



**UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA**

**Faculté des sciences et de la technologie et  
des sciences de la matière**

N° d'ordre :  
N° de série :

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
ET INFORMATIQUE**

**MASTER**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Analyse**

**Par : Henka Ahmed**

**Thème**

**Analyse Mathématique du problème de Signorini : cas  
dynamique**

**Soutenu publiquement le : /06/2013**

**Devant le jury composé de :**

Mr. Ghezal Abderrazek	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Merabet Smail	M. C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Mezabia Mohamed Elhadi	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Bensayah Abdallah	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

**l'année universitaire :2012/2013**

# Dédication

Je dédie ce modeste travail :

-Aux joyaux de ma vie "mes parents" qui sont la source de ma réussite, je souhaite qu'ils trouvent à travers ce mémoire le faible témoignage de leurs efforts et sacrifices.

-A mes frères,

- A ma sœur,

-A toute la famille et

- A mes chers amis,

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

# Remerciement

Tout d'abord, je remercie Dieu qui nous guident pour terminer ce travail humble.

Je tiens à remercier le professeur **Abd Allah Benssayah** qui portons en nous la souffrance de ce travail, Je le souhaite la réussite dans son doctorat

Je tiens également à remercier les enseignants Assila, gherfi et Saide de toute l'aide donnée par nous.

Je tiens à remercier tous les collègues qui m'ont accompagné pendant les années de l'étude Ben salem, Sabar, Ba9ouch, Gazal, yousfi, Rahmania, Badwi, Rabroub, etmani, Nser, Achor, diyab, Mansour, Soilah, Mnasar, et Ben edab,.....

Je tiens à remercier tous les collègues chers Mohammed, Ismail, Houdaifa, Haccen, Abd elmalek, Abd ejjabar, Abd elbaki, abd elkarim et bachire.....

Je tiens à remercier la famille de U.G.E.L et rectorat

Merci à tous nous aide de près ou de loin.

Merci pour tout

# Table des matières

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations	v
Introduction	1
<b>1 Préliminaires mathématiques</b>	<b>3</b>
1.1 Rappels sur les espaces fonctionnels . . . . .	3
1.2 Théorèmes de trace et formule de Green généralisée . . . . .	7
1.3 L'inégalité de Korn . . . . .	10
1.4 Lemme de Grönwall discrétisé . . . . .	10
1.5 Théorème de Stampacchia . . . . .	10
1.6 La convergence faible, faible* . . . . .	11
1.7 La méthode de Newmark . . . . .	11
<b>2 Problème de Signorini : cas statique</b>	<b>12</b>
2.1 Problème classique P.C . . . . .	13
2.2 Problème variationnel P.V . . . . .	13
2.3 Existence et unicité . . . . .	14
<b>3 Le problème de Signorini : cas dynamique</b>	<b>17</b>
3.1 Problème classique P.C . . . . .	17
3.2 Problème variationnel P.V . . . . .	17

3.2.1	L'inéquation variationnelle associée au problème (P.V) . . . . .	19
3.3	Existence du solution . . . . .	19
3.3.1	Étape 1 : La discrétisation en temps du problème (P.V) . . . . .	20
3.3.2	Étape 2 : L'approximation du solution du problème (P) . . . . .	22
3.3.3	Étape 3 : Estimations a priori . . . . .	24
3.3.4	Étape 4 : La convergence faible des solutions approchées et que ses limites sont égaux . . . . .	30
3.3.5	Étape 5 : Caractérisation de $u$ par le problème (PV) . . . . .	34

# Notations

$$\phi^i = \phi(t_i)$$

$u = (u_i)$  vecteur de composantes  $u_i$ .

$uv = u_i v_i$  produit scalaire euclidien.

$n$  normale unitaire extérieure.

$u_N = u \cdot n$  la composante normale du déplacement.

$u = (u_N, u_T)$ ,  $u_T$  la composante tangentielle du déplacement.

$\sigma_N = (\sigma(u) \cdot n) \cdot n$  la composante de la force de pression appliquée sur une section de normale  $n$ .

$\sigma(u) \cdot n = (\sigma_N, \sigma_T)$ ,  $\sigma_T$  la composante tangentielle du vecteur  $\sigma(u) \cdot n$

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

$\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ . dérivée de  $u_j$  par rapport à  $x_i$ .

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i).$$

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl} e_{kl}(u).$$

$\operatorname{div} \sigma(u) = \partial_j \sigma_{ij}$  divergence du tenseur  $\sigma(u)$

$H'$  dual de  $H$

$$H^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^3.$$

$$L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3.$$

$\rightarrow$  la convergence forte.

$\rightharpoonup$  la convergence faible.

En garde la même notation de la fonction et sa trace sur le bord s'il n'y a pas de confusion.

La présence d'une distribution sous le signe d'intégrale signifie le produit de dualité.

# Introduction

Le contact unilatéral des corps élastiques, avec ou sans frottement, est une contrainte mécanique souvent rencontrée en modélisation. La formulation de ce problème (sans frottement) a été décrite par Signorini en 1933. C'est en 1963 que Fichera [20] a fait l'analyse de ce problème à travers un problème de minimisation équivalent (méthode d'énergie). De nouveaux résultats d'existence, pour une classe de problème de contact sans frottement, ont été trouvés par Duvaut et Lions et d'autres pour le cas de frottement non local (loi de Tresca) paru en 1972 dans [11] où ils ont signalé un problème ouvert d'existence et d'unicité dans le cas avec frottement local (loi de Coulomb). A partir de 1980, Nécas, Jarusek et Haslinger [16] ont établi, seulement, l'existence des solutions d'un problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb pour un coefficient de frottement assez petit. Des résultats plus généraux sont donnés ensuite par Jarusek [18], Kato [17], Eck et Jaruek [21]. Récemment, R. Hassani, P. Hild et I. Ionescu [19] ont trouvé des conditions suffisantes de non unicité des solutions. Pour le cas des structures minces, i.e, les corps élastiques dont l'une des dimensions (l'épaisseur) est petite devant les autres, par exemple : plaques minces, coques minces et filaments. Ces cas ont été proposés par Kirchhoff, Love, Reissner, Von Karman et Koiter. Le contact dynamique a puis de grande importance dans la littérature mathématique d'où au larges applications dans le pratique. Martin et Oden [13], ont établi l'existence d'une solution faible pour un problème viscoélastique avec le "compliance" de la normale. Dans le même sens, Figueired et Trabucho [22], ont établi l'existence des solutions un problème pour un matériau thermoviscoélastique avec frottement et avec la "compliance" de la normale. Kuttler [25] réalise une étude du problème avec une condition générale sur la "compliance" de la normale. Le problème dynamique sans frottement avec adhésion a été étudié par Chau [31]. Par la suite, Ionescu et Pau-

mier, et Paumier et Renard [29], ont réalise l'étude du problème avec un coefficient de frottement dépendent du taux de glissement dans le cas un-dimensionnel. En suite, Kuttler et Shillor, ont considère le même problème avec une "compliance" de la normale et un autre problème avec un coefficient de frottement discontinue. Aussi, on peut trouver dans Kuttler et Shillor [23], l'étude d'un problème de contact bilatéral avec un coefficient de frottement discontinue. Quelques résultats de régularité ont obtenu par Kuttler et Shillor [24], et d'autres pour un problème avec adhésion dans les papier de Kuttler et al [25]. Après, Jarusek [30] a étudier le contact unilatérale pour une vitesse normale, Eck et Jarusek [29] ont utider avec les condition de Signorini.t introduite et qui a conduit à une solution faible de problème .Enfin dans [1] ont établi un résultat d'existence avec des test numérique de validation.

Ce présent mémoire présente l'étude du problème de Signorini dans les deux cas statique et dynamique. On débute notre travail par le chapitre qui présente les préliminaires mathématiques fondamentaux qui nous utilisons dans la première et deuxième chapitre. Dans le deuxième chapitre, on présente le problème de Signorini dans le cas statique avec une Théorème d'existence et unicité de la solution.Dans le troisième chapitre, on présente la même problème mais dans le cas dynamique avec une Théorème d'existence de leurs solutions. Enfin une conclusion qui comporte les résultats essentiels et quelques perspectives.



# Chapitre 1

## Préliminaires mathématiques

### 1.1 Rappels sur les espaces fonctionnels

Tout les résultats dans cette section sont dans [15].

Nous rappelons ci-dessous quelques définitions et théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans les chapitres ultérieurs.

Ici toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $K \subset \Omega$ ,  $m$  entier positif,  $\alpha$  est un multi-entier,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  alors on définit l'opérateur différentiel  $D^\alpha$  par

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On note par  $C(\Omega)$  l'espace des fonctions réelles continues sur  $\Omega$ . On dit que  $K$  est relativement compact dans  $\Omega$ , si l'adhérence de  $K$  (i.e.,  $\bar{K}$ ) est un compact (i.e., fermé et borné) inclus dans  $\Omega$ , on noté par  $K \subset\subset \Omega$ . Aussi on note par :

$$C^m(\Omega) = \{v \in C(\Omega); D^\alpha v \in C(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

On appelle le support d'une fonction  $v$  définie sur  $\Omega$  l'ensemble fermé

$$\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega; v(x) \neq 0\}}.$$

On dit que la fonction  $v$  est à support compact dans  $\Omega$ , si  $\text{supp } v \subset\subset \Omega$ . On note par

$$C_0^m(\Omega) = \{v \in C^m(\Omega); v \text{ est à support compact dans } \Omega\}$$

Soit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

On désigne par  $D(\Omega)$  appelé l'espace des fonctions test, l'espace  $C_0^\infty(\Omega)$  des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans  $\Omega$  muni de la topologie de limite inductive comme dans la théorie des distributions de L. Schwartz. On va noter par  $D'(\Omega)$  l'espace dual de  $D(\Omega)$ , donc l'espace des formes linéaires continues sur  $D(\Omega)$ . On appelle  $D'(\Omega)$  l'espace des distributions (ou fonctions généralisées) sur  $\Omega$ , et l'on munit de la topologie forte de dual (i.e.,  $f_i \rightarrow f$  dans  $D'(\Omega)$  si  $\langle f_i, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \forall \varphi \in D(\Omega)$ ) où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $D'(\Omega)$  et  $D(\Omega)$ . Pour  $p$  donné par  $1 \leq p < \infty$  on désigne par

$$L^p(\Omega) = \left\{ v \text{ mesurables sur } \Omega; \text{ tel que } \|v\|_p = \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

on rappelle que  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est un espace de Banach, et séparable et, pour  $1 < p < \infty$  est réflexif.

Pour  $p = 2$ , l'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

On va identifier l'espace  $L^2(\Omega)$  à son dual. Pour  $p = \infty$  on désigne par

$$L^\infty(\Omega) = \{v \text{ mesurable dans } \Omega; \text{ tel que } \|v\|_\infty < \infty\},$$

où  $\|v\|_\infty = \sup_{\text{ess } x \in \Omega} |v(x)| = \inf\{C; |v(x)| \leq C \text{ p.p } x \in \Omega\} < \infty$  on rappelle que  $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach. Pour tout  $1 < p < \infty$  on l'inégalité de Hölder si  $u \in L^p(\Omega)$  et  $v \in L^{p'}(\Omega)$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\int_{\Omega} u(x) v(x) dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$$

**Théorème 1** *L'espace  $C_0^\infty(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega) \forall 1 \leq p < \infty$ .*

On dit que  $X \hookrightarrow Y$ , pour  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  espaces normés, signifie  $X \subset Y$  avec l'injection continue, c'est-à-dire il existe une constante  $C$  telle que :

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

Pour  $1 \leq p \leq \infty$  on a  $D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$ . On va définir l'espace de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v; D^\alpha v \in L^p(\Omega), \text{ pour } |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_p^p \right)^{1/p} \quad \text{si } p \in [1, \infty),$$

$$\|v\|_{W^{m,\infty}} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_\infty,$$

est un espace de Banach. On note par  $W_0^{m,p}(\Omega)$  l'adhérence de  $C_0^\infty(\Omega)$  dans l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$ . Pour tout  $p \in [1, \infty)$  on a

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Dans le cas  $p = 2$  on utilise la notation

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{2,m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle.$$

L'espace  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert. On posera aussi  $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ . Les espaces de Sobolev négatives sont les espaces duales des espaces  $W_0^{m,p}(\Omega)$

$$W_0^{-m,p'}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))',$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W_0^{-m,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega)} \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|_{W_0^{m,p}(\Omega)}}.$$

L'espace  $W_0^{-m,p'}(\Omega)$  est Banach (séparable et réflexive, si  $1 < p < \infty$ ). Puisque  $D(\Omega)$  dense dans  $H_0^1(\Omega)$ , alors on a  $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ .

**Théorème 2** *Supposons que  $\Omega$  vérifie la propriété du cône et  $1 \leq p < \infty$ . Alors*

1.  $C(\bar{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$  avec l'injection dense.
2. Si  $mp \geq n$  alors  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$  quel que soit  $k$  entier avec  $\frac{mp-n}{p} - 1 \leq k \leq \frac{mp-n}{p}$ .

Maintenant les espaces de fonctions à valeurs vectorielles : On considère un espace de Banach  $X$  de norme  $\|\cdot\|_X$  et un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$ . On note par

$$C^k(I; X) = \{v : I \rightarrow X; D^\alpha v \in C(I, X) \text{ pour } |\alpha| < k\}$$

sans aucun doute,  $C^k(\bar{I}; X)$  est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{C^k(\bar{I}, X)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \bar{I}} \|D^\alpha v(x)\|_X.$$

On notera ensuite par  $C^\infty(I; X)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $I$  à valeurs dans  $X$  et par  $D(I; X)$  l'espace  $C_0^\infty(I; X)$ , i.e. l'espace des fonctions de  $C^\infty(I, X)$  à support compact dans  $I$  muni par la topologie limite inductive. On désigne par  $D'(I; X)$  l'espace des distributions sur  $I$  à valeurs dans  $X$  défini par

$$D'(I; X) = L(D(I; X); X)$$

où  $L(U, V)$  désigne l'espace des fonctions linéaires et continues de  $U$  dans  $V$ . Soit  $p \in [1, \infty]$ . On désigne par  $L^p(I; X)$  l'espace des (classe de) fonctions  $f : I \rightarrow X$  mesurables telles que l'application  $t \rightarrow \|f(t)\|_X$  soit dans  $L^p(I)$ , c'est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(I; X)} &= \left( \int_X \|f\|_X^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad p \neq \infty, \\ \|f\|_\infty &= \sup_{t \in I} \text{ess } \|f\|_X. \end{aligned}$$

On peut montrer les propriétés suivantes :

1.  $D(I; X) \subset L^p(I; X) \subset D'(I; X)$ .
2. Si  $p < \infty$  alors  $D(I; X)$  est dense dans  $L^p(I; X)$ .

On désigne par  $W^{1,p}(I; X)$  l'espace des (classe de) fonctions  $f \in L^p(I; X)$  telles que  $\dot{f} \in L^p(I; X)$  où  $\dot{f}$  est la dérivée faible de  $f$ , muni par la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}(I;X)} = \|f\|_{L^p(I;X)} + \|\dot{f}\|_{L^p(I;X)}.$$

$W^{1,p}(I; X)$  est un espace de Banach.

**Proposition 3** *Pour tout  $p \geq 1$  on a :*

1.  $W^{1,p}(I, X) \subset L^\infty(I, X) \cap C(\bar{I}, X)$ .
2. Si  $I$  est borné, alors  $C^\infty(\bar{I}, X)$  est dense dans  $W^{1,p}(I, X)$ .

**Définition 4** *Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces de Banach,  $X \subset Y$  à enrobage continu,  $C_S([0, T], X)$  espace est défini comme l'espace des fonctions  $v : [0, T] \rightarrow X$  telles que la fonction réelle d'une variable réelle*

$$t \rightarrow \langle h, v(t) \rangle_{X', X},$$

*est continue sur  $[0, T]$  pour toute  $h \in X'$ .*

**Lemme 1** *Soient  $X$  et  $Y$  sous les conditions de la dernière définition.*

- *i) Si, en plus,  $X$  est un espace de Banach réflexif, alors :*

$$L^\infty(0, T; X) \cap C([0, T]; Y) \subset C_s([0, T]; X)$$

- *ii) Soit  $U$  un autre espace de Banach tel que  $X \subset U \subset Y$  est l'enrobage et  $X \subset Y$  est compact. Si  $\mathcal{F}$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; X)$  et  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{ \dot{f}; f \in \mathcal{F} \}$  est bornée dans  $L^r(0, T; Y)$ , avec  $r > 1$ , alors  $\mathcal{F}$  relativement compact dans  $C([0, T]; U)$ .*

**Preuve.** *i) Ce résultat peut être trouvée dans [6], Lemme 8.1, page 297.*

*ii) Ce résultat peut être trouvée dans [7], Corollaire 4, p. 85. ■*

## 1.2 Théorèmes de trace et formule de Green généralisée

Soit  $\Omega$  un ouvert de classe  $C^1$ . Alors on peut définir de façon unique la trace  $\gamma v$  de  $H^1(\Omega)$  en  $H^{1/2}(\Gamma)$  tel que :

$$\gamma(v) = v|_\Gamma, \text{ si } v \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^n.$$

Il est bien connu que si le domaine  $\Omega \in C^{1,1}$ , ils existent des applications linéaires univoquement déterminées  $\gamma_n$  de  $H^1(\Omega)$  en  $H^{1/2}(\Gamma)$  et  $\gamma_T$  de  $H^1(\Omega)$  en  $H_T^{1/2}(\Gamma)$  telles que :

$$\gamma(v) = \gamma_n(v) n + \gamma_T(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

où  $H_T^{1/2}(\Gamma) = \{\phi \in H^{1/2}(\Gamma); \gamma_n(\phi) = 0\}$ . Aussi si  $v \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^n$ ,  $\gamma_n(v) = v|_\Gamma \cdot n$  et  $\gamma_T(v) = v|_\Gamma - \gamma_n(v) n$ . Les applications  $\gamma_n(v)$  et  $\gamma_T(v)$  sont surjective. Ci-après, pour simplifier l'écriture,  $v_n$  et  $v_T$  désignent traces normales de  $v$ ,  $\gamma_n(v)$  et  $\gamma_T(v)$ , respectivement.

Maintenant on pose  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Sigma}$

Soit  $V$  l'espace définie par

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma(v) = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

On note par  $\gamma_\Sigma^0 : V \rightarrow H^{1/2}(\Sigma)$  l'opérateur de tracer que relative  $v \in V$  avec la restriction de  $\gamma(v)$  sur  $\Sigma$ . Cet opérateur, ce qui conduit  $V$  en  $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$  est linéaire, continue et surjective pour les frontières  $\partial\Sigma$  qui soit  $C^\infty$ , tel que

$$H_{00}^{1/2}(\Sigma) = \{v \in H^{1/2}(\Sigma) \mid \rho^{-1/2}v \in L^2(\Sigma)\},$$

tel que  $\rho$  une fonction particulière (voir [16] pour plus de détails).

**Lemme 2** *Si le domaine  $\Omega$  est  $C^{1,1}$  ils existent applications linéaires, continues et surjectives*

$$\gamma_{\Sigma_n}^0 : V \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Sigma), \quad \gamma_{\Sigma_T}^0 : V \rightarrow H_{T00}^{1/2}(\Sigma).$$

avec  $H_{T00}^{1/2}(\Sigma) = \{\phi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma); \phi_n = 0\}$  et tel que :

$$\gamma_\Sigma^0(v) = \gamma_{\Sigma_n}^0(v) n + \gamma_{\Sigma_T}^0(v) \quad v \in V.$$

Considérons le champs des espace des contraintes :

$$X = \{\tau = (\tau_{\alpha\beta}) \in [L^2(\Omega)]^{n \times n}; \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}\}, \quad (1.1)$$

à condition que la norme

$$\|\tau\|_X = \left( \int_\Omega \tau : \tau dx \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

est un espace de Hilbert. Soit  $E$  le sous-espace de  $X$  définie par :

$$E = \{\tau \in X; \text{div}(\tau) \in L^2(\Omega)\}, \quad (1.3)$$

qui aussi est un espace de Hilbert avec la norme :

$$\|\tau\|_E = \|\tau\|_X + \|\text{div}(\tau)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.4)$$

**Lemme 3** Si  $\Omega \in C^{1,1}$ . Alors il existe des applications uniquement déterminé  $\pi_n$  de  $E$  en  $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)$  tel que

$$\langle \pi(\tau), \gamma(v) \rangle_\Gamma = \langle \pi_n(\tau), v_n \rangle_{n,\Gamma} + \langle \pi_T(\tau), v_T \rangle_{T,\Gamma},$$

Pour tout  $\tau \in E$  et  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , et

$$\pi_n(\tau) = \tau n \cdot n \quad \text{et} \quad \pi_T(\tau) = \tau n - \tau_n n,$$

pour tout  $\tau \in C^1(\bar{\Omega})$  où  $\tau_n \equiv \pi_n(\tau)$ ,  $\tau_T \equiv \pi_T(\tau)$ .

**Lemme 4** Soit  $\Omega \in C^{0,1}$ . Alors il existe une unique application,  $\pi$  linéaire et continue de  $E$  en  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$  tel que :

$$\pi(\tau) = \tau|_\Gamma n, \quad \text{si } \tau \in [C^1(\bar{\Omega})]^{n^2}. \quad (1.5)$$

En outre, la formule de Green généralisée suivante vérifiée pour chaque  $\tau \in E$  et pour  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  :

$$\int_\Omega \tau : \varepsilon(v) dx + \int_\Omega \text{div}(\tau) \cdot v dx = \langle \pi(\tau), \gamma(v) \rangle_\Gamma, \quad (1.6)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  désigne le produit de dualité en  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ .

**Théorème 5** Soit  $\Omega \in C^{0,1}$ . Alors il existe une application linéaire uniquement déterminée  $\pi_\Sigma^0$  de  $E$  en  $(\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma))'$  tel que :

$$\pi_\Sigma^0(\tau) = \tau|_\Sigma n \quad \text{si } \tau \in C^1(\bar{\Omega}),$$

et la formule de Green générale est valable pour chaque  $\tau \in E$  et pour tout  $v \in V$

$$\int_\Omega \tau : \varepsilon(v) dx + \int_\Omega \text{div} \tau \cdot v dx = {}_{00} \langle \pi_\Sigma^0(\tau), \gamma_\Sigma^0(v) \rangle_\Sigma, \quad (1.7)$$

où  ${}_{00} \langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$  désigne le produit de dualité  $(\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma))' \times \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Sigma)$ .

Aussi, si  $\Omega \in C^{1,1}$ ,  $\pi_\Sigma^0$  les opérateurs peuvent être décomposées en  $\pi_{\Sigma n}^0, \pi_{\Sigma T}^0$  tel que :

$${}_{00} \langle \pi_\Sigma^0(\tau), \gamma_\Sigma^0(v) \rangle_\Sigma = {}_{00} \langle \pi_{\Sigma n}^0(\tau), \gamma_{\Sigma n}^0(v) \rangle_{n;\Sigma} + {}_{00} \langle \pi_{\Sigma T}^0(\tau), \gamma_{\Sigma T}^0(v) \rangle_{T,\Sigma},$$

pour tout  $\tau \in E$  et  $v \in V$ , et

$$\pi_{\Sigma n}^0(\tau) = \tau|_\Sigma n \cdot n \quad \text{et} \quad \pi_{\Sigma T}^0(\tau) = \tau|_\Sigma n - \tau_{n,\Sigma} n,$$

pour  $\tau \in C^1(\bar{\Omega})$ , où  $\tau_{n,\Sigma} \equiv \pi_{\Sigma n}^0(\tau)$ .

**Preuve.** Pour plus de détail, voir [1] et [15]. ■

### 1.3 L'inégalité de Korn

Soit  $\Omega$  un intervalle de  $\mathbb{R}^3$ .

**(a) Inégalité de Korn sans conditions aux limites :**

Il existe une constante  $C(\Omega)$  tel que :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \left\{ |v|_{L^2(\Omega)}^2 + |e(v)|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \forall v \in H^1(\Omega).$$

**(b) Inégalité de Korn avec conditions aux limites :**

Soit  $\Gamma_0$  un ensemble mesurable de bord  $\Gamma$  tel que  $mes(\Gamma_0) > 0$  existe une constante  $C(\Omega, \Gamma_0)$  tel que :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega, \Gamma_0) |e(v)|_{L^2(\Omega)}, \forall v \in H^1(\Omega), \text{ nulle au bord.}$$

**Preuve.** voir [33], p. 74. ■

### 1.4 Lemme de Grönwall discrétisé

Soit  $y$  et  $g$  deux fonctions intégrables positives et  $C \geq 0$ . Si

$$y(t) \leq c + \int_0^t g(s)y(s)ds \text{ pour } t \geq 0,$$

alors

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right) \text{ pour } t \geq 0.$$

**Preuve.** Voir [12]. ■

### 1.5 Théorème de Stampacchia

**Définition 6** Soit  $H$  un espace de Hilbert.

On dit qu'une forme bilinéaire  $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  est :

– **Continue** : s'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H,$$

– **Coercive** : s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in H.$$



**Théorème 7** (Stampacchia) : Soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue et coercive. Soit  $K$  un convexe, fermé et non vide. Étant donné  $\varphi \in H'$  il existe  $u \in K$  unique tel que :

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad \forall v \in K.$$

**Preuve.** Voir[3] ■

## 1.6 La convergence faible, faible\*

**Proposition 8** Soit  $E$  espace de Banach,  $(x_n)$  une suite de  $E$ , et  $(f_n)$  une suite de  $E'$  alors :

$$\begin{aligned} - \left[ x_n \rightharpoonup x \text{ pour } \sigma(E, E') \right] &\iff [\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E'] . \\ - \left[ f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ pour } \sigma(E', E) \right] &\iff [\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E] . \end{aligned}$$

**Preuve.** Voir [3] ■

## 1.7 La méthode de Newmark

La méthode de Newmark utilisée ici repose sur les schémas de dérivation numérique suivant :

$$\begin{aligned} \dot{u}^{i+1} &= \dot{u}^i + \Delta t [(1 - \beta) \ddot{u}^i + \beta \ddot{u}^{i+1}] \\ u^{i+1} &= u^i + \Delta t \dot{u}^i + \Delta t^2 [(1/2 - \gamma) \ddot{u}^i + \gamma \ddot{u}^{i+1}] \end{aligned}$$

tels que :  $\beta$  et  $\gamma$  deux paramètres pour le calcul des positions et vitesses.

**Preuve.** Pour plus détails voir[14]. ■

## Chapitre 2

### Problème de Signorini : cas statique

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^{1,1}$ , occupé par un matériau élastique isotrope et homogène de densité  $\rho$ . La frontière de  $\Omega$  est divisée en trois parties  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  ( $\text{mes}(\Gamma_2) > 0$ ). Ce matériau entre en contact avec une fondation rigide en  $\Gamma_0$ , subit une force surfacique  $g$  sur  $\Gamma_1$  et une force volumique  $f$  sur  $\Omega$ . On suppose que la partie  $\Gamma_2$  est encadrée (fig-1-) Supposons que le système est en état statique et le contact sur  $\Gamma_0$  est avec les conditions de Signorini. Notre objectif est la recherche des déplacements des points de  $\bar{\Omega}$ .

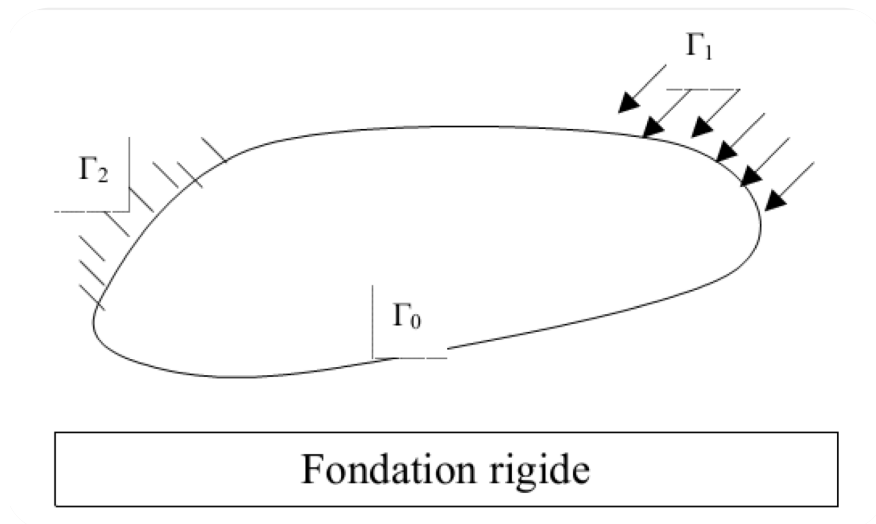


Figure-1-

## 2.1 Problème classique P.C

Trouver  $u$  tel que

$$- \operatorname{div} \sigma(u) = f \text{ dans } \Omega \quad (2.1)$$

$$\sigma(u)n = g \text{ sur } \Gamma_1 \quad (2.2)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \quad (2.3)$$

$$u_N \leq d, \sigma_N \leq 0, \sigma_N(u_N - d) = 0, \sigma_T = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (2.4)$$

L'équation (2.1) désigne l'équation d'équilibre telle que  $\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))$  est le tenseur des contraintes et  $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}e_{kl}(u)$  où  $e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$  et  $e(u) = (e_{ij}(u))$  est le tenseur des déformations linéarisé où  $\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ . On simplifie l'écriture par  $\sigma(u) = Ae(u)$  qui est appelée loi de comportement. On suppose que les coefficients  $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$  vérifient la propriété de la symétrie et la propriété de l'ellipticité i.e :

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$$

$$\exists M > 0, a_{ijkl}e_{ij}(u)e_{kl}(u) \geq Me_{ij}(u)e_{ij}(u), \forall e_{ij} = e_{ji}$$

Les équations (2.2) et (2.3) sont les conditions imposées sur les bords respectivement  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Les conditions dans (2.4) sont appelées les conditions de Signorini.  $u_N = u \cdot n$  désigne la composante normale du déplacement et  $n$  est la normale extérieure.  $u_N \leq d$  : La fonction d'interstice mesurée suivant la normale (décollement).  $\sigma_N = (\sigma(u)n) \cdot n$  la composante normale de la force de pression appliquée sur une section de normale  $n$ .  $\sigma_N(u_N - d) = 0$  décollement ou contact.  $\sigma_T = 0$  pas de frottement, pas de cisaillement.  $d$  une fonction d'interstice définie sur  $\Gamma_0$  est dans  $H^{1/2}(\Gamma_0)$

## 2.2 Problème variationnel P.V

On pose  $H^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^3, L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$$

$K = \{v \in V / v_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$  convexe fermé du sous espace vectoriel  $V$ .

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) \varepsilon(u) dx \quad \forall u, v \in V$$

$$(F, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_1} g.v ds \quad \forall v \in V$$

L'inéquation variationnelle a soucie de (P.C), en terme de déplacement, est la suivante

$$(P.V) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (F, v - u) \quad \forall v \in K \end{array} \right.$$

**Théorème 9** Si  $u$  est une fonction régulière qui vérifie (P.C), alors  $u$  est solution de l'inéquation variationnelle (P.V).

**Preuve.** Voir [15] ■

**Théorème 10** Si  $u$  est une solution de l'inéquation variationnelle (P.V), alors  $u$  satisfait (P.C) en un sens généralisé.

**Preuve.** Voir [15] ■

## 2.3 Existence et unicité

**Théorème 11** Si  $f \in (L^2(\Omega))^p$ ,  $g \in (L^2(\Gamma_1))^p$  alors le problème (P.V) admet une solution unique dans  $K$ .

**Preuve.**  $i) a(u, v)$  est une forme bilinéaire continue coercive.  $a(u, v)$  est une forme bilinéaire (évident). On a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) . \varepsilon_{ij}(v) dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) . \varepsilon_{ij}(v) dx \right| \\ &\leq c \int_{\Omega} |\varepsilon_{kh}(u) . \varepsilon_{ij}(v)| dx \quad (9 \times 9 \text{ termes}) \\ &\leq c \left( \int_{\Omega} (\varepsilon_{kh}(u))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij}(v))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varepsilon_{kh}(u))^2 dx &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_h} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right)^2 dx \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Donc

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où la continuité de  $a(u, v)$ .

En utilisant la condition de l'ellipticité, on trouve :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(v) dx \\ &= \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(v) dx \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} \varepsilon_{kh}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(v) dx \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Korn, on trouve qu'il existe une constante  $k > 0$ , telle que  $\forall u \in H^1(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx = \int_{\Omega} u_i u_i dx \leq k \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) dx = k \int_{\Omega} |\varepsilon(u)|^2 dx$$

En effet, on supposons que  $\{u_n\}$  une suite de  $H^1(\Omega)$  telle que  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$  et  $\int_{\Omega} |\varepsilon(u_n)|^2 dx < \frac{1}{n}$  pour tout  $n > 0$ . De l'inégalité de Korn, on déduit que  $\|u_n\|_{H^1(\Omega)}^2 < k'$ . Donc  $\{u_n\}$  est une suite bornée dans  $H^1(\Omega)$ . D'où  $u_n \rightharpoonup u_0$  dans  $H^1(\Omega)$  et puisque l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte, alors  $u_n \rightarrow u_0$  fortement dans  $L^2(\Omega)$ . D'où  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Par ailleurs, nous avons :

$$a(u_n - u_0, u_n - u_0) = a(u_n, u_n) - a(u_0, u_0) - 2a(u_0, u_n - u_0) \geq 0$$

Il résulte que :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a(u_n, u_n) \geq a(u_0, u_0)$$

D'où

$$\int_{\Omega} |\varepsilon(u_0)|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\varepsilon(u_n)|^2 dx = 0$$

ce qui donne  $\int_{\Omega} |\varepsilon(u_0)|^2 dx = 0$  et puisque  $u_0 = 0$  sur  $\Gamma_2$ , il en résulte que  $u_0 = 0$  sur  $\Omega$ .

Ce qui contredit  $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Par conséquent :  $\int_{\Omega} |\varepsilon(u_n)|^2 dx \geq k \int_{\Omega} |u|^2 dx$ , joigne à l'inégalité de Korn donne  $\int_{\Omega} |\varepsilon(u_n)|^2 dx \geq k'' \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$  tel que  $k'' = \frac{\gamma}{1+k}$ . D'où

$$a(u, u) \geq \alpha k'' \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

ce qui achève la coercivité.

*ii)* –  $(F, v)$  est une forme linéaire continue sur  $V$ . En effet, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f v dx \right| &\leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Gamma_2} |v|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et

$$\left| \int_{\Gamma_1} g v ds \right| \leq \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}$$

En utilisant l'injection continue de l'application trace de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma_1)$  et l'injection continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  on trouve :

$$\begin{aligned} |(F, v)| &\leq c \left( \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \right) \\ &\leq c' \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

De *(i)* et *(ii)* et par le moyen du Théorème de Stampacchia, l'inéquation variationnelle admet une solution unique. ■

# Chapitre 3

## Le problème de Signorini : cas dynamique

D'après l'étude du problème de Signorini dans le cas statique, dans ce chapitre on peut présentée l'étude du même problème dans le cas dynamique. On considère le problème suivant :

### 3.1 Problème classique P.C

Trouver  $u$  tel que

$$\rho \ddot{u} - \operatorname{div} \sigma(u) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1)$$

$$\sigma(u)n = g \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (3.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (3.3)$$

$$u_N \leq d, \sigma_N \leq 0, \sigma_N(u_N - d) = 0, \sigma_T = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (3.4)$$

$$u(x, 0) = u_0, \dot{u}(x, 0) = u_1 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.5)$$

### 3.2 Problème variationnel P.V

On pose  $H^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^3, L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$

**Théorème 12** *si  $u$  est solution du problème P.C, alors  $u$  vérifie le problème P.V :*

*Trouver  $u \in K$  tel que*

$$\rho \langle \ddot{u}, v \rangle + a(u, v) = L(v) + \langle \sigma_N, v_N \rangle, \quad \forall v \in V \quad (3.6)$$

$$\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K \quad (3.7)$$

$$u(x, 0) = u_0; \dot{u}(x, 0) = u_1 \text{ dans } \Omega$$

où  $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : e(v) dx$ ,  $L(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma$ ,  $\langle \sigma_N, v_N \rangle = \int_{\Gamma_0} \sigma_N v_N d\Gamma$   
(au sens de dualité).

**Preuve.** Formulation faible de (3.1) : Soit  $v \in K$ , (3.1) donne :

$$\int_{\Omega} (\rho \ddot{u} - \operatorname{div} \sigma(u)) v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (3.8)$$

On a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u) v dx = \int_{\partial \Omega} \sigma(u) n v d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma(u) : e(v) dx \quad (3.9)$$

Avec  $\sigma(u) : e(v) = \sigma_{ij}(u) : e_{ij}(v)$ . On introduit (3.9) dans (3.8) et on utilise (3.2) et (3.3) on trouve (3.5). Formulation faible de la condition de signorini (ou de complémentarité) :

On a :  $\forall v \in K$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle &= \langle \sigma_N, v_N - d + d - u_N \rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle + \langle \sigma_N, d - u_N \rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

d'où (3.7). ■

**Théorème 13** *On suppose que la solution  $u$  est assez régulière, alors  $u$  solution de P.C si et seulement si  $u$  solution de P.V.*

**Preuve.** On prend dans (3.6)  $v = \varphi$  pour tout  $\varphi \in (D(\Omega))^3$  (puisque  $v$  reste dans  $V$ ).

On trouve que :

$$\rho \langle \ddot{u}, \varphi \rangle + a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in (D(\Omega))^3 \quad (3.10)$$

D'où, en utilisant la formule de Green généralisée dans (3.10), on trouve :

$$\int (\rho \ddot{u} - \operatorname{div} \sigma(u) - f) \varphi dx = 0$$

par conséquent :

$$\rho \ddot{u} - \operatorname{div} \sigma(u) - f = 0 \quad p.p \text{ sur } \Omega \quad (3.11)$$



D'où (3.1). Pour avoir (3.2), on prend  $v = \varphi$  pour tout  $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_2))^3$  dans (3.6) et en prenant en compte (3.11), on trouve :  $\int_{\Gamma_2} (\sigma(u)n - g)\varphi d\Gamma = 0$  d'où (3.2). On prend  $v = \varphi$  dans (3.6) pour tout  $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_0))^3$ . Avec (3.10) on trouve  $\langle \sigma_T, \varphi_T \rangle = 0 \forall \sigma_T$  d'où  $\sigma_T = 0$  sur  $\Gamma_0$  p.p. Puis on prend  $v = u + \varphi$  dans (3.7) avec  $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_0))^3$  et  $\varphi_N \leq 0$  sur  $\Gamma_0$  on trouve :  $\langle \sigma_N, \varphi_N \rangle \geq 0$  ce qui donne  $\sigma_N \leq 0$  sur  $\Gamma_0$ . On prenant  $v_N = 0$  puis  $v_N = 2u_N - d$  dans (3.7), on obtient  $\langle \sigma_N, u_N - d \rangle = 0$  et puisque  $\sigma_N(u_N - d) \geq 0$  alors  $\sigma_N(u_N - d) = 0$  sur  $\Gamma_0$ . Par conséquent (3.4). ■

### 3.2.1 L'inéquation variationnelle associée au problème (P.V)

Le problème variationnel (P.V) est équivalent l'inéquation variationnel suivante :

Trouver  $u$  telle que

$$\rho \int_{\Omega} \ddot{u}(v - u) dx + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(u) : \varepsilon(v - u) dx \geq L(v - u) \forall v \in K$$

$$u(x, 0) = u_0; \dot{u}(x, 0) = u_1 \text{ dans } \Omega$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma$$

Pour plus détail voir [15].

Pour simplifier les calculs, on suppose  $d = 0$ .

## 3.3 Existence du solution

**Théorème 14** *Sous les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} f &\in W^{2,\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \\ g &\in W^{2,\infty}(0, T; L^2(\Gamma)), \\ \text{et } u_0, u_1 &\in H^1(\Omega) \text{ avec } \operatorname{div} \sigma(u_0) \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Alors le problème (P.C) admet au mois une solution  $(u, \sigma(u))$  vérifie :

- $u \in L^\infty(0, T; K)$ ,  $\dot{u} \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ , et  $\ddot{u} \in D'(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ .
- $\sigma(u) \in D'(0, T; E_{ad}(g)) \cap L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^{3 \times 3})$ .

La démonstration de ce Théorème est divisée en cinq étapes.

### 3.3.1 Étape 1 : La discrétisation en temps du problème (P.V)

On considère la discrétisation de l'intervalle de temps  $[0, T]$  à  $I$  sous-intervalles. On propose le problème suivant au temps  $t = t_i$ .

**Problème (P1<sup>i</sup>) :**

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u^i \in K, \dot{u}^i \in [H^1(\Omega)]^3 \text{ et } \ddot{u}^i \in [L^2(\Omega)]^3 \text{ tels que} \\ & \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \right) (v - u^i) dx + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \frac{u^i + u^{i-1}}{2} \right) : \varepsilon (v - u^i) dx \\ & \geq L^i (v - u^i), \forall v \in K \end{aligned} \quad (3.12)$$

La relation entre les sous-intervalles de déplacement, vitesse et l'accélération sont encadré dans la méthode de Newmark (voir Huges [4]) par les paramétrés  $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$  comme suivant :

$$u^i = u^{i-1} + \Delta t \dot{u}^{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}, \quad (3.13)$$

$$\dot{u}^i = \dot{u}^{i-1} + \Delta t \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \quad (3.14)$$

Pour (3.13), l'expression peut être obtenue de l'accélération du temps  $t_i$  comme

$$\ddot{u}^i = \frac{4 \left[ u^i - u^{i-1} - \Delta t \dot{u}^{i-1} - \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{u}^{i-1} \right]}{\Delta t^2} \quad (3.15)$$

ce qui nous permet d'écrire l'inégalité variationnelle (3.12) seulement en termes du déplacement. Ainsi, nous considérons l'algorithme suivant :

- A l'instant initial  $u^0 = u(0) = u_0$  et  $\dot{u}^0 = \dot{u}(0) = u_1$ , avec  $\text{div} \Lambda^{-1} \varepsilon (u^0) \in L^2(\Omega)$ , puis l'accélération  $\ddot{u}^0$  est calculée à partir de l'équation d'équilibre :

$$\ddot{u}^0 = \frac{1}{\rho} (f^0 + \text{div} \Lambda^{-1} \varepsilon (u^0)) \quad (3.16)$$

Avec  $f^0 = f(0)$ . Note que  $\ddot{u}^0 \in (L^2(\Omega))^3$ .

Pour chaque pas de temps  $t_i$  donne  $u^{i-1}, \dot{u}^{i-1}$  et  $\ddot{u}^{i-1}$ , on obtient  $u^i$  la solution du problème variationnel (P2<sup>i</sup>) qui obtenue par la remplacement de la valeur de  $\ddot{u}^i$  qui donnée par (3.15), dans (3.12) :

**Problème (P2<sup>i</sup>) :**

Trouver  $u^i \in K$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho u^i \cdot (v - u^i) dx + \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(u^i) : \varepsilon(v - u^i) dx &\geq \int_{\Omega} \rho \left[ u^{i-1} + \Delta t u^{i-1} \right] \cdot (v - u^i) dx \\ &- \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(u^{i-1}) : \varepsilon(v - u^i) dx + \frac{\Delta t^2}{2} L^i(v - u^i) \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Puis, donne  $u^{i-1}, \dot{u}^{i-1}, \ddot{u}^{i-1}$  et  $u^i$ , obtenir  $\ddot{u}^i$  et  $\dot{u}^i$  en utilisant d'abord (3.15) et après (3.14). Encore une fois, nous savons  $u^i, \dot{u}^i, \ddot{u}^i$  en  $t_i$  répéter le processus pour le prochain pas de temps.

**Théorème 15** *Soit  $u^{i-1} \in K, \dot{u}^{i-1} \in H^1(\Omega)$  et  $\ddot{u}^{i-1} \in L^2(\Omega)$ . Alors, il existe une solution unique  $u^i$  du problème  $(\mathbf{P2}^i)$ . En outre,  $\dot{u}^i$  et  $\ddot{u}^i$  construits à partir des relations (3.14) et (3.15) vérifient :*

$$\dot{u}^i \in H^1(\Omega), \ddot{u}^i \in L^2(\Omega), \text{ et } \dot{u}^i + \ddot{u}^{i-1} \in H^1(\Omega), \quad 1 \leq i \leq 2^I \quad (3.18)$$

**Preuve.** En considérant la forme bilinéaire  $b$ , continue et coercive sur  $V \times V$  définie par :

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \rho u \cdot v dx + \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(u) : \varepsilon(v) dx \quad (3.19)$$

et l'application linéaire définie sur  $V$  par :

$$\begin{aligned} L(v) &= \frac{\Delta t^2}{2} L^i(v) + \int_{\Omega} \rho \left[ u^{i-1} + \Delta t u^{i-1} \right] v dx \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(u^{i-1}) : \varepsilon(v) dx. \end{aligned}$$

Le résultat d'existence et d'unicité est obtenue par l'application de théorème de Stampacchia. Maintenant, comme  $u^i, u^{i-1}, \dot{u}^{i-1}$  appartiennent à  $H^1(\Omega)$ , d'après (3.13) nous obtenons que  $\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1} \in H^1(\Omega)$ . Ainsi, depuis  $\ddot{u}^{i-1} \in L^2(\Omega)$ , déduire que  $\ddot{u}^i \in L^2(\Omega)$ . En outre, de (3.14) nous obtient  $\dot{u}^i \in H^1(\Omega)$ . ■

**Remarque 16** *Les hypothèses concernant les conditions initiales garantissent que  $u_0 \in K, \dot{u}^0 \in H^1$  et  $\ddot{u}^0 \in L^2(\Omega)$ . Par conséquent, le Théorème 15 garantit que les champs des déplacements, la vitesse et l'accélération sont calculées avec l'algorithme conçu vérifient les propriétés similaires, pour tous  $0 \leq i \leq 2^I$ .*

**Corollaire 17** *Supposons que  $u^{i-1} \in K, \dot{u}^{i-1} \in H^1(\Omega)$  et  $\ddot{u}^{i-1} \in L^2(\Omega)$  sont connus. Si  $u^i, \dot{u}^i$  et  $\ddot{u}^i$  sont solutions du problème  $(\mathbf{P1}^i)$ . Alors,  $u^i$  est la solution du problème  $(\mathbf{P2}^i)$ ,  $1 \leq i \leq 2^I$ .*

*Réciproquement, si  $u^i$  c'est la solution du problème  $(\mathbf{P2}^i)$  et  $\dot{u}^i$  et  $\ddot{u}^i$  sont définies par (3.14) et (3.15) alors  $u^i, \dot{u}^i$  et  $\ddot{u}^i$  sont solution du problème  $(\mathbf{P1}^i)$ .*

## Les propriétés des $u^i$

Tout d'abord, pour simplifier la notation, nous noterons :

$$h^i = \frac{u^i + u^{i-1}}{2}, 1 \leq i \leq 2^I \quad (3.20)$$

**Corollaire 18** *si  $u^i$  la solution du  $(P2^i)$  et  $\sigma(h^i) = \Lambda^{-1}\varepsilon(h^i)$ . Alors*

$$\rho \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} - \operatorname{div} \sigma(h^i) = f^i \quad \text{sur } \Omega \quad (3.21)$$

où  $\ddot{u}^i$  est calculé par les relations (3.13) et (3.14),  $f^i = f(t_i)$  et  $h^i$  est donnée par (3.20). Aussi  $\sigma(h^i) \in E_{ad}(g^i)$ .

**Preuve.** Le résultat est une conséquence directe de la relation (2.2.12) et la proposition 2.2.5 en ([1]). ■

**Corollaire 19** *Si  $u^i, \dot{u}^i, \ddot{u}^i$  la solution du  $(P1^i)$  et  $\sigma(h^i) = \Lambda^{-1}\varepsilon(h^i)$ ,  $1 \leq i \leq 2^I$ . Alors qu'elle détient (3.21)  $\sigma(h^i) \in E_{ad}(g^i)$  et*

$$\langle \pi_n(\sigma(h^i)) |_{\Gamma_1}, u_n^i |_{\Gamma_1} \rangle_{\Gamma_1} = 0. \quad (3.22)$$

**Preuve.** La preuve est trivial, en utilisant la proposition (2.2.7) en [1]. ■

## 3.3.2 Étape 2 : L'approximation du solution du problème (P)

### Première approximation

Dans ce paragraphe, on construit à partir de  $\{u^i, \dot{u}^i, \ddot{u}^i\}$   $i = 0, 1, \dots, 2^I$ , une fonction  $h^I(t)$  définie en  $[0, T]$  telle que  $h^I$  est de  $C^1([0, T])$  et de  $C^2$  sur  $(t_{i-1}, t_i)$   $i = 1, 2, \dots, 2^I$ . Pour cela, on prend la fonction suivante comme  $h^I$  :

$$h^I = u^{i-1} + \dot{u}^{i-1}(t - t_{i-1}) + \frac{u^{\ddot{i}-1} + \ddot{u}^i}{4}(t - t_{i-1})^2, \forall t \in [t_{i-1}, t_i]. \quad (3.23)$$

A l'instant  $t = T$ ,  $h^I(T) = u^{2^I}$ ,  $\dot{h}^I(T) = \dot{u}^{2^I}$ . Ce choix garantit la compatibilité de  $h^I(t)$  avec la discrétisation de Newmark. La fonction  $h^I(t)$  vérifie les propriétés suivantes :

- $h^I(t) \in H^1(\Omega), \forall t \in [0, T]$ .

$$\dot{h}^I(t) = \dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}(t - t_{i-1}), \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (3.24)$$

pour tous  $i = 0, \dots, 2^I$ ,  $\dot{h}^I(t_i) = \dot{u}^i$ ,  
–  $\ddot{h}^I \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ , telle que :

$$\ddot{h}^I = \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i]. \quad (3.25)$$

– A l'instant  $t_i$  grâce à (3.13) et (3.14), on obtient pour  $i = 1, \dots, 2^I$

$$\lim_{t \rightarrow t_i} h^I(t) = u^{i-1} + \dot{u}^i \Delta t + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4} \Delta t^2 = u^i = h^I(t_i), \quad (3.26)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_i} \dot{h}^I(t) = \dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \Delta t = \dot{u}^i = \dot{h}^I(t_i), \quad (3.27)$$

donc  $h^I(t) \in C(0, T; H^1(\Omega))$ .

**Remarque 20** Notez que  $h^I(t_k) \in K$ , mais il n'y a aucune garantie que  $h^I(t) \in K$  pour tous  $t \in [0, T]$ .

### Autres approches

Maintenant, choisissez un autre quatre à approches d'une solution de le problème ( $P$ ) qui sont aussi convergente lorsque  $I \rightarrow \infty$ . Nous définissons :

$$l^I(t) = u^{i-1} + \frac{u^i - u^{i-1}}{\Delta t}(t - t_{i-1}), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (3.28)$$

$$h_*^I(t) = h^i = \frac{u^i + u^{i-1}}{2}, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (3.29)$$

$$h_{\#}^I(t) = \dot{u}^i, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (3.30)$$

$$u_*^I(t) = u^i, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (3.31)$$

**Remarque 21** Noter que dans ce cas  $l^I(t), h_*^I(t), u_*^I(t)$  appartiennent à  $K$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

### 3.3.3 Étape 3 : Estimations a priori

**Lemme 5** Soit  $u^i, \dot{u}^i$  et  $\ddot{u}^i$  la solution du  $(P1^i)$ ,  $1 \leq i \leq 2^i$  et  $h^I$  définie par (3.23). Ensuite, pour chaque sous-intervalle  $(t_{i-1}, t_i)$  de  $(0, T)$  vérifie que :

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \dot{h}^I(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(h^I(t), h^I(t)) dt \\ \leq L^i (u^i - u^{i-1}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

avec  $a(., .)$  donné par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(u) : \varepsilon(v) dx.$$

**Preuve.** En prenant  $v = u^{i-1}$  dans (3.12) obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho (\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}) \cdot \frac{u^i - u^{i-1}}{2} dx + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(u^i + u^{i-1}) : \varepsilon \left( \frac{u^i - u^{i-1}}{2} \right) dx \\ \leq L^i (u^i - u^{i-1}), \end{aligned} \quad (3.33)$$

Tout d'abord, nous réécrivons le premier membre de l'équation (3.33) en termes de  $h^I(t)$ .

En utilisant (3.13), nous pouvons montrer que les déplacements vérifiés

$$\frac{u^i - u^{i-1}}{2} = \frac{\Delta t}{2} \dot{u}^{i-1} + \frac{\Delta t^2}{4} \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}, \quad (3.34)$$

$$u^i + u^{i-1} = 2u^{i-1} + \Delta t \dot{u}^{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \quad (3.35)$$

En substituant ces expressions dans le premier membre de l'équation (3.33) obtenir

$$\begin{aligned} \rho \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} (\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}) \cdot \dot{u}^{i-1} dx + \rho \frac{\Delta t^2}{4} \int_{\Omega} (\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}) \cdot \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \right) dx \\ + \Delta t \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(u^{i-1}) : \varepsilon(\dot{u}^{i-1}) dx + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(u^{i-1}) : \varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \right) dx \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(\dot{u}^{i-1}) : \varepsilon(\dot{u}^{i-1}) dx + \frac{\Delta t^3}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(\dot{u}^{i-1}) : \varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \right) dx \\ + \frac{\Delta t^4}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4} \right) : \varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \right) dx \\ + \frac{\Delta t^3}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \right) : \varepsilon(\dot{u}^{i-1}) dx \leq L^i (u^i - u^{i-1}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Maintenant, le premier membre de cette expression correspond à

$$\rho \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \dot{h}^I(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(h^I(t), h^I(t)) dt.$$

En effet, la définition de  $h^I(t), t \in [t_{i-1}, t_i)$  suit :

$$\| \dot{h}^I(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left( \dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} (t - t_{i-1}) \right) \cdot \left( \dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} (t - t_{i-1}) \right) dx,$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \dot{h}^I(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \cdot \left( \dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} (t - t_{i-1}) \right) dx.$$

Ainsi,

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \dot{h}^I(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \Delta t \int_{\Omega} \dot{u}^{i-1} \cdot \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} dx + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \right)^2 dx \quad (3.37)$$

aussi, en  $[t_{i-1}, t_i)$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(h^I(t), h^I(t)) &= \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \dot{h}^I(t) \right) : \varepsilon(h^I(t)) dx \\ &= \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} (t - t_{i-1}) \right) : \\ &\quad \varepsilon \left( u^{i-1} + \dot{u}^{i-1} (t - t_{i-1}) + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4} (t - t_{i-1})^2 \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \dot{u}^{i-1} \right) : \varepsilon(u^{i-1}) dx + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \dot{u}^{i-1} \right) : \varepsilon \left( \dot{u}^{i-1} \right) (t - t_{i-1}) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \dot{u}^{i-1} \right) : \varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4} \right) (t - t_{i-1})^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \right) : \varepsilon(u^{i-1}) (t - t_{i-1}) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \right) : \varepsilon \left( \dot{u}^{i-1} \right) (t - t_{i-1})^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \right) : \varepsilon \left( \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4} \right) (t - t_{i-1})^3 dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(h^I(t), h^I(t)) dt = \Delta t \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(\dot{u}^{i-1}) : \varepsilon(u^{i-1}) dx \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(\dot{u}^{i-1}) : \varepsilon(\dot{u}^{i-1}) dx + \frac{\Delta t^3}{3} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon(\dot{u}^{i-1}) : \varepsilon\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4}\right) dx \\
& \quad + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}\right) : \varepsilon(u^{i-1}) dx \\
& \quad + \frac{\Delta t^3}{3} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4}\right) : \varepsilon(\dot{u}^{i-1}) dx \\
& \quad + \frac{\Delta t^4}{4} \int_{\Omega} \Lambda^{-1} \varepsilon\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}\right) : \varepsilon\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4}\right). \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Et à partir de (3.36) - (3.38), nous concluons le résultat. ■

**Proposition 22** Soit  $h^I(t)$  définie par (3.13). Alors :

- $\|h(t_k)\|_{H^1(\Omega)}$  est borné par une constante indépendante de  $I$  et  $k, 1 \leq k \leq 2^I$ .
- $h^I$  et  $\dot{h}^I$  sont bornées dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$  par une constante indépendante de  $I$ .

**Preuve.** Pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq 2^I$  on a l'expression suivantes :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^k \rho \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{h}^I(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \frac{\rho}{2} \left( \|\dot{h}^I(t_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\dot{h}^I(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& \sum_{i=1}^k \rho \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(h^I(t), h^I(t)) dt = \frac{1}{2} (a(h^I(t_k), h^I(t_k)) - a(h^I(0), h^I(0)))
\end{aligned}$$

Alors, par le lemme 5 en déduit que pour  $1 \leq k \leq 2^I$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( \rho \|\dot{h}^I(t_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(h^I(t_k), h^I(t_k)) \right) \leq \frac{1}{2} \left( \|\dot{h}^I(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(h^I(0), h^I(0)) \right) \\
& \quad + \sum_{i=1}^k L^i (u^i - u^{i-1}). \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Maintenant, nous obtenons une borne supérieure pour le second terme du côté droit de (3.39). étant donné que

$$u^i - u^{i-1} = h^I(t_i) - h^I(t_{i-1}) \tag{3.40}$$



déduire que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k L^i (u^i - u^{i-1}) &= \sum_{i=1}^k L^i (h^I(t_i) - h^I(t_{i-1})) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{k-1} (L^i - L^{i+1}) (h^I(t_i)) + L^k(h^I(t_k)) - L^1(h^I(0)) \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Aussi :

$$\begin{aligned} |L^i(h(t_k))| &\leq \left| \int_{\Omega} f^i h(t_k) \right| + \left| \int_{\Gamma_1} g^i h(t_k) \right| \\ &\leq \|f^i\|_2 \|h(t_k)\|_2 + \|g^i\|_{2,\Gamma_1} \|h(t_k)\|_{H^{1/2}} \\ &\leq (\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + c \|g\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1))}) \|h(t_k)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|h(t_k)\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

et

$$\begin{aligned} |L^i(h(t_k)) - L^{i+1}(h(t_k))| &\leq \|f^i - f^{i+1}\|_2 \|h(t_k)\|_2 + \|g^i - g^{i+1}\|_2 \|h(t_k)\|_{H^{1/2}} \\ &\leq \left( \|f\dot{\phantom{f}}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + c \|g\dot{\phantom{g}}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right) \|h(t_k)\|_{H^1} \\ &\leq C_2 \|h(t_k)\|_{H^1} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Puis, en prenant la valeur absolue de (3.41), et en utilisant (3.42) et (3.43) et appliquant l'inégalité de Hölder doit être :

$$\left| \sum_{i=1}^k L^i (u^i - u^{i-1}) \right| \leq C_1 \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \|h^I(t_i)\|_{H^1} + C_2 (\|h^I(t_k)\|_{H^1} + \|h^I(0)\|_{H^1}),$$

où  $C_1, C_2$  sont constantes positives. Ainsi, à partir de (3.39), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \left( \| \dot{h}^I(t_k) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\rho} a(h^I(t_k), h^I(t_k)) \right) &\leq \left( \| \dot{h}^I(0) \|_{H^1}^2 + \frac{1}{\rho} a(h^I(0), h^I(0)) \right) \\ &+ \frac{2}{\rho} \left( C_2 \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \|h^I(t_i)\|_{H^1} + C_1 (\|h^I(t_k)\|_{H^1} + \|h^I(0)\|_{H^1}) \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Maintenant, puisque la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est coercitive, l'équation ci-dessus concluent qu'il existe des constantes positives  $C_1, C_2, C_3$ , qui ne dépend pas de  $I$  ou  $k$  tel que :

$$\|h^I(t_k)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1 + C_2 \|h^I(t_k)\|_{H^1(\Omega)} + C_3 \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \|h^I(t_i)\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.45)$$

pour  $1 \leq k \leq 2^I$ . Sous perdre de généralité, on suppose que  $C_1 > 1$ , l'inégalité précédente implique que :

$$\| h^I(t_k) \|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 + C_2 + C_3 \Delta t \sum_{i=1}^{k-1} \| h^I(t_i) \|_{H^1(\Omega)} \quad (3.46)$$

Appliquant le lemme de Gronwall discret (voir Lions [12]), on obtient que :

$$\| h^I(t_k) \|_{H^1(\Omega)} \leq C e^T, C \in \mathbf{R}^+ \quad (3.47)$$

Donc  $h^I(t_k)$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$  par une constante indépendante de  $I$  et  $k$ .

De (3.44) on obtient facilement que  $\dot{h}^I(t_k)$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$  par une constante indépendante de  $I$  et  $k$ . En conséquence, car  $\dot{h}^I$  linéaire par morceaux

$$\| \dot{h}^I(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \max \left\{ \| \dot{h}^I(t_{i-1}) \|_{L^2(\Omega)}^2, \| \dot{h}^I(t_i) \|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Alors  $\dot{h}^I(t)$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ , et comme il est continue, donc il est bornée dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$ , Alors :

$$h^I(t) = h^I(0) + \int_0^t \dot{h}^I(s) ds$$

Donc  $h^I(t)$  est bornée dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$  par une constante indépendante de  $I$  pour tout  $t \in (0, T)$  ■

**Corollaire 23** Soit  $h^I$  définie par (3.13), ils existe des sous-suites que nous noterons avec l'indice  $I$ , tel que lorsque  $I \rightarrow +\infty$  nous obtenons les convergences suivantes :

$$h^I \rightharpoonup h \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.48)$$

$$\dot{h}^I \rightharpoonup \dot{h} \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.49)$$

**Preuve.** Puisque l'espace  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) = [L^1(0, T; L^2(\Omega))]'$  et  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$  est une espace de Banach séparable, le résultat est directe voir (Brézis [3]). Notez que la limite de  $\dot{h}^I$  est  $\dot{h}$ , en raison de l'unicité de la limite dans  $D'(0, T; [L^2(\Omega)]_{weak})$  (voir Lions [5]) ■

### Autres estimations a priori

**Proposition 24** Soient  $l^I(t)$ ,  $h_*^I(t)$ ,  $h_{\#}^I(t)$  et  $u_*^I(t)$  définie par (3.28)–(3.31) respectivement, alors :

- \*  $\| h_*^I(t) \|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  et  $\| u_*^I(t) \|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  sont bornée par une constante indépendante de  $I$  pour tous  $t \in [0, T]$ .
- \*  $\| l^I(t) \|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ ,  $\| \dot{l}^I(t) \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  et  $\| h_{\#}^I(t) \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  sont bornée par une constante indépendante de  $I$  pour tous  $t \in [0, T]$ .
- \*  $\dot{h}^I$  est bornée en  $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

**Preuve.** à partir la définition de  $h^I$  on a  $u^i = h^I(t_i)$  pour tout  $0 \leq i \leq 2^I$ , puis  $h_*^I$  peut être exprimé comme :

$$h_*^I(t) = \frac{h^I(t_i) + h^I(t_{i-1})}{2}, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (3.50)$$

et

$$u_*^I(t) = h^I(t_i), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (3.51)$$

aussi  $h_*^I \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  puisque  $u^i \in H^1(\Omega)$  pour tout  $i$ , et

$$\begin{aligned} \| h_*^I(t) \|_{H^1(\Omega)} &= \left\| \frac{h^I(t_i) + h^I(t_{i-1})}{2} \right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \| h^I(t_i) \|_{H^1(\Omega)} + \| h^I(t_{i-1}) \|_{H^1(\Omega)} \right), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \end{aligned} \quad (3.52)$$

Par conséquent, par la proposition 22  $h_*^I(t)$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  par une constante indépendant de  $I$ . Même façon,  $u_*^I(t)$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  par une constante indépendant de  $I$ . Maintenant, puisque  $l^I$  est linéaire par morceaux,

$$\| l^I(t) \|_{H^1(\Omega)} \leq \left\{ \| l^I(t_{i-1}) \|_{H^1(\Omega)}, \| l^I(t_i) \|_{H^1(\Omega)} \right\} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i],$$

et depuis  $l^I(t_k) = h^I(t_k)$  et  $\| h^I(t_k) \|_{H^1(\Omega)}$  est bornée par une constante indépendant de  $I$  et  $k$ ,  $\| l^I(t) \|_{H^1(\Omega)}$  est bornée par une constante indépendant de  $I$ . Pour démontrer que  $\dot{l}^I$  est bornée, nous écrivons en termes de  $\dot{h}^I$  :

$$\dot{l}^I(t) = \frac{u^i + u^{i-1}}{\Delta t},$$

qui, par (3.34) et (3.24) peut être réécrite comme :

$$\dot{l}^I(t) = \dot{u}^{i-1} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} = \frac{\dot{h}^I(t_{i-1}) + \dot{h}^I(t_i)}{2}, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Alors

$$\| \dot{l}^I(t) \|_{L^2(\Omega)} = \left\| \frac{\dot{h}^I(t_{i-1}) + \dot{h}^I(t_i)}{2} \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.53)$$

Ainsi, toujours d'après la Proposition 22,  $\| \dot{\mathbf{l}}^I(t) \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  est bornée par une constante indépendante de  $I$  pour tout  $t \in (0, T)$ . Même façon :

$$\| h_{\#}^I(t) \|_{L^2(\Omega)} = \| \dot{h}^I(t_i) \|_{L^2(\Omega)}, \forall t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Enfin, la bornitude de  $\ddot{h}^I$  dans  $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$  est obtenue comme une conséquence directe des bornitudes précédentes et l'équation (3.21) peut s'écrire en termes de  $\ddot{h}^I$  et  $h_*^I$  comme :

$$\rho \ddot{h}^I - \operatorname{div} \sigma(h_*^I) = f_0^I \quad \text{dans } \Omega \quad (3.54)$$

telle que :  $f_0^I(t) = f_0^i$  pour tout  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ . ■

### 3.3.4 Étape 4 : La convergence faible des solutions approchées et que ses limites sont égaux

**Corollaire 25** Soient  $l^I(t)$ ,  $h_*^I(t)$ ,  $h_{\#}^I(t)$  et  $u_*^I(t)$  définies par (3.28)–(3.31) respectivement. Alors : il existe sous-suites égaux dépendant avec l'indice  $I$  tel que  $I \rightarrow \infty$ , nous obtenons les convergences suivantes :

$$l^I \rightharpoonup l \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.55)$$

$$\dot{l}^I \rightharpoonup \dot{l} \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.56)$$

$$h_*^I \rightharpoonup h_* \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.57)$$

$$u_*^I \rightharpoonup u_* \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.58)$$

$$h_{\#}^I \rightharpoonup h_{\#} \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.59)$$

$$\ddot{h}^I \rightharpoonup \ddot{h} \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.60)$$

**Preuve.** La preuve est similaire à celle du corollaire 23. ■

**Corollaire 26** Soient  $\dot{h}^I$  et  $l^I$  définis par (3.23) et (3.49) respectivement. Alors, il existe des sous-suites, égaux notée avec l'indice  $I$ , telle que  $I \rightarrow +\infty$

$$l^I \rightarrow l \text{ dans } C([0, T]; \mathbf{H}^\beta(\Omega)) \cap C_s([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad 0 \leq \beta < 1, \quad (3.61)$$

$$\dot{h}^I \rightarrow \dot{h} \text{ dans } C([0, T]; \mathbf{H}^\alpha(\Omega)) \cap C_s([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)), \quad -1 \leq \alpha < 0, \quad (3.62)$$

éventuellement d'après une modification sur un ensemble de mesure nulle.

**Preuve.** La démonstration de ce résultat est conséquence de la bornitude de  $\dot{h}^I, \ddot{h}^I, l$  et  $\dot{l}$  et le Lemme 1. ■

### Unicité de la limite

Dans cette section, nous allons montrer que toutes les limites dans (3.48), (3.57), (3.60) et (3.61) sont égaux :  $h = l = h_* = u_*$ . Puis, à partir de (3.29) et en utilisant la formule de Barrow pour des fonctions  $C^1$  à  $[t_{i-1}, t_i]$ , on a :

$$\begin{aligned} \|h^I(t) - h_*^I(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \frac{h^I(t)}{2} + \frac{h^I(t)}{2} - \frac{h^I(t_{i-1})}{2} - \frac{h^I(t_i)}{2} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\| \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^t \dot{h}^I(s) ds - \frac{1}{2} \int_t^{t_i} \dot{h}^I(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^t \dot{h}^I(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \frac{1}{2} \int_t^{t_i} \dot{h}^I(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \Delta t \left\| \dot{h}^I(s) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

lorsque  $I \rightarrow +\infty$ . Pour tout  $h$  et  $h_*$  sont égaux à  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et puis que  $h_* \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  aussi  $h \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ . De même, il est démontré que  $h$  et  $u_*$  sont égaux en  $H^1(\Omega)$ . En outre, puis que  $\dot{l}$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} \|l^I(t) - u_*^I(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \|l^I(t) - l^I(t_i)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\| \int_t^{t_i} \dot{l}^I(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \Delta t \left\| \dot{l}^I \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

lorsque  $I \rightarrow +\infty$ . De même, il est démontré que  $\dot{h}$  et  $h_\#$  coïncident avec  $L^2(\Omega)$ . alors,  $l = u_* = h_* = h$ . Désormais, nous noterons cette limite par  $u$ . En résumé, nous avons montré les convergences suivantes :

**Théorème 27** Soient  $h^I, l^I, h_*^I, h_\#^I$  et  $u_*^I$  sont donnés par (3.23), (3.28), (3.29), (3.30) et (3.31) respectivement, alors il existe  $u$  tel que :

$$\begin{aligned} h^I &\rightharpoonup u \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \dot{h}^I &\rightharpoonup \dot{u} \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \dot{l}^I &\rightharpoonup u \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \\ l^I &\rightharpoonup \dot{u} \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ h_*^I &\rightharpoonup u \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \\ u_*^I &\rightharpoonup u \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \\ h_\#^I &\rightharpoonup \dot{u} \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \sigma(h_*^I) &\rightharpoonup \sigma(u) \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

En outre, nous avons les limites suivantes :

$$\lim_{I \rightarrow +\infty} (h^I - h_*^I) = 0, \quad (3.65)$$

$$\lim_{I \rightarrow +\infty} (h^I - u_*^I) = 0, \quad (3.66)$$

$$\lim_{I \rightarrow +\infty} (l^I - u_*^I) = 0, \quad (3.67)$$

forte dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ .

**Corollaire 28** Soient  $h^I$  et  $l^I$  sont donnés par : (3.23), (3.28). Alors il existe  $u$  tel que

$$\dot{h}^I \rightarrow \dot{u} \quad \text{dans } C(0, T; H^\alpha(\Omega)) \cap C_s([0, T]; L^2(\Omega)), \quad -1 \leq \alpha \leq 0, \quad (3.68)$$

$$l^I \rightarrow u \quad \text{dans } C([0, T]; H^\beta(\Omega)) \cap C_s([0, T]; H^1(\Omega)), \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (3.69)$$

**Preuve.** D'après le corollaire 26 et l'unicité de la limite faible. ■

**Théorème 29** Soient  $h_*^I$  et  $u_*^I$  sont donne par (3.29) et (3.31) respectivement. Alors :

$$h_*^I - u_*^I \rightarrow 0 \quad \text{dans } D'(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.70)$$

$$l^I - u_*^I \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H^r(\Omega)), \quad 0 < r < 1, \quad (3.71)$$

lorsque  $I \rightarrow +\infty$ .

**Preuve.** Soit  $\varphi \in D(0, T)$ . Soit  $I \geq I_0$ , où  $I_0$  est telle que le support de  $\varphi$  est contenu dans  $[\delta_0, T - \delta_0]$  avec  $\delta_0 = T/2^{I_0}$ , de sorte que  $\text{supp}(\varphi) \subset [\delta, T - \delta]$ , être  $\delta = T/2^I$ . Puis

$$\begin{aligned} \int_0^T (h_*^I - u_*^I) \varphi dt &= \sum_{i=0}^{2^I-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (h_*^I(t) - u_*^I(t)) \varphi(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{2^I-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (u^{i-1} - u^i) \theta_I(t) \varphi(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^{2^I-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^i (\varphi_\delta - \varphi)(t) dt, \end{aligned}$$

être  $\varphi_\delta = \varphi(t + \delta)$  et pour tout,  $|\varphi - \varphi_\delta| \leq c\delta$ , être  $c = \max \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$ . Par conséquence,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T (h_*^I - u_*^I) \varphi dt \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq c\delta^2 \sum_{i=1}^{2^I-1} \|u^I\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq c\delta^2 \left( (2^I - 1) \sum_{i=1}^{2^I-1} \|u^I\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c\delta^2 \left( (2^I - 1)^2 C \right)^{1/2} \\ &\leq \hat{c}\delta^2 2^I \\ &= \hat{c}\delta^2 T / \delta = \hat{c}\delta T \rightarrow 0 \text{ si } \delta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où  $c, C$  et  $\hat{c}$  sont des constantes positives. Pour prouver (3.71) en utilisant les convergences suivantes :

$$\begin{aligned} l^I &\rightharpoonup u \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)) \\ \dot{l}^I &\rightharpoonup \dot{u} \text{ faible}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \end{aligned}$$

Soit  $0 < r = \theta\alpha + (1 - \theta)\beta < 1$ ,  $r \neq 1/2$ . Il existe un ensemble  $A \subset [0, T]$  tel que  $mes(A) = 0$  et pour tout  $t_1, t_2 \in [0, T] \setminus A$ , avec  $t_1 \leq t_2$

$$\begin{aligned} \|l^I(t_2) - l^I(t_1)\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} &\leq M_\theta \|l^I(t_2) - l^I(t_1)\|_{L^2(\Omega)}^\theta \|l^I(t_2) - l^I(t_1)\|_{H^1(\Omega)}^{1-\theta} \\ &\leq M_\theta \left( \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{l}^I(t)\|_{L^2(\Omega)} dt \right)^\theta \\ &\leq M_\theta (t_2 - t_1)^{\theta/2}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

En particulier, pour tout  $t \in [t_{i-1}, t_i] \setminus A$ , alors :

$$\|u_*^I(t) - l^I(t)\|_{H^r(\Omega)} = \|l^I(t_i) - l^I(t)\|_{H^r(\Omega)} \leq M_\theta (t_i - t)^{\theta/2} \rightarrow 0,$$

Lorsque  $I \rightarrow +\infty$ . ■

**Théorème 30** Soit  $u$  la limite qui présenté en le théorème 27, alors :

$$u \in L^\infty(0, T; K) \quad (3.73)$$

$$\dot{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.74)$$

$$\ddot{u} \in D'(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.75)$$

$$\sigma(u) \in D'(0, T; H(\text{div})) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.76)$$

**Preuve.** D'après la relation 3.12 on a

$$\rho \int_{\Omega} \ddot{h}^I v dx + a(h_*^I, v) \geq L^i(v) \quad \forall v \in K$$

cette inégalité reste vrai pour :  $v(t) \in L^2(0, T; V)$ ;  $v(t) \in K$  p.p et c-à-d ;

$$\rho \int_0^T \int_{\Omega} \ddot{h}^I v(t) dx dt + \int_0^T a(h_*^I, v(t)) dt \geq \int_0^T L_*^I(v(t)) dt, \quad \forall v \in L^2(0, T; V)$$

d'où, on choisit  $V(t) = \varphi(t)\omega(t)$  tel que  $\varphi(t) \in D(0, T)$ ;  $\omega(t) \in D(\Omega)$  on trouver ; l'intégration par partie sur le première terme

$$-\rho \int_0^T \int_{\Omega} \dot{h}^I \dot{v}(t) dx dt + \int_0^T a(h_*^I, v(t)) dt \geq \int_0^T \int_{\Omega} f_*^I v(t) dx dt,$$

Pour  $v(t) = -\varphi(t)\omega(t)$ , on trouve

$$\rho \int_0^T \int_{\Omega} \ddot{h}^I v(t) dxdt + \int_0^T a(h_*^I, v(t)) dt = \int_0^T \int_{\Omega} f_*^I v(t) dt, \quad (3.77)$$

On peut montrer aussi que : quand  $I \rightarrow \infty$

$$\int_0^T a(h_*^I, v(t)) dt \rightarrow \int_0^T a(u, v(t)) dt \quad (3.78)$$

et que

$$\int_0^T \int_{\Omega} f_*^I v(t) dxdt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} f v(t) dxdt. \quad (3.79)$$

Par conséquent

$$-\rho \int_0^T \int_{\Omega} \dot{u} \dot{v}(t) dxdt + \int_0^T a(u, v(t)) dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v(t) dxdt. \quad \text{pour } v \in D((0, T) \times \Omega)$$

Pour montrer (3.73), il suffit de voir que  $u_*^I = u \in K$  et puisque  $u_*^I \xrightarrow{*} u$  dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  alors  $u_*^I \xrightarrow{*} u$  dans  $L^\infty(0, T; K)$  d'où (3.73). On a (3.74) directement d'après  $\dot{h}^I \xrightarrow{*} \dot{u}$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  à l'aide d'une fonction test  $v(t) \in D(0, T; K)$  on a

$$\begin{aligned} \rho \int_0^T \int_{\Omega} \dot{u} \dot{v}(t) dxdt - \int_0^T \text{div} \sigma(u) v(t) dt &= \int_0^T \int_{\Omega} f v(t) dxdt. \\ \rho \ddot{u} - \text{div} \sigma(u) - f &= 0 \text{ p.p sur } Q = (0, T) \times \Omega. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Comme  $\dot{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , alors  $\ddot{u} \in D'(0, T; L^2(\Omega))$

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{1}{\rho} (\text{div} \sigma(u) + f) \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ \ddot{u} &\in D'(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad \text{d'où (3.75)} \end{aligned}$$

Puisque  $\sigma(h_*^I) \rightarrow \sigma(u)$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  alors  $\sigma(u) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et  $\sigma(u) \in H(\text{div}) \implies \sigma(u) \in D'(0, T; H(\text{div}))$  d'où  $\sigma(u) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap D'(0, T; H(\text{div}))$  d'où (3.76). ■

### 3.3.5 Étape 5 : Caractérisation de $u$ par le problème (PV)

Dans cette étape, on va montrer que la limite faible  $u$  est une solution faible du problème (P). Pour cela il suffit de montrer que  $u$  est solution du problème :

$$(PV) \begin{cases} \rho \langle \ddot{u}, v \rangle + a(u, v) = L(v) + \langle \sigma_n(u), v_n \rangle \quad \forall v \in V \\ \langle \sigma_n(u), v_n - u_n \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K. \\ u(x, 0) = u_0, \quad \dot{u}(x, 0) = u_1. \end{cases}$$



On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho \langle \ddot{h}^I, v \rangle + a(h^i, v) = L^i(v) + \langle \sigma_n(h^i), v_n \rangle \quad \forall v \in V \\ \langle \sigma_n(h^i), v_n - u_n^i \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K \end{cases}$$

qui provient des propriétés des solutions du problème  $(\mathbf{P1}^i)$ . À l'aide des fonctions  $h_*^I$  et  $u_*^I$ , on définit le problème précédent sur l'intervalle  $[0, T]$  comme suite<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \rho \int_0^T \langle \ddot{h}^I, v(t) \rangle dt + \int_0^T a(h_*^I, v(t)) dt = \int_0^T L_*^I(v(t)) dt + \int_0^T \langle \sigma_n(h_*^I), v_n(t) \rangle dt \\ \forall v \in L^1(0, T; V) \\ \int_0^T \langle \sigma_n(h_*^I), v_n(t) - u_{*n}^I \rangle dt \geq 0, \quad \forall v \in L^1(0, T; K) \end{cases}$$

tel que

$$L_*^I(v) = \int_{\Omega} f_*^I v dx + \int_{\Gamma_1} g_*^I v d\Gamma \quad \text{où } f_*^I(t) = f^i, g_*^I(t) = g^i \quad \text{sur } ]t_{i-1}, t_i].$$

Pour  $v(t) \in D(0, T; V)$  on a

$$\int_0^T \langle \ddot{h}^I, v(t) \rangle dt = - \int_0^T \langle \dot{h}^I, \dot{v}(t) \rangle dt \quad \text{au sens de } D'(0, T).$$

Et puisque

$$\begin{aligned} & \dot{h}^I \xrightarrow{*} \dot{u} \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \text{i.e } & \int_0^T \langle \dot{h}^I, g(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \dot{u}, g(t) \rangle dt \quad \forall g \in L^1(0, T, L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

et le fait que  $v(t) \in L^1(0, T, L^2(\Omega))$ , alors on peut passer à la limite sur  $I$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \dot{h}^I \dot{v}(t) dx dt & \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \dot{u} \dot{v}(t) dx dt, \\ \int_0^T a(h_*^I, v(t)) dt & \rightarrow \int_0^T a(u, v(t)) dt, \\ \int_0^T \int_{\Omega} L_*^I(v(t)) dx dt & \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} L(v(t)) dx dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\rho \int_0^T \langle \ddot{u}, v(t) \rangle dt + \int_0^T a(u, v(t)) dt = \int_0^T L(v(t)) dt + \lim_{I \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \sigma_n(h_*^I), v_n(t) \rangle dt \quad (3.81)$$

---

1. On définit ce problème pour pouvoir passer à la limite faible étoile  $u$ .

la forme :

$$\lambda_n : v_n(t) \rightarrow \rho \int_0^T \langle \ddot{u}, v(t) \rangle dt + \int_0^T a(u, v(t)) dt - \int_0^T L(v(t)) dt$$

définie une forme linéaire continue sur  $D(0, T; H^{1/2}(\Gamma_0))$ . Donc

$$\rho \int_0^T \langle \ddot{u}, v(t) \rangle dt + \int_0^T a(u, v(t)) dt = \int_0^T L(v(t)) dt + \int_0^T \langle \lambda_n, v_n(t) \rangle dt \quad \forall v \in D(0, T; V)$$

D'autre part

$$\int_0^T \langle \sigma_n(h_*^I), v_n(t) - u_{*n}^I \rangle dt \geq 0, \quad \forall v \in L^1(0, T; K)$$

donc

$$\int_0^T \langle \sigma_n(h_*^I), v_n(t) \rangle dt \geq \int_0^T \langle \sigma_n(h_*^I), u_{*n}^I \rangle dt \quad \forall v \in L^1(0, T; K).$$

D'où, on a d'après (3.81) pour  $v = u_*^I$  dans  $D'(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_0))$ , que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \lambda_n, v_n(t) \rangle dt &\geq \lim_{I \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \sigma_n(h_*^I), u_{*n}^I(t) \rangle dt \\ &\geq \lim_{I \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \langle \ddot{h}^I, u_*^I \rangle dt + \int_0^T a(h_*^I, u_*^I) dt - \int_0^T L_*^I(u_*^I) dt \right) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\int_0^T \langle \ddot{h}^I, u_*^I \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \ddot{u}, u \rangle dt \quad \text{au sens } D'(0, T)$$

et

$$\int_0^T a(h_*^I, u_*^I) dt = \int_0^T a(h_*^I - u_*^I, u_*^I) dt + \int_0^T a(u_*^I, u_*^I) dt$$

d'où d'après (3.70)

$$\int_0^T a(h_*^I - u_*^I, u_*^I) dt \rightarrow 0 \quad \text{au sens } D'(0, T)$$

et d'après la semi continuité de la norme définie par  $a(\cdot, \cdot)$ , on a

$$\lim_{I \rightarrow \infty} \int_0^T a(u_*^I, u_*^I) dt \geq \int_0^T a(u, u) dt$$

et

$$\int_0^T L_*^I(u_*^I) dt \rightarrow \int_0^T L(u) dt$$

Par conséquent

$$\int_0^T \langle \lambda_n, v_n(t) \rangle dt \geq \rho \int_0^T \langle \ddot{u}, u \rangle dt + \int_0^T a(u, u) dt - \int_0^T L(u) dt = \int_0^T \langle \lambda_n, u_n \rangle dt$$

d'où

$$\int_0^T \langle \lambda_n, v_n(t) - u_n \rangle dt \geq 0, \quad \text{dans } D'(0, T; K)$$

Enfin on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \int_0^T \langle \ddot{u}, v(t) \rangle dt + \int_0^T a(u, v(t)) dt = \int_0^T L(v(t)) dt + \int_0^T \langle \lambda_n, v_n \rangle dt \quad \forall v \in D(0, T; V) \\ \int_0^T \langle \lambda_n, v_n(t) - u_n \rangle dt \geq 0, \quad \forall v \in D(0, T; K) \end{array} \right.$$

**Remarque 31** *Sous conditions de régularité, on peut avoir  $\lambda_n = \sigma_n(u)$ .*

**Théorème 32** *Soit  $u$  la limite présenté par le théorème 27 Alors  $u$  vérifier le condition initial 3.5.*

**Preuve.** D'après le corolaire 28

$$l^I \rightarrow u \quad \text{en } C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Alors, comme  $l^I(0) = u_0$  pour tout  $I$ , nous pouvons passer à la limite et obtenir que :

$$u(0) = u_0.$$

En outre, puisque :

$$\dot{h}^I \rightarrow \dot{u} \quad \text{en } C_s([0, T]; L^2(\Omega)),$$

Alors

$$\int_{\Omega} \dot{h}^I(0) v dx \rightarrow \int_{\Omega} \dot{u}(0) v dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Êtant donné que  $\dot{h}^I(0) = u_1$  pour tout  $I$  il est conclu que :

$$\int_{\Omega} \dot{u}(0) v dx = \int_{\Omega} u_1 v dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

et les conditions initiales sont satisfaites. ■

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté un résultat d'existence du problème dynamique de Signorini sans frottement d'un corps élastique homogène et isotrope. On a établi un résultat d'existence au sens faible. Parmi les questions rencontrées sont celles liées à la régularité de la solution et à l'unicité de la solution. On a une autre question liée aux extensions du problème et l'étude du même problème mais cette fois-ci avec frottement. Et d'autres questions liées au matériau :

- élastique non-linéaire.
- anisotrope.
- non-homogène.

# Bibliographie

- [1] M. T. C. Rial, Contacter des problèmes avec élasticité dynamique, Mémoire de Doctoral, Universidade de Santiago de Compostela.
- [2] J. Droniou, Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles, 20/04/2001.
- [3] H. Brézis, Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Masson, 1983.
- [4] T.J.R. Hughes, The finite element method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice-Hall, 1987.
- [5] J.L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, 1969.
- [6] J.L. Lions et E. Magenes, problèmes aux limites non homogènes et applications, 1, Dunod, 1968.
- [7] J. Simon, Compact sets in the space  $L^p(0; T; B)$ . Annali di Matematica Pura ed Applicata, 146, no 1, pages 65 – 96, (1987).
- [8] R. A. Adams. Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.
- [9] L. Schwartz, Théorie des distributions, Paris, Hermann, t. I, 1950, (2<sup>e</sup> édition, 1957) ; t.II, 1951.
- [10] L. Schwartz, Les travaux de Garding sur les problèmes de Dirichlet, Séminaire Bourbaki, mai 1952.
- [11] G. Duvaut, J.L.Lions, Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod 1972.
- [12] J. L. Lions. Cours d'analyse numérique, Hermann, 1973.
- [13] J. A. C. Martins y J.T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal friction and interface laws. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 11, pages 407–428, (1987).

- [14] Newmark, N. M. (1959) A method of computation for structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 85 (EM3) 67-94.
- [15] A. Capatina, *Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement*. 10/2011, Bucuresti, ISSN 0250 3638.
- [16] Nécas, Jarusek et Haslinger, On the solution of the variational inequality to the signorini problem with small friction, *Boll. U.M.I.* 5(17B), 796-811 (1980).
- [17] Y.Kato, Signorini problem with friction in linear elasticity, *Japan J. Appl. Math.*, 4, 237-268 (1987).
- [18] J.Jarusek, Contact Problem with Bounded Friction : Coercive case, *Czechoslovak Math. J.*,33(108), 237-261 (1983).
- [19] R. Hassani, P.Hild et I.Ionescu, Sufficient conditions of non-uniqueness for the Coulomb friction problem.*Math. Meth. Appl. Sci.* 2004 ; 27 :47-67.
- [20] G.Fichera, Problemi elastostatici convincoli unilaterali : il problema di signorini con am-  
bigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei Ser.*, VIII(7), 91-140 (1964).
- [21] Eck et Jaruöek, Existence results for the static contact problem with Coulomb friction, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8, 445-468 (1998).
- [22] I. Figueiredo and L. Trabucho, A class of contact and friction dynamic problems in thermoe-  
lasticity and in thermoviscoelasticity, *Int. J. Engng. Sci.*, 33(1) (1995), 45–66
- [23] K. L. Kuttler and M. Shillor, Dynamic bilateral contact with discontinuous friction coefficient, *Nonlinear Anal.*, 45 (2001), 309–327
- [24] K. L. Kuttler and M. Shillor (2004), Regularity of solutions for dynamic frictionless contact problems with normal compliance, preprint.
- [25] K. L. Kuttler, M. Shillor and J. R.z (2003), Existence and regularity for dynamic vis-coelastic adhesive contact with damage.
- [26] M. Shillor, M. Sofonea and J. J. Telega, “Models and Analysis of Quasistatic Contact”, Springer,

- [27] W. Han and M. Sofonea, “Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity,” AMS and International Press, 2002.
- [28] M. Cocu, Existence of solutions of a dynamic Signorini’s problem with nonlocal friction in viscoelasticity, *Z. angew Math. Phys. (ZAMP)*, 53 (2002), 1099-1109.
- [29] j-C. Eck and J. Jarusek, The solvability of a coupled thermoviscoelastic contact problem with small Coulomb friction and linearized growth of frictional heat, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 22 (1999), 1221–1234
- [30] J. Jarusek, Dynamic contact problems with small Coulomb friction for viscoelastic bodies, Existence of solutions, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 9(1) (1999), 11-34
- [31] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, Dynamic frictionless contact with adhesion, *Z. angew Math. Phys. (ZAMP)*, 55 (2004), 32–47.
- [32] K. L. Kuttler and M. Shillor, Set-valued pseudomonotone maps and degenerate evolution inclusions, *Commun. Contemp. Math.*, 1 (1999), 87–123.
- [33] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, vol II, Theory of plates*, North-Holland, Amsterdam,(1997).

## Résume:

Le but de ce mémoire est d'établir un théorème d'existence de solution d'un problème dynamique de Signorini sans frottement dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle linéaire.

**Les mots clés:** Problème dynamique, Signorini, sans frottement, élasticité.

## الملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول لمسألة Signorini في الحالة الديناميكية بدون احتكاك في إطار مرونة ثلاثية الأبعاد الخطية. **الكلمات المفتاحية:** مسأله ديناميكيه, Signorini, بدون احتكاك, المرونة.

## abstract

The purpose of this paper is to establish an existence theorem of solution of a dynamic Signorini problem without friction in the three-dimensional linear elasticity.

**Key word :** Dynamic problem, Signorini, frictionless, elasticity.