UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :Hammadi Dalila

Thème

Calcul fractionnaire et ses applications aux problèmes aux limites

Soutenu publiquement le : 24/05/2017

Devant le jury composé de :

Mr.Kouidri Mohammed	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Mr.Ben cheikh Abdelkrim	M.A. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Mr.Mohamed El-Hadi Mezabia	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Mr.Ali Meche	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère,

A mon cher père qui m'ont toujours soutenu,

Qui m'ont aide à affronter les difficultés,

A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.

A mes très chères soeurs et mon frère.

A toute ma famille.

A tous les amis.

A tous les étudiants d'université de KASDI Merbah - Ouargla.

A tous.

Remerciement

Avant tout nous remercions Allah tout puissant de nous avoir accordé la force,

En premier lieu , je tient à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant , de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .

Je tient à exprimer mon profond respect , et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire , **Monsieur : Ali Meche** , pour ces conseils , et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .

Je remercier sincèrement les membres du jury :

Monsieur : Kouidri Mohammed , d'avoir accepté la présidence du jury .

Monsieur : Mohamed El-Hadi Mezabia , d'avoir accepté la examinateur du jury .

Monsieur : Ben cheikh Abdel Krim , d'avoir accepté la examinateur du jury .

Aussi je remercier vivement , mon professeur :

Docteur : Mohamed amine Bahayou d'avoir accepté l'examinateur de ce travail .

Je les remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail .

Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père , ma mère , mon frère et mes soeurs , qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de KASDI Merbah - Ouargla.

Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donnés .

Merci à tous ceux qui ont contribué , de prés ou de loin , à l'aboutissement de ce travail .

Hammadi dalila

Table des matières

Notations

➤ $\mathbb{R}$: corps des réels .

➤ $R-L$: Riemann-Liouville.

➤ $\|.\|$:la norme.

➤ D_a^{α} : Dérivée fractionnaire de R-L.

➤ ${}^{c}D_a^{\alpha}$: Dérivée fractionnaire de Caputo.

➤ $|.|$: semi norme.

➤ $\mathcal{L}$: transformée de Laplace.

➤ AC :absolument continuer.

➤ $\Gamma(x)$: fonction Gamma.

➤$\beta(p,q)$: fonction Bêta.

➤ I_a^{α} : intégrale fractionnaire.

➤ $M-L$: Mittag-Leffler.

Introduction

La théorie du calcul fractionnaire est un sujet presque aussi vieux que le calcul différentiel et remonte aux temps où Leibniz,Gauss,Newton ont développé les fondements de ce type de calcul (Voir les références),mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le. Le calcul fractionnaire est devenu une importante branche de mathématiques grâce à son immense application dans différents domaine tels que la physique, la chimie, l'ingénierie, finance et d'autre sciences qui ont été développé dans la dernière décennie, en plus de l'intérêt que lui portent beaucoup de chercheur en mathématiques elle même a des applications dans **Espace des fonctions intégrables**

Dans le premier chapitre nous donnons quelques notions préliminaires essentielles, utilisées dans la dérivation fractionnaire.

Le chapitre deuxième, contient plusieurs définitions et propriétés de l'intégration et la dérivation de différents types d'ordre fractionnaire, nécessaires dans les chapitres suivants dans ce travail.

Dans le troisième chapitre on présente quelques résultats d'existences et d'unicité de solutions du problème aux limites pour des équation différentielles d'ordre fractionnaire.On considère les deux problème suivants :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t))\text{pour tout} \;\; t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1$$

$$ay(0) + by(T) = c,$$

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t))\text{pour tout} \;\; t \in J = [0, T], 1 < \alpha \leq 2$$

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T.$$

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelque outils de base

1.1.1 Espaces des fonction intégrables

Définition 1.1.1 *Soient $\Omega = (a, b)(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infinie de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$.*

1. *pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^P(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonction f réelles sur Ω telles que f est mesurable et*

$$\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$$

2. *pour $p = \infty$,l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonction mesurables f bornées presque partout $(p.p)$ sue Ω*

Théorème 1.1.1 *Soit $\Omega = (a, b)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.*

1. *pour* $1 \leq p < \infty$, *l'espace* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p)^{1/p}$$

2. *L'espace* $L^\infty(\Omega)$ *e st un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = \inf M \geq 0 : |f(x)| \leq M \quad p.p \ sur \ \Omega$$

Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.1.2 ([1]) *Soit* $\Omega = [a,b](-\infty \leq a < b \leq \infty)$ *et* $n \in \mathbb{N} = 0.1...$ *On désigne par* $C^n(\Omega)$ *l'espace des fonctions* f *qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à* n *continues sur* Ω, *muni de la norme :*

$$\|f\|_{c^n} := \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_c := \max_{x\in\Omega} |f^{(k)}(x)| \quad n \in \mathbb{N}$$

En particulier si $n = 0, C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ *L'espace des fonctions* f *continues sur* Ω *muni de la norme :*

$$\|f\|_c := \max_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Définition 1.1.3 ([1]) *Soit* $\Omega = [a,b](-\infty < a < b < \infty)$ *un intervalle fini. On désigne par* $AC([a,b])$*l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables,c'est à dire :*

$$AC([a,b]) = \left\{ f/\exists\varphi \in L([a,b]) : f(x) = c + \int_a^b \varphi dt \right\}$$

et on appelle $AC([a,b])$ *l'espace des fonctions absolument continues sur* $[a,b]$

Définition 1.1.4 ([1]) *pour* $n \in \mathbb{N} = 0,1,...,$ *on désigne par* $AC^n([a,b])$ *l'espace des fonctions* f *ayant des dérivées jusqu'à l'ordre* $(n-1)$ *continues sur* $[a,b]$ *telles que* $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$ *c'est à* $AC^n([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \ \ et \ \ f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}$ *En particulier* $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$

1.2 Éléments de calcul fractionnaire

1.2.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section,nous présentons les fonction Gamma,Bêta et Mittag-Leffler,Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

la fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$.la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt,$$

avec$\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty, \Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$, une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = [-e^{-t}t^z]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n! \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

La fonction Bêta

Définition 1.2.1 *La fonction $B(p,q)$ est la fonction Bêta (on intégrale eulérienne de première espèce), définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}dx \quad p > 0, q > 0.$$

On a une égalité exprimant le lien entre l'intégrale eulérienne de première et seconde espèce :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}; Re(p) > 0; Re(q) > 0.$$

1.2.2 Intégrale fractionnaire

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approcher de Riemann pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, l'intégrale de Riemann-Liouville.

Définition 1.2.2 *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $h \in L^1[a,b]$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$;est définie par :*

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

où Γ est la fonction Gamma. lorsque $a = 0$ nous écrivons $I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t)$ où $\varphi_\alpha(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0 . \varphi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$, et $\varphi_\alpha \to \delta$ quand $\alpha \to 0$.

Théorème 1.2.1 *pour $h \in C[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe.*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta h(t)) = I_a^{\alpha+\beta} h(t) \quad pour \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

Propriétés 1.2.1 *Nous avons les propriétés suivantes :*

i) $I_a^0 h(t) = h(t)$

ii) L'opérateur intégral I_a^0 est linéaire.

Exemple 1.1 *Soit $h(t) = (t-a)^m$*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha h(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^m ds. \end{aligned}$$

A l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)x$ on obtient.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha h(t) =& \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (1-x)^{\alpha-1} x^m dx \\ =& \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, m+1) \\ =& \frac{(t-a)^{m+\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+m+1)} \end{aligned}$$

D'où

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(t-a)^{m+\alpha}$$

1.2.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

Approche de Grunwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies. La dérivée de Grunwald- Letnikov d'ordre αest définie par

$$(D_{a^+}^\alpha f)(t) := \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh).$$

Les coefficients binomiaux avec des signes alternatifs pour des valeurs positives de n sont définis comme

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

Pour le calcul des coefficients binomiaux on peut utilisés la relation entre la fonction Gamma d'Euler et la factorielle, définie comme

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-\alpha+1)}$$

La dérivée de Grunwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de $h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f(t-jh)$. permet d'approximer la dérivée fractionnaire sur IR (de Liouville). Par contre les inconvénients de cette approche sont sa difficulté technique pour faire les calculs, les preuves et les grandes restrictions sur les fonctions [40].

Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.2.3 *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$,alors la dérivée fractionnaire d'ordre α $(avec n-1 \leq \alpha < n)$ au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}f(t) =& \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds \\ =& \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}f(t)) \end{aligned}$$

1.3 Quelques théorèmes de point fixe

Pour les applications ultérieures, nous avons besoin de théorèmes de point fixe suivants :

Théorème 1.3.1 *(Banach)([2])*
Soient X un espace de Banach,et $A : X \to X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique. i.e $\exists! u \in X$ tel que $Au = u$.

Théorème 1.3.2 *(Schauder)([1])*
Soit (E,d) un espace métrique complet, soit X une partie convexe et fermé de E, et soit $A : X \to X$ une application telle que l'ensemble $Ax : x \in X$ est relativement compacte dans E. Alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.3.3 *(Schaefer)([2, 5])*
Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur complètement continu.Si

l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda Au = u, \textit{pour un certain} \lambda \in]0,1[\ \}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.3.4 *(Ascoli-Arzelà)([5])*
Soit A un sous ensemble de $C(J,E), A$ est relativement compacte dans $C(J,E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$\|f(x)\| \leq k \qquad \textit{pour tout } x \in J \textit{ et tout } f \in A,$$

ii) L'ensemble A est équicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2 < \delta \Longrightarrow \|f(t_1 - ft_2)\| \leq \varepsilon \textit{ pour tout } t_1, t_2 \in J \textit{ et tout } f \in A,$$

iii) Pour tout $x \in J$ l'ensemble $f(x), f \in A \subset E$ est relativement compacte.

1.4 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace intervient dans la résolution des équations et des systèmes différentiels.

Définition 1.4.1 ([9]) *La transformée de Laplace d'une fonction f de la variable réelle $t \in \mathbb{R}_+$ est définie par :*

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \quad s \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

$f(t)$ est appelée l'originale de $\mathcal{L}f(s)$.
la transformée de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale (1.1) est convergente, pour cela l'originale doit être d'ordre expontiela, c'est-à-dire : il existe $M > 0$ tel que :

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \textit{pour} t > T \tag{1.2}$$

Dans ce cas la transformée de Laplace existe pour $Re(s) > a$.

l'originale $f(t)$ est appelée la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}f)(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\mathcal{L}f(s)ds, \quad c > a$$

Proposition 1.1 ([1]) *La transformée de Laplace est linéaire i.e.*

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=0}^{n} c_i f_i(t)\right)(s) = \sum_{i=0}^{n} c_i \mathcal{L}f_i(s) \tag{1.3}$$

Définition 1.4.2 *Lorsque le produit $f(x-t)g(t)$ est intégrable sur tout intervalle $[0,x]$ de $\mathbb{R}^+$, le produit de convolution de $fetg$ est définie par :*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt \tag{1.4}$$

Proposition 1.2 ([1]) *Si les transformées de Laplace de f et g existent, alors la transformée de Laplace du produit de convolution vérifie :*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) \bullet \mathcal{L}g(s) \tag{1.5}$$

Proposition 1.3 *La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction f est donnée par :*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^{n-k-1}f^{(k)}(0^+) = s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^k f^{()n-k-1}(0^+) \tag{1.6}$$

1.5 Espace L^P

En analyse, les espaces L^p sont des espaces de fonction dont la puissance P-iéme est intégrable, au sens de Lebesgue.

Définition 1.5.1 ([7]) *Soit $\Omega =]a,b[(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intérvalle borné ou non borné de $\mathbb{R}$. pour $1 \leq p < \infty$; on définit l'espace L^p comme suit :*

1. *pour* $1 \leq p < \infty, L^p(\Omega)$ *est l'espace des fonctions mesurables de puissance* p^{ime} *intégrables sur* Ω *c'est-à-dire :*

$$f \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty, \quad f mesurable \tag{1.7}$$

$\|f\|_p = (\int |f|^p dx)^{1/p}$ *est une norme sur* $L^p(\Omega)$

$(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ *est un Banach.*

2. *pour* $p = 2$ *alors :*

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : f \quad \textit{mesurable à carré intégrable sur} \quad \Omega, \int_\Omega f^2(x)dx < \infty \right\}$$

$$\left(L^2(\Omega) : \langle .,. \rangle_{L^2(\Omega)}\right) \qquad \textit{est un Hilbert,on} \quad \langle .,. \rangle_{L^2(\Omega)}$$

est le produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x).g(x)dx \; \forall f, g \in L^2(\Omega) \tag{1.8}$$

3. *pour* $p = \infty, L^\infty(\Omega)$ *est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur* Ω.

Définition 1.5.2 *f est dite essentiellement bornée sur $\Omega s'il \exists M > 0$ telle que,*

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{M \leq 0; |f(x)| \leq M, \; p.p \; sur \quad \Omega\} \tag{1.9}$$

$(L^\infty(\Omega), \|.\|_\infty)$ *est un Banach.*

Chapitre 2

Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse dont l'étude se rapporte aux opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier.

Dans ce chapitre, on donne les différentes définition de la dérivée fractionnaire.

2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.1.1 *Soit*$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,*l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par R-L)d'ordre* α*d'une fonction* f *est définie par :*

$$\mathcal{J}_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, x > a \tag{2.1}$$

pour $(-\infty \leq a < x < \infty)$.

pour $\alpha = 0, ona$ *:*

$\mathcal{J}_a^0 := I$*(l'opérateur identité)*

pour$\alpha = n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{J}_a^\alpha$*coïncide avec l'intégrale répétée n-fois de la forme :*

$$(\mathcal{J}_a^\alpha f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \tag{2.2}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{2.3}$$

Exemple 2.1 *Soit* $f(x) = (x-a)^c$*avec* $c > -1$,*alors*

$$\mathcal{J}_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)}(x-a)^{\alpha+c} \tag{2.4}$$

En effet,

$$\mathcal{J}_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^c dt,$$

En utilisant le changement de variable et la fonction Bâta on obtient :

$$t - a = S(x-a), 0 \leq s \leq 1 \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_a^\alpha f(x) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [x-a-s(x-a)]^{\alpha-1} s^c (x-a)^{c+1} ds \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+c} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^c ds \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha}(x-a)^{\alpha+c} \qquad \beta(\alpha, c+1)
\end{aligned}$$

$\mathcal{J}_a^\alpha f(x) = \dfrac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)}(x-a)^{\alpha+c}$
dans le cas $a = 0$ *on a :*

$$\mathcal{J}_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} x^{\alpha+c}$$

Théorème 2.1.1 *si* $f \in L^1[a,b]$ *et* $\alpha > 0$,*alors* $\mathcal{J}_a^\alpha f(x)$*existe pour presque tout* $x \in [a,b]$*et on a :*

$$\mathcal{J}_a^\alpha f \in L^1[a,b]$$

Preuve. Soit $f \in L^1[a,b]$,on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-t)\varphi_2(t)dt$$

avec

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & pour, 0 < u \leq b-a \\ 0 \quad pour, u \in \mathbb{R}\backslash(0, b-a] \end{cases}$$

et

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} f(u), & a \leq u \leq b \\ 0, & \mathbb{R}\backslash[a, b] \end{cases}$$

par construction. $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R})$ pour $j \in 1, 2$,et on a :$\mathcal{J}_a^\alpha f \in [a, b]$. ∎

Théorème 2.1.2 *Soit $\alpha > 0$ et soit $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite des function continues uniformément convergente sur $[a, b]$,alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la limite comme suit :*

$$(\mathcal{J}_a^\alpha \lim_{k\to\infty} f_k)(x) = (\lim_{k\to\infty} \mathcal{J}_a^\alpha f_k)(x)$$

en particulier,la suit $(\mathcal{J}_a^\alpha f_k)_{k=1}^{\infty}$ est uniformément convergente.

Preuve. Soit f la limite de la suite (f_k),il est claire que $f$est continue,et on a l'estimation :

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_a^\alpha f_k(x) - \mathcal{J}_a^\alpha f(x)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\alpha (x-t)^{\alpha-1} |f_k(t) - f(t)| dt \\ \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_k - f\|_\infty (b-a)^\alpha \end{aligned}$$

d'où,la convergence uniforme lorsque $k \to \infty$,pour $x \in [a, b]$ ∎

Théorème 2.1.3 *Soit $\alpha, \beta > 0$,pour toute fonction $f \in L^1[a, b]$,on a :*

$$\mathcal{J}_a^\alpha \mathcal{J}_a^\beta f(x) = \mathcal{J}_a^{\alpha+\beta} f(x) = \mathcal{J}_a^\beta \mathcal{J}_a^\alpha f(x) \tag{2.6}$$

pour presque tout $x \in [a, b]$,et $f \in C[a, b]$,alors(2.6) est vraie pour toutx $\in [a, b]$.

Preuve. Soit $f \in L^1[a, b]$,on a :

$$\mathcal{J}_a^\alpha \mathcal{J}_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_\tau^x (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau dt$$

D'après le théoréme(**??**)les intégrales existent et par le théoréme de Fubini on a :

$$\mathcal{J}_a^\alpha \mathcal{J}_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1} dt d\tau$$

En utilisant le changement de variable on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_a^\alpha \mathcal{J}_a^\beta f(x) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\alpha-1} ds d\tau \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} d\tau \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = \mathcal{J}_a^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}$$

presque par tout sur$[a, b]$.

si$f \in C[a, b]$, alors $\mathcal{J}_a^\alpha f \in C[a, b]$et par suite $\mathcal{J}_a^\alpha \mathcal{J}_a^\beta f \in C[a, b]$, et aussi :$\mathcal{J}_a^{\alpha+\beta} f \in C[a, b]$ ■

Lemme 2.1.1 *Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et$f \in L^1(0, b)$pour tout$b > 0$,alors la transformée de Laplace de l'intégral fractionnaire de R-L est formulée comme suit :*

$$\mathcal{L}(\mathcal{J}_0^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L} f(s) \tag{2.7}$$

Preuve. On peut écrire $\mathcal{J}_a^\alpha f$ comme une convolution de deux fonction $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$$\mathcal{J}_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t)$$

Alors

$$\mathcal{L}[\mathcal{J}_0^\alpha f](s) = \mathcal{L}\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s).\mathcal{L} f(s)$$

comme,

$$\mathcal{L}[x^{\alpha-1}](s) = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}$$

d'où le résultat. ■

2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1 *pour $\alpha \in \mathbb{R}_+ etn \in \mathbb{N}^* tel\ que\ n-1 \leq \alpha < n$, le dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d' ordre α d'une fonction $f$et définie par :*

$$D_a^\alpha f(x) := D^n \mathcal{J}_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, x > 0 \tag{2.8}$$

où $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$
En particulier,

1. *pour $\alpha = 0$,on a :*

$$D_a^0 f(x) = D\mathcal{J}_a^1 f(x) = If(x) \tag{2.9}$$

2. *pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$on a :*

$$D_a^m f(x) = D^{m+1} \mathcal{J}_a^{m+1-m} f(x) = D^{m+1} \mathcal{J}_a^1 f(x) = D^m f(x) \tag{2.10}$$

Ainsi pour $\alpha \in \mathbb{N}$,la dérivée fractionnaire de R-L coincide avec la dérivée usuelle.

Exemple 2.2 *Soit $f(x) = (x-a)^\nu$ avec $\nu > -1$ et$\alpha \leq 0$ et tel que $n-1 \leq \alpha < n$, D'après(2.5)on a :*

$$D_a^\alpha f(x) = D^n \mathcal{J}^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-(\alpha-\nu)} \tag{2.11}$$

pour le cas,$(\alpha - \nu) \in \mathbb{N}$on a :

$$D_a^\alpha f(x) = 0, (\alpha-\nu) \in 1, 2, ...n \tag{2.12}$$

par ailleurs is $(\alpha - \nu) \notin \mathbb{N}$, on a :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} (x-a)^{\nu-\alpha} \tag{2.13}$$

Proposition 2.1 *Soit $\alpha > 0$ et$n = [\alpha]+1$ alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$on a :*

$$D_a^\alpha f(x) = D^m \mathcal{J}_a^{m-\alpha} f(x), m > \alpha \tag{2.14}$$

Preuve. comme $m \geq n$,on a :

$$\begin{aligned} D^m \mathcal{J}_a^{m-\alpha} f(x) =& D^n D^{m-n} \mathcal{J}_a^{m-n} \mathcal{J}_a^{n-\alpha} f(x) \\ =& D^n \mathcal{J}_a^{n-\alpha} f(x) \\ =& D_a^\alpha f(x) \end{aligned}$$

car $D^{m-n} \mathcal{J}_a^{m-n} = I$ ■

Théorème 2.2.1 ([9]) *Soient f et g deux fonction dont les dérivées fractionnaire de R-L existent,pour $c_1 etc_2 \in \mathbb{R}$,on a :*

$$D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 D_a^\alpha f(x) + c_2 D_a^\alpha g(x) \tag{2.15}$$

Remarque 2.1 ([6]) *Supposons que $f \in C(0,1) \cap L(0,1)$ tel que $D^\alpha f \in C(0,1) \cap L(0,1)$ alors :*

$$\mathcal{J}^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k t^{\alpha - x}, C_k \in \mathbb{R}, n = [\alpha] + 1 \tag{2.16}$$

Lemme 2.2.1 *Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a,b]$,alors l'égalité :*

$$D_a^\alpha \mathcal{J}_a^\alpha f(x) = f(x) \tag{2.17}$$

et vraie pour presque tout $x \in [a,b]$

Preuve. En utilisant la définition(2.2.1)on a :

$$D_a^\alpha \mathcal{J}_a^\alpha f(x) = D^n \mathcal{J}_a^{n-\alpha} \mathcal{J}_a^\alpha f(x) = D^n \mathcal{J}_a^n f(x) = f(x)$$

■

Théorème 2.2.2 *Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n-1 \leq \alpha < n, m-1 \leq \beta < m$ tel que $n, m \in \mathbb{N}^*$ alors :*

1. *Si*$\alpha > \beta > 0$,*alors pour* $f \in L^1[a,b]$ *l'égalité :*

$$D_a^{\beta}(\mathcal{J}_a^{\alpha} f)(x) = \mathcal{J}_a^{\alpha-\beta} f(x) \tag{2.18}$$

est presque partout sur $[a,b]$.

2. *S'il existe une fonction* $\varphi \in L^1[a,b]$ *tel que* $f = \mathcal{J}_a^{\alpha}\varphi$,*alors :*

$$\mathcal{J}_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(x) = f(x) \tag{2.19}$$

pour presque tout $x \in [a,b]$.

3. *pour* $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$. *si les dérivées fractionnaire* $D_a^{\alpha} f$ *et* $D_a^{k+\alpha} f$ *existes,alors :*

$$D^k(D_a^{\alpha} f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x) \tag{2.20}$$

4. *Si* $\beta \geq \alpha > 0$ *et la dérivée fractionnaire* $D_a^{\beta-\alpha} f$ *existe,alors :*

$$D_a^{\beta}(\mathcal{J}_a^{\alpha} f)(x) = D^{\beta-\alpha} f(x) \tag{2.21}$$

Preuve. En utilisant la définition(2.2.1)et la relation(2.6)on obtient :

1. pour $\alpha > \beta > 0$,alors $n \geq m$,on a :

$$\begin{aligned} D_a^{\beta}(\mathcal{J}_a^{\alpha} f)(x) =& D^n \mathcal{J}_a^{n-\beta}(\mathcal{J}_a^{\alpha} f)(x) \\ =& D^n(\mathcal{J}_a^{n+\alpha-\beta} f)(x) \\ =& D^n \mathcal{J}_a^{n}(\mathcal{J}_a^{\alpha-\beta} f)(x) \\ =& \mathcal{J}_a^{\alpha-\beta} f(x) \end{aligned}$$

presque pour tout $x \in [a,b]$

2. Par la relation(2.17)on obtient :

$$\mathcal{J}_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(x) = \mathcal{J}_a^{\alpha}(D_a^{\alpha}\mathcal{J}_a^{\alpha}\varphi(x)) = \mathcal{J}_a^{\alpha}(\varphi(x)) = f(x)$$

3. on a :

$$
\begin{aligned}
D^k[D_a^\alpha f(x)] =& D^k D^n \mathcal{J}^{n-\alpha} f(x) \\
=& D^{k+n} \mathcal{J}_a^{n-\alpha+k-k} f(x) \\
=& D^{k+n} \mathcal{J}_a^{k+n-(\alpha+k)} f(x) \\
=& D_a^{k+\alpha} f(x)
\end{aligned}
$$

d'où la résultat.

4. on a :

$$D_a^\beta(\mathcal{J}_a^\alpha f)(x) = D^m \mathcal{J}_a^{m-\beta}(\mathcal{J}_a^\alpha f)(x) = D^m \mathcal{J}_a^{m-(\beta-\alpha)} f(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x)$$

existe pour $i-1 \leq \beta-\alpha < i$ et $i \leq m$ ■

Théorème 2.2.3 *Si $f \in L^1[a,b], b>0$,la transformée de R-L de f est :*

$$\mathcal{L}(D_0^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(x)]_{t=0} \tag{2.22}$$

avec $n-1 < \alpha < n$,cette transformée de Laplace est bien connue.

Preuve. Par la définition (2.2.1),on trouve,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(D_a^\alpha f)(s) =& \mathcal{L}(D^n \mathcal{J}_0^{n-\alpha} f)(s) \\
=& s^n \mathcal{L}(\mathcal{J}_0^{n-\alpha} f)(s) - \sum_{n=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k(\mathcal{J}_0^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \\
=& s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{n=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k(\mathcal{J}_0^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0}
\end{aligned}
$$

■

2.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

On donne une définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo.

Définition 2.3.1 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction f et donnée par :*

$$^cD_a^\alpha f(x) := \mathcal{J}_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t), x > a \tag{2.23}$$

avec $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 2.3 *Soit $f(x) = (x-a)^\gamma$ avec $\gamma > 0$, pour $0 < \alpha \leq 1$ et utilisant le changement de variable(2.5) on a :*

$$\begin{aligned}
^cD_a^\alpha f(x) =& \mathcal{J}_a^{1-\alpha} f'(x) \\
=& \gamma \mathcal{J}_a^{1-\alpha} (x-a)^{\gamma-1} \\
=& \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-a)^{\gamma-1} dt \\
=& \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha+\gamma} \int_0^1 s^{\gamma-1} (1-s)^{-\alpha} ds \\
=& \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha+\gamma} \beta(\gamma, 1-\alpha) \\
^cD_a^\alpha f(x) =& \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)} (x-a)^{-\alpha+\gamma}
\end{aligned}$$

Théorème 2.3.1 *Soient $\alpha \leq 0, n = [\alpha] + 1$ si f possède $n-1$ dérivées en a et si $D_a^\alpha f$ existe,alors :*

$$^cD_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \tag{2.24}$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

Preuve. D'après la définition on a :

$$\begin{aligned}
&D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \\
&\qquad = D^n \mathcal{J}_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \\
&\qquad = \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-a)} D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]\\
=&\int_a^x\frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]dt\\
=&-\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha}\left[Df(t)-D\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k(x-t)^{n-\alpha}\right]_{t=a}^{t=x}\\
&+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha}\left[Df(t)-D\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]dt
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k\right]\\
=&\mathcal{J}_a^{n-\alpha+1}D\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k\right]
\end{aligned}$$

de la même façon pour n-fois alors :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(a)}}{k!}(x-a)^k\right]\\
=&\mathcal{J}_a^{n-\alpha+n}D^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(a)}}{k!}(x-a)^k\right]\\
=&\mathcal{J}_a^{n}\mathcal{J}_a^{n-\alpha}D^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(a)}}{k!}(x-a)^k\right]
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ et une polynôme de degré $n-1$, alors :

$$\mathcal{J}_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(a)}}{k!}(x-a)^k\right]=\mathcal{J}_a^{n}\mathcal{J}_a^{n-\alpha}D^nf(x)$$

Donc

$$\begin{aligned}
D_a^{\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]=&D^n\mathcal{J}^n\mathcal{J}_a^{n-\alpha}D^nf(x)\\
=&\mathcal{J}_a^{n-\alpha}D^nf(x)\\
=&{}^cD_a^{\alpha}f(x)
\end{aligned}$$

pour presque tout $x \in [a, b]$. ■

Corollaire 2.1 ([9]) *Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$ si ${}^cD_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha f$ existent, on suppose que $D^k f(a) = 0$ pour tout $k \in 0, 1, ..., n-1$, alors :*

$$ {}^cD_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x) \tag{2.25}$$

Théorème 2.3.2 *Si $f \in C[a, b]$ et si $\alpha > 0 (n - 1 < \alpha \leq n)$, alors :*

$$ {}^cD_a^\alpha \mathcal{J}_a^\alpha f(x) = f(x) \tag{2.26}$$

Preuve. Soit $g = \mathcal{J}_a^\alpha f$ et par le corollaire précédent($D^k f(a) = 0$,pour $k \in 0, 1, ..., n-1$) et d'après l'égalité (2.17), on a :

$$ {}^cD_a^\alpha \mathcal{J}_a^\alpha f = {}^cD_a^\alpha g = D_a^\alpha g = D_a^\alpha \mathcal{J}_a^\alpha f = f$$

■

Théorème 2.3.3 *Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $[a, b]$, telles que ${}^cD_a^\alpha f_1$ et $D_a^\alpha f_2$ existent presque partout. De plus, soient c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$ alors,${}^cD_a^\alpha(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ existe presque partout sur $[a, b]$, et on a :*

$$ {}^cD_a^\alpha(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \ {}^cD_a^\alpha f_1 + c_2 \ {}^cD_a^\alpha f_2 \tag{2.27}$$

Théorème 2.3.4 *Si $f \in C[a, b]$, pour tout $b > 0$, alors, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de f est :*

$$\mathcal{L}({}^cD_a^\alpha)(s) = s^\alpha (\mathcal{L} f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+) \tag{2.28}$$

Preuve. Pour $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*, x > 0$ alors :

$$ {}^cD_a^\alpha f(x) = \mathcal{J}_0^{n-\alpha} f^{(n)}(x)$$

Donc, d'après

$$\begin{aligned}\mathcal{L}({}^cD_a^\alpha)(s) =& \mathcal{L}(\mathcal{J}_0^{n-\alpha} f^{(n)})(s)\\ =& s^{n+\alpha}(\mathcal{L}f^{(n)})(s)\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}({}^cD_a^\alpha f)(s) = s^\alpha(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+)$$

■

Chapitre 3

Problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites du premier ordre, pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire .

$$^cD^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), pour\ tout\ t \in J = [0, T],\ 0 < \alpha < 1 \tag{3.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c, \tag{3.2}$$

Où $^cD^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo,$f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.
Puis, nous examinerons le problème aux limites suivant :

$$^cD^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), t \in J := [0, T], 1 < \alpha \leq 2, \tag{3.3}$$

$$y(0) = y_0,\ y(T) = y_T, \tag{3.4}$$

Où f est comme dans le problème $(3.1 - 3.2)$
Pour le premier problème on présentera deux résultats d'existence, le premier est basé

sur le théorème de point fixe de Banach et le second sur le théorème de point fixe de Schaefer, ces résultats sont dus à Benchohra et Al [8]. Pour le deuxième problème nous présenterons un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe de Schauder pour plus de détails voir [2]

3.1 PROBLÈME AUX LIMITES DANS LE CAS $0 < \alpha < 1$

3.1.1 Existence et d'unicité de solutions

On commence par la définition d'une solution du problème $(3.1 - (3.2)$

Définition 3.1.1 *Une fonction* $y \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ *est dite solution du problème* $(3.1)-(3.2)$ *si* y *satisfait l'équation* ${}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ *sur* J *et la condition* $ay(0) + by(T) = c$. *Pour l'existence de la solution du problème* $(3.1) - (3.2)$, *on a besoin du lemme suivant :*

Lemme 3.1.1 *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et soit* $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Une fonction* y *est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds \tag{3.5}$$

si et seulement si y *est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^cD_a^\alpha y(t) = h(t), t \in [0,T] \tag{3.6}$$

$$y(0) = y_0 \tag{3.7}$$

Lemme 3.1.2 *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et soit* $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Une fonction* y *est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c\right] \tag{3.8}$$

si et seulement si y *est la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in [0,T] \tag{3.9}$$

$$ay(t) + by(T) = c \tag{3.10}$$

Preuve. D'après le lemme(3.1.1) on a

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Il reste à vérifier les conditions aux limites, on a

$$y(T) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

or

$$ay(0) + by(T) = c,$$

par suite

$$ay(0) + by(0) + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds = c, \quad \text{avec} \quad a + b \neq 0,$$

c'est à dire

$$y(0) = \frac{1}{a+b} \left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right],$$

et on obtient (3.8) Ce qui achève la démonstration. On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème $(3.1) - (3.2)$, en utilisant le théorème de contraction de Banach ■

Théorème 3.1.1 *Supposons que :* $(H1)$ *il existe une constante* $K > 0$ *telle que :*

$$|f(t,u) - f(t,\bar{u})| \leq K|u - \bar{u}| \quad \textit{pour tout } t \in J, \textit{et tout } u, \bar{u} \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{KT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{3.11}$$

alors,le problème $(3.1) - (3.2)$ *admet une solution unique sur* $[0, T]$

Preuve. On va transformer le problème $(3.1)-(3.2)$ en problème de point fixe.considérons l'opérateur.

$$F : C([0,T], \mathbb{R}) \longrightarrow C([0,T], \mathbb{R})$$

défini par :

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds - c \right] \tag{3.12}$$

il est clair,que les point fixe de l'opérateur F sont les solution du problème $(3.1)-(3.2)$.F est bien défini,on effet :si $y \in C([0,T])$, alors,$(Fy) \in C([0,T],\mathbb{R})$. pour montrer que F admet un point fixe,il suffit de montrer que F est une contraction,en effet :si $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$. Alors,pour tout $t \in J$. On a :

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \\
& + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \\
\leq & \frac{K\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
& + \frac{|b|K\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\
\leq & \frac{KT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

et par suite

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \frac{KT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_\infty.$$

En vertu de (3.11) on peut déduire que F est une contraction, et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème $(3.1)-(3.2)$. ∎

Notre deuxième résultat pour le problème $(3.1)-(3.2)$ est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 3.1.2 *Supposons que*

$(H2)$ *La fonction* $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue*

$(H3)$ *il existe une constante* $M > 0$ *telle que* $|f(t,u)| \leq M$ *pour tout* $t \in J$, *et tout* $u \in \mathbb{R}$.

alors, le problème $(3.1)-(3.2)$. *admet au moins une solution sur* $[0;T]$ *:*

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F défini par (3.12) admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1 : F est continue.

Soit y_n une suite dans $C([0,T],\mathbb{R})$ convergente pour la norme $\|.\|_\infty$ vers une limite y, c'est à dire :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|y_n - y\|_\infty = 0.$$

Il faut montrer que $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0$. pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\
& + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\
& + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\
\leq & \frac{\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|b|}{|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds\right] \\
\leq & \frac{T^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

Puisque f est continue alors,

$$\|Fy_n(t) - Fy(t)\| \leq \frac{T^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \to 0 \ quand \ n\to\infty,$$

d'où la continuité de F.

Etape 2 : l'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $C([0,T],\mathbb{R})$. En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$,il existe une constante positive l telle que pour tout $y \in B_{\eta^*}, B_{\eta^*} = y \in C([0,T],\mathbb{R}) \quad : \|y\|_\infty \leq \eta^*$, on a $\|F(y)\|_\infty \leq l$. par $(H3)$

on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
& + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\leq & \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|},
\end{aligned}$$

donc

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} := l$$

et par suite $F(B_{\eta^*})$ est borné.

Etape 3 : L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinue de $C([0, T], \mathbb{R})$. Soient $t_1, t_2 \in (0, t], t_1 < t_2, B_{\eta^*}$ un ensemble borné de $C([0, T], \mathbb{R})$ et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_1) - F(y)(t_2)| \leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1} \right] ds \\
& + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} ds \\
\leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha \\
\leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha)
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_{12}$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où la continuité de F. . D'après l'étape 2 et 3 et le théorème d'Ascoli-Arzélà $F(B_{\eta^*})$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*} c'est à dire F est complètement continu, et d'après l'étape 1, F est continu. Par conséquent $F : C([0, T], \mathbb{R}) \to C([0, T], \mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Etape 4 : Maintenant, il reste à montrer que $\varepsilon = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{pour} 0 < \lambda < 1\}$ est borné.Soit $y \in \varepsilon$, alors $y = \lambda F(y)$ pour $0 < \lambda < 1$. Donc,pour chaque $t \in J$. On a :

$$y(t) = \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right] \right],$$

alors,d'après ($h3$), et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
& + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\leq & \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|},
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in [0, t]$ on a

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} := \mathbf{R}$$

Cela montre que e est borné. Comme une conséquence du théorème de point fixe de Schaefer. On déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème(3.1)$-$(3.2). ■

3.2 PROBLÈME AUX LIMITES DANS LE CAS $1 < \alpha \leq 2$

3.2.1 Existence et d'unicité de solutions

Dans cette section on est concerné par l'existence des solutions du problème $(3.3) - (3.4)$. On commence par donner la définition d'une solution du problème $(3.3) - (3.4)$.

Définition 3.2.1 *Une fonction $y \in C(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème $(3.3) - (3.4)$ si y satisfait (3.3) et (3.4).*

Soit $h : C[0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), \ \ t \in J, \ \ 1 < \alpha < 2 \tag{3.13}$$

On note le problème $(3.13) - (3.4)$ par (LP)

Pour l'existence de la solution, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.1 *Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t,s)h(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)}{T}t, \tag{3.14}$$

si et seulement siy est une solution de (LP), où $G(t,s)$ est la fonction de Green définie par

$$G(t,s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t(T-s)^{\alpha-1}}{T}, & 0 \leq s \leq t \leq T; \\ \frac{-t(T-s)^{\alpha-1}}{T}, & 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases} \tag{3.15}$$

Remarque 3.1 *la fonction $t \in J \to \int_0^T |G(t,s)|ds$ est continue sur J, et est donc bornée.Soit*

$$\hat{G} = \sup \left\{ \int_0^T |G(t,s)|ds, t \in J \right\}$$

Preuve. Supposons que y satisfait (3.13),alors

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds.$$

Par (3.4),on a

$$y(0) = y_0,$$

et

$$y(T) = y_0 + c_1 T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds,$$

donc

$$c_1 = -\frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds + \frac{y_T - y_0}{T}.$$

c'est à dire

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t ((t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1})h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T -\frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{y_T - y_0}{T}t.$$

par suite, on trouve l'équation (3.14). Inversement, si y satisfait l'équation (3.14). alors l'équation $(3.13) - (3.4)$ est vérifiée.

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe de Schauder. ■

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d' ordre fractionnaire de Caputo ce résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe,en particulier on a utilisé le théoréme de point fixe de Banach,Schaefer,et Schauder.

Bibliographie

[1] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[2] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Applications,Fixed Point Theorems Spring- Verlag, New York, 1986.

[4] H.R, Brézis.G,Stampacchia. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, France : Bull.Soc.Math., 1968.

[5] J. Hale and S. Verduyn Lunel, Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] J. Wang, H. Xiang, and Z. Liu, Position solution to nonzero boundary values problem for a couped system of nonlinear fractional differential equations, Volume 2010, 1-12.

[7] K. B.Oldam, J.Spanier, The fractional calculus, Academic Press. Inc (1974).

[8] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, boundary value problèmes for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[9] M.Wellbeer, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their, Analytical Bockground, D. Univ Braunschweig, (2010).

[10] R, Scholz. : Numerical Solution of the Obstacle Problem by Penalty Method. Math.Comp 32.p294-306.(1984).

[11] R.P. Agarwal, M. Benchohra, J.Nieto et A.Ouhab, Fractional Differential Equations and Inclusions , Springer 2010.