UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option :Algebre et Geometry

Par : LAOUDJ Djamel

Théme

Groups de Lie-Poisson et transformation d'habillage

Soutenu publiquement le : 29/05/2017

Devant le jury composé de :

Mr. YOUMBAI Mohamed Laid	M.A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. BOUSSAID Mohamed	M.A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. BADIDJA Salim	M.A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
M. BAHAYOU Mohamed Amine	M.C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Remerciements

Groupes de Lie-Poisson et transformations d'habillage

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des groupes de Lie-Poisson et à leur feuilletage symplectique. Nous avons étudié ces structures infinitésimalement via la structure de bigèbre de Lie. Une bigèbre de Lie définit un couple d'algèbres de Lie en dualité avec des action de l'un sur l'autre par les transformations d'habillage. Lorsque les champs de vecteurs de l'action sont complets nous montrons que les feuilles symplectique du groupe de Lie-Poisson sont exactement les orbites de l'action.

Mots clés : Groupes de Lie-Poisson, bigèbres de Lie, actions de Poisson, transformations d'habillage, r-matrices, équation de Yang-Baxter.

Poisson-Lie groups and dressing transformations

Abstract

This work is devoted to the study of Poisson-Lie groups and to their symplectic leaves. We have studied these structures infinitesimally via the Lie bialgebra structure. A Lie bialgebra defines a pair of Lie algebras in duality with actions of one on the other by dressing transformations. When the vector fields of the action are complete we show that the symplectic leaves of the Lie-Poisson group are exactly the orbits of the action.

Keywords : Poisson-Lie groups, Lie bialgebras, Poisson actions, dressing transformations, r-matrices, Yang-Baxter equation.,

---

Table des matières

Introduction

Les groupes de Lie-Poisson ont été introduits vers 1980 par V.G. Drinfeld et M.A. Semenov-Tian-Shansky. La motivation pour l'étude de ces structures provenait de la physique, où ils étaient utilisées dans la théorie des systèmes intégrables. L'objectif principal de ce mémoire est de donner une introduction à la théorie des groupes Lie-Poisson. Nous étudierons les propriétés d'un groupe de Lie-Poisson infinitésimalement, i.e. par rapport à son algèbre de Lie. De plus, nous allons donner des exemples explicites, pour illustrer la théorie abstraite.

En annexe, une introduction aux concepts importants de la théorie du Lie est donnée. Dans le premier chapitre, nous commencerons par définir les structures de Poisson. Ensuite, nous définissons un groupe de Lie-Poisson, comme un groupe Lie avec une structure de Poisson compatible avec sa structure du groupe. Nous allons ensuite considérer la bigèbre de Lie associée à un groupe de Lie-Poisson. Il s'agit d'une algèbre de Lie avec un crochet de Lie sur l'espace dual (qui provient de la structure de Poisson). Nous construisons une compatibilité infinitésimal entre l'opération de groupe et la structure de Poisson.

compatibilité

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des bigèbres de Lie. Nous donnons un point de vue sur ces structures en termes de triples de Manin. Ces triples de Manin sont utilisés pour la construction du double d'une bigèbre de Lie. Nous analysons un type particulier des bigèbres de Lie, dont le crochet dual est induit par une r-matrice. Nous allons utiliser des solutions de l'équation de Yang-Baxter pour générer des bigèbres de Lie.

Plan du mémoire

Ce mémoire se présente de la façon suivante :

1. La Premier chapitre de généralités, où on rappelle brièvement les notions et résultats classiques sur les variétés de Poisson et consacré à la notion de groupe de Lie-Poisson et exemples
2. Le deuxième chapitre présente quelques façons d'intégrer bigèbres de Lie, on donne quelques définitions utiles, attachééhomologie et consacré groupes Poisson est bigèbres de Lie.
3. Le Troisième chapitre indique le calcule de Poisson et son application.

On termine avec une conclusion... et une petite bibliographie.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES STRUCTURES DE POISSON

DANS ce premier chapitre, on introduit les notions essentielles qui sont attachées à une variété de Poisson. Tout le matériel exposé ici est connu, mais on l'introduit pour avoir un texte "complet", avec un minimum de renvois à des références extérieures. Pour un traitement détaillé de ces thèmes, le lecteur pourra consulter les ouvrages de Vaisman [Vai], Dufour & Zung [Duf-Zun].

1.1 Éléments de géométrie de Poisson

Le crochet de Poisson de fonctions a été introduit par D. Poisson [?], comme outil pour l'étude du mouvement des planètes. Par la suite, les structures de Poisson sont apparues comme généralisation des variétés symplectiques, qui formalisent la mécanique hamiltonienne.
Les variétés de Poisson, comme on les connait aujourd'hui, ont été introduites par Lichnerowicz [?], [?]. Leur importance a été rapidement reconnue par Weinstein qui en a étudié les propriétés locales [We1]. Elles jouent aussi un rôle fondamental en physique dans la transition mécanique classique-mécanique quantique (théorie de quantification). Depuis, les articles de Weinstein, plusieurs aspects de la géométrie de Poisson ont fait l'objet d'intenses recherches, citons notamment : le problème de linéarisation, la cohomologie de Poisson-Lichnerowicz, la quantification par déformation, les groupes de Lie-Poisson...

Variété de Poisson. Un *crochet de Poisson* sur une variété différentiable M est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\{,\}$ sur l'algèbre $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ des fonctions lisses sur M vérifiant

(i) L'antisymétrie

$$\{f,g\} = -\{g,f\}, \quad \text{pour tout } f,g \in C^\infty(M).$$

(ii) La règle de Leibniz

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}, \quad \text{pour tout } f,g,h \in C^\infty(M).$$

(iii) L'identité de Jacobi

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0, \quad \text{pour tout } f,g,h \in C^\infty(M).$$

Une variété munie d'un crochet de Poisson est appelée *variété de Poisson*.
Soient $(M, \{,\})$ une variété de Poisson et $\mathcal{A} = C^\infty(M)$. Le crochet de Poisson fait de $\mathcal{A}$ une algèbre de Lie. La règle de Leibniz implique, pour toute fonction lisse f sur M, que l'application linéaire $g \mapsto \{f,g\}$ est une dérivation de $\mathcal{A}$. À chaque fonction f correspond un champ de vecteurs X_f, appelé l'hamiltonien de f, défini par $X_f(g) = \{f,g\}$. De l'identité de Jacobi on déduit également que

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}. \tag{1.1}$$

Autrement dit, l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $(\mathfrak{X}(M), [\,,\,])$ et l'application $f \mapsto X_f$ définit un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{X}(M)$.
Pour tout crochet $\{,\}$, sur l'algèbre des fonctions d'une variété différentielle M, bilinéaire, antisymétrique qui vérifie l'identité de Leibniz, est associé un unique tenseur 2-fois contravariant antisymétrique, noté π, tel que

$$\{f,g\} = \pi(df, dg). \tag{1.2}$$

Si de plus $\{,\}$ vérifie l'identité de Jacobi, π est appelé *tenseur de Poisson* de M.
En coordonnées locales $(U, x_1, ..., x_n)$ un tel tenseur s'écrit :

$$\pi = \sum_{i<j} \pi_{ij}\, \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_{ij}\, \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j},$$

où les π_{ij} sont des fonctions C^∞ sur U, tel que $\pi_{ij} = -\pi_{ji}$.
L'identité de Jacobi pour $\{,\}$ est équivalente à la condition :

$$\oint_{jk\ell} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \pi_{k\ell}}{\partial x_i} \pi_{ij} = 0, \quad \text{pour tout } j,k,\ell = 1,...,n \tag{1.3}$$

où $\oint_{jk\ell} a_{jk\ell}$ dénote la somme circulaire $a_{jk\ell} + a_{k\ell j} + a_{\ell jk}$. En effet, compte tenu de (1.2), le jacobiateur

$$J(f,g,h) = \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\},$$

est égal à

$$J(f,g,h) = \sum_{j,k,\ell} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \pi_{k\ell}}{\partial x_i} \pi_{ij} + \frac{\partial \pi_{\ell j}}{\partial x_i} \pi_{ik} + \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_i} \pi_{i\ell} \right) \right] \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_\ell} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right).$$

Notons $\mathfrak{X}^k(M)$ l'ensemble des champs de multivecteurs de degré k, avec

$$\mathfrak{X}^0(M) = C^\infty(M),\ \mathfrak{X}^1(M) = \mathfrak{X}(M) \text{ et } \mathfrak{X}^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} \mathfrak{X}^k(M).$$

On peut définir les structures de Poisson grâce au crochet de Schouten [Duf-Zun], qui est l'unique extension du crochet de Lie à l'espace des champs de multivecteurs $\mathfrak{X}^*(M)$, caractérisé par

1. $[P,Q] \in \mathfrak{X}^{p+q-1}(M)$,
2. $[f,g] = 0$ et $[X,P] = \mathscr{L}_X P$,
3. $[P,Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q,P]$,
4. $[P, Q \wedge R] = [P,Q] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P,R]$,
5. $(-1)^{(p-1)(r-1)}[P,[Q,R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)}[Q,[R,P]] + (-1)^{(r-1)(q-1)}[R,[P,Q]] = 0$,

pour $P \in \mathfrak{X}^p(M)$, $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$, $R \in \mathfrak{X}^r(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $f,g \in C^\infty(M)$.
Une autre définition équivalente du crochet de Schouten, due à Lichnerowicz, est donnée par la proposition suivante [1]

Proposition 1. *Pour tout* $P \in \mathfrak{X}^p(M)$, $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$ *et* $\omega \in \Omega^{p+q-1}(M)$.

$$<\omega,[P,Q]> = (-1)^{(p-1)(q-1)} < d(i_Q\omega), P > - < d(i_P\omega), Q > + (-1)^p < d\omega, P \wedge Q > . \tag{1.4}$$

Démonstration. Voir l'article de Lichnerowicz [**?**]. □

1. Cette formule a l'avantage d'être adaptée aux calculs de nature globals.

Il en résulte, en particulier, que le crochet de Schouten de deux champs de multivecteurs nuls en un point, est un champs de multivecteurs nul aussi en ce point.
Soit π un bivecteur sur une variété différentielle M et soit $\{,\}$ le crochet associé sur $C^\infty(M)$, c'est-à-dire

$$\{f,g\} = < df \wedge dg, \pi > .$$

Le Lemme suivant permet d'exprimer l'identité de Jacobi en terme du tenseur π.

Lemme 1. *Le jacobiateur est égale à la moitié du crochet de Schouten de π par lui même, c'est-à-dire pour tout $f,g,h \in C^\infty(M)$*

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = \frac{1}{2}[\pi,\pi](df,dg,dh). \tag{1.5}$$

Ceci permet de considérer le jacobiateur comme un tenseur 3-fois contravariant ; donc nul sur toute variété de dimension ≤ 2.

Démonstration. On a d'après la formule de Lichnerowicz (1.4)

$$\begin{aligned} < df \wedge dg \wedge dh, [\pi,\pi] > &= -2 < d\,(i_\pi(df \wedge dg \wedge dh)), \pi > \\ &= -2 < d\,(\{g,h\}df - \{f,h\}dg + \{f,g\}dh), \pi > \\ &= -2 < d\{g,h\} \wedge df - d\{f,h\} \wedge dg + d\{f,g\} \wedge dh, \pi > \\ &= \ 2\,(\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}) \end{aligned}$$

□

On peut définir donc une variété de Poisson M par la donnée d'un tenseur 2-fois contravariant antisymétrique π sur M, qui vérifie $[\pi,\pi] = 0$.

Exemple (Variétés symplectiques). Une variété différentielle M est dite *symplectique* si elle est munie d'une 2-forme différentielle ω fermée et non dégénérée, c'est-à-dire le morphisme de fibrés $\omega^b : TM \to T^*M$ défini par $\omega^b(X) = i_X\omega$, pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, est un isomorphisme. Pour tout $f \in C^\infty(M)$, il existe un unique champ de vecteurs X_f tel que $i_{X_f}\omega = -df$. On montre alors que le crochet

$$\{f,g\} = \omega\left(X_f, X_g\right) = -\langle df, X_g\rangle = -X_g(f) = X_f(g),$$

est un crochet de Poisson, de sorte que toute variété symplectique est de Poisson. En effet,

$$\begin{aligned}
0 = \ & d\omega\big(X_f, X_g, X_h\big) = X_f \cdot \omega\big(X_g, X_h\big) - X_g \cdot \omega\big(X_f, X_h\big) + X_h \cdot \omega\big(X_f, X_g\big) \\
& \qquad - \omega\big([X_f, X_g], X_h\big) + \omega\big([X_f, X_h], X_g\big) - \omega\big([X_g, X_h], X_f\big) \\
= \ & X_f \cdot X_g(h) + X_g \cdot X_h(f) + X_h \cdot X_f(g) - [X_f, X_g](h) + [X_f, X_h](g) - [X_g, X_h](f) \\
= & -\Big(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}\Big).
\end{aligned}$$

Morphisme de Poisson.
Soient $(M, \{,\}_M)$ et $(N, \{,\}_N)$ deux variétés de Poisson. Une application $\varphi : M \to N$ de classe C^∞ est un *morphisme de Poisson* si $\varphi^* : C^\infty(M) \to C^\infty(N)$ est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire, pour tout $f, g \in C^\infty(N)$

$$\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_M = \varphi^*\{f, g\}_N, \tag{1.6}$$

où $\varphi^* f$ désigne l'image réciproque de f par φ, c'est-à-dire l'application $f \circ \varphi$.

Algébroïde de Lie associé à une variété de Poisson.
Soit (M, π) une variété de Poisson. Il est associé au champ de tenseurs π un morphisme de fibrés vectoriels $\pi_\sharp : T^*M \to TM$, appelé *ancrage, ou application ancre*, défini, pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, par

$$\beta\big(\pi_\sharp(\alpha)\big) = \pi(\alpha, \beta).$$

Noter que pour tout $f \in C^\infty(M)$, le champ hamiltonien associé est donné par

$$X_f = \pi_\sharp(df).$$

En coordonnées locales, si $\pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^n \pi_{ij}\, \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j}$ alors

$$\pi_\sharp(dx_i) = \sum_{j=1}^n \pi_{ij}\, \partial_{x_j}.$$

On appelle *rang du tenseur de Poisson* π au point x, le rang de l'application linéaire $\pi_\sharp(x) : T_x^*M \to T_xM$. On le note

$$\rho(x) = \operatorname{rang} \pi_\sharp(x) = \dim \operatorname{Im} \pi_\sharp(x).$$

En coordonnées locales, c'est le rang de la matrice $(\pi_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$.
Un point $x \in M$ est dit *régulier* s'il existe un voisinage de x sur lequel le rang est constant

(égal à $\rho(x)$). Une variété de Poisson est dite *régulière* si son tenseur est de rang constant. La proposition suivante résume les propriétés du rang.

Proposition 2. *Soit* (M, π) *une variété de Poisson. Alors le crochet de Koszul vérifie les propriétés suivantes :*

1. $[\alpha, f\beta] = \pi_\sharp(\alpha)(f)\beta + f[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$.
2. $[\,,\,]$ *est un crochet de Lie sur* $\Omega^1(M)$ *et, pour tout* $f, g \in C^\infty(M)$
$$[df, dg] = d\{f, g\}.$$
3. $\pi_\sharp : \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire, pour tout* $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$,
$$\pi_\sharp([\alpha, \beta]) = [\pi_\sharp(\alpha), \pi_\sharp(\beta)].$$

Démonstration. Voir le livre de Vaisman [Vai], pages 41-42. □

Cette proposition signifie que le triplet $(\pi_\sharp, T^*M, M)$ est un algébroïde de Lie au sens de Pradines [**?**].

Cohomologie de Poisson-Lichnerowicz C'est une cohomologie relative à toute structure de Poisson ; elle a été introduite par A. Lichnerowicz et c'est une notion centrale dans la théorie de déformation des structures de Poisson ; (voir [Gam]).

Soit (M, π) une variété de Poisson et soit $\delta_\pi : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^{*+1}(M)$ l'opérateur défini par
$$\delta_\pi := [\pi, \cdot].$$
L'identité de Jacobi graduée du crochet de Schouten permet de montrer que δ_π est un opérateur de cohomologie, c'est-à-dire $\delta_\pi \circ \delta_\pi = 0$. En effet, pour tout $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, $\delta_\pi(P) \in \mathfrak{X}^{k+1}(M)$ et, d'après l'identité de Jacobi généralisée pour le crochet de Schouten,
$$(-1)^{k-1}[\pi, [\pi, X]] - [\pi, [X, \pi]] + (-1)^{k-1}[X, [\pi, \pi]] = 0.$$
Comme $[\pi, \pi] = 0$ et $[X, \pi] = -(-1)^{k-1}[\pi, X]$, alors $[\pi, [\pi, X]] = 0$.
Le complexe $(\mathfrak{X}^*(M), \delta_\pi)$ est le complexe de Poisson de M et la cohomologie associée, que l'on notera par $H^*_\pi(M)$, s'appelle la cohomologie de Poisson de M.
$$H^k_\pi(M) = \frac{\ker\left(\delta_\pi : \mathfrak{X}^k(M) \to \mathfrak{X}^{k+1}(M)\right)}{\mathrm{Im}\left(\delta_\pi : \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathfrak{X}^k(M)\right)}. \tag{1.7}$$

Pour un tenseur de Poisson donné, on notera l'opérateur de cobord simplement par δ et le $k^{\text{ième}}$ espace de cohomologie par $\mathrm{H}^k(\mathrm{M})$.
L'opérateur de cobord δ peut être défini par :

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{X}(\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\pi_\sharp(\alpha_i)\cdot \mathrm{X}\left(\alpha_1,\dots,\widehat{\alpha_i},\dots,\alpha_{k+1}\right) \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq k+1}(-1)^{i+j}\mathrm{X}\Big([\alpha_i,\alpha_j],\alpha_1,\dots,\widehat{\alpha_i},\dots,\widehat{\alpha_j},\dots,\alpha_{k+1}\Big),\end{aligned} \tag{1.8}$$

où le symbole "$\widehat{\ }$" signifie que le terme correspondant est omis.
En effet, pour toute $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ et toute $\alpha \in \Omega^1(\mathrm{M})$

$$\delta f(\alpha) = -\mathrm{X}_f(\alpha) = \pi_\sharp(\alpha)\cdot f,$$

et pour tout champs de multivecteurs $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathfrak{X}^*(\mathrm{M})$

$$\delta(\mathrm{X}\wedge\mathrm{Y}) = \delta\mathrm{X}\wedge\mathrm{Y} + (-1)^{\deg \mathrm{X}}\mathrm{X}\wedge\delta\mathrm{Y},$$

ce qui montre, de la même manière que dans le cas de la différentielle usuelle sur les formes, que δ coïncide avec l'opérateur (1.8). L'application d'ancrage $\pi_\sharp : \omega^1(\mathrm{M}) \to \mathfrak{X}(\mathrm{M})$, qui est un morphisme d'algèbres de Lie, s'étend aux formes de tout degrés par

$$\sharp(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_k) = \pi_\sharp(\alpha_1)\wedge\dots\wedge\pi_\sharp(\alpha_k),$$

et induit un homomorphisme entre la cohomologie de de Rham $\mathrm{H}^*_d(\mathrm{M})$ et la cohomologie de Poisson $\mathrm{H}^*_\pi(\mathrm{M})$. En effet, pour toute k-forme α on a :

$$\sharp(d\alpha) = -\delta_\pi(\sharp(\alpha)),$$

ce qui entrelace δ_π et la différentielle extérieure d de de Rham. Cet homomorphisme est un isomorphisme dans le cas symplectique. Comme en général pour toute cohomologie, les espaces de bas degrés admettent des interprétations simples, $\mathrm{H}^0(\mathrm{M})$ est l'ensemble des fonctions Casimir (éléments du centre de l'algèbre $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$), $\mathrm{H}^1(\mathrm{M})$ est le quotient des champs de vecteurs de Poisson par les champs hamiltoniens, $\mathrm{H}^2(\mathrm{M})$ est le quotient des bivecteurs compatibles avec π par les dérivées de Lie de ce crochet. On voit donc l'intérêt de calculer la cohomologie de Poisson. Une question ouverte et difficile est de déterminer les structures de cohomologie de Poisson finie (i.e à groupes de cohomologie $\mathrm{H}^k_\pi(\mathrm{M})$ de dimension finie), en dehors du cas symplectique.

CHAPITRE 2

GROUPES DE LIE-POISSON

La notion de groupe de Lie-Poisson a été introduite par Drinfeld dans [Dr1], puis étudiée systématiquement par Semenov-Tian Shansky dans [STS2]. On peut se référer à l'excellent article de Lu & Weinstein [Lu-We1] et à la thèse de Lu [Lu], ou encore à [Duf-Zun] et [Vai].

Définition 1. *Un groupe de Lie-Poisson est un groupe de Lie muni d'une structure de variété de Poisson, tel que la multiplication* $m : \mathrm{G}\times\mathrm{G} \to \mathrm{G}$ *soit un morphisme de Poisson. Si* π *désigne le* 2*-tenseur de Poisson sur* G*, on a pour tout* $g, h \in \mathrm{G}$ *:*

$$\pi(gh) = \mathrm{L}_{g*}\pi(h) + \mathrm{R}_{h*}\pi(g).$$

Plus généralement, un k-tenseur K sur un groupe de Lie G est multiplicatif s'il vérifie la relation précédente, c'est-à-dire :

$$\mathrm{K}(gh) = \mathrm{L}_{g*}\mathrm{K}(h) + \mathrm{R}_{h*}\mathrm{K}(g). \tag{2.1}$$

Soit un k-tenseur K, et soient K_ℓ et $\mathrm{K}_r : \mathrm{G} \to \wedge^k \mathcal{G}$ définis par les formules :

$$\mathrm{K}_\ell(g) = \mathrm{L}_{g^{-1}*}\mathrm{K}(g), \quad \mathrm{K}_r(g) = \mathrm{R}_{g^{-1}*}\mathrm{K}(g).$$

De l'égalité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_r(gh) - \mathrm{K}_r(g) - \mathrm{Ad}(g)\cdot\mathrm{K}_r(h) =& \mathrm{R}_{(gh)^{-1}*}\mathrm{K}(gh) - \mathrm{R}_{g^{-1}*}\mathrm{K}(g) \\
&- \mathrm{L}_{g*}\mathrm{R}_{g^{-1}*}\mathrm{R}_{h^{-1}*}\mathrm{K}(h) \\
=& \mathrm{R}_{(gh)^{-1}*}\mathrm{K}(gh) - \mathrm{R}_{g^{-1}*}\mathrm{K}(g) \\
&- \mathrm{R}_{(gh)^{-1}*}\mathrm{L}_{g*}\mathrm{K}(h) \\
=& \mathrm{R}_{(gh)^{-1}*}\Big[\mathrm{K}(gh) - \mathrm{R}_{h*}\mathrm{K}(g) - \mathrm{L}_{g*}\mathrm{K}(h)\Big],
\end{aligned}$$

on déduit une première caractérisation :
Un k-tenseur K est multiplicatif, si et seulement si, son translaté à droite K_r est un 1-cocycle de G dans $\wedge^k\mathcal{G}$ pour la représentation adjointe

$$\mathrm{K}_r(gh) = \mathrm{K}_r(g) + \mathrm{Ad}(g)\cdot \mathrm{K}_r(h).$$

(Voir l'annexe pour la cohomologie des groupes et des algèbres de Lie). On a une caractérisation analogue par K_ℓ, c'est-à-dire

$$\mathrm{K}_\ell(gh) = \mathrm{K}_\ell(h) + \mathrm{Ad}(h^{-1})\cdot \mathrm{K}_\ell(g).$$

Si le groupe de Lie G est connexe, alors on a une autre caractérisation importante :
Un k-tenseur K est multiplicatif, si et seulement si, $\mathrm{K}(e) = 0$ et $\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}$ est invariant à gauche pour tout champ de vecteur X invariant à gauche. En effet, l'égalité (2.1) appliquée à $g = h = e$ montre que $\mathrm{K}(e) = 0$, et :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}(g) =& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp t\mathrm{X})^* \mathrm{K}(\exp t\mathrm{X}(g)) \\
=& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{R}^*_{\exp t\mathrm{X}} \mathrm{K}(g \exp t\mathrm{X}) \\
=& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{R}^*_{\exp t\mathrm{X}} \mathrm{L}_{g*}\mathrm{K}(\exp t\mathrm{X}) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{R}^*_{\exp t\mathrm{X}} \mathrm{R}_{\exp t\mathrm{X}*}\mathrm{K}(g) \\
=& \mathrm{L}_{g*}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{R}^*_{\exp t\mathrm{X}} \mathrm{K}(\exp t\mathrm{X}) \\
=& \mathrm{L}_{g*}(\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K})(e),
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que $\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}$ est invariant à gauche. Le raisonnement est le même pour les champs invariants à droite, en utilisant K_ℓ.
Réciproquement, si $\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}$ est invariant à gauche pour tout champ invariant à gauche X, c'est-à-dire

$$\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}_r(gh) = \mathrm{Ad}(g)\cdot \mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}_r(h)\text{[1]},$$

1. En fait un k-tenseur T est invariant à gauche, si et seulement si, son translaté à droite $\mathrm{T}_r(g) = \mathrm{R}_{g^{-1}*}\mathrm{T}(g)$ est équivariant, c'est-à-dire $\mathrm{T}_r(gh) = \mathrm{Ad}(g)\cdot \mathrm{T}_r(h)$

alors

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big[\mathrm{K}_r(g\exp t\mathrm{X}) - \mathrm{K}_r(g) - \mathrm{Ad}(g)\cdot\mathrm{K}_r(\exp t\mathrm{X})\Big] \\
&\qquad\qquad = \mathrm{R}^*_{\exp t\mathrm{X}}(\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}_r)(g\exp t\mathrm{X}) - \mathrm{Ad}(g)\cdot \mathrm{R}^*_{\exp t\mathrm{X}}(\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}_r)(\exp t\mathrm{X}) \\
&\qquad\qquad = \mathrm{R}^*_{\exp t\mathrm{X}}\Big[(\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}_r)(g\exp t\mathrm{X}) - \mathrm{Ad}(g)\cdot(\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}_r)(\exp t\mathrm{X})\Big] \\
&\qquad\qquad = 0,
\end{aligned}$$

car $\mathscr{L}_\mathrm{X}\mathrm{K}_r$ est équivariant. On a donc, pour tout $g \in \mathrm{G}$ et tout h dans un voisinage de e,

$$\mathrm{K}_r(gh) = \mathrm{K}_r(g) + \mathrm{Ad}(g)\cdot\mathrm{K}_r(h).$$

Comme G est connexe, il est engendré par l'image de l'application exponentielle $\exp : \mathcal{G} \to \mathrm{G}$, on déduit que K_r est un 1-cocycle pour la représentation adjointe de G sur $\wedge^2\mathcal{G}$.

Bigèbres de Lie Ayant caractérisé les tenseurs multiplicatifs, nous passerons maintenant à la structure infinitésimale des groupes de Lie-Poisson.

Définition 2. *Une bigèbre de Lie est la donnée d'un triplet $(\mathcal{G}, \xi, \mathcal{G}^*)$, où $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie, $\mathcal{G}^*$ son espace vectoriel dual et $\xi : \mathcal{G} \to \wedge^2\mathcal{G}$, est un 1-cocycle par rapport à l'action adjointe de $\mathcal{G}$ sur $\wedge^2\mathcal{G}$:*

$$\xi([x,y]) = \mathrm{ad}_x\,\xi(y) - \mathrm{ad}_y\,\xi(x), \text{ pour tout } x, y \in \mathcal{G},$$

tels que l'adjoint de ξ, $\xi^t : \wedge^2\mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$, définit un crochet de Lie sur $\mathcal{G}^*$.

Équation de Yang-Baxter

Définition 3. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie. On appelle* équation de Yang-Baxter généralisée, *l'équation dont la variable est $r \in \wedge^2\mathcal{G}$:*

$$\mathrm{ad}_x[r,r] = 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{G}. \tag{2.2}$$

On appelle équation de Yang-Baxter classique, *l'équation dont la variable est $r \in \wedge^2\mathcal{G}$:*

$$[r,r] = 0. \tag{2.3}$$

Soient G un groupe de Lie et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. On considère la restriction du crochet de Schouten sur les champs de multi-vecteurs invariants à gauche qui étend le

crochet de Lie de $\mathcal{G}$.
Soit $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ et soit l'application associée $r_\sharp : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}$ définie, pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{G}^*$, par :

$$\beta\left(r_\sharp(\alpha)\right) = r(\alpha, \beta).$$

On considère le 1-cobord associé à r, c'est-à-dire le cocycle $\xi : \mathcal{G} \to \wedge^2\mathcal{G}$ défini par

$$\xi(x) = \mathrm{ad}_x\, r.$$

Il est naturel de se demander à quelles conditions sur r, le triplet $(\mathcal{G}, \xi, \mathcal{G})$ correspondant est une bigèbre de Lie. Le Lemme suivant donne la condition, nécessaire et suffisante pour que ξ^t définit un crochet de Lie sur $\mathcal{G}^*$.

Lemme 2. *1. Le crochet défini par ξ^t sur $\mathcal{G}^*$ est donné par*

$$[\alpha, \beta]_r = \mathrm{ad}^*_{r_\sharp(\beta)}\, \alpha - \mathrm{ad}^*_{r_\sharp(\alpha)}\, \beta.$$

2. Le crochet $[\,,\,]_r$ est de Lie, si et seulement si, r est solution de l'équation de Yang-Baxter, c'est-à-dire si $\mathrm{ad}_x[r, r] = 0$ pour tout $x \in \mathcal{G}$.

Démonstration. En effet, on a

1. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{G}^*$ et $x \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta]_r(x) =& \langle \alpha \wedge \beta, \mathrm{ad}_x\, r\rangle = r\,(\mathrm{ad}^*_x(\alpha \wedge \beta)) = r\,(\mathrm{ad}^*_x\, \alpha \wedge \beta) + r\,(\alpha \wedge \mathrm{ad}^*_x\, \beta)\\ =& -\mathrm{ad}^*_x\, \alpha\left(r_\sharp(\beta)\right) + \mathrm{ad}^*_x\, \beta\left(r_\sharp(\alpha)\right) = \mathrm{ad}^*_{r_\sharp(\beta)}\, \alpha(x) - \mathrm{ad}^*_{r_\sharp(\alpha)}\, \beta(x),\end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité

$$\langle \mathrm{ad}^*_x\, \alpha, y\rangle = \langle \alpha, \mathrm{ad}_x\, y\rangle = -\langle \alpha, \mathrm{ad}_y\, x\rangle = -\langle \mathrm{ad}^*_y\, \alpha, x\rangle.$$

2. Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Notons par r^+, respectivement r^-, le champ invariant à gauche, respectivement invariant à droite, associé à r. Soit le champ de bivecteurs $\pi = r^+ - r^-$. On a $\pi(e) = 0$ et, pour tout champ de vecteurs X invariant à gauche, $\mathscr{L}_X\pi = \mathscr{L}_X r^+$ est aussi invariant à gauche et donc π est multiplicatif. On déduit aussi que $d_e\pi = \xi$, car $\mathscr{L}_X\pi(e) = \mathscr{L}_X r^+(e) = \xi(X(e))$. D'autre part, comme

$$[r^+, r^-] = 0,\ [r^+, r^+] = [r, r]^+ \text{ et } [r^-, r^-] = -[r, r]^-,$$

on déduit que

$$[\pi, \pi] = 0 \Longleftrightarrow [r, r]^+ = [r, r]^- \\ \Longleftrightarrow \mathrm{Ad}(g) \cdot [r, r] = [r, r], \text{ pour tout } g \in \mathrm{G}.$$

Comme G est connexe, alors

$$\mathrm{Ad}(g) \cdot [r, r] = [r, r], \text{ pour tout } g \in \mathrm{G} \Longleftrightarrow \mathrm{ad}_x[r, r] = 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{G}.$$

D'après le théorème (**??**), ξ^t définit un crochet de Lie sur $\mathcal{G}^*$, si et seulement si, $[\pi, \pi] = 0$. On déduit alors que

$$\xi^t \text{ définit un crochet de Lie sur } \mathcal{G}^* \Longleftrightarrow \mathrm{ad}_x[r, r] = 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{G}.$$

Pour une preuve purement algébrique voir [**?**].

□

On termine cette partie par un résultat de cohomologie.

Théorème 1. *Soit* G *un groupe de Lie connexe. Si* G *est compact ou semi-simple, alors tout tenseur de Poisson multiplicatif sur* G *est de la forme*

$$\pi = r^+ - r^-$$

pour un $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ *tel que* $[r, r]$ *est invariant, par l'action adjointe de* $\mathcal{G}$ *sur* $\wedge^3\mathcal{G}$.

Démonstration. Voir Théorème 1.10 de l'article de Lu & Wienstein [Lu-We1].
Soit π_r le translaté à droite du tenseur de Poisson multiplicatif π. Comme G est compact, tout 1-cocycle pour l'action adjointe de G sur $\wedge^2\mathcal{G}$ est un 1-cobord. En particulier, comme π_r est un 1-cocycle, il existe alors $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ tel que $\pi_r = \mathrm{Ad}(g) \cdot r - r$. On a donc

$$\pi = \mathrm{R}_{g*}\pi_r = \mathrm{R}_{g*}(\mathrm{Ad}(g) \cdot r - r) = \mathrm{L}_{g*}r - \mathrm{R}_{g*}r = r^+ - r^-.$$

Si G est semi-simple, tout 1-cocycle pour l'action adjointe de $\mathcal{G}$ sur $\wedge^2\mathcal{G}$ est un 1-cobord. En particulier, comme $d_e\pi = \xi$ est un 1-cocycle, il existe alors $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ tel que $\xi = \delta r$ et le tenseur de Poisson multiplicatif associé est $r^+ - r^-$. Par unicité (voir Théorème **??**, page **??**), ce tenseur $r^+ - r^-$ doit être égal à π.

2.1 Triples de Manin

Si $(\mathcal{G},\mathcal{G}^*)$ est une bigèbre de Lie, on peut mettre une structure d'algèbre de Lie sur la somme directe vectorielle $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ par un produit tordu de crochets de Lie. La compatibilité entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ se traduit par l'existence d'une forme bilinéaire, symétrique et non dégénérée sur $\mathcal{D}$ pour laquelle $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ sont isotropes.

L'inverse est également possible. On peut associer à tout triple de Manin une bigèbre de Lie.

Définition 4. *Un triple de Manin $(\mathcal{D},\mathcal{G}_+,\mathcal{G}_-)$ est constitué d'une algèbre de Lie $\mathcal{D}$ munie d'une forme bilinéaire, symétrique et non dégénérée $<\cdot,\cdot>$ telle que :*

(i) *Pour tout $x,y,z \in \mathcal{D}$, $<[x,y],z>=<x,[y,z]>$.*

(ii) *$\mathcal{G}_+$ et $\mathcal{G}_-$ sont des sous-algèbres de Lie isotropes, i.e. $<\mathcal{G}_+,\mathcal{G}_+>=<\mathcal{G}_-,\mathcal{G}_->=0$.*

(i) *$\mathcal{D} = \mathcal{G}_+ \oplus \mathcal{G}_-$ (somme directe vectorielle).*

2.2 Actions de Poisson

Soit (G,π_0) un groupe de Lie-Poisson. On suppose que G agit, à gauche, sur une variété de Poisson (M,π). L'action est dite une *action de Poisson* si l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{G}\times\mathrm{M} &\longrightarrow \mathrm{X} \\ (g,x) &\mapsto g.x \end{aligned}$$

est un morphisme de Poisson , $\mathrm{G}\times\mathrm{X}$ est équipé de produit structure de Poisson.

Avertissement .Notez que, en général , cette définition ne signifie pas que, pour un g fixé dans G, l'action $x \to g.x$ est un automorphisme de Poisson de X. Le lecteur ne doit pas confondre les actions de Poisson en préservant la structure de Poisson ! Notez, cependant, que, lorsque la structure de Poisson sur le groupe de Lie G est celui trivial un, puis une action de Poisson est une action de G sur X qui préserve la structure de Poisson.

Exemples. *Tout groupe de Lie*G *agit sur lui-même par la traduction gauche .si* G *est un groupe de Poisson alors cette action est une action de Poisson.*

Proposition 3. *Soient* G *un groupe de Poisson de Lie bigèbre* (g,δ)*.Supposons que* G *agit sur une variété* X *et laissant* $\rho : g \longrightarrow \mathfrak{X}^1(\mathrm{X})$ *soit l'action infinitésimale.L'action de G sur*

X est une action de Poisson si et seulement si les diagramme suivant commute

$$
\begin{array}{ccc}
g & \overset{\rho}{\to} & \mathfrak{X}(X) \\
\downarrow \delta & & \downarrow [\pi,.] \\
\wedge^2 g & \overset{\rho}{\to} & \mathfrak{X}(X)
\end{array}
$$

En termes de algèbres de Gerstenhaber, la commutativité du diagramme précédent a une signification claire :cela signifie simplement que $\rho : \wedge^{\bullet} g \to \mathfrak{X}^{*}(X)$ *est un morphisme de différentiel algèbre de Gertenhader.*

demonstration. *Voir le livre de Lu-weistein*

Exemples. *Pour le double* $SL_{\mathbb{C}}(3)^{*} = B_{+} * B_{-}$ *de* $G = L_{\mathbb{C}}(3)$*.Considérer le collecteur Poisson*

$$
X = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid x, y, z \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.4}
$$

équipé du crochet de Poisson

$$
\begin{aligned}
\{x, y\} &= xy - 2z \\
\{y, z\} &= yz - 2x \\
\{z, x\} &= zx - 2y
\end{aligned}
$$

Le groupe de Lie $G^{*} = B_{+} * B_{-}$ *agit sur* X *par*

$$
(A, B).U \to A \cup B^{T}
$$

avec $(A, B) \in B_{+} * B_{-} \backsimeq G^{*}$ *et* $U \in X$*.cet Astion est une action de Poisson.*

□

CHAPITRE 3

ANNEXE

3.1 Cohomologie des groupes et des algèbres de Lie

Soit G un groupe qui agit sur un espace vectoriel V,

$$\begin{array}{ccc} G\times V & \longrightarrow & V \\ (g,x) & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$$

Soit les espaces :

$C^0(G,V) = V$,

$C^k(G,V) = \{$les applications $\omega : G\times ... \times G \longrightarrow V\}$.

On définit un opérateur $\delta : C^k(G,V) \longrightarrow C^{k+1}(G,V)$, par :

$$(\delta\omega)(g_1,...,g_{k+1}) = g_1\cdot\omega(g_2,...,g_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^k\omega(g_1,...,g_ig_{i+1},...,g_{k+1}) + (-1)^{k+1}\omega(g_1,...,g_k).$$

- $(\delta\omega)(g) = g\cdot\omega - \omega$, (pour $k=0$).
- $(\delta\omega)(g,h) = g\cdot\omega(h) - \omega(gh) + \omega(g)$, (pour $k=1$).

On peut vérifier que δ est un opérateur de cobord, c'est-à-dire $\delta\circ\delta = 0$, ceci permet de définir les espaces de cohomologie :

$$H^k(G,V) = \frac{\ker\{\delta : C^k(G,V)\to C^{k+1}(G,V)\}}{\mathrm{Im}\{\delta : C^{k-1}(G,V)\to C^k(G,V)\}}$$

On dit que $\omega\in V$ est un 0-cocycle, pour l'action du groupe G sur V, si

$$g\cdot\omega = \omega, \quad \text{pour tout } g\in G.$$

On dit qu'une application $\omega : \mathrm{G} \to \mathrm{V}$ est un 1-cocycle, pour l'action du groupe G sur V, si pour tout $g, h \in \mathrm{G}$

$$\omega(gh) = \omega(g) + g \cdot \omega(h) \tag{3.1}$$

et $\omega \in \mathrm{C}^k(\mathrm{G}, \mathrm{V})$ est un k-cocycle, pour l'action du groupe G sur V, si $\delta\omega = 0$.

Cohomologie des algèbres de Lie Soit $(\mathcal{G}, [,])$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie n, et soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Une représentation de $\mathcal{G}$ est un morphisme d'algèbres de Lie

$$\rho : \mathcal{G} \to g\ell(\mathrm{V})$$

tel que pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{G}$

$$\rho([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) = \rho(\mathrm{X}) \circ \rho(\mathrm{Y}) - \rho(\mathrm{Y}) \circ \rho(\mathrm{X}).$$

On dit aussi que V est un $\mathcal{G}$-module.
Une k-forme sur $\mathcal{G}$ à valeurs dans V est une application : $\omega : \mathcal{G} \times ... \times \mathcal{G} \to \mathrm{V}$, k-linéaire alternée. On notera l'ensemble de ces k-formes par $\mathrm{C}^k(\mathcal{G}, \mathrm{V})$, avec la convention $\mathrm{C}^0(\mathcal{G}, \mathrm{V}) = \mathrm{V}$ et $\mathrm{C}^1(\mathcal{G}, \mathrm{V}) = \mathscr{L}(\mathcal{G}, \mathrm{V})$.
On définit l'opérateur de cobord $\delta : \mathrm{C}^k(\mathcal{G}, \mathrm{V}) \to \mathrm{C}^{k+1}(\mathcal{G}, \mathrm{V})$ par

$$\begin{aligned}(\delta\omega)(\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(\mathrm{X}_i) \cdot \omega\Big(\mathrm{X}_1, \ldots, \hat{\mathrm{X}}_i, \ldots, \mathrm{X}_{k+1}\Big) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\Big([\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j], \mathrm{X}_1, \ldots, \hat{\mathrm{X}}_i, \ldots, \hat{\mathrm{X}}_j, \ldots, \mathrm{X}_{k+1}\Big)\end{aligned}$$

- Pour $k = 0$, $(\delta\omega)(\mathrm{X}) = \rho(\mathrm{X}) \cdot \omega$, pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{G}$, $\omega \in \mathrm{V}$.
- Pour $k = 1$, $(\delta\omega)(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \rho(\mathrm{X}) \cdot \omega(\mathrm{Y}) - \rho(\mathrm{Y}) \cdot \omega(\mathrm{X}) - \omega([\mathrm{X}, \mathrm{Y}])$.

Proposition 4. δ *est un opérateur de cobord, c'est-à-dire* $\delta \circ \delta = 0$.

Démonstration. compléter... □

Un k-cocycle est une k-forme fermée, c'est-à-dire $\omega \in \mathrm{C}^k(\mathcal{G}, \mathrm{V})$ et $\delta\omega = 0$. On note leur ensemble par $\mathrm{B}^k(\mathcal{G}, \mathrm{V})$.
Un k-cobord est une k-forme exacte, c'est-à-dire $\omega \in \mathrm{C}^k(\mathcal{G}, \mathrm{V})$ et il existe $\eta \in \mathrm{C}^{k-1}(\mathcal{G}, \mathrm{V})$ telle que $\omega = \delta\eta$. On note leur ensemble par $\mathrm{Z}^k(\mathcal{G}, \mathrm{V})$.

Lemme 3. $\mathrm{B}^k(\mathcal{G}, \mathrm{V})$ *et* $\mathrm{Z}^k(\mathcal{G}, \mathrm{V})$ *sont des* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels, et* $\mathrm{Z}^k(\mathcal{G}, \mathrm{V})$ *est un sous-espace de* $\mathrm{B}^k(\mathcal{G}, \mathrm{V})$.

Démonstration. C'est immédiat. Le deuxième point résulte de la Proposition ci-dessus. □

On appel $k^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de $\mathcal{G}$, à coefficients dans V (ou par rapport à la représentation ρ), l'espace vectoriel quotient

$$H^k(\mathcal{G}, V) = B^k(\mathcal{G}, V)/Z^k(\mathcal{G}, V).$$

Si G est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, alors l'espace $\Omega^*_L(G)$ des 1-formes différentielles invariantes à gauche sur G est un sous-complexe du complexe de de Rham de G qui est naturellement isomorphe au complexe de Chevalley-Eilenberg $C^*(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ pour l'action triviale de $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{R}$, qui implique que leurs cohomologies sont isomorphes :

$$H^*_L(G) \cong H^*(\mathcal{G}, \mathbb{R}). \tag{3.2}$$

(L'isomorphisme de $\Omega^*_L(G)$ sur $C^*(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ associe toute 1-forme invariante à gauche à sa valeur en l'élément neutre e de G, après identification de $\mathcal{G}^*$ avec T_eG). En particulier, lorsque G est compact le processus de la moyenne $\alpha \mapsto \int_G L_g^\alpha \, dg$ (α dénote une forme différentielle sur G, et L_g dénote la translation à gauche par $g \in G$) induit un isomorphisme de $H^*_{dR}G$ dans $H^*_L(G)$, et on a $H_{dR}(G) \cong H^*(\mathcal{G}, \mathbb{R})$.

Théorème 2 (Whitehead1)**.** *Si $\mathcal{G}$ est semi-simple et* V *est un $\mathcal{G}$-module de dimension finie, alors* $H^1(\mathcal{G}, V) = 0$ *et* $H^2(\mathcal{G}, V) = 0$.

Théorème 3 (Whitehead2)**.** *Si $\mathcal{G}$ est semi-simple et* V *est un $\mathcal{G}$-module de dimension finie, et* $V^{\mathcal{G}} = 0$ *où* $V^{\mathcal{G}} = \{v \in V,\ \rho(x) \cdot v = 0,$ *pour tout* $x \in \mathcal{G}\}$ *est l'ensemble des éléments de* V *qui sont invariants par l'action de $\mathcal{G}$, alors*

$$H^k(\mathcal{G}, V) = 0, \quad \textit{pour tout } k \geq 0.$$

Représentation adjointe Le cas important, qui nous intéresse, est la cohomologie relative à la représentation adjointe, c'est-à-dire au morphisme d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad}: & \mathcal{G} & \to & g\ell(\mathcal{G}) \\ & x & \mapsto & \mathrm{ad}_x, \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad}_x: & \mathcal{G} & \to & \mathcal{G} \\ & y & \mapsto & \mathrm{ad}_x(y) = [x, y] \end{array}$$

$V = \wedge^2\mathcal{G}$ et $\rho = \mathrm{ad}^{(2)} : \mathcal{G} \to g\ell(\wedge^2\mathcal{G})$, $x \mapsto \mathrm{ad}_x^{(2)}$ o

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad}_x^{(2)}: & \wedge^2\mathcal{G} & \to & \wedge^2\mathcal{G} \\ & y & \mapsto & \mathrm{ad}_x(y)\wedge z + y \wedge \mathrm{ad}_x(z) \end{array}$$

Autrement dit, puisque $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$ on a

$$\rho(x)(y \wedge z) = [x, y] \wedge z + y \wedge [x, z].$$

3.2 Intégration des algèbres et des bigèbres de Lie

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie et soit G son groupe de Lie connexe et simplement connexe. Soit $\xi : \mathcal{G} \to \wedge^2\mathcal{G}$ un 1-cocycle pour la représentation adjointe de $\mathcal{G}$ sur $\wedge^2\mathcal{G}$. Pour tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(G)$ on associé la 1-forme différentielle P à valeurs dans $\wedge^2\mathcal{G}$, définie par

$$< P, X > (g) = \mathrm{Ad}(g) \cdot \xi\left(L_g * X\right). \tag{3.3}$$

On a

$$\begin{aligned} < L_g^* P, X > (h) &= < P, L_{g*}X > (gh) \\ &= \mathrm{Ad}(gh) \cdot \xi\left(L_{gh}^* L_{g*} X\right) \\ &= \mathrm{Ad}(g)\mathrm{Ad}(h) \cdot \xi\left(L_h^* X\right) \\ &= \mathrm{Ad}(g) \cdot < P, X > (h), \end{aligned}$$

donc P est équivariante, c'est-à-dire

$$L_g^* P = \mathrm{Ad}(g) \cdot P. \tag{3.4}$$

D'autre part, $dP = 0$ puisque ξ est un cocycle. En effet,
Comme G est simplement connexe, P est exacte et donc il existe une unique fonction Λ à valeurs dans $\wedge^2\mathcal{G}$, $\Lambda : G \mapsto \wedge^2\mathcal{G}$, telle que $d\Lambda = P$ et $\Lambda(e) = 0$. On définit un champ de bivecteurs par

$$\pi(g) = R_{g*}\Lambda(g) \tag{3.5}$$

D'après le Théorème, π est multiplicatif, si et seulement si, Λ est un 1-cocycle pour la représentation adjointe de G sur $\wedge^2\mathcal{G}$, c'est-à-dire

$$\Lambda(gh) = \Lambda(g) + \mathrm{Ad}(g)\cdot\Lambda(h)$$

et ceci est vérifié, puisque P est équivariante.

BIBLIOGRAPHIE

[Ca-Gu-Ra] Cahen, M., Gutt, S., Rawnsley, J., *Some remarks on the classification of Poisson-Lie groups* Contemporary Math. 179 (1994), 1-16.

[Dr1] Drinfel'd, V. G., *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang - Baxter equations*, Soviet Math. Dokl. **27** **(1)** (1983), 68-71.

[Dr2] Drinfel'd, V. G., *Quantum groups*, Proc. ICM, Berkeley, **1** (1986), 789-820.

[Duf-Zun] Dufour, J.-P. & Zung, N.T., *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Progress in Mathematics, Vol 242, Birkhäuser, Berlin 2005.

[Gam] Gammella, A., *Déformations sur les variétés de Poisson et cohomologies appropriées*, Thèse de Doctorat de l'université de Metz (2001).

[Gor] Gorbatsevich, V., V., *The construction of a simply connected Lie group with a given Lie algebra*, Russian Math. Surveys 41 (1986), 207–208.

[He] Helgason, S., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, (1978).

[Kau] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations*, Lect. Notes Phys., 638, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 107-173.

[Lu] Lu, J. H., *Multiplicative and affine Poisson structures on Lie groups*, Ph.D thesis, Berkley.

[Lu-We1] Lu, J. H. & Weinstein, A., *Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat decompositions*, Journal of Differential Geometry, **31** (1990), 501-526.

[STS1] Semenov-Tian-Shansky, M. A., *What is a classical r-matrix ?*, Funct. Anal. Appl. **17** **(4)** (1983), 259-272.

[STS2] Semenov-Tian-Shansky, M. A., *Dressing transformations and Poisson Lie group actions*, Publ. RIMS, Kyoto University, **21** (1985), 1237-1260.

[Vai] Vaisman, I., *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Mathematics. Vol 118, Birkhäuser, Basel 1994.

[We1] Weinstein, A.,*The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geometry, **18** (1983), 523-557.

[We6] Weinstein, A., *Some remarks on dressing transformations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A, Math. **36** (1988), 163-167.