UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par :Kradou Samiya

Théme

Problèmes aux limite pour équations différentielles d'ordre fractionnaire

Soutenu publiquement le :24/05/2017

Devant le jury composé de :

Mr.**Ben cheikh Abdelkrim**	M. A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.**Mammeri Mohammed**	M. A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Abassi Hocin**	M. A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Kouidri Mohammed**	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2016/2017

Dédication

Je dédie cette mémoire...

A ma très chére mère Massaouda

Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence la source de tendresse et l'exemple du dévouément qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.
Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études.
Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.
Ta as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.
Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour.
Puisse Dieu,le tout puissant ,te préserver et t'accorder santé ,longue vie et bonheur.

Cher à mon père Abd El Hakim

Aucune dédicace ne saurait exprime l'amour ,l'estime ,le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.
Rien au monde ne vaut les efforts fr-mis jou et muit pour mon éducation et mon bien être.
Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A ma très chére sœur Amina ,son Mari Samih et sa jeune fille Layan.

A mes frères Mohammed ,Djilali et Ayachi.

A mes sœurs Aicha et Maryam.

A ma grand mère mater nulle ma fatma

A tous les membres de famille KRADOU, petite et grands.

A tous mes amies

Remerciement

Je tiens en premier lieu à rends grâce à "Dieu" qui lui a été créé grâce à ce travail et remercier Monsieur Kouidri Mohammed, qui a dirigé cette mémoire. Grâce à ces incessants conseils et son information et inaltérable motivation cette formation par et pour à la recherche a été des plus passionnantes.

Mes remerciements vont egalement à Monsieur : Ben cheikh Abdelkrim, d'avoir accepté d'être président du jury de cette mémoire.

Mes remerciement vont aussi à Monsieur : Abassi Hocin et Monsieur : Mammeri Mohammed pour leur participation au jury.

Je voudrais remercier tous les professeurs des mathématiques à l'université de Kasdi Merbah Ouargla.

Je voudrais remercier tous les professeurs qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir.

Un grand merci aux toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail.

Pour finir c'est un grand merci au mes parents et toutes mes amis, ma famille, proches ou non des mathématiques.

Table des matières

Notations

$\|.\|$ sa norme.

$B(x_0, r)$: la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r :

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.

$(M.d)$: espace métrique.

$d(.,.)$: application de distance.

$c([a.b])$: l'espace des fonctions continues

Ω : un ensemble ouvert borné .

$\overline{B}$: la boule unité fermée

$(E, \|\|\|)$: un espace banach

T : application continue

$I^p(f(t))$: $(p \in \mathbb{R})$, l'intégration non entière d'ordre p de la fonction $f(t)$.

τ : variable

s : opérateur de Laplace.

r : rayon.

$\Gamma(.)$: la fonction Gamma.

$\beta(.,.)$: la fonction Bêta.

$\langle , \rangle$: produit scalaire.

${}^{R}C^p(f(t))$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$.

${}^{c}C^p(f(t))$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $p > 0$.

Introduction

Les équations différentielle d'ordre fractionnaire sont révélées récemment des outils précieux dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. En effet, nous pouvons trover de nombreuses d'applications en viscoélasticité, électrochimie, contrôle, média poreux, électromagnétiques,...ect. Pour les documents remarquables traitant de l'opérateur integral et de l'opérateur différent de l'ordre fractionnaire arbitraire,(voir[8,9]). Il ya eu un développement important dans les équations différentielles fractionnées au cours des dernières années. Certains résultats pour les inclusions différentielles fractionnares peuvent être trouvées dans le livre par Plotnikov.très récemment, une théorie de base pour le problème de valeur initiale des équations différentielles fractionnelles impliquant l'opérateur différent de Riemann-Liouville a été discutée par Vatsala [10, 11, 12]. Certains résultats d'existence ont été données pour le problème

$$^{c}D^{p}y(t) = f(t, y(t)), \ \ pour\ tout\ t \in J = [0, T], 0 < p < 1$$

$$ay(0) + by(T) = c,$$

Dans cette mémoire nous présentons les résultats d'existence pour le problème précédent. Dans le chapitre 3, section 1, nous donnons deux résultats, un basé sur le théorème de point fixe de Banach et un autre basé sur le théorème de point fixe Schaefer, et un exemple pour démontre l'application de nos principaux résultats. Ces resultats peuvent être considérés comme une contribution à ce domaine émergent. Certaines indications sur les problèmes non local

$$^{c}D^{p}y(t) = f(t, y(t)), \ \ pour\ tout\ t \in J = [0, T], 0 < p < 1$$

$$y(0) + g(y) = y_0$$

sont données dans la section 2.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématique de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformes un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transforme sont ainsi les solutions du problème donné.
Dans ce chapitre on aborde quelque théorème du point fixe qui nos aides sur existence et unicité des solutions d'équations différentielles fractionnaires.

1.1 Théorème du point fixe

1.1.1 Théorème du point fixe de Banach

Définition 1 *Soit T une application d'un ensemble X dans luis même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.*

Le théorème du point fixe le plus élémentaire le plus utilisé est le principe de contraction de Banach. Pour cela nous commençons par une présentation de ce principe ainsi qu'un certain nombre de généralisations de ce résultat.

Théoréme 2 *[4] (**Principe de contraction de Banach**)*
Soit (M,d) un espace métrique complet et soit $F : M \longrightarrow M$ une application contractante i.e qu'il existe $0 < k < 1$ telle que

$$d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M,$$

Alors F admet un point fixe $u \in M$ de plus pour tout $x \in M$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = u$$

et

$$d(F^n, u) \leq \frac{k^n}{1-K} d(x, F(x))$$

Preuve. D'abord, on montre l'unicité. On suppose que il existe $x, y \in M$ avec

$$x = F(x); y = F(y)$$

et

$$d(x,y) = d(F(x), F(y)) \leq kd(x,y).$$

Puisque $0 < k < 1$ alors la dernier inégalité implique que $d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$, alors $\exists! x \in M$ tel que

$$F(x) = x$$

Maintenant, on preuve l'existence de x où $x \in M$. On suppose que $F^n(x)$ est une suite de Cauchy où $n \in \{0, 1, ...\}$

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq kd(F^{n-1}(x), F^n(x)) \leq .... \leq k^n d(x, F(x))$$

Si $m > n$ où $n \in \{0, 1, ...\}$

$$\begin{aligned}
d(F^n(x), F^m(x)) &\leq d(F^n(x), F^{n+1}(x)) + d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) + ... + (F^{m-1}(x), F^m(x)) \\
&\leq k^n d(x, Fx) + k^{n+1} d(x, Fx) + ... + k^{m-1} d(x, F(x)) \\
&\leq k^n d(x, F(x)) \left[1 + k + k^2 + ...\right] \\
&\leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x))
\end{aligned}$$

Pour $m > n; n \in \{0, 1, ...\}$ on a

$$d(F^n(x), F^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)) \tag{1.1}$$

alors $F^n(x)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet X en suite alors il existe $u \in X$ avec

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} F^n(x) = u$$

De plus par la continuité de F

$$u = \lim_{n \longrightarrow \infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} F(F^n) = F(u)$$

Alors u est un point fixe de F. Finalement, $m \longrightarrow \infty$ in (1.1), on obtient

$$d(F^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x))$$

■

Exemple 3 *Considérons l'application* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *défini par* $A(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$, *alors* A *une contraction avec* $0 < k = \frac{1}{2} < 1$, *et admet comme point fixe* $x = 2$ *de plus*

$$\lim\{A^n(x)\}_{n=1}^{\infty} = 1$$

Remarque : Les conditions du théoréme sont nécessaires, pour s'en convaincre consdérons les exemples suivants .

Exemple 4 $A : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $A(x) = \frac{x}{2} + 1$ *,est contractante mais n'admet pas de point fixe. Le probléme est que* $A([0, 1]) \subsetneq [0, 1]$ *et on ne peut pas itérer :* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, *mais* x_3 *n'est pas déifni !*

Exemple 5 $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *;* $A(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ *vérifie* $|A(x) - A(y)| < |x - y|$ *pour tout* $x \neq y$, *mais n'admet pas de point fixe. Le probléme est que* A *n'est pas contractante, et pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$ *on obtient* $x_n \longrightarrow +\infty$

1.1.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Définition 6 *Soient* $N \geq 1$, $R > 0$ *et* $f \in C(B_R, B_R)$ *avec* $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq R\}$. *(on muni* $\mathbb{R}^N$ *d'une norme notée* $\|.\|$*) Alors* f *admet un point fixe, c'est-à-dire :*

$$\exists y \in B_R \text{ tel que : } f(y) = y.$$

Le théorème de point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité del'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même.

Théorème 7 ***(Théorème du point fixe de Brouwer)***
Soit B_n *la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^N$. *La boule* B_n *a la propriété du point fixe pour tout* $n \in N^*$.

1.1.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théoréme 8 ***(Théorème du point fixe de Schauder)***
Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit X et partie convexe et fermé de E, et soit $T : X \longrightarrow X$ une application telle que l'ensemble $Tx : x \in X$ est relativement compacte dans E. Alors T possède au moins un pont fixe.

Preuve. Soit $T : X \to X$ une application continue. Comme X est compact, alors T est uniformément continue. Donc pour ε fixé, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in X$, on a :

$$\| x - y \| \leq \delta \Longrightarrow \| T(x) - T(y) \| \leq \varepsilon,$$

de plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent X ; c'est-à-dire, $K \subset \bigcup\limits_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$.
Si on pose $L := vect(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.
Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : X \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} 0 & si \parallel x - x_j \parallel \geq \delta \\ \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & si\ non \end{cases}$$

Il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle en dehors. On a donc, pour tout $x \in X$, $\sum\limits_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et par la suite on peut définir sur X les fonctions continues positives φ_j par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum\limits_{k=1}^{p} \psi_k(x)},$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in X$.
Posons maintenant, pour $x \in K$,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j).$$

La fonction g est continue (somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans X^* (car g est un barycentre des $T(x_j)$).
Si on prend la restriction $g/X^* : X^* \to X^*$, (d'après le théorème de Brouwer) g possède un point fixe $y \in X^*$. De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \Big(T(y) - T(x_j) \Big). \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\| y - x_j \| < \delta$, et par suite $\| T(y) - T(x_j) \| < \varepsilon$. Donc, on a pour tout j

$$\begin{aligned} \| T(y) - y \| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \| T(y) - T(x_j) \| \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier , m on peut trouver un point $y_m \in X$ tel que

$$\| T(y_m) - y_m \| \leq 2^{-m}.$$

Et puisque X est compact, alors de la suite $(y_m)_{m\in}$ on peut extraire une sous suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in X$. Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$, c'est-à-dire y^* est un point fixe de T sur X. ■

1.1.4 Théorème du point fixe de Schaefer

Théorème de Schaefer est en fait un cas particulier d'un théorème de plus grande portée découvert auparavant par Schauder et Leray. Il s'énonce ainsi :

Théoréme 9 ***(Théorème du point fixe de Schaefer)***
Soit T une application continue et compacte d'un espace localement convexe séparé E dans lui-même, telle que l'ensemble

$$\{x \in E/\exists\lambda \in]0,1[, x = \lambda T(x)\}$$

soit borné. Alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, il existe $x \in E$ tel que $x = \lambda T(x)$.

Preuve. .
On considére $C = \overline{B}(0)$ où $r > 0$ est donné par la condition du bord. considérons la rétraction ρ de E dans C qui est définie par :

$$\rho(x) = x \ si \ x \in C$$

et

$$\rho(x) = \frac{r}{\|x\|}x \ si \ \|x\| > r$$

et notons $f_*(x) = \rho o f, f_* : C \longrightarrow C$. comme f_* est compact, par le théorème de Schauder il existe $x \in C$ tel que $f_*(x) = x$.
Montrons que $f(x) \in C$ car dans ce cas $f_*(x) = f(x)$ et on aura la conclusion.
Si $f(x) \notin C$ alors $x = f_*(x) = \dfrac{r}{\|f(x)\|}f(x)$ et on a d'une part

$$\|x\| = \left\| \frac{r}{\|f(x)\|} f(x) \right\| = r$$

et d'autre part

$$f(x) = \frac{\|f(x)\|}{r}x = \lambda x$$

avec $\lambda > 1$, ce que est contradictoire. ■

1.1.5 Théorème d'Arzela-Ascoli

Rappelons que dans espace métrique un sous-ensemble est relativement compact si son adhérence est un ensemble compact.

Théoréme 10 ***(Théorème d'Arzela-Ascoli)***
Soit (K, d) un espace métrique compact, $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $A \subset C(K, E)$.

Alors A est relativement compact dans $(C(K,E), \|.\|_{\infty,K})$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :
(a) *A est équicontinue, c-à-d*
pour tout $x \in K$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage $V \subset K$ de x tel que

$$\|f(x) - f(y)\| < \epsilon \forall y \in V, \forall f \in A.$$

(b) *Pour tout $x \in K$, l'espace $A(x)$ définie par*

$$A(x) = \{f(x), f \in A\}$$

est relativement compact dans E.

Preuve. Supposons que A est relativement compact.
Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre fini $f_i \in A$ tel que, pour tout $f \in A$ il existe un indice i pour lequel

$$\|f - f_i\|_{\infty,K} \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Notons I_0 l'ensemble finie de ces indice. Alors d'une part, pour tout $x \in K$,

$$\|f(x) - f_i(x)\|_{\infty,K} \leq \frac{\epsilon}{3}$$

c-à-dire

$$A(x) \subset \cup_{i \in I_0} \overline{B_{\epsilon/3}(f_i(x))}$$

et par conséquent $A(x)$ est relativement compact dans E.
D'autre part, soit V un voisinage de x tel que, pour tout $y \in V$ on ait

$$\|f(x) - f_i(y)\|_{\infty,K} \leq \frac{\epsilon}{3}$$

pour tout $i \in I_0$. On aura alors que pour tout $y \in V$ et pour tout $f \in A$,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \epsilon$$

Supposons maintenant **(a)** et **(b)**. Notons V_x le voisinage de x donné par **(a)**.
Comme $K \subset \cup_{x \in K} V_x$ et K est compact, on peut extraire un nombre fini $x_1, x_2, ..., x_m$ telle que $K \subset \cup_{i=1}^{m} V_x$.

Par **(b)** $A(x_i)$ est relativement compact, la réunion finie $\cup_{i=1}^{m} A(x_i)$ l'est aussi et on peut alors trouver dans cette réunion un nombre fini de points $c_1 ... c_n$ telle que

$$\cup_{i=1}^{m} A(x_i) \subset \cup_{j=1}^{n} B_{\epsilon/4(c_j)}$$

Notons par φ une application quelconque de $\{1, ..., m\}$ dans $\{1, ..., n\}$. Il ya seulement un nombre finie de telles applications, Notons

$$L_{\varphi} := \{f \in A, \forall i \in \{1, ..., m\}, \|f(x_i) - c_{\varphi(i)}\| \leq \epsilon/4\}.$$

Alors $A \subset \cup_{\varphi} L_{\varphi}$ et puisque $\|f - g\|_{\infty,k} \leq \epsilon$ pour tout $f, g \in L_{\varphi}$, on conclut. ■

Chapitre 2

Éléments de calcul fractionnaire

2.1 Outils de base

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Bêta. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie de calcul fractionnaire.

2.1.1 Fonctions utiles

La fonction Gamma :

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 11 *Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Gamma est donnée par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

(cette intégrale convergente pour tout $x > 0$).
En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \forall x > 0$$

En particulier

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

La fonction Bêta :

Définition 12 *Soit $x, y > 0$, la fonction Bêta est une fonction définie par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante

$$\forall x, y > 0, \text{ on a } B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

2.2 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intervalle

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

plus généralement le n^{ime} itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt \tag{2.1}$$

Pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riémann rendu compte que la second membre de (2.1) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suite :

Définition 13 *si $f \in C[a, b], \alpha \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale*

$$I^p_{a^+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-t)^{p-1}f(t)dt \text{ telle que } a \in]-\infty, +\infty[$$

est appelée intégrale fractionnaire (á gauche) de Riemann-Liouville d'ordre p.

$$I_{b^-}^p f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_b^x (x-t)^{p-1} f(t)dt \text{ tel que } b \in]-\infty, +\infty[$$

est appelée intégrale fractionnaire (á droite) de Riemann-Liouville d'ordre p.

Théoréme 14 *Pour $f \in C[a,b]$ integrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe :*

$$I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta} f(x)] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x), \alpha, \beta > 0$$

2.3 La dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivée fractionnaires, elle ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville et Caputo qui sont les plus utilisées.

2.3.1 Dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 15 *Soit F une fonction intégrable sur $[a;t[$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned} {}_a^R D^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-p} f(t)). \end{aligned}$$

(avec $\tau = a + x(t-a)$)

Exemple 16 .

1. ***La dérivée non entiére d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville.***
   En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a

$$ {}_a^R D^p C = \frac{c}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}$$

2. ***La dérivée de $f(t)=(t-a)^\alpha$ au sens de Riemann-Liouville.***

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$ alors an a :

$$ {}_a^R D^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau $$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$ \begin{aligned} {}_a^R D^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^\alpha ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) B(n-p, \alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \end{aligned} $$

Par exemple ${}_0^R D^{0.5} t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$

2.3.2 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Définition 17 *Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et une fonction f donnée sur l'intervalle $[a,b]$, la dérivées fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :*

$$ \begin{aligned} {}^c D^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p}(\frac{d^n f(t)}{dt^n}) \end{aligned} $$

(avec $\tau = a + x(t-a)$)

Remarque 18 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $]n-1, n[$ s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $n-\alpha$ suivit d'une dérivation classique d'ordre n, alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemple 19 .

1. ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo***
   La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle
$$^{c}D^{p}C = 0$$

2. ***La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Caputo***
   Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a
$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}$$
   d'où
$$^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \tag{2.2}$$
   effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient
$$\begin{aligned} ^{c}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{a}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}, \end{aligned}$$

2.4 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo :

Théoréme 20 *Soit $p \geq 0, n = [p]+1$, si f posséde $n-1$ dérivée en a et si $^{R}D_{a}^{p}$ existe alors :*
$$^{c}D_{a}^{p}f(x) =^{R} D_{a}^{p}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}]$$
pour presque tout $x \in [a,b]$.

Preuve. D'après la définition on a :

$$
\begin{aligned}
{}^{R}D_a^p[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] &={}^R D^n I_a^{n-p}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-p-1}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k]dt \\
&= \frac{-1}{\Gamma(n-p+1)}[(x-t)^{n-p}(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k)]_a^x \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-p+1)}\int_a^x (x-t)^{n-p}[D(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k)]dt \\
&= I_a^{n-p+1}D[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k]
\end{aligned}
$$

de même façon pour n fois alors :

$$
I_a^{n-p}D[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k] = I_a^{n-p}I_a^n D^n[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k]
$$

Or $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$ alors :

$$
\begin{aligned}
I_a^{n-p}D[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k] &= I_a^{n-p}I_a^n D^n f(x) \\
&= D^n I_a^{n-p}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k] \\
&= D^n I_a^n I_a^{n-p} D^n f(x) \\
&= I_a^{n-p} D^n f(x) \\
&={}^c D_a^p f(x)
\end{aligned}
$$

■

Remarque 21 *d'apres le relation on remarque que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire de reste dans le développement de Taylor de f.*

2.5 Lemmes fondamentaux

Lemme 1 *Soit* $p > 0$ *alors l'équation différentielles*

$$^{c}D^{p}f(t) = 0$$

admet les solutions
$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1, n = [p] + 1$

Preuve. Supposons que

$$^{c}D^{p}f(t) = 0$$

d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient

$$I^{n-p}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) = 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^t (t-s)^{n-p-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n} f(s)ds = 0.$$

puisque $\frac{1}{\Gamma(n-p)} \neq 0$, on a

$$\int_0^t (t-s)^{n-p-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n} f(s)ds = 0,$$

et par suite

$$I^{n-p-1} * f^{(n)}(s) = 0.$$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité

$$L(I^{n-\alpha-1} * f^{(n)}(t))(p) = L(0)(p) = 0$$

Posant $F(p) = L(f)(p)$ on obtient

$$\frac{\Gamma(n-p)}{p^{n-p}}\left(p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f(k-1)(0)\right) = 0$$

alors

$$p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0) = 0.$$

donc

$$F(p)=\sum_{k=1}^{n} p^{-k} f^{(k-1)}(0).$$

appliquant maintenant la transformée inverse de Laplace :

$$L^{-1}(f(p))(t)=L^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p^{-k} f^{(k-1)}(0)\right)(t)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0) L^{-1}(p^{-k})(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0).\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}, \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $i=k-1$ on trouve

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} t^{i}.$$

Pour $c_i=\dfrac{f^{i}(0)}{i!}$ on a

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^{i}$$

supposons maintenant que

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^{i}$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo au deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{p} f(t) &=^{c} D^{p}\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^{i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^{c} D^{p} t^{i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-p}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} t^{i} \end{aligned}$$

puisque $(0 \leq i \leq n-1 < n)$ on a

$$^{c}D^{p}f(t) = 0$$

ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 2 *Soit* $p > 0$, *alors*

$$I^{p c}D^{p}f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, ..., n-1, n = [p] + 1.$

Preuve. On a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo

$$^{c}D^{p}f(t) = I^{n-p}f^{(n)}(t),$$

On applique l'opérateur de l'intégral fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned}
I^{p c}D^{p}f(t) &= I^{p}I^{n-p}f^{(n)}(t) \\
&= I^{n RL}D^{n}f(t) \\
&= f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \lim_{t \to 0} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} I^{n-n}f(t) \\
&= f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} f(t)\right)(0) \\
&= f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} f^{(n-j)}(0).
\end{aligned}$$

par le changement de variable $k = n - j$ on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{p c}D^{p}f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)t^k}{k!} \\
&= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^1 t^k}{k!} \\
&= f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k t^k}{k!}.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

3.1 Problème aux limite du premier ordre

Dans ce section, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limite du premier ordre, pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

$$^{c}D^{p}y(t) = f(t, y(t)),\ \textit{pour tout}\ t \in J = [0, T], 0 < p < 1 \tag{3.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c, \tag{3.2}$$

Où $^{c}D^{p}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

3.1.1 Existence de solutions

Commençons par définir ce que nous entendons par une solution de problème (3.1)-(3.2).

Définition 22 *une fonction $y \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ est dite solution de* (3.1)-(3.2) *si y satisfait l'équation $^{c}D^{p}y(t) = f(t, y(t))$ sur J, et la condition $ay(0) + by(T) = c$.*

Pour l'existence de la solution du problème (3.1)-(3.2), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3 *Soit* $0 < p < 1$ *et soit* $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continuer. Une fonction* y *est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s) ds \tag{3.3}$$

si et seulement si y *est une solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire.*

$$^cD^p y(t) = f(t), t \in [0, T],$$

$$y(0) = y_0.$$

Lemme 4 *Soit* $0 < p < 1$ *et soit* $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuer. Une fonction* y *est une solution de l'équation fractionnaire*

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s) ds \\ & - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} f(s) ds - c \right]. \end{aligned}$$

si et seulement si y *est une solution du fractionnaire PVL (problèmes de valeur limite)*

$$^cD^p y(t) = f(t), t \in [0, T],$$

$$ay(0) + by(T) = c.$$

Preuve. D'après le lemme (3) on a

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s) ds$$

Il reste à vérifier les conditions aux limites, on a

$$y(T) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} f(s) ds$$

or

$$ay(0) + by(T) = c$$

par suite

$$ay(0) + by_0 + \frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} f(s) ds = c; \ \ avec\ a + b \neq 0$$

c'est à dire

$$y(0) = \frac{1}{a+b}[c - \frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} f(s) ds],$$

et on obtient (3.3). Ce qui achève la démonstration. ■

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (3.1)-(3.2), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théoréme 23 *Suppose que*
(H1) Il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|f(t,u) - f(t,\overline{u})| \leq k|u - \overline{u}|, \ \ pour\ tout\ t \in J, \ \ et\ tout\ u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

si

$$\frac{kT^p \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(p+1)} < 1 \tag{3.4}$$

Alors le problème (3.1)-(3.2) admet une solution unique sur $[0,T]$.

Preuve. On va transformez le problème $(3.1)-(3.2)$ en un problème de point fixe, considérez l'opérateur

$$F : C([0;T], \mathbb{R}) \longrightarrow C([0,T], \mathbb{R})$$

défini par

$$\begin{aligned} F(y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, y(s)) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} f(s, y(s)) ds - c \right]. \end{aligned}$$

Il est clair, que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème $(3.1)-(3.2)$. F est bien définie, en effet : si $y \in C([0,T], \mathbb{R})$, alors, $F(y) \in C([0,T], \mathbb{R})$. Nous utiliserons le principe de contraction de Banach pour montrer que F défini par (3.5) admet un point fixe. Nous montrons que F est une contraction. Soit $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(p)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{p-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} ds \\
&+ \frac{|b|k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(p)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{p-1} ds \\
&\leq \left[\frac{kT^p(1+\frac{|b|}{|a+b|})}{p\Gamma(p)} \right] \|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \left[\frac{kT^p(1+\frac{|b|}{|a+b|})}{p\Gamma(p)} \right] \|x-y\|_\infty.$$

Par conséquent par (3.4) F est une contraction. En conséquence du théorème du point fixe de Banach, on déduit que F admet un point fixe qui est une solution du probblème $(3.1)-(3.2)$. ■

Le deuxième résultat est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théoréme 24 *Suppose que.*
(H2) La fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue.*
(H3) Il existe une constante $M > 0$ *telle que*

$$|f(t,u)| \leq M \text{ pour tout } t \in J \text{ et tout } u \in \mathbb{R}.$$

En suit, le PVL admet au moins une solution sur $[0,T]$.

Preuve. On va utiliserons le théorème du point fixe de Schaefer pour prouver que F défini par (3.5) admet un point fixe. La preuve se fait en plusieurs étapes.

Étape 1 : F est continu.

Soit y_n une suite dans $C([0,T],\mathbb{R})$ convergente pour la norme $\|.\|_\infty$ vers une limite y, c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n - y\|_\infty = 0.$$

Il faut montrer que $\lim_{n\to\infty}\|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0$. Pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&|F(y_n)(t) - F(y)(t)| \\
&\qquad \leq \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\qquad + \frac{|b|}{\Gamma(p)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{p-1}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\qquad \leq \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\qquad + \frac{|b|}{\Gamma(p)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{p-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\qquad \leq \frac{\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(p)}\left[\int_0^t (t-s)^{p-1}ds + \frac{|b|}{|a+b|}\int_0^T (T-s)^{p-1}ds\right] \\
&\qquad \leq \frac{\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)T^p\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{p\Gamma(p)}.
\end{aligned}$$

d'où la continuité de F. puisque f est une fonction continue, alors

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \leq \frac{\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)T^p\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(p+1)} \longrightarrow 0 \ quand\ n \longrightarrow \infty.$$

Étape 2 : L'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $C([0,T],\mathbb{R})$. En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe une constant positive ℓ telle que pour tout $y \in B_{\eta^*} = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}); \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$, on a $\|F(y)\|_\infty \leq \ell$. Par (H3) on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}|f(s,y(s))|ds\\&+\frac{|b|}{\Gamma(p)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{p-1}|f(s,y(s))|+\frac{|c|}{|a+b|}\\&\leq \frac{M}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}ds+\frac{|b|M}{\Gamma(p)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{p-1}ds+\frac{|c|}{|a+b|}\\&\leq \frac{M}{p\Gamma(p)}T^P+\frac{|b|M}{p\Gamma(p)|a+b|}T^P+\frac{|c|}{|a+b|}.\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\Gamma(p+1)}T^P+\frac{|b|M}{\Gamma(p+1)|a+b|}T^P+\frac{|c|}{|a+b|}:=\ell,$$

et par suite $F(B_{\eta^*})$ est borné.

Étape 3 : L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinu de $C([0,T],\mathbb{R})$.

Soit $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2, B_{\eta^*}$ être un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ comme à l'étape 2, et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors

$$\begin{aligned}|F(y)(t_2)-F(y)(t_1)| &= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{p-1}-(t_1-s)^{p-1}]f(s,,y(s))ds\\&+\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{p-1}f(s,,y(s))ds\\&\leq \frac{M}{\Gamma(p)}\int_0^{t_1}[(t_1-s)^{p-1}-(t_2-s)^{p-1}]ds\\&+\frac{M}{\Gamma(p)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{p-1}ds\\&\leq \frac{M}{\Gamma(p+1)}[(t_2-t_1)^p+t_1^p-t_2^p]+\frac{M}{\Gamma(p+1)}(t_2-t_1)^p\\&\leq \frac{M}{\Gamma(p+1)}(t_2-t_1)^p+\frac{M}{\Gamma(p+1)}(t_1^p-t_2^p).\end{aligned}$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où la continuité de F.

D'aprés l'étape 2 et 3 et le théorème d'Arzelà-Ascoli $F(B_{\eta^*})$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*}, c'est à dire F est complément continu.

Par conséquent $F : C([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.
Étape 4 : Limites a priori
Maintenant, il reste à montrer que l'ensemble

$$\varepsilon = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \textit{ pour quelque } 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.
soit $y \in \varepsilon$, alors $y = \lambda F(y)$ pour quelque $0 < \lambda < 1$. Donc, pour chaque $t \in J$ nous avons

$$\begin{aligned} y(t) = \lambda \Bigg[& \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s,y(s))ds \\ & - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (t-s)^{p-1} f(s,y(s))ds - c \right] \Bigg]. \end{aligned}$$

Alors, d'après (H3), et pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned} |F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |f(s,y(s))| ds \\ &+ \frac{|b|}{\Gamma(p)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{p-1} |f(s,y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} ds \\ &+ \frac{|b|M}{\Gamma(p)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{p-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \frac{M}{p\Gamma(p)} T^p + \frac{M|b|}{p\Gamma(p)|a+b|} T^p + \frac{|c|}{|a+b|}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{p\Gamma(p)} T^p + \frac{M|b|}{p\Gamma(p)|a+b|} T^p + \frac{|c|}{|a+b|} := R.$$

Cela montre que l'ensemble ε est borné. comme une conséquence du théorème du point fixe de Schaefer, on déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème $(3.1) - (3.2)$. ■

3.1.2 Exaemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$ {}^{c}D^{p}y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^{t})(1+|y(t)|)}, t \in J := [0,1], p \in [0,1] \tag{3.5}$$

$$y(0) + y(1) = 0 \tag{3.6}$$

Posons

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}x}{(9+e^{t})(1+x)}, (t,x) \in J \times [0,\infty[$$

Soit $x, y \in [0,\infty[$ et $t \in J$. Alors on a

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}\left|\frac{x}{(1+x)} - \frac{y}{(1+y)}\right| \\ &= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^{t})(1+x)(1+y)} \\ &\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}|x-y| \\ &\leq \frac{1}{10}|x-y| \end{aligned}$$

Alors la condition (H1) est vérifiée avec $k = \frac{1}{10}$. On doit vérifier que la condition (3.4) est satisfaite pour des valeurs appropriées de $p \in [0,1]$ avec $a = b = T = 1$.
En effet

$$\frac{3k}{2\Gamma(p+1)} < 1 \Longleftrightarrow \Gamma(p+1) > \frac{3k}{2} = 0.15 \tag{3.7}$$

Alors d'après le théorème (23) le problème $(3.5) - (3.6)$ admet une seule solution sur $[0,1]$ pour les valeurs de p satisfaisant (3.7). Par exemple
Si $p = \frac{1}{5}$ alors $\Gamma(p+1) = \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) = 0.92$ et

$$\frac{3k}{2}\frac{1}{\Gamma(p+1)} = \frac{0.15}{0.92} = 0.1630434 < 1.$$

Si $p = \frac{2}{3}$ alors $\Gamma(p+1) = \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) = 0.89$ et

$$\frac{3k}{2}\frac{1}{\Gamma(p+1)} = \frac{0.15}{0.89} = 0.1685393 < 1.$$

3.2 Problème aux limite avec condition non locale

Dans ce section on présente quelque résultats d'existence et unicité de solution du problème aux limites pour équation différentielle fractionnaire avec condition non locale. On considère le problème suivant :

$$^{c}D^{p}y(t) = f(t, y(t)), \text{ pour tout } t \in J = [0, T], 0 < p < 1 \tag{3.8}$$

$$y(0) + g(y) = y_0 \tag{3.9}$$

Où $^{c}D^{p}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f = [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : C([0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$ une fonction continue.

Définition 25 *Une fonction $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ est dite solution de* $(3.8) - (3.9)$ *si elle satisfait l'équation* (3.8) *sur J et la condition* (3.9).

Introduisons les hypothèses suivantes :
(H1) Il existe une constante $k > 0$, telle que :

$$|f(t, u) - f(t, \overline{u})| \leq k|u - \overline{u}|, \text{ pour tout } t \in J \text{ et tout } u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

(H2) Il existe une constante $M > 0$, telle que :

$$|f(t, u)| \leq M \text{ pour tout } t \in J \text{ et tout } u \in \mathbb{R}.$$

(H3) Il existe une constante $\overline{M} > 0$, telle que :

$$|g(y)| \leq \overline{M} \text{ pour tout } u \in C([0, T], \mathbb{R})$$

(H1) Il existe une constante $\overline{k} > 0$, telle que :

$$|g(y) - g(\overline{y})| \leq \overline{k}|y - \overline{y}| \text{ pour tout } y, \overline{y} \in C([0, T], \mathbb{R}).$$

Théoréme 26 *Soit $f \in C(J, \mathbb{R})$. et supposons que (H1), (H4) sont satisfaites si*

$$\overline{k} + \frac{kT^p}{\Gamma(p + 1)} < 1 \tag{3.10}$$

alors le problème non local $(3.8) - (3.9)$ *admet une solution unique sur* $[0, T]$.

Preuve. On transforme le problème $(3.8)-(3.9)$ en un problème de point fixe. considérons l'opérateur $\widetilde{F}: C([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R})$ défini par

$$\widetilde{F}(y)(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, y(s)) ds \tag{3.11}$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur $\widetilde{F}$ sont les solutions du problème $(3.8)-(3.9)$. Il reste à montrer que $\widetilde{F}$ est contraction, en effet : si $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$, alors pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned} |\widetilde{F}(x)(t) - \widetilde{F}(y)(t)| &= |g(x) - g(y) + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds| \\ &\leq |g(x) - g(y)| + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \end{aligned}$$

par (H1),(H4)

$$\begin{aligned} |\widetilde{F}(x)(t) - \widetilde{F}(y)(t)| &\leq \overline{k}\|x-y\|_\infty + \frac{k}{\Gamma(p)}\|x-y\|_\infty \int_0^t (t-s)^{p-1} ds \\ &\leq \overline{k}\|x-y\|_\infty + \frac{kT^p}{\Gamma(p)}\|x-y\|_\infty \end{aligned}$$

et par suite

$$\|\widetilde{F}(x)(t) - \widetilde{F}(y)(t)\|_\infty \leq \left(\overline{k}\frac{kT^p}{\Gamma(p)}\right)\|x-y\|_\infty$$

En vertu de (3.10). On peut déduire que $\widetilde{F}$ est contraction, et d'après le théorème de Banach. $\widetilde{F}$ admet une seul pont fixe qui est une solution du problème $(3.8) - (3.9)$. ■

Maintenant nous donnons un résultat de l'existence basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 27 *Soit $f \in C(J,\mathbb{R})$ et supposons que (H2), (H3)sont satisfaites. Alors le problème admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. On va utiliserons le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que $\widetilde{F}$ défini par (3.11) admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Étape 1 : $\widetilde{F}$ est continu.

Soit y_n une suite telle que $y_n \longrightarrow y$ *dans* $C([0,T],\mathbb{R})$, Alors pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}|\widetilde{F}(x)(t)-\widetilde{F}(y)(t)| &\leq |g(y_n)-g(y)| \\ &+\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds \\ &\leq |g(y_n)-g(y)|+\frac{1}{p\Gamma(p)}\|f(.,x(.))-f(.,y(.))\|_\infty\end{aligned}$$

Puisque f et g sont continues, alors $\|\widetilde{F}(.,x(.))-\widetilde{F}(.,y(.))\|_\infty \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow 0$, d'où la continuité de $\widetilde{F}$.

Étape 2 : $\widetilde{F}(B_{\eta^*})$ est borné.

$$\begin{aligned}|\widetilde{F}(y)(t)| &\leq |y_0|+|g(y)|+\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}|f(s,y(s))|ds \\ &\leq |y_0|+\overline{M}+\frac{M}{p\Gamma(p)}T^p\end{aligned}$$

Donc

$$\|\widetilde{F}(y)\|_\infty \leq |y_0|+\overline{M}+\frac{M}{p\Gamma(p)}T^p := \widetilde{l}$$

et par suit $\widetilde{F}(B_{\eta^*})$ est borné.

Étape 3 : L'image de tout borné par $\widetilde{F}$ est une ensemble équicontinue de $C([0,T],\mathbb{R})$.

Soient $t_1,t_2 \in [0,T], t_1 < t_2$, et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors

$$\begin{aligned}|\widetilde{F}(y)(t_2)-\widetilde{F}(y)(t_1)| &= |\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{p-1}f(s,y(s))ds \\ &-\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{p-1}f(s,y(s))ds|\end{aligned}$$

Et comme l'étape 3 du théorème (24) $\widetilde{F}$ est équicontinue. Par un raisonnement pareil $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Étape 4 :

Il reste montrer que $\overline{\varepsilon} = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda\widetilde{F}(y) \text{ pour } 0 < \lambda < 1\}$ est borné

Soit $y \in \overline{\varepsilon}$, alors : $y = \lambda\widetilde{F}(y)$; pour $0 < \lambda < 1$. Donc pour tout $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda\left[y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}|f(s,y(s))ds|\right].$$

Alors, d'après (H2),(H3), et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}|\widetilde{F}(y)(t)| &\leq |y_0|+|g(y)|+\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}|f(s,y(s))|ds \\ &\leq |y_0|+\overline{M}+\frac{M}{p\Gamma(p)}T^p.\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\|\widetilde{F}(y)\|_\infty \leq |y_0|+\overline{M}+\frac{M}{p\Gamma(p)}T^p := \overline{R}$$

Cela montre que $\overline{\varepsilon}$ est borné. Comme un conséquence du théorème de Schaefer. On déduit que $\widetilde{F}$ admet au moins un point fixe qui est une solution de problème $(3.8)-(3.9)$. ■

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour des équation différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec condition non locale.
Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le principe de contraction de Banach et le théorème de point fixe de Schaefer .

????

??

???????????????? : ??????????????????, ??????????????????, ??????????????, ??

Abstract

In this dissertation, we shall establish sufficient conditions for the existence of solutions for a first order boundray value problem for fractional differential equations.

Key words : fixed point theorem, two-point bounddary value porblem, Banach contraction principie, Leray Schauder nonlinear alternative, second-ordre equation.

Résumé

Dans cette mémoire, nous établirons des conditions suffisantes pour l'existence de solutions pour un problème aux limites de premier ordre pour des équations différentielles fractionnaire.

Mots clés : théorème point fixe, probléme aux limites de deux points, l'alternative non linéaire de Schauder, le principe de contraction de Banach, Existence de solution.

Bibliographie

[1] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[2] A. M. A. El-Sayed, fractional order evolution equation, J. Fract. Calc. 7(1995), 89-100. Mr 1330571(96g :34089). Zbl 0839.65070.

[3] A. M. A. El-Sayed, fractional order diffusion-wave equations, Intern. J. Theo. Physics 35 (1996), 311-322. MR1372176(96k :34123). Zbl 0846.35001.

[4] K.B Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, London, 1974. MR0361933(50 14078). Zbl 0292.26011.

[5] M.Frigon, On continuation methods for contractive and non expansive mappings, Recent advance in metric fixed point theory, Sevilla 1995 (T.Dominiguez Benarrides ed), Universidad de Sevilla 1996, 19-30.

[6] S. G. Sanko, A-A. kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, london, 1993.

[7] Samko S-G. , klbas A.A.and Marichev O.I. (1993), fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York.

[8] Surveys in Mathematics and its Applications 3 (2008), 1-12.

[9] V. IS. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fundamenta Math., 3 (1922), pp. 133-181.

[10] V. Lakshmikantham, and A.S. Vatsala, *Basic theory of fractional differential equations,* Nonlinear Anal. Theory, Methods, in press.

[11] V. Lakshmikantham, and A.S. Vatsala, *Theory of fractional differential inequalities and applications,* Commun. Appl. Anal. Math. Letters, to appear.

[12] V. Lakshmikantham, and A.S. Vatsala, *General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations,* Appl. Math. Letters, to appear.