j)$. On pose maintenant

$$U = \cap_{1\leq j\leq k} f(W_j) \cap \{N - f(M - \cup_{1\leq j\leq\leq k} W_j)\},$$
$$U_j = (f(W_j))^{-1}(U).$$

Il est évident que $f^{-1}(U) = U_{1\le j\le k} U_j$ et que, pour tout $j \in \{1,...,k\}$, f est un difféomorphisme de U_j dans U. Par conséquent, si $z \in U$, on a $card f^{-1}(z) = k$ et $I_2(f;\{z\}) = I_2(f;\{y\}) = k$ [modulo 2]. Donc la fonction $y \in N \longrightarrow I_2(f;\{y\})$ est localement constante, ce qui implique quelle est constante puisque N est connexe. Le degré modulo 2 est invariant homotopique. De plus, la proposition 0.3 donne immédiatement le

Corolaire 0.5 : Soit M et N deux variétés différentiables ayant la même dimension et $f : M \longrightarrow N$ une fonction de classe C^∞. On suppose que M est le bord d'une variété compacte $\tilde{M}$ et N est connexe, et qui il existe une fonction $\tilde{f} \in C^\infty(\tilde{M};N)$ telle que $f(x) = \tilde{f}(x)$ quel que soit $x \in M$. Alors $deg_2 f = 0$.

Soit M et G deux sous-variétés de dimension complémentaires d'une variété N. On suppose que M est compacte et G est fermé dans N. On pose

$$I_2(M,G) = I_2(i,G),$$

où i est l'injection canonique de M dans N. On appelle $I_2(M;G)$ "nombre d'intersection modulo 2 (the mod 2 intersection number) de M avec G". Il est évident que si M et G sont transversales, alors

$$I_2(M,G) = \sharp(M\cap G)[modulo 2] = card(M \cap G)[modulo 2].$$

Soit M une variété compacte de dimension n et $f \in C^\infty(M,\mathbb{R}^{n+1})$. Pour $y \in \mathbb{R}^{n+1} - f(M)$, on définit une nouvelle fonction $f_y : M \longrightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ par la formule

$$f_y(x) = \frac{f(x)-y}{\| f(x)-y \|_2}, x \in M.$$

Par définition, $deg_2 f_y$ est le nombre d'enroulement modulo 2 de f autour du point y. Ce nombre, qui est noté $W_2(f;y)$, donne des informations sur l'enroulement de $f(x)$ autour de y.

Dans la topologie différentielle, on utilise cette notion pour démontrer le théorème classique suivant.

Théorème 0.6 (Théorème de séparation de Jordan-Brouwer) Soit N une variété différentiable sans bord et connexe, et M un hyperplan fermé (c'est-à-dire compacte et sans bord) et connexe de M. Alors l'ensemble ouvert $N-M$ a exactement deux composantes connexes D_1 et D_2. De plus, $\bar{D}_1$ et $\bar{D}_2$ sont des variétés bord avec $\partial\bar{D}_1 = \partial\bar{D}_2 = M$ et l'une de $\bar{D}_1$ et $\bar{D}_2$ est compacte.

Si N est ouverte (c'est-à-dire qu'elle n'est pas compacte), alors l'unique composante connexe parmi D_1 et D_2, qui a une adhérence compacte, s'appelle

région intérieure déterminée par M, l'autre s'appelle région extérieure déterminée par M.
Les notions et les résultats, que nous avons vu dans le paragraphe précédent, constituent ce qu'on appelle, dans la topologie différentielle, Théorie de l'intersection modulo 2. **Toutes les variétés considérées dans ce qui suit, sont orientées.** Soit M et N deux variétés différentiables et G une sous-variété fermé de N. On suppose que M est compacte et que $dimM + dimG = dimN$. Soit $f : M \longrightarrow N$ une fonction transversale G. Si $f^{-1}(G) = \emptyset$, nous posons $I(f, G) = 0$. Supposons que $f^{-1}(G) \neq \emptyset$. Dans ce cas, d'après la proposition 0.1, on a $f^{-1}(G) = \{x_1, ..., x_k\} \subset M$ avec $k \in \mathbb{N}^\star$. Soit $j \in \{1, ..., k\}$. On a

$$Df(x_j)(T_{x_j}M) + T_{f(x_j)}G = T_{f(x_j)}N,$$

et, par conséquent

$$\begin{aligned}
&dimM + dimG = dimN = dimT_{f(x_j)}N = \\
&dimDf(x_j)(T_{x_j}M) + dimT_{f(x_j)}G - dim(Df(x_j)(T_{x_j}M) \cap Tf(x_j)G) = \\
&dimT_{x_j}M - dimKerDf(x_j) + dimG - dim(Df(x_j)(T_{x_j}M) \cap Tf(x_j)G) = \\
&dimM + dimG - dimKerDf(x_j) - dim(Df(x_j)(T_{x_j}M) \cap (T_{f(x_j)})G))
\end{aligned}$$

Par suite

$$dimKerDf(x_j) + dim(Df(x_j)(T_{x_j}M) \cap T_{f(x_j)}G) = 0$$

D'où

$$dimKerDf(x_j) = dim(Df(x_j)(T_{x_j}M) \cap T_{f(x_j)}G) = 0,$$

ce qui implique que

$$kerDf(x_j) = \{0_{x_j}\}, Df(x_j)(T_{x_j}M) \cap T_{f(x_j)}G = \{0_{f(x_j)}\}.$$

Donc $Df(x_j)$ est un isomorphisme des espaces vectoriels de $T_{x_j}M$ dans son image $Df(x_j)(T_{x_j}M)$.
Le nombre d'orientation en x_j est égale 1 si l'orientation sur $Df(x_j)(T_{x_j}M)$ définie par $Df(x_j))$ et l'orientation de $T_{f(x_j)}G$ donnent la même orientation originale de $T_{f(x_j)}N$, et est égale -1 dans le cas contraire.
Le nombre d'intersection orienté $I(f;G)$ est, par définition, la somme de ces nombres d'orientation. Cet entier est un invariant homotopique comme le nombre d'intersection modulo 2, c'est-à- dire si $g : M \longrightarrow N$ une autre fonction transversale G et homotopique f, alors $I(f;G) = I(g;G)$, ce qui nous permet de définir $I(f;G)$ pour une fonction arbitraire $f : M \longrightarrow N$. En effet, d'après la proposition 0.2, il existe une fonction $g \in C^\infty(M;N)$, qui est, à la fois, homotopique f et transversale à G. D'où on peut poser $I(f;G) = I(g;G)$. Les deux propositions 0.3 et 0.4 restent encore valables pour les nombres d'intersection orientés.

Proposition 0.7 : Soit M et N deux variétés différentiables et $f : M \longrightarrow N$ une fonction de classe C^∞. On suppose que M est le bord dune variété compacte $\tilde{M}$ et qu'il existe une fonction $\tilde{f} \in (\tilde{M};N)$ telle que $f(x) = \tilde{f}(x)$ pour tout $x \in M$. Alors $I(f;G) = 0$ pour toute sous-variété fermé orientée G de N vérifiant $dimM + dimG = dimN$.

Proposition 0.8 : Soit M et N deux variétés différentiables ayant la même dimension et $f : M \longrightarrow N$ une fonction de classe C^∞. On suppose que M est compacte et N est connexe. Alors

$$I(f,\{y\}) = I(f,\{z\}), \forall (y,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

On note $degf$ cette valeur commune et on l'appelle "degré" de f.
La proposition 0.7 donne immédiatement le

Corollaire 0.9 : Soit M et N deux variétés différentiables ayant la même dimension et $f : M \longrightarrow N$ une fonction de classe C^∞. On suppose que M est le bord dune variété compacte $\tilde{M}$ et N est connexe, et qu'il existe une fonction $\tilde{f} \in (\tilde{M};N)$ telle que $f(x) = \tilde{f}(x)$ pour tout $x \in M$. Alors $degf = 0$.
Soit M et G deux sous-variétés de dimension complémentaires dune variété N. On suppose que M est compacte et G est fermé dans N. On pose $I(M;G) = I(i;G)$ est l'injection naturelle de M dans N. On appelle $I(M;G)$ **nombre d'intersection orienté de** M avec G. Il est claire que si M et G sont transversales, alors $I(M;G)$ est la somme des nombres d'orientation associés aux points de $M \cap G$.
Soit M, N et G des variétés différentiables, et $f : M \longrightarrow N$ et $g : G \longrightarrow N$ deux fonctions de classe C^∞. On dit que f et g sont transversales si

$$Df(x)(T_xM) + D_g(y)(T_yG) = T_zN, \forall z \in \mathbb{N}, \forall x \in f^{-1}(z), \forall y \in g^{-1}(z).$$

On remarque rapidement que si G est une sous-variété de N, alors $f : M \longrightarrow N$ est transversale à G si, et seulement si, f et l'injection naturelle à $G \hookrightarrow N$ sont transversales. Si encore M est une sous-variété de N, alors M et G sont transversales si, et seulement si, les deux injections naturelle $M \hookrightarrow N$ et $G \hookrightarrow N$ sont transversales.
Le lemme suivant est facile à vérifier.

Lemme 0.10 : Soit M, N et G des variétés différentiables, et $f : M \longrightarrow N$ et $g : G \longrightarrow N$ deux fonctions de classe C^∞. Alors f et g sont transversales si, et seulement si,(f,g) est transversale $\triangle_N = \{(x,x) : x \in N\}$.
On suppose maintenant que $dimM + dimG = dimN$ et soit $f : M \longrightarrow N$ et $g : G \longrightarrow N$ deux fonctions transversales. Étant donné $z \in N$, on vérifie comme précédemment, que

$$\forall x \in f^{-1}(z), \forall y \in g^{-1}(z) : KerDf(x) = \{0_x\}, KerD_g(y) = \{0_y\},$$
$$Df(x)(T_xM) \oplus D_g(y)(T_yG) = T_xN.$$

Ainsi donc, on définit **le nombre d'orientation** en $(x;y) \in f^{-1}(z) \times g^{-1}(z)$ comme suit : il est égale 1 si les orientations sur $Df(x)(T_xM)$ et $Dg(y)(T_yM))$ définies respectivement par $Df(x)$ et $Dg(y)$ donnent la même orientation originale de T_zN, et est égale -1 dans le cas contraire.
On suppose, de plus, que M et G sont compactes. Comme $\triangle_N$ est une sous-variété fermé de $N \times N$ de dimension $dimN$ et $(f;g)$ est transversale N selon le lemme 0.10, alors d'après la proposition 0.1 l'ensemble

$$(f,g)^{-1}(\triangle_N) = \{(x,y) \in M \times G : f(x) = g(y)\},$$

constitue une sous-variété compacte de $M \times G$ de dimension

$$\begin{aligned} dim(f,g)^{-1}(\triangle_N) &= dim(M \times G) + dim \triangle_N - dim(N \times N) \\ &= dimM + dimG + dimN - 2dimN = 0 \end{aligned}$$

Ainsi donc, $(f,g)^{-1}(\triangle_N)$ est un sous-ensemble fini de $M \times G$. On définit **le nombre d'intersection orienté** $I(f,g)$ comme étant la somme des nombres d'orientation associés aux points de $(f,g)^{-1}(\triangle_N)$.

Lemme 0.11 : Soit M, N et G des variétés différentiables. On suppose que M et G sont compactes et que $dimM + dimG = dimN$. Soit $f : M \longrightarrow N$ et $g : G \longrightarrow N$ deux fonctions transversales. Alors

$$I(f,g) = (-1)^{dimG} I(f \times g, \triangle_N). \tag{4.2}$$

On remarque que la formule (9) est encore valable si f et g ne sont pas transversales, ce qui nous permet de considérer cette relation comme une définition pour le cas général.
On cite maintenant quelques propriétés des nombres d'intersection orientés.

Proposition 0.12 : Soit M, N et G des variétés différentiables. On suppose que M et G sont compactes et que $dimM + dimG = dimN$. Alors

i) Pour toutes deux fonctions $f \in C^\infty(M;N)$ et $g \in C^\infty(G;N)$, on a
$$I(f,g) = (-1)^{(dimM)(dimG)} I(g,f)$$

ii) Si M et G sont des sous-variétés de N, on a
$$I(M,G) = (-1)^{(dimM)(dimG)} I(G,M).$$

En particulier, si $M = G$, $I(M;M) = (-1)^{(dimM)^2} I(M;M)$, et donc dans le cas ou la dimension de M est impaire, on a forcément $I(M;M) = 0$.

iii) Si $f \in C^\infty(M;N)$ et $g \in C^\infty(G;N)$ sont homotopiques respectivement à $\tilde{f} \in C^\infty(M;N)$ et $\tilde{g} \in C^\infty(G;N)$, on a $I(f,g) = I(\tilde{f},\tilde{g})$.

Soit M une variété compacte. Il est évident que $\triangle_N$ est une sous-variété compacte de $M \times M$ et que $2dim\triangle_N = dim(M \times M)$. D'où $I(\triangle_N, \triangle_N)$ existe. On appelle cet entier, qui a un rôle essentielle dans beaucoup de situations dans la géométrie et la topologie, **caractéristique d'Euler** de M et on le note $\chi(M)$.
L'énoncé ii) dans la proposition 0.12 donne rapidement le

Corolaire 0.13 : La caractéristique d'Euler dune variété compacte de dimension impaire est nulle.
Je discute maintenant les nombres de Lefschetz.
Soit M une variété compacte et $f \in C^\infty(M;M)$. Le graphe de f

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in M\},$$

est une sous-variété compacte de $M \times M$ ayant la même dimension de M. On munit $\triangle_M$ et Γ_f des orientations définies respectivement par les difféomorphismes $y \in M \longrightarrow (y,y) \in \triangle_M$ et $y \in M \longrightarrow (y, f(y)) \in \Gamma_f$. Comme $dim \triangle_M + dim\Gamma_f = 2dimM = dim(M \times M)$, le nombre d'intersection orienté $I(\triangle_M, \Gamma_f)$ est bien défini. On appelle cet entier **nombre global de Lefschetz** de f sur M et on le note $L(f)$.

Proposition 0.14 : Soit M une variété compacte et $f \in C^\infty(M;M)$. Alors

1. Si $L(f) \neq 0$, f admet un point fixe. C'est le théorème du point fixe de Lefschetz.
2. $L(f)$ est un invariant homotopique.
3. $L(Id_M) = \chi(M)$. En particulier, si M a une fonction $f \in C^\infty(M;M)$, qui est à la fois homotopique Id_Met n'a pas un point fixe, alors $\chi(M) = 0$.

Démonstration : Si f n'admet pas un point fixe, on a $\triangle_M \cap \Gamma_f = \emptyset$. Par suite,

$$L(f) = I(\triangle_M, \Gamma_f) = 0.$$

C'est l'énoncé 1.
Comme les nombres d'intersection sont des invariants homotopiques et $L(f)$ est un nombre d'intersection orienté, alors $L(f)$ est un invariant homotopique. C'est l'énoncé 2.
On a $T_{Id_M} = \{(x,x) : x \in M\} = \triangle_M$ Par conséquent,

$$L(Id_M) = I(\triangle_M, \Gamma_{Id_M}) = I(\triangle_M, \triangle_M) = \chi(M).$$

C'est l'énoncé 3.
Une fonction $f \in C^\infty(M;M)$ est dite **fonction de Lefschetz** si Γ_f et $\triangle_M$ sont transversales.

Proposition 0.15 : Soit M une variété compacte. Alors

i) Toute fonction de Lefschetz sur M a un nombre fini de points fixes.

ii) Toute fonction de M dans M est homotopique une fonction de Lefschetz.

Démonstration : Soit $f \in C^\infty(M;M)$ une fonction de Lefschetz. D'après la proposition 0.1, ou bien $\triangle_M \cap \Gamma_f = \emptyset$ ou bien $\triangle_M \cap \Gamma_f$ est une sous-variété de $M \times M$ de dimension

$$dim(\triangle_M \cap \Gamma_f) = dim\,\triangle_M + dim\Gamma_f - dim(M \times M) = 0.$$

Donc $\triangle_M \cap \Gamma_f$ est un sous-ensemble fini de $M \times M$. Comme $\triangle_M \cap \Gamma_f$ est l'ensemble des points fixes de f, on conclut que f a un nombre fini de points fixes.
Soit M une variété différentiable (non nécessairement compacte) et $f \in C^\infty(M;M)$. Un point $x \in M$ est dit **point de Lefschetz** de f si $Df(x)$ n'a pas un vecteur fixe non nul, ou encore si l'application linéaire $Df(x) - Id_{T_xM}$ est injective de $T_xM$dans lui même. Il n'est pas difficile de vérifier que $f \in C^\infty(M;M)$ est de Lefschetz si, et seulement si, tout point fixe de f est un point de Lefschetz de f.
Soit $x \in M$ un point fixe de Lefschetz de f. On a évidement

$$T(x,x)\,\triangle_M + T_{(x,x)}\Gamma_f \subset T_{(x,x)}(M \times M).$$

Soit $\xi \in T(x,x)\,\triangle_M + T_{(x,x)}\Gamma_f$. Il existe $\eta, \zeta \in T_xM$, tels que

$$\xi = (\eta, \eta) = (\zeta, Df(x)(\zeta)).$$

Par suite,$\eta = \zeta, \eta = Df(x)(\eta)$. D'où $\eta \in Ker(Df(x) - Id_{T_xM}) - \eta = 0$ et donc $\eta = 0$ puisque $Df(x) - Id_{T_xM}$ est injective. Ainsi donc,

$$dim(T_{(x,x)}\,\triangle_M + T_{(x,x)}\Gamma_f) = dimT_{(x,x)\triangle_M} + dimT_{(x,x)}\Gamma_f = dimT_{(x,x)}(M \times M),$$

Ce qui implique que $T_{(x,x)}\,\triangle_M \oplus T_{(x,x)}\Gamma_f = T_{(x,x)}(M \times M)$. On définit **le nombre local de Lefschetz** L_xf de f en x comme suit : il est égale 1 si les orientations de $T_{(x,x)}\triangle_M$ et de $T_{(x,x)}\Gamma_f$ donnent la même orientation originale de $T_{(x,x)}(M \times M)$, et est égale -1 dans le cas contraire.
On suppose que M est compacte. Si f est de Lefschetz, alors Γ_f et $\triangle_M$ sont

transversales. En conséquence, le nombre global de Lefschetz $L(f) = I(\triangle_M, \Gamma_f)$ est, par définition, la somme des nombres d'orientation associés aux points de $\triangle_M \cap \Gamma_f$, qui est exactement la somme des nombres locaux de Lefschetz $L_x(f)$ où $f(x) = x$. D'où la formule

$$L(f) = \sum_{x \in M, f(x)=x} L_x(f) \tag{4.3}$$

La proposition suivante nous donne une deuxième manière pour définir les nombres locaux de Lefschetz.

Proposition 0.16 : Soit M une variété différentiable et $f \in C^\infty(M;M)$. Alors pour tout point fixe de Lefschetz x de f, le nombre local de Lefschetz $L_x(f)$ est égale 1 si $Df(x) - Id_{T_xM}$ conserve l'orientation de T_xM, et à -1 dans le cas contraire.
Voici encore une troisième manière pour définir les nombres locaux de Lefschetz en les points fixes isolés.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$. On suppose que f a un point fixe unique $x \in \Omega$. On définit une fonction $\tilde{f}$ par

$$\tilde{f}(y) = \frac{f(y) - y}{\| f(y) - y \|_2}, y \in \Omega - \{x\}$$

Pour $a > 0$, on note $B_F(x;a)$ la boule $\{y \in \mathbb{R}^n :\| y - x \|_2 \leq a\}$. On sait que l'orientation standard de $B_F(x,a)$ (déduite de l'orientation standard de $\mathbb{R}^n$) définit sur $\partial B_F(x;a)$ une orientation identique celle définie par la normale extérieure $\xi \in \partial B_F(x;a) \longrightarrow (\xi - x) \mid_a \in S^{n-1}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$ et $B_F(0,b)$. L'ensemble

$$\tilde{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq \| x \|_2 \leq b\},$$

est une variété compacte de dimension n à bord $M = \partial B_F(x;a) \cup \partial B_F(x;b)$. De plus, l'orientation standard de $\tilde{M}$(déduite de l'orientation standard de $\mathbb{R}^n$) définit sur M une orientation qui coïncide, sur $\partial B_F(x;b)$, avec l'orientation standard de $\partial B_F(x;b)$, et sur $\partial B_F(x;a)$ avec celle définie par la normale intérieure, ou encore l'orientation inverse de l'orientation standard de $\partial B_F(x;a)$. D'où, selon le corollaire 0.9, on peut écrire

$$deg(\tilde{f} \mid_M) = deg(\tilde{f} \mid \partial B_F(x,b)) - deg(\tilde{f} \mid \partial B_F(x,a)) = 0$$

Par suite, $deg(\tilde{f} \mid \partial B_F(x,b)) = deg(\tilde{f} \mid \partial B_F(x,a))$. De plus, si x est un point de Lefschetz de f, cette valeur commune coïncide avec le nombre local de Lefschetz $L_x(f)$.
Soit $f' \in C^\infty(B_F(x;a), \mathbb{R}^n)$ une fonction de Lefschetz telle que

$$f(x) = f'(x) \forall x \in B_F(x;a) - K,$$

où K est un compact de la boule ouverte $B_O(x;a)$ (une telle fonction existe). On vérifie que

$$deg(\tilde{f} \mid \partial B_F(x,a)) = \sum_{y \in B_F(x;a), f'(y)=y} L_y(f') \tag{4.4}$$

Par conséquent, si x est un point de Lefschetz de f, on a

$$L_x(f) = deg(\tilde{f} \mid \partial B_F(x,a)) = \sum_{y \in B_F(x;a), f'(y)=y} L_y(f')$$

Soit M une variété différentiable de dimension n et $f \in C^\infty(M;M)$. On suppose que f a un point fixe isolé $x \in M$. On considère une carte locale positivement orientée (U,ϕ) de M en x telle que $f(y) \neq y$ pour tout $y \in U - \{x\}$. Il est évident que $\phi(x)$ est l'unique point fixe de la fonction $\phi \circ f \circ \phi^{-1} : \Omega = \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. De plus, x est un point de Lefschetz de f si, et seulement si, $\phi(x)$ est un point de Lefschetz de $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$, et on a dans ce cas

$$L_x(f) = L_{\phi(x)}(\phi \circ f \circ \phi^{-1}) = deg(\phi \circ \widehat{f \circ \phi^{-1}} | \partial B_F(\phi(x), a)), \tag{4.5}$$

Où $a > 0$ est choisi tel que$B_F(\phi(x);a) \subset \phi(U)$.
Ainsi donc, selon les relations (11) et (12), on peut poser

$$L_x(f) = deg(\phi \circ \widehat{f \circ \phi^{-1}} | \partial B_F(\phi(x), a)),$$

Cette définition est rigoureuse puisque, grâce (11), $L_x(f)$ ne dépend pas de la carte locale choisie $(U;\phi)$, et grâce (12), si x est un point de Lefschetz de f, le nombre $L_x(f)$ donné par cette définition est égale ce donné par la proposition 0.16.
La relation (10) est encore valable pour ce cas général, plus précisément, on a la

Proposition 0.17 : Soit M une variété compacte et $f \in C^\infty(M;M)$ une fonction ayant un nombre fini de points fixes. Alors

$$L(f) = \sum_{x \in M, f(x)=x} L_x(f)$$

Je discute maintenant l'indice d'un champ de vecteurs.
Soit M une variété différentiable et $X \in \chi(M)$ un champ de vecteurs sur M

ayant un zéro isolé en $x \in M$. On considère une carte locale $(U;\Phi)$ de M en x telle que

$$\Phi(x) = 0, X(y) \neq 0_y, \forall y \in U - \{x\}.$$

Limage directe $\Phi_* X$ de X par Φ est définie comme suit :

$$\Phi_* X(\xi) = D\Phi(\Phi^{-1}(\xi))(X \circ \Phi^{-1}(\xi)), \xi \in \Omega = \Phi(U).$$

Il est évident que $\Phi_*(X) \in \chi(\Omega)$ est un champ de vecteurs sur Ω ayant un zéro isolé en 0. On pose par définition

$$Ind_x(X) = L_0(\Phi_* X)$$

Pour que cette définition soit rigoureuse, il faut vérifier que $Ind_x(X)$ ne dépend pas de la carte locale choisie $(U;\Phi)$.

Lemme 0.18 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, $X \in \chi(M)$ un champ de vecteurs sur Ω ayant un zéro isolé en 0, et $f \in C^\infty([0;\varepsilon] \times \Omega; \mathbb{R}^n)$. On suppose que :

1. $X(x) = \partial_t f(0,x)$, quelque soit $x \in \Omega$,
2. $f(0,.) = Id(.)$,
3. $f(t,0) = 0$, pour tout $t \in [0,\varepsilon]$,
4. $f(t,x) \neq x$, pour tout $t \in]0,\varepsilon]$ et tout $x \in \Omega - \{0\}$.

Alors

$$Ind_0(X) = L_0(f(t,.)), \forall t \in]0,1].$$

De plus, une telle fonction f existe. Par exemple, la fonction $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow x + tX(x) \in \mathbb{R}^n$, vérifie les conditions 1), 2), 3) et 4).

Démonstration : Pour tout $(t,x) \in [0,\varepsilon] \times \Omega$,

$$f(t,x) = x + t\partial_t f(0,x) + t^2 \int_0^1 (1-\lambda)\partial_t^2 f(t\lambda, x) d\lambda = x + tX(x) + t^2 g(t,x),$$

ou $g(t,x) = \int_0^1 (1-\lambda)\partial_t^2 f(t\lambda,x) d\lambda$. Par suit,

$$\frac{f(t,x) - x}{\| f(t,x) - x \|_2} = \frac{X(x) - tg(t,x)}{\| X(x) + tg(t,x) \|_2}, t \in]0,\varepsilon], x \in \Omega - \{0\}.$$

Soit $\in]0,\varepsilon]$ et $a > 0$ tel que $B_F(x;a) \subset \Omega$. Par définition, on a

$$L_0(f(t,.)) = deg\left\{\frac{f(t,.) - Id(.)}{\|f(t,.) - Id(.)\|_2} | \partial B_F(x,a)\right\} = deg\left\{\frac{X(.) + tg(t,.)}{\|X(.) + tg(t,.)\|_2} | \partial B_F(x,a)\right\}$$

Mais comme les applications $\frac{X(.)+tg(t,.)}{\|X(.)+tg(t,.)\|_2}|\partial B_F(x,a)$ et $\frac{X}{\|X\|_2}|\partial B_F(x,a)$ sont homotopiques et le deg est invariant homotopique, on peut écrire

$$L_0(f(t,.)) = deg\left\{\frac{X(.)+tg(t,.)}{\|X(.)+tg(t,.)\|_2}|\partial B_F(x,a)\right\} = deg\left\{\frac{X}{\|X\|_2} \mid \partial B_F(x,a)\right\} = Ind_0(X)$$

C'est le résultat désiré.

Proposition 0.19 : Soit M une variété différentiable et $X \in \chi(M)$ un champ de vecteurs sur M ayant un zéro isolé en $x \in M$. Alors $Ind_x(X)$ ne dépend pas de la carte locale choisie.

Démonstration : Soit $(U;\Phi)$ et $(U;\Psi)$ deux cartes locales positivement orientées de M en x telle que $\Phi(x) = \Psi(x) = 0, X(y) \neq 0_y, \forall y \in U - \{x\}$. On considère une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Phi(U);\mathbb{R}^n)$ vérifiant les conditions

- $\Phi_* X(x) = \partial_t f(0,x)$, quel que soit $x \in \Phi(U) - \{0\}$,
- $f(0,.) = Id(.)$,
- $f(t,0) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- $f(t,x) \neq x$, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et tout $x \in \Phi(U) - \{0\}$.

On choisit un ouvert $\Omega \in \Phi(U)$ contenant 0 et un $\varepsilon > 0$ tels que $f(t;x) \in \Psi(U)$ pour tout $(t;x) \in [0;\varepsilon]$ et on pose $\tilde{\Omega} = \Phi \circ \Psi^{-1}(\Omega)$. Il n'est pas difficile de vérifier que g définie par

$$g(t,x) = \Phi \circ \Psi^{-1} \circ f(t, \Psi \circ \Phi^{-1}(x)), (t,x) \in [0,\varepsilon] \times \tilde{\Omega}$$

vérifie :

- $\Psi_* X(x) = \partial_t g(0,x)$, quel que soit $x \in \tilde{\Omega}$,
- $g(0,.) = Id(.)$,
- $g(t,0) = 0$, pour tout $t \in [0,\varepsilon]$,
- $g(t,x) \neq x$, pour tout $x \in]0,\varepsilon]$ et tout $x \in \tilde{\Omega} - \{0\}$.

D'où, d'après le lemme 0.18, on a

$$L_0(\Phi_* X) = L_0(f(t,.)), L_0(\Psi_* X) = L_0(g(t,.)), t \in]0,\varepsilon].$$

Comme le changement de cartes $\Psi \circ \Phi^{-1}$ est positivement orienté et les nombres de Lefschetz sont invariants sous l'action de ce type de transformations, on a

$$L_0(\Phi_* X) = L_0(f(t,.)) = L_0(g(t,.)) = L_0(\Psi_* X).t \in]0,\varepsilon].$$

Par suite,

$$Ind_x(X) = L_0(\Phi_* X) = L_0(\Psi_* X),$$

ce qui constitue le résultat désiré. Je suis maintenant en mesure d'énoncer le théorème de Poincaré-Hopf.

Théorème de Poincaré-Hopf : Soit M une variété C^∞ compact à bord. Et soit X un champ de vecteurs C^∞ sur M, ayant un nombre fini de zéros $x_1,...,x_k$ alors on a :

$$\chi(M) = \sum_{j=1}^{k} Ind_{x_j}(X) \tag{4.6}$$

Démonstration : D'après le théorème de plongements de H. Whitney, on peut plonger M dans $\mathbb{R}^{2n}$ ou $n = dimM$.
Pour $\varepsilon > 0$, on note M^ε l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^{2n:d(x;M)<\varepsilon}$. D'après le théorème d'existence des voisinages tubulaires, il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\pi \in C^\infty(M^\varepsilon;M)$ vérifiant

$$x - \pi(x) \in (T_{\pi(x)}M)^\perp, \forall x \in M^\varepsilon, et \pi(x) = x, \forall x \in M. \tag{4.7}$$

Soit $(t;x) \in \mathbb{R}\times M$. On a

$$d(x+tX(x),M) \leq d(x+tX(x),x) = \| tX(x) \|_2 = | t | \| X(x) \|_2$$

$$\leq | t | sup_{y\in M} \| X(y) \|_2 = | t | \| X \|_{L^\infty(M)} .$$

Par suite,

$$d(x+tX(x),M) < \varepsilon, | t | < \delta = \frac{\varepsilon}{1+ \| X \|_{L^\infty M}},$$

ce qui nous permet de définir une fonction f de classe C^∞ par la relation

$$f(t,x) = \pi(x+tX(x)), (t,x) \in]-\delta,\delta[\times M$$

On a

$$\partial_t f(t,x) = D\pi(x+tX(x))(X(x)), (t,x) \in]-\delta,\delta[\times M$$

Par suite,

$$\partial_t f(0,x) = D\pi(x)(X(x)) = X(x), x \in M. \tag{4.8}$$

D'autre part, il est évident que les zéros $x_1,...,x_k$ sont des points fixes de $f(t,.)$ quel que soit $t \in]-\delta,\delta[$.
Soit $t \in]-\delta,\delta[- \{0\}$ et soit $x \in M$ un point fixe de $f(t,.)$. Selon (14), on a

$$x+tX(x) - \pi(x+tX(x)) = x+tX(x) - x = tX(x) \in (T_xM)^\perp,$$

et comme $X(x) \in (T_xM)$, alors

$$0 = (tX(x), X(x)) = t \| X(x) \|_2^2 .$$

Par suite, $X(x) = 0$, ce qui entraîne que $x \in \{x_1, ..., x_k\}$. Ainsi donc, les points fixes de $f(t,.)$, $t \in]-\delta, \delta[- \{0\}$, sont exactement les zéros de $X : x_1, ..., x_k$. Ce fait et la relation (15) nous permet d'appliquer le lemme 0.18 pour obtenir

$$Ind_{x_j}(X) = L_{x_j}(f(t,.)), t \in]-\delta, \delta[- \{0\}, j \in \{0, ..., k\}$$

Par suite, la proposition 0.17 nous donne

$$\sum_{j=1}^{k} Indx_j(X) = \sum_{j=1}^{k} L_{x_j}(f(t,.)), t \in]-\delta, \delta[- \{0\}.$$

Mais comme les fonctions $f(t,.)$, $t \in]-\delta, \delta[- \{0\}$, sont homotopiques l'identité Id_M et les nombres globaux de Lefschetz sont des invariants homotopiques, on a

$$L(f(t,.)) = L(Id_M) = \chi(M), \in]-\delta, \delta[- \{0\}$$

D'où le résultat désiré

$$\sum_{j=1}^{k} ind_{x_j}(X) = \chi(M).$$

Proposition : Soit X un champ de vecteur sur une variété compacte M ayant un nombre fini de zéros.Alors la somme des indices de X est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de M.

4.3 Applications

Le Théorème de Poincaré-Hopf possède de nombreuses applications, parmi lesquelles : Théorème de la Boule Chevelue, Théorème du point fixe de Brouwer...

4.3.1 Théorème de la Boule Chevelue.

Henri Poincaré, lors de ses travaux sur les solutions des équations différentielles, a démontré que sur la sphère S^2 il n'existe pas de systèmes de courbes sans singularités ; ce que l'on peut encore énoncer en disant que sur la sphère S^2, tout champ de vecteurs possède des singularités. Brouwer a généralisé ce théorème à toute sphère de dimension paire. Le théorème de la boule chevelue affirme que sur la sphère de dimension $2n$ tout champ de vecteurs tangents continu s'annule en au moins un point.

Théorème 5 (de la Boule Chevelue)**.** *Tout champ de vecteurs tangents à une sphère de dimension paire, s'annule en au moins un point.*

En effet comme la caractéristique d'Euler de la sphère de dimension paire est $\chi(S^{2n}) = 2$ alors tout champ de vecteurs sur S^{2n} possède au moins un point singulier (sinon la caractéristique d'Euler serait nulle).

4.3.2 Théorème du point fixe de Brouwer.

C'est une théorème de point fixe très fort : l'hypothèse sur la fonction est plutôt faible, on a juste sa continuité et qu'elle laisse stable la boule unité, et on obtient l'existence d'un point fixe.

Théorème 6 (Brouwer)**.** *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.*

Ce théorème intervient moins souvent que le théorème du fixe de Banach, mais c'est un outil puissant pour résoudre des équations aux dérivées partielles non linéaires via la méthode de Galerkine. En fait, ce théorème se généralise au cas d'un compact convexe d'un espace de Banach (Théorème de Schauder). Il existe dans la littérature beaucoup de démonstrations de ce théorème, mais la démonstration la plus élégante est dû à John Milnor : elle est basés sur le Théorème de la Boule Chevelue.

Conclusion

On a montré dans ce mémoire un théorème à la fois joli et très puissant qui relie la topologie (caractéristique d'Euler) à la géométrie (indice de champs vecteurs en un point singulier). Ce théorème nous a permis de retrouver des résultats de topologie assez puissant (Théorème du point fixe de Brouwer).

Ce mémoire m'a permis d'apprendre beaucoup de notions de topologie et de géométrie que je connaissais pas auparavant, et a éveillé ma curiosité et m'a donné envie de continuer une thèse de Doctorat en géométrie.

Bibliographie

[1] A. Cima, F. Manosas, J.Villadelpart, *Topologie*. (1998).

[2] F. Labourie, *Géométrie différentielle.* ,(2012).

[3] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles.* ,(1996).

[4] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable view point.*

[5] E. Outerelo & J. M. Ruiz, *Mapping degree theory.* ,(2000).

[6] F. Paulin, *Géométrie différentielle élémentaire.* ,(2006-2007).

[7] F. Paulin, *Topologie algébrique élémentaire.* ,(2009-2012).

Théorème de Poincaré-Hopf

ABSTRACT

We focus in this Master project on a result of differential topology which has many implications in topology and geometry. This is the Poincare-Hopf theorem which asserts that the Euler characteristic of a compact manifold is equal to the sum of the indices of vector fields with a finite number of singular points on the manifold.

We present all the necessary tools to prove this theorem, and we develop some examples of applications.

keywords : Degree of a map, index of a vector field, transversality, Euler Characteristic, Poincaré-Hopf Theorem.

RÉSUMÉ

Nous nous intéressons dans ce mémoire à un résultat de topologie différentielle qui a de nombreuses conséquences en topologie et en géométrie. Il s'agit du Théorème de Poincaré-Hopf qui affirme que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété compacte et égale à la somme des indices d'un champs de vecteurs sur la variété, ayant un nombre fini de points singuliers.

Nous présentons tout les outils nécessaires pour démontrer ce théorème et nous développons quelques exemples d'application.

Mots-clés : Degré d'une application, Indice d'un champ de vecteur, Transversalité, Caractéristique d'Euler-Poincaré, Théorème de Poincaré-Hopf.