UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :GUEDIRI FERIEL

Thème

Inéquations variationnelles staionnaires.

Soutenu publiquement le : 25/05/2017

Devant le jury composé de :

Chacha Djamal Ahmed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Ghezal Abderrazek	M.C. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Exminateur
Merabet Ismail	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Eximinateur
Bensayah Abdallah	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à mon cher père.

A ma chère mère.

A mes chèrs frères.

A ma soeur.

A tous mes amies.

A tous les professeurs de l'univercité de Kasdi merbah Ouargla.

REMERCIEMENT

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier mon encadreur **Mr Bensayeh Abdallah**, pour son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

- V: espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)$ et la norme associée $\|.\|$.
- K ensemble non vide convexe et borné.
- H' dual de l'espace H.
- $H^{-1}(\Omega)$ = espace dualité de $H_0^1(\Omega)$.
- $(.,.)$: Le produit scalaire et $\langle .,. \rangle$: Le produit de dualité.
- $\rightarrow$ convergence forte.
- $\rightharpoonup$ convergence faible.
- $\hookrightarrow$ l'injection continue.
- $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ = $\nabla v \cdot n$ La dérivée normale exterieur.

INTRODUCTION

Les inéquations variationnelles représentent une classe importante de problèmes non linéaires d'origine physique, mécanique ou autre...

L'étude des inéquations variationnelles remonte aux travaux de Fichera ([18]et Stampacchia ([10], [11]) dans les années soixante. Après le travail fondamental de Lions et Stampacchia ([10]), la théorie des inéquation variationnelles a été étudiée par de nombreux chercheurs (par exemple Brézis ([5]), Browder ([19], [20]),). Concernant l'approximation des inéquations variationnelles on rappelle, pour citer quelques-uns, les contributions de Glowinski, Lions et Trémolières [15] ou Glowinski [16].

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

- Premier chapitre est s'intéresse de rappeler l'essentiel des notions utilisées tout au long de ce travail.

- Deuxième chapitre nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution d'inéquation variationnelle de premier espèce et leur approximation.

- Troisième chapitre est consacré d'étudié l'existance et l'unicité d'inéquation variationnelle stationnaire de premier espèce par méthode de pénalisation et on a aussi évaluer l'estimation d'erreur de pénalisation .

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions utilisées tout au long de ce travail.(quelques définitions et des espaces puis de quelques théorèmes importants dans la discussion des problèmes à étudier)

1.1 L'ESPACES $L^p(\Omega)$

Soit Ω borné ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 1 *On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$. On pose*

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

est s'appelle un norme sur L^1

Définition 2 *soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$. On définit l'espace L^p*

$$L^p = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Lorsque $p = \infty$*, on a la définition suivante :*

$$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ } mesurable \text{ } et \text{ } \exists \text{ } une \text{ } constante \text{ } C \text{ } telle \text{ } que |f(x)| < C \text{ } p.p \text{ } sur \text{ } \Omega\}.$$

dont la norme est :

$$\|f\|_{L^\infty} = inf\{C; \ \ |f(x)| < C \text{ } p.p \text{ } sur \text{ } \Omega\}.$$

Quelqu'un propriétés de l'espace L^p

- L^p est séparable pour $1 \leq L^p < \infty$.
- L^p est réfléxif pour $1 < p < \infty$.
- $\forall\ p \in [1, \infty]$, l'espace L^p muni de la norme (1.1) est un espace de Banach.
- L^p est un espace vectoriel.
- L'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq L^p < \infty$.

Notation. Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

1.2 L'ESPACE DE HILBERT

Définition 3 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel* H *muni d'un produit scalaire* $(.,.)$ *et qui est complet pour la norme* $\|.\|$.

Notation. **H** désigne un espace de Hilbert

1.3 L'ESPACE H_0^1

Définition 4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*
On définit d'abord l'espace $H^1(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\ tel\ que\ \frac{dv}{dx_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, 2, ..., N\}$$

où $\dfrac{dv}{dx_i}$ est la dérivée partielle au sens faible de v.

Définissons maintenant un autre espace qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$, et appelé $H_0^1(\Omega)$ et donné comme suit :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1/v = 0\ sur\ \partial\Omega\}$$

1.4 RAPPELS

Définition 5 *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $V\times V$ s'il existe une constante $c > 0$, elle vérifie :*

$$\forall u, v \in V \qquad a(u, v) \leq c\|u\|_V\|v\|_V$$

Définition 6 *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive sur $V\times V$ s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que :*

$$a(v, v) \leq \alpha\|v\|^2$$

Définition 7 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dit convexe lorsque :*
$\forall(x, y) \in I$, et $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda\, x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Théorème 8 (Projection) *Soit $K \subset V$ une convexe fermé non vide. Alors pour tout $x \in V$, il existe $y \in K$ unique tel que :*

$$\|x - y\| = \min_{z\in K}\|x - z\| \tag{1.2}$$

Théorème 9 (Représentation de Riez) *Soit V un espace de Hilbert, pour tout $F \in V'$ (dual de V), il existe un unique $v \in V$ tel que :*

$$f(u) = (u, v), \qquad \forall u \in V$$

et en plus :

$$\|F\|_{V'} = \|v\|_V$$

Théorème 10 (Formule de Green) *$\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$,*

$$-\int_\Omega \Delta uv \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds.$$

Théorème 11 (Point fixe de Banach) *soit V un espace de Banach, $K \neq \emptyset$ convexe fermé, toute application $T : K \to K$ contractante admet un point fixe dans K*
i.e, $\exists \; u \in K \quad t.q \quad Tu = u$

Théorème 12 (Eberlein-Smulian) *Soient B espace de Banach reflexif et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ avec $\|u_k\|_B \leq C$, alors :*

1. *Il existe une sous suite extraite $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}^*} \subset (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $u \in B$ tel que :*

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \qquad \textit{dans } B$$

2. *Si chaque sous suite extraite converge faiblement vers $u \in B$, alors toute la suite (u_k) converge faiblement vers u.*

CHAPITRE 2

INEQUATION VARIATIONNELLE ELLIPTIQUE

On va rappeler dans ce chapitre une théorème importante qui s'appelle Théorème de Stampacchia ce dernier étudier l'existence et l'unicité de la solution des Inéquation variationnelle, aussi on étudier l'approximation de solution.

Définition 13 *On dit problème d'inéquation variationnelle elliptique de première espèce tout problème de la forme :*

$$(IVE) \quad \begin{cases} trouver \;\; u \in K \quad tq \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \;\; \forall\, v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1 THÉORÈME DE STAMPACCHAIA

Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive et $K \neq \emptyset$ convexe fermé et aussi $f \in V'$, alors il existe une solution unique du probléme (2.1) dans K.

Preuve. On commence par l'unicité :

Unicité : Supposons qu'il y a deux solutions u_1 et u_2 de IVE. C'est-à-dire nous obtenons

$$u = u_1 \qquad a(u_1, v - u_1) \geq (f, v - u_1). \tag{2.2}$$

$$u = u_2 \qquad a(u_2, v - u_2) \geq (f, v - u_2). \tag{2.3}$$

En prenant $v = u_2$ sur (2.2) et $v = u_1$ sur l'inégalité (2.3)

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq (f, u_2 - u_1). \tag{2.4}$$

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq (f, u_1 - u_2). \tag{2.5}$$

avec l'aditionne des (2.4) ,(2.5), on obtient

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \tag{2.6}$$

En utilisant la coercivité de $a(.,.)$:

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq 0.$$

Ce qui implique que :

$$u_1 = u_2.$$

Et alors on conclure que u est unique

Existence : Pour u fixé dans K, on définit le problème auxiliare suivant :

$$(P_{aux}) \quad \begin{cases} trouver \quad w \in K \quad tq \\ (w, v - w) \geq \rho(-a(u, v - w) + (f, v - w)) + (u, v - w) \;\; \forall\, v \in K \end{cases} \tag{2.7}$$

Remarque Si $u = w$ en retourne a le problème (2.1).

On utilise le théoréme de représentation de Riesz c-à-d :

1.

$$f : V \to \mathbb{R} \;\; \text{linéaire continue sur V}$$

$$\exists! \;\; \tilde{f} \in V \quad t.q \quad (f, v) = (\tilde{f}, v)$$

2.

$$a(.,.) : V \times V \to \mathbb{R} \text{ forme bilinéaire continue}$$
$$\exists! \;\; A \in V' \quad t.q \quad a(u,v) = (Au, v)$$

on note

$$F_{\rho,u} = -\rho Au + \rho\tilde{f} + u$$

on réecrit l'inéquation (2.7) sous la forme $F_{\rho,u}$

$$(P_{aux}) \begin{cases} trouver \;\; w \in K \quad tq \\ (w, v-w) \geq (F_{\rho,u}, v-w) \;\; \forall\, v \in K \end{cases} \tag{2.8}$$

D'après le théorème de projection w existe et unique, on définit l'application

$$T : u \mapsto w$$

d'autre part on remarque que T admet un poit fixe (T est contractante)

$$T : u_1 \mapsto w_1 \qquad\qquad (w_1, v-u_1) \geq (F_{\rho,u_1}, v-w_1). \tag{2.9}$$

$$T : u_2 \mapsto w_2 \qquad\qquad (w_2, v-u_2) \geq (F_{\rho,u_2}, v-w_2). \tag{2.10}$$

On écrit l'inégalité(2.9) en prenant $v = w_2$ et l'inégalité (2.10) en prenant $v = w_1$ et avec l'addition les deux on obtient :

$$(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \leq (F_{\rho,u_1} - F_{\rho,u_2}, w_1 - w_2). \tag{2.11}$$

en utilise la coercivité et Cauchy Schwartz, d'où

$$\|w_1 - w_2\| \leq \| - \rho A + I\|.\|u_1 - u_2\| \tag{2.12}$$

on calcule $\| - \rho A + I\|$

$$\|(-\rho A + I)\; v\|_V^2 \leq \rho^2 \|Av\|_V^2 - 2\rho(Av, v) + \|v\|_V^2$$

Alors on obtient :

$$\|(-\rho A + I)\, v\|_V^2 \leq (\rho^2 \|Av\|_V^2 - 2\rho\alpha + 1).\|v\|_V^2$$

Ce qui implique que T est contractante pour $\rho \in [\, 0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|_V^2} [$, et d'après théorème de point fixe de Banach

$\Longrightarrow$ u solution de (2.1)

$\Longrightarrow$ d'où (IVE) admet une solution ■

2.2 Approximation abstraites de I.V

Soit $K \neq \emptyset$ convexe fermé d'un espace de hilbert V.

Approximation de V et K : On suppose que K_h approxime K dans le sens (h paramètre positif)

i) $\forall v \in K, \exists\, v_h = r_h v \in K_h$, t.q $v_h \to v$ dans V

ii) $\forall v_h \in K_h$, $v_h \rightharpoonup v$, alors $v \in K$ dans V,

$$r_h : K \to K_h$$
$$v \mapsto r_h v = v_h.$$

2.2.1 Inequation variationnelle approximée

Avec $K_h \neq \emptyset$ convexe fermé. On définit l'inéquation variationnelle approximé a (2.1) comme suit :

$$(P_h) \quad \begin{cases} trouver \;\; u_h \in K_h \quad t.q \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \;\; \forall\, v_h \in K_h \end{cases} \tag{2.13}$$

Théorème 14 *Le problème* (P_h) *admet une solution unique* $u_h \in \; K_h$

Preuve. Dans la théorème (2.1) en prenant V pour être V_h et K pour être K_h, nous avons le résultat ■

Théorème 15 *$\lim_{h\to 0} \|u-u_h\| = 0$,*
tel que u est solution de Problème (2.1) et u_h solution de (2.13)

Preuve. On a trois étapes :

a) Estimation à periori ($\|u_h\| \leq C$)

b) Convergence faible ($u_{h_k} \rightharpoonup u$)

c) Passage à la limite

d) Convergence forte ($\lim_{k\to 0} \|u_{h_k} - u\| = 0$)

a)Estimation à periori : soit u_h solution de (P_h), alors u_h vérifier

$a(u_h, v_h - u_h) \geq \ \langle f, v_h - u_h\rangle, \qquad \forall v_h \in K_h$

d'après Riesz ($\langle f, v_h\rangle = (\tilde{f}, v)$)

$$\Longrightarrow a(u_h, v_h) - a(u_h, u_h) \geq (\tilde{f}, v_h) - (\tilde{f}, u_h)$$

$$\Longrightarrow a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) - (\tilde{f}, v_h) - (\tilde{f}, u_h)$$

$$\Longrightarrow C_2\|u_h\|^2_{H^1_0} \leq a(u_h, u_h) \leq C_1\|u_h\|_{H^1_0}.\|v_h\|_{H^1_0} + \|\tilde{f}\|_{L^2}.\|v_h\|_{H^1_0} + \|\tilde{f}\|_{L^2}.\|u_h\|_{H^1_0}$$

Pour $v_h \in K$, $v_h = r_h v \in$, t.q $v_h \to v \Rightarrow \|v_h\| \leq C,$ d'où
$\|u_h\|^2 \leq \tilde{C}_1\|u_h\| + \tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$indépendants de h)
$\Longrightarrow \|u_h\|_{H^1_0} \leq \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$

Sans perte de génèralité on suppose : $\tilde{C}_2 > 1$
$\|u_h\|_{H^1_0} > \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$

$$\|u_h\|^2_{H^1_0} \geq \tilde{C}_1\|u_h\|_{H^1_0} + \tilde{C}_2\|u_h\|_{H^1_0} > \tilde{C}_1\|u_h\|_{H^1_0} + \tilde{C}_2$$

Contradiction, donc

$\Longrightarrow \|u_h\|_{H_0^1} \leq C$

b)Convergence faible : Comme u_h est borné donc d'après $Eberlein - Smulian$ il existe $\bar{u} \in V$ tel que $u_h \rightharpoonup \bar{u}$ dans V, et d'apès l'hypothèse (ii) $\bar{u} \in K$

c)Passage à la limite : On a u_h vérifie :

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq (\tilde{f}, v_h - u_h) \qquad \forall v_h \in K_h \tag{2.14}$$

On a aussi :

$$(\tilde{f}, v_h - u_h) \longrightarrow (\tilde{f}, v - \bar{u})$$

$$a(u_h, v_h) \longrightarrow a(\bar{u}, v)$$

D'aprè la positivité de $a(.,.)$ **c-à-d** $a(v,v) \geq 0$

$a(u_h - \bar{u}, u_h - \bar{u}) \geq 0$

$\Longrightarrow a(u_h, u_h) - a(u_h, \bar{u}) - a(\bar{u}, u_h) + a(\bar{u}, \bar{u}) \geq 0$

$\Longrightarrow a(u_h, u_h) \geq a(u_h, \bar{u}) + a(\bar{u}, u_h) - a(\bar{u}, \bar{u})$

$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \inf a(u_h, u_h) \geq a(\bar{u}, \bar{u})$

D'où (2.14) donne :

$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) - (\tilde{f}, v_h - u_h)$

$\Longrightarrow a(\bar{u},\bar{u}) \leq \lim_{h\to 0} \inf a(u_h,u_h) \leq a(\bar{u},v) - (\tilde{f}, v-\bar{u})$

$\Longrightarrow a(\bar{u},\bar{u}) \leq a(\bar{u},v) - (\tilde{f}, v-\bar{u})$

$\Longrightarrow a(\bar{u}, v-\bar{u} \geq (\tilde{f}, v-\bar{u}), \quad \forall v \in K$

$\Longrightarrow \bar{u}$ solution de (2.1)

Et puisque (2.1) admet une solution unique u alors **u =** $\bar{u}$

d)Convergence forte : $(u_h \to u, h \to 0)$

on a l'équation (2.14)

$$a(u_h, v_h - u_h \geq (\tilde{f}, v_h - u_h)$$

et

$$a(u, v_h - u) \geq (\tilde{f}, v_h - u) \tag{2.15}$$

en metttre $v_h = r_h u$ sur (2.14), et $v_h = u_h$ sur (2.15) et on écrit

$$a(u_h, r_h u - u_h) \geq (\tilde{f}, r_h u - u_h) \tag{2.16}$$

$$a(u, u_h - u) \geq (\tilde{f}, u_h - u) \tag{2.17}$$

et avec l'addition de (2.16) et (2.17) nous obtenous

$a(u_h, r_h u - u_h) + a(u, u_h - u) \geq (\tilde{f}, r_h u - u)$

$\Longrightarrow a(u_h - u, u_h - u) \leq a(u_h, u_h - u) + a(u_h, r_h u - u_h) - (\tilde{f}, r_h u - u)$

$\Longrightarrow C\|u_h - u\|^2 \leq a(u_h, r_h u - u) - (\tilde{f}, r_h u - u)$

$\Longrightarrow C\|u_h - u\|^2 \leq c\|u_h\| \cdot \|r_h u - u\| + \|\tilde{f}\| \cdot \|r_h u - u\|$

puisque $\|u_h\| \leq C$, $r_h u \longrightarrow u$ **alors**

$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \|u_h - u\| = 0$ ■

CHAPITRE 3

INÉQUATION VARIATIONNELLE STATIONNAIRE

Ce chapitre est consacré d'étudier l'inéquation variationnelle stationnaire de premier espèce par la méthode de pénalisation, et ce dernier admet une solution unique d'aprés la méthode de Galerkin. En passe finalment a évaluer l'estimation d'erreur de pénalisation.

3.1 POSITION DE PROBLÈME

3.1.1 Problème classique (PC)

On définit le problème classique comme suit :
soit Ω un ouvert bourné de $\mathbb{R}^n$ de frountière Γ, n lanormale exterieur a Γ.

Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$(PC) \quad \begin{cases} Au - f \leq 0, \quad u - \psi \leq 0, \\ (Au - f)(u - \psi) = 0 \quad sur\ \Omega \\ u \in H_0^1 \end{cases} \tag{3.1}$$

tel que :

$$Au = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u \tag{3.2}$$

et $a_o, a_j, a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$.

3.1.2 Inéquation variationnelle stationnaire (IVS)

Pour trouver l'inéquation variationnelle, on multiple d'abord (PC) par fonction test $(v - \psi)$ tel que $v \in K$

$$\int_\Omega (Au - f)(v - \psi) dx \geq 0 \tag{3.3}$$

$$\int_\Omega Au(v - \psi) dx \geq \int_\Omega f(v - \psi) dx \tag{3.4}$$

et aussi on a déja

$$\int_\Omega (Au - f)(u - \psi) dx = 0 \tag{3.5}$$

$$\int_\Omega Au(u - \psi) dx = \int_\Omega f(u - \psi) dx \tag{3.6}$$

avec la soustraction entre (3.4) et (3.6) on trouve :

$$\int_\Omega Au(v - u) dx \geq \int_\Omega f(v - u) dx \tag{3.7}$$

Avec

$$Au\,(v-u) = -\int_\Omega \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j})\,(v-u)\,dx + \int_\Omega \sum a_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\,(v-u)\,dx + \int_\Omega a_0\,u\,(v-u)\,dx \tag{3.8}$$

En utilise la formule de Green (10) on obtient :

$$-\sum \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\,(a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j})\,(v-u)\,dx = \sum \int_\Omega a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial (v-u)}{\partial x_i}\;\;dx - \sum \int_\Omega a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,(v-u)\,ds$$
$$\forall\; u\;, v \in H_0^1$$

$(3.8) \Longleftrightarrow \sum\;\int_\Omega a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial (v-u)}{\partial x_i}\;\;dx + \int_\Omega \sum\;a_j\,\frac{\partial u}{\partial x\,j}\,(v-u)\,dx + \int_\Omega a_0\,u\,(v-u)\,dx$

Donc l'inéquation variationnelle stationnaire est :

$$(PV)\;\;\begin{cases} trouver\;\;u \in K \quad tq \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u)\;\;\forall\, v \in K \end{cases} \tag{3.9}$$

Avec

$$K = \{v|\; v \in V,\; v \leq \psi,\;\; p.p\;\; dans\; \Omega\}.$$

$$a(u, v-u) = \sum \int_\Omega a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial (v-u)}{\partial x_i}\,dx + \sum \int_\Omega a_j(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,(v-u)dx + \int_\Omega a_0\,u\,(v-u)dx \tag{3.10}$$

$$(f, v-u) = \int_\Omega f(v-u)dx, \quad \text{avec f est donné dans } L^2(\Omega) \tag{3.11}$$

Proposition 16 *Si u solution du problème (PV) est assez régulière alors u vérifier le problème (PC) .*

Preuve.

on a d'après (3.9)

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle$$

et d'après Répresentation de Riesz (9) on obtient :

$$\int_\Omega (Au-f)(v-u) \geq 0 \tag{3.12}$$

On pose $v = u - \psi$ et on remplaçe sur (3.12)

$$\int_\Omega (Au-f)(u-\psi-u) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\Omega}(Au-f)(-\psi) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\Omega}(Au-f)\psi \leq 0$$

Donc

$$(Au-f) \leq 0 \tag{3.13}$$

maintenant on prend $v=\psi$ dans (3.12) tel que $\psi \in L^2$

$$\int_{\Omega}(Au-f)(\psi-u) \geq 0 \tag{3.14}$$

D'autre part puisque $(Au-f) \leq 0$ et $(\psi-u) \geq 0$ car $u \in K$ donc :

$$\int_{\Omega}(Au-f)(\psi-u) \leq 0 \tag{3.15}$$

De l'inégalité (3.14) et (3.15) on obtient :

$$\int_{\Omega}(Au-f)(\psi-u) = 0$$

$$\Longrightarrow (Au-f)(\psi-u) = 0 \quad p.p\ dans\ \ \Omega$$

Pour u assez réguliere $(u \in H^2(\Omega))$ donc on obtient le resultat

$$(Au-f)(\psi-u) = 0 \quad dans\ \ \Omega \tag{3.16}$$

■

Définition 17 (Problème de minimisation) *Si* $a(.,.)$ *est sumétrique, on définit le problème de minimisation comme suit :*

$$\begin{cases} trouver\ \ u \in K \\ J(u) \leq J(v)\ \ \forall\, v \in K \end{cases} \tag{3.17}$$

tel que

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v\rangle$$

Lemme 3.1.1 *L'inéquation variationnelle* (3.9) *est equivalent à le problème de minimisation* (3.17)

Preuve.
($\Rightarrow$) premièrement on montre que l'inéquation variationnelle est implique le problème de minimisation :

$$\text{on } a \quad J(v) - J(u) = a(u, v-u) - \langle f, v-u \rangle + \frac{1}{2} a(v-u, v-u)$$

si u vérifier (3.9) donc on justifier le resultat c-à-d : $J(v) - J(u) \geq 0$
($\Leftarrow$) deuxièmenet nous montrons que le problème de minimisation implique l'inéquation variationnelle :
supposant que u vérifier (3.17), on pose

$$v = tw + (1-t)u \quad \forall t \in [0,1], \;\; \forall w \in K$$

$$J(tw + (1-t)u) - J(u) \geq 0$$

Ce que implique que

$$a(u, tw+(1-t)u-u) - \langle f, tw+(1-t)u-u \rangle + \frac{1}{2} a(tw+(1-t)u-u, tw+(1-t)u-u) \geq 0$$

$$\Longrightarrow ta(u, w-u) - \langle f, w-u \rangle + t^2 a(w-u, w-u) \geq 0$$

On divise par t, ensuite on calcules la limite quand $t \to 0$ donc on obtient :

$$\Longrightarrow a(u, w-u) - \langle f, w-u \rangle \geq 0 \quad \forall w \in K$$

D'où

$$\Longrightarrow a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K$$

■

3.2 EXISTENCE ET UNICITÉ DE INÉQUATION VARIATIONNELLE

hypothèses :

1. V = $H_0^1(\Omega)$
2. a_{ij} elliptique c'est à dire :
$$\sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{ij} \xi_i^2 \quad dans \ \ \Omega, \quad \alpha > 0$$
.
3. a(.,.) est coercive c'est à dire :
$$a(v,v) \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H_0^1, \quad \alpha > 0$$
4. K = {v | v $\in$ V, v $\leq \psi$ p.p dans Ω}.
5. $\psi \in L^2$ désigne l'obstacle (la contrainte)
6. a_o(x) $\geq \alpha_o$ > 0

3.2.1 Théorème de existence et unucité

Si les hypothèses((2),(3),(4)) est vérifier, donc il existe une unique solution $u \in K$ de (3.9). **Preuve.**

- Unicité : supposons qui'il existe deux solutions u_1, u_2 de (3.9) et en fait des calcules jusqu'un on obtient u_1 = u_2.

  Si u_1, u_2 deux solutions de (PV) c-à-d :
$$u = u_1 \qquad a(u_1, v - u_1) \geq (f, v - u_1). \tag{3.18}$$
$$u = u_2 \qquad a(u_2, v - u_2) \geq (f, v - u_2). \tag{3.19}$$

En prenant $v = u_2$ sur (3.18) et $v = u_1$ sur (3.19) et on additionnée les deux, et aussi avec la coercivité de $a(.,.)$ on trouve

$$\alpha\|u_2 - u_1\| \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

$\Longrightarrow u_1 = u_2$, $\alpha > 0$.

- Existence : la preuve d'existance de (3.1) est basé sur la méthode de pénalisation.

■

3.3 MÉTHODE DE PÉNALISATION

La pénalisation est un concept simple qui permet de transformer un problème d'optimisation avec contraintes en un problème ou en une suite de problèmes d'optimisation sans contrainte. C'est un concept qui a une utilité à la fois théorique et numérique.

En analyse, l'approche par pénalisation est parfois utilisée pour étudier un problème d'optimisation dont les contraintes sont difficiles à prendre en compte, alors que le problème pénalisé a des propriétés mieux comprises ou plus simples à mettre en évidence.

Définition 18 *On considère, pour ε > 0, la problème suivante :*

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} trouver \quad u_\varepsilon \in V \\ a(u_\varepsilon, v) + (\beta(u_\varepsilon), v) = (f, v), \quad \forall\, v \in V \end{cases} \tag{3.20}$$

est appelé problème pénalisé associé au problème variationnelle (3.9)*, avec*

$$\beta(u_\varepsilon) = (I - P_K)u_\varepsilon \tag{3.21}$$

et P_K est la projection sur K et qui égale a :

$$P_K u_\varepsilon = (u_\varepsilon - (u_\varepsilon - \psi)^+)$$

on remplaçe ce dernier sur (3.21) *on obtient*

$$\beta(u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+ \;\; \textit{opérateure de pénalisation}$$

Quelque propriété de l'opérateur β

1. β est monotone c'est à dire $(\beta(v) - \beta(u), v - u) \geq 0 \quad \forall u, v \in K)$

2. $(\beta v, v) \geq 0, \qquad \forall v \in V$

3. $\beta(v) = 0 \Leftrightarrow v \in K$

Preuve.

1. $\beta(v) - \beta(u), v - u) \geq 0 \quad \forall u, v \in K$

   On d'après la théorème de projection

$$(P_K u - u, P_K u - w) \leq 0 \qquad \forall w \in K \tag{3.22}$$

$$(P_K v - v, P_K v - w) \leq 0 \qquad \forall w \in K \tag{3.23}$$

On remplace au lieu de P_K par l'expression $P_K = I - \beta$ sur l'équation (3.22) et (3.23) on trouve :

$$(-\beta u, u - \beta u - w) \leq 0) \tag{3.24}$$

$$(-\beta v, v - \beta v - w) \leq 0) \tag{3.25}$$

On prend $w = P_K v$ dans (3.24)

$$-(\beta u, u - \beta u - P_K u) \leq 0$$

et $w = P_K u$ dans (3.25)

$$-(\beta v, v - \beta v - P_K v) \leq 0$$

$$\begin{cases} -(\beta u, (u - v) - (\beta u - \beta v)) \leq 0 \\ -(\beta v, (v - u) - (\beta u - \beta v)) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\beta u,(u-v)-(\beta u,(\beta u-\beta v))) \leq 0 \\ (\beta v,(u-v)-(\beta v,(\beta u-\beta v))) \leq 0 \end{cases}$$

avec l'addition on obtient

$$\Longrightarrow -(\beta u-\beta v,u-v)+(\beta u-\beta v,\beta u-\beta v) \leq 0$$

$$\Longrightarrow (\beta u-\beta v,u-v) \geq \|\beta u-\beta v\|^2$$

Donc

$$\Longrightarrow (\beta u-\beta v,u-v) \geq 0 \quad \forall v,u \in V$$

2. $(\beta v,v) \geq 0, \quad \forall v \in V$

   d'après la théorème de projection

$$(P_K v-v,P_K v-w) \leq 0 \quad \forall w \in K \tag{3.26}$$

   On sait que $\beta = I-P_K \Longrightarrow P_K = I-\beta$ nous remplaçons l'expression de P_K sur (3.26)

$$((I-\beta)v-v,(I-\beta)v-w) \leq 0 \quad \forall w \in K$$

$$(v-\beta v-v,v-\beta v-w) \leq 0 \quad \forall w \in K$$

$$(-\beta v,v-\beta v-w) \leq 0 \quad \forall w \in K$$

   on développe la prenthèse ci-dessus

$$(-\beta v,v)+(-\beta v,-\beta v)+(-\beta v,-w) \leq 0$$

d'ou

$$(\beta v, v) \geq \|\beta v\|^2 + (\beta v, w)$$

On prend $w = 0$ car $0 \in K$ d'où :

$$\Rightarrow (\beta v, v) \geq \|\beta v\|^2 \Rightarrow (\beta v, v) \geq 0$$

3. $\beta(v) = 0 \Leftrightarrow v \in K$

   pour la première impliquation $(\Longrightarrow)$

$$(\beta v, v) \geq \|\beta v\|^2 \Rightarrow \|\beta v\| = 0$$

$$\Rightarrow \beta v = 0 \quad \textbf{d'où } v \in K$$

   pour la deuxième impliquation $(\Longleftarrow)$

   si $v \in K \Leftrightarrow P_K\, v = v$

   $\Leftrightarrow P_K\, v - v = 0$ c-à-d que :

$$(I - P_K)\, v = 0, \qquad \forall v \in K$$

   et puisque $(I - P_K) = \beta$ donc

$$\beta\, v = 0 \qquad \forall v \in K$$

   alors on obtient le résultat

$$\beta = 0 \quad sur K$$

■

Théorème 19 (Existence et unicité de problème de pénalisation) *Sous les hypothèses du théorème* (3.2.1)*, le probème (3.17) admet une unique solution* u_ε.

Preuve.

✦ **Unicité**

Nous considerons que il y a deux solutions $u_{\varepsilon 1}$ et $u_{\varepsilon 2}$ de (3.31)

$$u_\varepsilon = u_{\varepsilon 1} \quad a(u_{\varepsilon 1}, v) + (\beta(u_{\varepsilon 1}), v) = (f, v), \ \ \forall\, v \in V \tag{3.27}$$

$$u_m = u_{\varepsilon 2} \quad a(u_{\varepsilon 2}, v) + (\beta(u_{\varepsilon 2}), v) = (f, v), \ \ \forall\, v \in V \tag{3.28}$$

On choisisons $v = u_{\varepsilon 2} - u_{\varepsilon 1}$ sur l'équation qui depedent à $u_{\varepsilon 1}$ et aussi $v = u_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2}$ sur l'équation qui dependent à $u_{\varepsilon 2}$, ensuite en fait l'addition entre (3.27) , (3.28) on obtient :

$$a(u_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2}, u_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2}) + (\beta(u_{\varepsilon 1} - \beta(u_{\varepsilon 2}), u_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2}) = 0 \tag{3.29}$$

$\Longrightarrow a(u_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2}, u_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2}) = -(\beta(u_{\varepsilon 1} - \beta(u_{\varepsilon 2}), u_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2})$

comme $a(.,.)$ est coercive et β est monotone d'où

$\Longrightarrow \alpha \| u_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon 2} \| \leq 0$

$\Longrightarrow u_{\varepsilon 1} = u_{\varepsilon 2}$

pour prouver l'existence de solution u_ε en utilisé la méthode de Galerkin

3.3.1 Méthode de Galerkin

On souhaite maintenant trouver une méthode pour calculer des solutions approchées d'un problème variatonnelle.

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie.

Donc l'espace $V_m \subset V$ de dimension finis, avec la propriété

$$\forall\, v \in V, \ \ \exists\, v_m \in V_m \ \ tel\ que \ \ \|v_m - v\| \to 0 \quad quand \ \ m \to \infty \tag{3.30}$$

et on obtient le problème approximé de la façon suivante :

$$\begin{cases} trouver \;\; u_m \in V_m \\ a(u_m, v) + (\beta(u_m), v) = (f, v), \;\; \forall \, v \in V_m \end{cases} \tag{3.31}$$

Théorème 20 *Le problème aproximé* (3.31) *admet une solution* $u_m \in V_m$

✦ **Existence**

En utilise la corollaire de point fixe de Brouwer pour prouver l'existence de u_m

Corollaire 21 (Point fixe de Brouwer) *Soit* $(X, \|.\|)$ *espace vectoriel normé de dimension finie et soit* $F : X \longrightarrow X'$ *application continue avec la propriété suivante : il exite* $\rho > 0$ *tel que*

$$\langle F(v), v \rangle_{X', X} \geq 0, \quad \text{pour tout } v \in X \text{ tel que } \|v\|_X = \rho.$$

Preuve. Voir [21] ■

Lemme 3.3.1 *Soit* V *un espace de Banach séparable de dimension infinie. Il existe une famille libre dénombrable* $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$*,* $w_i \in V$*, telle que les combinaisons linéaires finies des* w_i *sont denses dans* V*.*

Preuve. Voir [3]. ■

Démonsration l'éxistance u_m On introduit une suite $w_i \in V$,d'après le (3.3.1) il est existe tel que

$$V_m = < w_1, \cdots, w_m >$$

On cherche alors u_m solution approchée du problème sous la forme

$$\exists \, \varepsilon, \quad u_m = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i w_i \tag{3.32}$$

On a d'après Répresentation de Riez

$$a(v, v) = (Av, v)$$

$$f \in V' \Rightarrow \tilde{f} \in V$$

donc on défint $F(v)$

$$F(v) = Av + \beta v - f$$

avec $F : V_m \longrightarrow V_m$ est continue

$$\begin{aligned}(F(v), v) &= (Av + \beta v - f, v) \\ &= (Av, v) + (\beta v, v) - (f, v)\end{aligned}$$

et comme

$$a(v, v) \geq M\|v\|^2_{V_m} \quad \text{(coercivité)}$$

et

$$(\beta v, v) > 0.$$

Donc d'après la coercivité et Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned}(F(v), v) &\geq M(Av, v) - \|f\|_{V_m}.\|v\|_{V_m} \\ &\geq M\|v\|^2_{V_m} - C\|v\|_{V_m}.\end{aligned}$$

Pour $\rho = \dfrac{C}{M}$ et $\|v\|_{V_m} = \rho \Longrightarrow (F(v), v) \geq 0$

D'après le Corollaire de point fixe de Brouwer

Il existe $v_0 \in V_m$, $\quad F(v_0) = 0 \quad$ avec $\|v_0\| \leq \rho$

$$\begin{aligned}F(v_0) = 0 \Leftrightarrow Av_0 + \beta v_0 - f = 0 \\ &\Longrightarrow A(v_0, v) + (\beta v_0, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_m \\ &\Longrightarrow a(v_0, v) + (\beta v_0, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_m\end{aligned}$$

v_0 existe , alors

$$\Longrightarrow a(u_m, v) + (\beta u_m v) = (f, v), \quad \forall v \in V_m$$

d'où u_m existe dans V_m , $\quad \|u_m\|_{V_m} \leq \rho$

■

3.4 Convergence de la solution approchée u_m vers la solution u_ε

1. **estimation a periori**

   on montre que $\|u_m\|_V \leq C$, et $\|(u_m - \psi)^+\|_{L^2} \leq C$

   on prend $v = u_m - v_0$ sur l'équation (3.31) et $v_0 \in V_m \cap K$, et on note que $\beta(v_0) = 0$ nous avons

$$a(u_m, u_m - v_0) + (\beta(u_m) - \beta(v_0), u_m - v_0) = (f, u_m - v_0) \quad \textbf{(3.33)}$$

   et d'après la propriètè de β est ($\beta(u_m) - \beta(v_0), u_m - v_0 \geq 0$), donc on result de (3.33)

$$a(u_m - v_0, u_m - v_0) \leq (f, u_m - v_0) - a(v_0, u_m - v_0)$$

   puisque $a(.,.)$ est coercive d'où

$$\alpha\|u_m - v_0\|^2 \leq C\|u_m - v_0\|$$

$$\|u_m\|_V \leq C + \|v_0\|$$

   Donc

$$\|u_m\|_V \leq C \quad \textbf{(3.34)}$$

   on result d'après l'équation (3.33)

   $(\beta(u_m), u_m - v_0) = (f, u_m - v_0) - a(u_m, u_m - v_0)$

   En utilise Cauchy Schwarz'

   $(\beta(u_m), u_m - v_0) \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|u_m - v_0\| + \|u_m\|_V \cdot \|u_m - v_0\|$

   $\Longrightarrow (\beta(u_m), u_m - v_0) \leq C.$

   Mais

$$\begin{aligned}(\beta(u_m), u_m - \psi) &= (\beta(u_m), u_m - v_0) + (\beta(u_m), v_0 - \psi)\\ &\leq (\beta(u_m), u_m - v_0) \leq C\end{aligned}$$

Donc
$\frac{1}{\varepsilon}((u_m-\psi)^+, u_m-\psi) \leq C$
Par conséquence, on obtient :

$$\|(u_m-\psi)^+\|_{L^2} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.35}$$

2. **Convergence faible**

   - Comme (3.34) est borné , alors d'aprés Eberlein-Smulian (12) on peut en extraite une sous suite $u_{\varepsilon m}$ telle que :

$$\exists\, u_\varepsilon, \quad u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ } sur\ V \quad quand\ \ m \to \infty. \tag{3.36}$$

   - En outre, $\beta(u_m)$ est borné sur $L^2(\Omega)$ et de (12) d'où :

$$(u_m-\psi)^+ \rightharpoonup \chi \quad sur\ L^2(\Omega). \tag{3.37}$$

3. **Passage à la limite**

   Soit $v \in V$ arbitraire ; nous choisisons $v_m \in V_m$ satisfait (3.30) ; on prend $v = v_m$ dans (3.31) ; on obtient :

$$a(u_m, v_m) + (\beta(u_m), v_m) = (f, v_m) \tag{3.38}$$

   Puisque nous avons une convergence forte de v_m vers v , donc on trouve

$$a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}(\chi, v) = (f, v) \ \ \forall\, v \in V. \tag{3.39}$$

   Nous aurons donc prouvé le théorème si nous pouvons montrer que :

$$\chi = (u_\varepsilon - \psi)^+. \tag{3.40}$$

   Dans ce cas, on peut donner deux preuves de (3.40).

   Preuve.

Par compacité : Comme Ω est bourné, l'injection de $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, alors que $u_m \to u_\varepsilon$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$ et aussi $\psi \to \psi^+$ est fortement continue en $L^2(\Omega)$, donc nous avons :

$$(u_\varepsilon - \psi)^+ \longrightarrow (u - \psi)^+ \quad \text{converge fortement en } \; L^2(\Omega)$$

Et d'où qui donne (3.40).

Par monotonicité : Nous présentons X_m

$$X_m = a(u_m - v_m, u_m - v_m) + (\beta(u_m) - \beta(v_m), u_m - v_m)$$

V_m satisfie (3.30),nous avons

$$X_m \geq 0.$$

Par ailleurs, on utilise (3.31) on obtient :

$$X_m = (f, u_m - v_m) - a(v_m, u_m - v_m) - (\beta(v_m), u_m - v_m)$$

par passeage à la limite en déduisons :

$$(f, u_\varepsilon - v) - a(v, u_\varepsilon - v) - (\beta(v), u_\varepsilon - v) \geq 0 \tag{3.41}$$

et par utilisé (3.39), on obtient :

$$a(u_\varepsilon - v, u_\varepsilon - v) + (\frac{1}{\varepsilon}\chi - \beta(v), u_\varepsilon - v) \geq 0 \quad \forall v \in V. \tag{3.42}$$

On prend $v = u_\varepsilon - \lambda\varphi$, avec $\lambda > 0$, et $\varphi \in V$, donc on trouve

$$\lambda^2 a(\varphi, \varphi) + \lambda(\frac{1}{\varepsilon}\chi - \beta(u_\varepsilon - \lambda\varphi), \varphi) \geq 0.$$

on divise par λ après on tends $\lambda \to 0$, donc nous obtenons :

$$(\frac{1}{\varepsilon}\chi - \beta(u_\varepsilon), \varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in V$$

d'où

$$\frac{1}{\varepsilon}\chi = \beta(u_\varepsilon)$$

ce qui amplique

$$\chi = (u_\varepsilon - \psi)^+ \quad \textbf{c-à-d} \; (3.40)$$

■

Remarque 22 *D'après ces étapes, on conclure que u_ε est existe.*

3.5 CONVERGENCE DE u_ε VERS LA SOLUTION u

Nous utilisons le même idée précédente c'est à dire on passe par trois étape :

Premier étape : estimation a periori

Nous déduisons de (3.34) et (3.35) et puisque u_m converge vers u_ε donc

$$\|u_\varepsilon\|_V \leq C \tag{3.43}$$

et aussi

$$\|(u_\varepsilon - \psi)^+\|_{L^2} \leq C\sqrt{\varepsilon} \tag{3.44}$$

Deuxième étape : convergence faible

puisque (3.43) et (3.44) est borné , alors d'aprés (12)

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad en\ V \tag{3.45}$$

puis on result que

$$(u_\varepsilon - \psi)^+ \rightharpoonup \chi \quad en\ L^2(\Omega) \tag{3.46}$$

et ce dernier qui donné par compacité ou par monotonité que

$$\chi = (u - \psi)^+$$

donc

$$(u_\varepsilon - \psi)^+ \rightharpoonup (u - \psi)^+ \quad en\ L^2(\Omega) \tag{3.47}$$

<u>Troisième étape</u> : passage à la limite

On calcule la limite en (3.44) quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ donc on obtient :

$$(u_\varepsilon - \psi)^+ \longrightarrow 0 \tag{3.48}$$

et selon l'équation (3.47) , et (3.48) on obtient donc $(u_\varepsilon - \psi)^+ = 0$, par conséquence

$$u \in K$$

Si on prendre $v \in K$, puis $\beta(v) = 0$ et on déduire de (3.1) :

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) = (\beta(v) - \beta(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon) \geq 0$$

$$a(u_\varepsilon, v) - (f, v - u_\varepsilon) \geq a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \tag{3.49}$$

et d'après la positivité de $a(.,.)$ c-à-d $a(v,v) \geq 0$ donc

$$a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) \geq 0$$

maintenant on faire la dévelopement de $a(,)$

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - a(u_\varepsilon, u) - a(u, u_\varepsilon) + a(u,u) \geq 0$$

ce qui amplique :

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq a(u_\varepsilon, u) + a(u, u_\varepsilon) - a(u,u)$$

par passage à la limite on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq a(u,u)$$

et donc (3.49) donne :

$$a(u,v) - (f, v-u) \geq \lim_{\varepsilon \to 0} a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq a(u,u).$$

D'où

$$a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K$$

3.6 Estimation d'erreur de pénalisation

De plus que les hypothèse utilisé dans la théorème $(3.2.1)$, On suppose aussi

$$\psi \ \in H^1(\Omega), \ \ A\psi \ \in L^2(\Omega), \ \ \psi \geq 0 \ dans \ \Gamma.$$

Si u_ε (resp. u) désignes la solution de problème pénalisé (resp. de problème variationnelle), alors

$$\|u_\varepsilon - u\| \leq C\varepsilon^{1/2}. \tag{3.50}$$

Avec la constante C peuvent être prendre uniforme pour une famille des opérateurs A tel que

$$\begin{cases} a_{ij}, \ \ a_i, \ \ a_o \quad \text{dépendent de sous ensemble borné sur } L^2 \text{avec} \\ a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2, \qquad \alpha > 0. \end{cases} \tag{3.51}$$

Preuve.

1) on prend $v = (u_\varepsilon - \psi)^+$ dans (3.31), on obtient

$$a(u_\varepsilon, (u_\varepsilon - \psi)^+) + \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon - \psi)^+, (u_\varepsilon - \psi)^+) = (f, (u_\varepsilon - \psi)^+)$$

On procède à l'addition et la soustraction de ψ dans $a(.,.)$

$$a(u_\varepsilon - \psi + \psi, (u_\varepsilon - \psi)^+) + \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon - \psi)^+, (u_\varepsilon - \psi)^+) = (f, (u_\varepsilon - \psi)^+)$$

Donc

$$a(u_\varepsilon - \psi, (u_\varepsilon - \psi)^+) + \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon - \psi)^+, (u_\varepsilon - \psi)^+) = (f, (u_\varepsilon - \psi)^+) - a(\psi, (u_\varepsilon - \psi)^+)$$

Avec l'utilisation de Répresentation de Riesz , on obtient finalement

$$a((u_\varepsilon - \psi)^+, (u_\varepsilon - \psi)^+) + \frac{1}{\varepsilon}|(u_\varepsilon - \psi)^+|^2 = (f - A\psi, (u_\varepsilon - \psi)^+). \tag{3.52}$$

On utilise la coercive de $a(.,.)$ et l'inégalité de Couchy Schwarz dans l'équation ci-dessus

On déduirons que

$$\|(u_\varepsilon - \psi)^+\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.53}$$

2) On écrit $u - u_\varepsilon$ comme suit :

$$u - u_\varepsilon = u - \psi - (u_\varepsilon - \psi) \tag{3.54}$$

Avec $(u_\varepsilon - \psi) = [(u_\varepsilon - \psi)^+ - (u_\varepsilon - \psi)^-]$ On remplaçe le terme ce dernier dans (3.54) on trouve

$$u - u_\varepsilon = u - \psi + (u_\varepsilon - \psi)^- - (u_\varepsilon - \psi)^+ \tag{3.55}$$

$$\Longrightarrow u - u_\varepsilon = r_\varepsilon - (u_\varepsilon - \psi)^+$$

tel que

$$r_\varepsilon = u - \psi + (u_\varepsilon - \psi)^-$$

On voit que le problème maintenant il suffit de démontrer que

$$\|r_\varepsilon\| \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

On prend $v = r_\varepsilon$ en (3.31)

$$a(u_\varepsilon, r_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon - \psi)^+, r_\varepsilon) = (f, r_\varepsilon) \tag{3.56}$$

et plus en (3.9) on prend v définie par alors on obtient :

$$v - u = -r_\varepsilon \quad \text{c-à-d que} \quad v = \psi - (u_\varepsilon - \psi)^- \leq \psi$$

$$a(u, \psi - (u_\varepsilon - \psi)^- - u) \geq (f, \psi - (u_\varepsilon - \psi)^- - u) \tag{3.57}$$

$$\Longrightarrow -a(u, u - \psi + (u_\varepsilon - \psi)^-) \geq -(f, u - \psi + (u_\varepsilon - \psi)^-)$$

donc

$$\Longrightarrow a(u, u - \psi + (u_\varepsilon - \psi)^-) \leq (f, u - \psi + (u_\varepsilon - \psi)^-)$$

d'où

$$a(u, r_\varepsilon) \leq (f, r_\varepsilon) \tag{3.58}$$

par l'addition (3.56) et (3.58) on obtient

$$-a(u-u_\varepsilon, r_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon - \psi)^+, u - \psi + (u_\varepsilon - \psi)^-) \geq 0$$

$$\Longrightarrow a(u-u_\varepsilon, r_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon - \psi)^+, u - \psi) + \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon - \psi)^+, (u_\varepsilon - \psi)^-)$$

ou

$$a(u-u_\varepsilon, r_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon - \psi)^+, \psi - u) \leq 0$$

et donc

$$a(u-u_\varepsilon, r_\varepsilon) \leq 0$$

$$\Longrightarrow a(r_\varepsilon - (u_\varepsilon - \psi)^+, r_\varepsilon) \leq 0$$

en développant le prenthése de $a(,)$ on obtient

$$a(r_\varepsilon, r_\varepsilon) - a((u_\varepsilon - \psi)^+, r_\varepsilon) \leq 0$$

$$\Longrightarrow a(r_\varepsilon, r_\varepsilon) \leq a((u_\varepsilon - \psi)^+, r_\varepsilon)$$

en utilise la coercivité sur $a(,)$ et Couchy Schwarz

$$\alpha \|r_\varepsilon\|^2 \leq C \; \|(u_\varepsilon - \psi)^+\| \; \|r_\varepsilon\|$$

$$\|r_\varepsilon\| \leq C \sqrt{\varepsilon}$$

et on a aussi

$$\|u - u_\varepsilon\| = \|r_\varepsilon - (u_\varepsilon - \psi)^+\|$$

et par Couchy Schwarz donc

$$\Longrightarrow \|u - u_\varepsilon\| \leq \|r_\varepsilon\| + \|(u_\varepsilon - \psi)^+\| \leq C\ \sqrt{\varepsilon}.$$

Donc on result

$$\|u - u_\varepsilon\| \leq C\ \sqrt{\varepsilon}. \tag{3.59}$$

■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce travail on a étudie probléme de type d'obstacle. Le but principal de ce mémoire est de montrer l'existance et l'unicité d'inéquation variationnelle stationnaire de premier espèce.
Pour les perspectives, il serait intéressant d'établir :

1. L'existence et l'unicité d'IVS de deuxième espèce.

2. L'existence et l'unicité d'inéquation variationnele hybepolique.

3. L'existence et l'unicité de quasi-variationnelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIONS, J.L. Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non-linèaires. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[2] G.Duvaut, J.L.Lions. Inequalities in mechanics and physics.

[3] Hervé Le Dret. équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires.

[4] Alain Bensoussen and Jacques-Louis Lions. Studies in mathematics and its applications 12.

[5] H. Brezis Analyse Fonctionnel.

[6] G.Stampacchia, Haim Brésiz. Sur le régularité de la solution d'inéquations elliptiques.

[7] Anca Capatina, Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement, 10/2011

[8] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières, Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.

[9] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[10] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967

[11] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a Nato Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[12] M. Sofonea, A.Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics /London Mathematical Society Lecture Note Series : 398

[13] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[14] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[15] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières, Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.

[16] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1984.

[17] G.Duvaut J.L.Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Berlin Heidelberg New

[18] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964. York,1976.

[19] Browder, F., Nonlinear monotonoe operators and convex sets in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965), 780-785.

[20] Browder, F., Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 56 (1966), 1080-1086.

[21] G.Ciarlet-Linear and nonlinear functional analysis with applications.