

République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

N°d'ordre :

N°de série :

Faculté des Mathématiques et des Sciences

De la Matière

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
MASTER

Spécialité : Mathématique

Option : Probabilité et Statistique

Présenté par :

MEFTAH Zohra

Thème :

***Estimation non paramétrique pour les
modèles autorégressifs***

Soutenu publiquement le: juillet 2017

Devant le jury composé de:

Mr. MEFLAH Mabrouk .Université de KASDI Merbah – Ouargla Président

M^{elle} .MEDDI Fatima. Université de KASDI Merbah – Ouargla Examinatrice

Mr.BAHEDDIA Issa. Université de KASDI Merbah – Ouargla Rapporteur

Notations générales

$AIC(p, q)$	Critère d'Akaike
$BIC(p, q)$	Critère de Schwarz
MA	Moyennes Mobiles
AR	Autorégressifs
BB	Bruit Blanc
FAC	Fonction d'autocorrélation
$FACP$	Fonction d'autocorrélation partielle
MCO	Méthode moindres carrés ordinaires
JB	Test de Jarque Bera

Table des matières

Introduction générale	1
1 Généralités sur les séries chronologiques	2
1.1 Séries temporelles	2
1.1.1 Analyse des séries temporelles	3
1.1.2 Modélisation d'une série temporelle	3
1.1.3 Série linéaire	5
1.1.4 Modèle stationnaire	5
1.2 Autocovariance et Autocorrélation	6
1.2.1 La fonction d'autocorrélation partielle	7
1.2.2 Graphiques pour les séries temporelles	9
1.2.3 Les processus stationnaires	10
2 Modèles linéaire autorégressif les plus importants	16
2.1 Modèles d'une série chronologique	16
2.1.1 Modèle autorégressif $AR(p)$	16
2.1.2 Caractéristiques des processus $AR(p)$	19
2.1.3 Inférence statistique pour les modèles autorégressifs	22
2.1.4 Moyenne mobile $MA(q)$	24
2.2 Caractéristiques des processus $MA(q)$	26
2.2.1 Fonction d'autocorrélation partielle	27
2.3 Fonction d'autocorrélation	28

2.3.1	Méthode de Box et Jenkins	30
2.3.2	Estimation d'un processus	31
2.4	Estimation des paramètres du processus <i>ARMA</i> (p, q)	31
2.4.1	Méthode d'estimation du maximum de vraisemblance	32
2.4.2	Méthode des Moindres carrés conditionnels	33
2.4.3	Critères de choix des modèles	33
2.4.4	Validation	34
3	Variations des prix de pétrole pendant les trois dernières années	37
3.1	Identification de la série	38
3.2	Test de racine unitaire	39
3.3	Stationnarisation de la série	41
	Conclusion générale	36
	Bibliographie	36
	Table des figures	

Liste des Figures

FIG.3.1-Graphique de l'évolution du prix du pétrole pendant trois années (2014 – 2016).....	40
FIG.3.2 - Corrélogramme de la série.....	41
FIG.3.3 - Test ADF de la série.....	43
FIG.3.4- Estimation de la tendance.....	44
FIG.3.5-La série stationnairée	44

Introduction générale

Depuis toujours, l'homme a voulu prédire l'avenir, que ce soit pour prendre de meilleures décisions ou simplement pour satisfaire sa curiosité.

Les années 20, (1927 - 1933) montre qu'en calculant une moyenne mobile (MA) à partir d'un (bruit blanc), on obtient une série dont les observations ne sont pas indépendantes et qui présentent des cycles apparents. Et dans le même ordre d'idées, en (1926-27) Yule propose le modèle autorégressif (AR), et montre que celui-ci peut conduire à l'apparition des fluctuations cycliques .

Les objectifs pour l'étude des séries chronologiques peuvent être divisés en deux composantes principales:

- La description et la compréhension du mécanisme de production de la série, qui comprend l'analyse descriptive des données et la modélisation,
- La prévision des valeurs futures et l'estimation des risques extrêmes.

Les deux premiers chapitres introduisent deux concepts fondamentaux pour la suite : les séries chronologiques , nous rappelons les principales définitions , notations et que résultats que nous verrons souvent dans la théorie des séries temporelles , notamment : densité spectrale les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation, la stationnarité , modélisation d'une série temporelle.

Ensuite , l'estimation non paramétriques de la tendance qui ne suppose rien sur celle-ci a priori et on approxime la tendance par la moyenne mobile arithmétique , on utilise les modèles : AR, MA, ARMA, ARIMA.

Le troisième chapitres est consacré à l'application : de l'estimation d'une fonction inconnue l'évolution du prix de pétrole pendant les dernières années, à l'aide des données par les modèles autorégressifs.

Chapitre 1

Généralités sur les séries chronologiques

La nature intrinsèque d'une série chronologique est telle que les valeurs observées sont généralement dépendantes et l'objectif est d'identifier et de modéliser la structure de dépendance temporelle. Nous nous intéressons dans ce mémoire principalement à des séries chronologiques linéaires $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, dans lesquelles l'observation à l'instant courant est supposée le résultat du filtrage linéaire invariant dans le temps d'un bruit blanc stationnaire. Nous considérons aussi des séries non stationnaires, mais pouvant être rendu stationnaire en différenciant la série en un nombre suffisant de fois.

1.1 Séries temporelles

La théorie des séries temporelles est une combinaison de deux concepts, probabiliste et statistique, le probabiliste dont on étudie les caractéristiques des variables aléatoires X_t . Le problème statistique est de donner les caractéristiques des distributions de la série temporelle X_t , pour les observations X_1, X_2, \dots, X_n au temps $t = 1, 2, \dots, n$. Le modèle statistique résultant sert à la compréhension du système stochastique d'une part et la prédiction du future (*i.e.* X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) d'autre part.

1.1.1 Analyse des séries temporelles

Le terme "série temporelle" désigne à la fois les séries chronologiques réelles et une suite théorique des variables aléatoires indéterminées par le temps ($t \in T$), qui va servir à modéliser ces premières.

Définition 1.1.1 : "Série temporelle"

Une série temporelle est une suite d'observations répétées, correspondant à des dates différentes, ou encore à un ensemble de valeurs représentant l'évolution d'un phénomène au cours du temps. Généralement, les observations d'un phénomène sont équidistantes, les unes des autres (temps discret, $t \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots$), le temps correspondant à un jour, un mois, une année.... Si par exemple on travaille dans des domaines tels que les finances, on peut citer entre autres : la valeur journalière du Dollar (\$) en Euro (€), à l'ouverture du marché boursière, les données mensuelles du chômage, les prix d'action, ...etc. Mais il existe d'autres domaines (comme en Physique), où les observations sont élevées de façon continue, l'indice t prend des valeurs dans un intervalle de \mathbb{R} .

Définition 1.1.2 ⁽¹⁾ Une série temporelle (ou chronologique) est une suite d'observations x_1, x_2, \dots, x_n indexée par le temps. On supposera qu'il s'agit d'une réalisation d'un processus X , c'est à dire d'une suite $\{X_i\}$ de variables aléatoires.

Définition 1.1.3 ⁽²⁾ L'étude des séries temporelles, correspond en statistique à des observations régulièrement espacées dans le temps.

1.1.2 Modélisation d'une série temporelle

La modélisation des séries temporelles se fait à partir de la décomposition classique, "décomposition de Persons" en fonction des quatre éléments suivants

1. Tendence (T_i) : mouvement à long terme (longue période).

⁽⁰⁾[22]

⁽¹⁾[14]

⁽²⁾[4][7][21]

-
2. Saisonnière (S_t) : fonction périodique du temps (période courte).
 3. Cycle (C_t) : cycle d'affaires, fluctuation périodique (moyenne terme).
 4. Résidu (ε_t) : partie irrégulière, correspondante à la notion d'écart au modèle ou encore bruit.

D'une manière générale, on peut proposer un modèle qui représente la série temporelle étudiée en combinaison des quatre éléments précédents. Pour cela, on a trois types de modèles: le premier est le modèle d'ajustement de forme additive ou multiplicative comme suit

$$X_t = T_t + S_t + C_t + \varepsilon_t \text{ (additive) ou } X_t = T_t S_t C_t + \varepsilon_t \text{ (multiplicative)}$$

Le deuxième type est le modèle, dont on suppose que X_t est une fonction de ces valeurs passées et d'une perturbation aléatoire ε_t :

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, \varepsilon_t)$$

dans cette classe, on peut citer les modèles *AR*, *MA*, *ARMA*, *ARIMA*, *SARIMA*, Dans cette catégorie de modèle, la variable aléatoire X_t est exprimée en fonction d'une autre variable Y_t et d'une perturbation aléatoire ε_t :

$$X_t = f(Y_t, \varepsilon_t)$$

ou Y_t est soit déterministe ou aléatoire, dans ce dernier cas les processus $(Y_t)_t$ et $(\varepsilon_t)_t$ ont certaines propriétés d'indépendance ou de non corrélation.

Ces modèles sont les modèles de base nous les considérons essentiellement pour faire le lien entre eux. On a ainsi deux cas particuliers de modèle explicatif, modèle explicatif statique ou les variables Y_t ne contiennent pas de valeurs passées de X_t et les ε_t sont indépendantes entre eux. Le deuxième cas est le modèle explicatif dynamique, ou les ε_t sont autocorrélés et les Y_t contiennent des valeurs passées de X_t .

1.1.3 Série linéaire

Définition 1.1.4 Une série X_t est dite linéaire si elle peut s'écrire :

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} ,$$

ou $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\psi_0 = 1$ et la suite (ψ_i) est absolument sommable, c'est à dire

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\psi_i| < \infty .$$

Une série X_t est dite linéaire et causale si elle est linéaire avec $\psi_i = 0$, $i < 0$

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} ,$$

On admettra qu'une série linéaire est stationnaire . l'étude des séries non causales conduit à des résultats non intuitifs difficilement utilisables.

1.1.4 Modèle stationnaire

La représentation des phénomènes aléatoires dépendants du temps.

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, T un ensemble non vide d'indice (par exemple $:\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+, \dots$ etc.) X_t une fonction de $T \times \Omega$ à valeurs dans ε qui associé à tout couple (t, ω) le processus $X_t(\omega)$,avec ε désignant l'espace d'états du processus. D'ou :

i- pour $t \in T$, fixé : $X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.

ii- pour $\omega \in \Omega$, fixé : $X_t(\omega)$ est une trajectoire.

Définition 1.1.5 ⁽¹⁾ "*Processus stochastique*"

Un processus stochastique défini sur T noté $(X_t(\omega))_{t \in T}$ ou simplement $(X_t)_t$, est une collection de variable aléatoire X_t de Ω à valeurs dans \mathbb{R} , de telle maniere qu'à chaque élément $t \in T$ est associée une variable aléatoire X_t . On a ainsi deux cas :

⁽¹⁾[22]

i- Un processus en temps discrète. Si T est discrète ; ($T \subseteq \mathbb{Z}$).

ii- Un processus en temps continue si T est continue ; ($T \subseteq \mathbb{R}$).

Par conséquence, on s'intéresse aux modèles stochastiques , dont les éléments X_t de la série temporelle $(X_t)_t$ sont considérés comme des variables aléatoires. Par la suite on désigne par un modèle, le processus stochastique qui modélise la série temporelle .

Généralement, les variables d'une série $(X_t)_t$ ne sont ni indépendantes, ni identiquement distribuées. Les moyennes, variances et covariances de ces variables dépendent de leurs positions dans la série. En particulier, si on suppose que $(X_t)_t$ est de carré intégrable

$$(i.e. E [X_t^2] < \infty, \forall t \in T), \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu_t \quad , \quad \text{var}(X_t) = \sigma_t^2 \\ \text{Cov} (X_t, X_{t-h}) &= E[(X_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h})] \quad , \quad h \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

1.2 Autocovariance et Autocorrélation

Définition 1.2.1 "Fonction d'autocovariance "

La fonction d'autocovariance d'une série temporelle $(X_t)_t$ est une suite $(\gamma(h))_{h \in \mathbb{Z}}$, avec c'est une fonction paire, semi définie positive , i.e.

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \gamma(t_i - t_j) \geq 0 \\ |\gamma_X(h)| &\leq \gamma_X(0) = \text{var}(X_t) \quad , h \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Remarque La fonction $\gamma_X(h)$ est paire i.e :

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$$

Définition 1.2.2 "Fonction d'autocorrélation "

De même , on définit une suite $(\rho_X(h))_{h \in \mathbb{Z}}$ qu'on appelle fonction d'autocorrélation de la série $(X_t)_t$

$$\begin{aligned} \rho_X(h) &= \text{corr}(X_t, X_{t-h}) \\ &= \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{\text{var}(X_t)}\sqrt{\text{var}(X_{t-h})}} \\ &= \frac{\rho_X(h)}{\rho_X(0)} \end{aligned}$$

c'est une fonction paire, semi définie positive , i.e.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \rho(t_i - t_j) &\geq 0 \\ |\rho_X(h)| &\leq \rho_X(0) = 1 \quad h \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 Cette fonction $\rho_X(\cdot)$ est à valeurs dans $[-1, 1]$ et $\rho_X(0) = 1$.

Définition 1.2.3 La matrice d'autocorrélation du vecteur $(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1})$ est :

$$R(h) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(h-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \rho(h-3) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.1 La fonction d'autocorrélation partielle

L'autocorrélation partielle mesure la corrélation entre X_t et X_{t-h} sans toutefois prendre en considération l'influence des variables antérieures à X_{t-h} . Ainsi, on peut montrer que la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est donnée par

$$\Psi_X(h) = \frac{|R^*(h)|}{|R(h)|} \quad \text{pour tout } h$$

ou

$$R^*(h) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(h-2) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-3) & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-4) & \rho(3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \rho(h-3) & \rho(h-4) & \rho(h-5) & \dots & \rho(1) & \rho(h-2) \\ \rho(h-2) & \rho(h-3) & \rho(h-4) & \dots & 1 & \rho(h-1) \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \rho(h-3) & \dots & \rho(1) & \rho(h) \end{pmatrix}$$

et

$$R(h) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(h-2) & \rho(h-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-3) & \rho(h-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \rho(h-3) & \dots & \rho(1) & 1 \end{pmatrix}$$

⁽¹⁾Ici, $|A|$ est le déterminant d'une matrice carrée A . Ainsi, les trois premières autocorrélations partielles sont déterminées par les relations

$$\begin{aligned} \Psi(1) &= \rho(1) \\ \Psi(2) &= \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2} \\ \Psi(3) &= \frac{\rho(1)^3 - \rho(1)\rho(2)(2 - \rho(2)) + \rho(3)(1 - \rho(1)^2)}{1 - \rho(2)^2 - 2\rho(1)^2(1 - \rho(2))} \end{aligned}$$

⁽¹⁾[18]

1.2.2 Graphiques pour les séries temporelles

Chronogramme: L'étude d'une série temporelle commence par l'examen de son chronogramme. Il en donne une vue d'ensemble, montre certains aspects, comme d'éventuelles ruptures, un changement dans la dynamique de la série.

Corrélogramme: Un corrélogramme est la représentation graphique de la fonction d'autocorrélation, qui est un concept lié à celui de corrélation il s'agit non pas d'un calcul entre deux chroniques différentes mais entre la série et elle-même à différents décalages dans le temps permettant de déceler des liaisons internes à la série

Processus bruit blanc

Définition 1.2.4 ⁽¹⁾ *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{X_t, t \in I\}$ toutes définies sur (Ω, F, P) . I est un ensemble qui représentera \mathbb{N} ou \mathbb{Z} .*

Définition 1.2.5 *Le bruit blanc fait partie de la classe des processus stationnaires. spécifiquement, $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc si*

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t) = 0 & \text{pour tout } t \\ E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 & \text{pour tout } t \\ \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0 & \text{pour tout } t \text{ et } h \neq 0 \end{cases}$$

Remarque 1.2.2 *Par conséquent, le comportement d'un bruit blanc au temps t n'a aucune incidence sur celui-ci au temps $t+h$. on parle de bruit blanc gaussien lorsque $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ sont i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées)*

Définition 1.2.6 ⁽²⁾ *"Densité spectrale"*

La densité spectrale notée f , d'une série temporelle $(X_t)_t$ est une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) \exp(ih\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

⁽¹⁾[21]

⁽²⁾[22]

Propriété "Propriété d'un bruit blanc"

1. La densité spectrale d'un bruit blanc est constante en λ .
2. Tout processus stationnaire de densité spectrale constante est un bruit blanc.

Preuve. Soit $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc i.i.d, centré et de variance $\sigma^2 < \infty$, de fonction d'autocovariance $\gamma_\varepsilon(h)$ et de densité spectrale $f_\varepsilon(\lambda)$.

1. Pour ce bruit blanc, on a

$$\gamma_\varepsilon(h) = \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

donc

$$f_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2\Pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_\varepsilon(h) \exp(ih\lambda) = \frac{\sigma^2}{2}, \quad (\text{constante en } \lambda).$$

2. Inversement, si $f_\varepsilon \equiv C^{te}$

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon(h) &= \int_{-\Pi}^{\Pi} \exp(-ih\lambda) f_\varepsilon(h) d\lambda \\ &= \int_{-\Pi}^{\Pi} C^{te} \exp(-ih\lambda) d\lambda = \begin{cases} \gamma_\varepsilon(h) & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour que ce processus soit un bruit blanc, il suffit donc qu'il soit stationnaire, c'est le cas (par hypothèse). ■

1.2.3 Les processus stationnaires

⁽¹⁾ La stationnarité est une caractéristique d'une série chronologique qui implique que le comportement de la série ne dépend pas du temps. En particulier, on dit qu'une série $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stable si elle ne comporte pas de tendance saisonnière, pas de tendance à la hausse ou à la baisse. Plus formellement, on distingue deux types de stationnarité, à savoir forte et faible.

⁽¹⁾[8][20]

Définition 1.2.7 ⁽²⁾ : "*Série fortement stationnaire*"

Une série temporelle $(X_t)_t$ est fortement (ou strictement) stationnaire, si et seulement si $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{D}{=} (X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k})$.

On dit alors, que la loi de vecteur $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ est identique à celle de $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k})$ pour tout sous ensemble $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subseteq T, \forall k \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.8 ⁽¹⁾ "*Série faiblement stationnaire*"

Une série temporelle $(X_t)_t$ est faiblement stationnaire (ou stationnaire du second ordre), si et seulement si:

1. $E[X_t^2] < \infty, \forall t \in T$,
2. $E[X_t] = E[X_s] = \mu, \forall s, t \in T$,
3. $Cov(X_s, X_t) = Cov(X_{s+k}, X_{t+k}), \forall s, t \in T, \forall k \in \mathbb{N}$.

L'existence de la fonction d'autocovariance d'une série temporelle stationnaire (on dit souvent stationnaire au lieu de faiblement stationnaire) est assurée par la proposition suivante :

Proposition 1.2.1 *Si la série temporelle $(X_t)_t$ est stationnaire, alors il existe une fonction $\gamma_X : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que les autocovariances ne dépendent que de la différence entre les observations :*

$$Cov(X_s, X_t) = \gamma_X(|t - s|), \forall s, t \in \mathbb{Z}.$$

Preuve. Soit $r \in \mathbb{Z}$, comme $(X_t)_t$ est stationnaire, donc pour tout $s, t \in \mathbb{Z}$:

1^{ere} cas : si $s \leq t$

$$\begin{aligned} Cov(X_s, X_t) &= Cov(X_{s+r-s}, X_{t+r-s}) \\ &= Cov(X_r, X_{r+t-s}), \quad \text{si } s < r. \end{aligned}$$

⁽²⁾[17]

⁽¹⁾[17]

De plus,

2^{eme} cas : si $s > t$

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \text{Cov}(X_t, X_s) = \text{Cov}(X_r, X_{r+s-t}),$$

d'où $\forall s, t \in \mathbb{Z}$:

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \text{Cov}(X_r, X_{r+|t-s|}) = \gamma_X(|t-s|).$$

■

Remarque 1.2.3 1. Si $\forall t \in T, (X_t)_t$ est de carré intégrable, la stationnarité forte implique alors la stationnarité faible.

2. Si la série $(X_t)_t$ est gaussienne, la stationnarité faible implique alors la stationnarité forte.

3. Par la suite, on désigne par un bruit blanc la suite $(\varepsilon_t)_t$ de variables aléatoires i.i.d, centrée et de variance σ^2 ($\text{Var}(\varepsilon_t) = E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$). Dans ce cas, il est clair qu'un bruit blanc est un processus stationnaire du second ordre, avec :

$$\gamma_\varepsilon(0) = \sigma^2 \text{ et pour tout } k \neq 0, \gamma_\varepsilon(k) = 0.$$

Processus a tendance stationnaire (TS)

Ce processus présente une non stationnarité de nature déterministe et sert à enlever la tendance, il s'écrit comme suit :

$$Y_t = \alpha + \beta_t + \varepsilon_t$$

ou ε_t représente l'erreur du modèle. On peut clairement voir que Y_t n'est pas stationnaire, car son moment d'ordre 1 :

$$E(Y_t) = \alpha + \beta_t \quad \text{dépend du temps } t.$$

Processus a difference stationnaire (DS)

Le processus (DS) présente une non stationnairté de nature stochastique et sert à enlever la saisonnalité, il est aussi appelé marche aléatoire (Random Walk), ce processus s'écrit sous la forme suivante :

$$Y_t = Y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

ou $\beta \in \mathbb{R}$ et ε_t représente l'erreur du modèle $\{Y_t, \forall t \in \mathbb{Z}\}$ est dit d'ordre d (ordre d'intégration) si le processus filtré par $(1 - L)^d$ est stationnaire.

La stationnairté est utilisée comme un outil pour l'analyse des séries chronologiques. Les données brutes d'une série quelconque sont souvent transformées pour la rendre stationnaire, à l'exemple des séries financières qui sont souvent saisonnières et dépendant d'un niveau de prix non stationnaire. Dans la suite de ce travail, nous allons nous intéresser aux processus stationnaires.

Théorème 1.2.1 de Wold

(1) Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus centré et stationnaire au second ordre, alors on a la décomposition

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + V_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

ou

1- $\psi_0 = 1$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j^2 < \infty$ $\psi_j \in \mathbb{R}$

2- $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est le bruit blanc de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$

3- $(V_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus déterministe

4- $Cov(\varepsilon_t, V_s) = 0$, $\forall s, t \in \mathbb{Z}$

Ce résultat informatif est peu utile en pratique car les coefficients ψ_j sont inconnus, nous verrons que certaines modélisations font intervenir une infinité de termes.

⁽¹⁾[2][18]

Opérateur retard

On aura souvent à considérer une variable en fonction de son passé. Il est donc commode de définir un opérateur qui transforme une variable X_t en sa valeur passée. C'est l'opérateur retard désigné par la lettre L et tel que:

$$LX_t = X_{t-1} \quad \text{et} \quad L^k X_t = X_{t-k}$$

Cet opérateur sera utilisé à l'intérieur de polynômes notés par exemple:

$$B(L) = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_q L^q$$

Alors :

$$B(L)X_t = \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_q X_{t-q}$$

Les opérations usuelles telles que l'addition, multiplication, division et inverse sont possibles sur l'ensemble des polynômes de retard avec les mêmes propriétés que sur les séries entières. On retiendra en premier deux valeurs particulières des polynômes de retard $B(0)$ qui donne la valeur du premier coefficient du polynôme, son terme constant et $B(1)$ qui fournit lui la somme des coefficients de ce même polynôme. Enfin, l'opérateur $1 - L$ joue un rôle spécial dans la mesure ou il permet de prendre la différence première d'une série:

$$(1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}$$

Propriétés de l'opérateur retard

- 1- $L^j X_{t-j} = X_{t-j}$
- 2- $L^0 X_t = X_t$
- 3- Si $X_t = c \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, alors $L^j X_t = L^j c = c$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$,
- 4- $L^j(L^k X_t) = L^{j+k} X_t = X_{t-j+k}$
- 5- $L^{-j} X_t = X_{t+j}$
- 6- $(L^j + L^k)X_t = L^j X_t + L^k X_t = X_{t-j} + X_{t-k}$
- 7- Si $|a| < 1$, alors

$$(1 - aL)^{-1} X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j X_{t-j}$$

Définition 1.2.9 *d'une moyenne mobile*

On appelle moyennes mobiles centrées de longueur P ($P < t$) de la série $\{x_t, t = 1, \dots, T\}$ les moyennes successives calculées en fonction de la parité de P selon les formules qui suivent:

- Premier cas, P impair, $P = 2m + 1$:

$$M_P(t) = \frac{1}{P} \sum_{k=-m}^{+m} x_{t+k}. \text{ Il y a } (T - P + 1) \text{ moyennes mobiles centrées de longueur impaire } P.$$

- Deuxième cas, P pair, $P = 2m$:

$$M_P(t) = \frac{1}{P} \left(\frac{x_{t-m}}{2} + \sum_{k=-m+1}^{m-1} x_{t+k} + \frac{x_{t+m}}{2} \right)$$

la moyenne mobile centrée $M_{2m}(t)$ apparaît comme la moyenne pondérée de valeurs de la série encadrant la date t avec les coefficients de pondération égaux à $\frac{1}{2P}$ pour les deux valeurs extrêmes x_{t-m} et x_{t+m} et égaux à $\frac{1}{P}$ pour les $(P - 2)$ valeurs intermédiaires x_{t-m+1} à x_{t+m-1} . Elle comporte donc $(P + 1)$ termes:

valeurs	x_{t-m}	x_{t-m+1}	...	x_t	...	x_{t+m-1}	x_{t+m}
pondérations	$\frac{1}{2P}$	$\frac{1}{P}$...	$\frac{1}{P}$...	$\frac{1}{P}$	$\frac{1}{2P}$

Il y a $(T - P)$ moyenne mobile centrées de longueur paire P . Pour simplifier, la longueur P de la moyenne mobile étant fixée, on notera désormais Y_t la moyenne mobile centrée de longueur P à la data t .

Chapitre 2

Modèles linéaire autorégressif les plus importants

2.1 Modèles d'une série chronologique

Dans cette section, on considère certains modèles fréquemment utilisés pour une série chronologique $\{X_t\}$. Nous commençons par trois types de modèle temporels : les modèles autorégressifs (AR), les modèles moyenne mobile (MA) et les modèles intégrés (I).

2.1.1 Modèle autorégressif $AR(p)$

Les premiers processus autorégressifs ont été introduits par George Udny Yule. Dans cet article, Yule utilise le premier modèle autorégressif pour modéliser la série chronologique du nombre de taches solaires plutôt que la méthode du périodogramme de Schuster.

Définition 2.1.1 ⁽¹⁾ "Modèle Auto-Regressif d'ordre p "

Un modèle autoregressif d'ordre p noté $AR(p)$, est un processus stationnaire $(X_t)_t$ qui vérifie la relation de type :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

⁽¹⁾[22]

ou les $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ sont des réelles et $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc (suite de variables aléatoires (i.i.d), centrée et de variance finie).

En fonction d'opérateur L , la relation précédente prend la forme :

$$X_t = \varepsilon_t + \Phi(L)X_t.$$

Définition 2.1.2 La suite $\{X_t : t \geq 0\}$ est un processus autorégressif d'ordre p ($p > 0$) s'il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad \text{ou } \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2). \\ X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

Les ϕ_j ($j = 1, 2, \dots, p$) constituent les paramètres du modèle,

Dans ce cas, on note $\{X_t\} \sim AR(p)$, De la même façon, on peut réécrire un processus $AR(p)$ avec un polynôme $\phi(L)$ qui multipliera X_t cette fois-ci :

$$\phi(L)X_t = \varepsilon_t$$

avec

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p.$$

Définition 2.1.3 ⁽¹⁾ On dit que la série X_t suit un processus autorégressif d'ordre 1 $AR(1)$

si on peut écrire :

$$\begin{aligned} X_t &= \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= X_t - \phi X_{t-1} \\ \varepsilon_t &= (1 - \phi L)X_t \end{aligned}$$

Définition 2.1.4 Un processus autorégressif d'ordre 1 s'écrit:

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{ou } \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2).$$

⁽¹⁾[13][5]

La stationnarité:

(2) On considère un processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ stationnaire représenté par un $AR(p)$ tel que :

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\Phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$$

avec

$$\Phi(L) = \phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

avec $\phi_0 = 1$.

Si le processus X_t est stationnaire, alors toutes les racines du polynôme $\Phi(L)$ sont strictement supérieures à 1 en module, ce qui implique en particulier que $\Phi(1) \neq 0$, dès lors

$$m = E(X_t) = \frac{c}{\Phi(1)} = \frac{c}{\phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i} = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$$

Le modèle $AR(p)$ est stationnaire si toutes les racines de $\Phi(L)$ soient à l'extérieur du cercle unité i.e: les racine de $\Phi(L)$ en leur module supérieures à 1 .

Supposons que $p = 2$. Appelons s_1 et s_2 les racines réelles ou complexes de

$$1 - \phi_1 Z - \phi_2 Z^2 = \left(1 - \frac{Z}{s_1}\right)\left(1 - \frac{Z}{s_2}\right)$$

et on voit que le développement en série de $1 - \phi_1 Z - \phi_2 Z^2$ est possible si les racines de ce polynome sont en module strictement supérieures à 1. Dans ce cas X_t est stationnaire, de moyenne

$$\mu = \frac{c}{(1 - \phi_1 - \phi_2)}.$$

Remarque 2.1.1 *En toute généralité, un processus $AR(p)$ vérifié une relation de la forme $\Phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$ ou c est une terme constante. De cette forme générale, il est possible de se ramener à $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$ par une simple translation : il suffit de considérer non pas X_t mais $Y_t = X_t - \mu$ (μ correspond ici à l'espérance de X_t) .*

(2)[21][6][20]

Définition 2.1.5 ⁽¹⁾ *Un processus est dit inversible s'il existe une suite $\{b_j\}$ réelle telle que*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| < \infty$$

et

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j X_{t-j}$$

Une autre façon de dire qu'un processus est inversible est de dire qu'il possède une représentation $AR(\infty)$.

Remarque 2.1.2 *Avec cette définition, tout processus $AR(p)$ est inversible.*

2.1.2 Caractéristiques des processus $AR(p)$

Fonction d'autocorrélation

Proposition 2.1.1 *Les autocovariances et les autocorrélations d'un processus $AR(p)$ ($X_t, t \in \mathbb{Z}$) satisfont la même équation aux différences homogènes que le processus lui-même.*

Fonction d'autocovariance

On cherche tout d'abord à déterminer la fonction d'autocovariance

$$\gamma_k = E[(X_t - m)(X_{t-k} - m)] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Proposition 2.1.2 *La fonction d'autocovariance γ_k d'un processus $AR(p)$ ($X_t, t \in \mathbb{Z}$) satisfait une relation de récurrence de la forme:*

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) - \dots - \phi_p \gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2) + \dots + \phi_p \gamma(k-p) & k > 0 \end{cases}$$

avec $\gamma_k = \gamma_{-k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Preuve. On considère la définition de X_t :

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$X_t X_{t-k} = c X_{t-k} + \phi_1 X_{t-1} X_{t-k} + \phi_2 X_{t-2} X_{t-k} + \dots + \phi_p X_{t-p} X_{t-k} + \varepsilon_t X_{t-k}$$

⁽¹⁾[15]

D'après la définition de la fonction γ_k , on a $\forall k > 0$

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E[(X_t - m)(X_{t-k} - m)] \\ &= E(cX_{t-k}) + \phi_1 E(X_{t-1}X_{t-k}) + \phi_2 E(X_{t-2}X_{t-k}) + \dots + \phi_p E(X_{t-p}X_{t-k}) + E(\varepsilon_t X_{t-k}) \\ &= \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2) + \dots + \phi_p \gamma(k-p)\end{aligned}$$

puisque $E(\varepsilon_t X_{t-k}) = 0$ car X_{t-k} ne dépend que des ε_{t-k-j} avec $j \geq 0$. Don on obtient

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma(k-j), \quad k > 0.$$

En divisant l'égalité par γ_0 , on obtient

$$\rho_k = \sum_{j=1}^p \phi_j \rho(k-j), \quad k > 0.$$

Calcul de γ_0

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= E[(X_t - m)^2] \\ &= E(cX_t) + \phi_1 E(X_{t-1}X_t) + \phi_2 E(X_{t-2}X_t) + \dots + \phi_p E(X_{t-p}X_t) + E(\varepsilon_t X_t) \\ &= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \dots + \phi_p \gamma(p) + E(\varepsilon_t X_t) \\ &= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \dots + \phi_p \gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

On divise les deux membres par γ_0 , on obtient

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1 \rho(1) - \phi_2 \rho(2) - \dots - \phi_p \rho(p)}$$

car $E(\varepsilon_t X_t) = \sigma_\varepsilon^2$ puisque X_t peut s'écrire sous la forme d'une somme pondérée des chocs passés (théorème de Wold) :

$$X_t = \Phi(L)^{-1} \varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad \text{avec } \psi_0 = 1.$$

■

Fonction d'autocorrélation

On sait que par définition :

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Proposition 2.1.3 *La fonction d'autocorrélation, notée $\rho(k)$ ou ρ_k , d'un processus $AR(p)$ $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ satisfait une relation de récurrence de la forme :*

$$\Phi(L)\rho_k = 0 \Leftrightarrow \rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2) + \dots + \phi_p\gamma(k-p) & \forall k \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

Les équations de Yule- Walker pour $k = 1, \dots, p$ peuvent s'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(p-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \rho(p-3) & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation de récurrence sont complètement déterminées par la donnée de conditions initiales $\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(p)$: elles permettent d'obtenir $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(1) = \phi_1 + \phi_2\rho(1) + \dots + \phi_p\rho(p-1) \\ \rho(2) = \phi_1\rho(1) + \phi_2 + \dots + \phi_p\rho(p-2) \\ \dots \\ \rho(p) = \phi_1\rho(p-1) + \phi_2\rho(p-2) + \dots + \phi_p \end{array} \right.$$

On peut donc aussi obtenir $\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(p)$ en fonction de $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$.

Ces relations sont connues sous le nom d'équations de Yule-Walker .

L'autocorrélation d'ordre k est donc déterminée par une équation aux différences homogènes d'ordre k dont on peut donner la solution générale.

Proposition 2.1.4 : *Si le polynôme $\Phi(L)$ admet p racines distinctes $(\lambda_i)_{i=1}^p$, l'autocorrélation d'ordre k est déterminée par la relation*

$$\rho_k = A_1\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^k + A_2\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^k + \dots + A_p\left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^k$$

où les paramètres $(A_i)_{i=1}^p$ sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

Corollaire 2.1.1 : *Suivant les valeurs des racines λ_i on obtient deux cas :*

- Si λ_i est une racine réelle telle que $|\lambda_i| > 1$, alors le produit $A_i\lambda_i^{-k}$ décroît avec k et tend vers 0 (exponentielle amortie).
- Si λ_i est une racine complexe de module strictement supérieur à l'unité, on obtient alors une sinusoïde amortie.

Fonction d'autocorrélation partielle

Dans un modèle autoregressif d'ordre p , il est possible de montrer que

$$T(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \rho(1) & \text{si } k = 1 \\ \phi_p & \text{si } k = p \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

2.1.3 Inférence statistique pour les modèles autorégressifs

Estimation des paramètres

Dans cette section, nous introduisons les équations de Yule- Walker qui permettent d'estimer les paramètres d'un modèle autorégressif. Par la suite, on introduit la méthode du maximum de vraisemblance avec des critères nous permettant de choisir l'ordre d'un modèle AR , MA , ou $ARMA$

Estimation

Pour estimer les coefficients ϕ_j , on introduit les équations de Yule Walker. On écrit l'équation aux différences $\rho(k) = \sum_{j=1}^p \phi_j(k-j)$ ($k = 1, \dots, p$) sous forme matricielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(1) = \phi_1\rho(0) + \phi_2\rho(1) + \dots + \phi_p\rho(p-1); k = 1 \\ \rho(2) = \phi_1\rho(1) + \phi_2\rho(0) + \dots + \phi_p\rho(p-2); k = 2 \\ \rho(p) = \phi_1\rho(p-1) + \phi_2\rho(p-2) + \dots + \phi_p\rho(0); k = p \end{array} \right.$$

que l'on écrira

$$\rho = R_p\phi$$

Ce qui permet d'obtenir les paramètres ϕ_j en fonction des $\rho(i)$

$$\phi = R_p^{-1}\rho$$

don l'estimation des $((\phi_j))_{j=1,\dots,p}$ à l'aide des $\hat{\rho}(i)$:

$$\hat{\phi} = \hat{R}_p\hat{\rho}$$

avec

$$\hat{R}_p = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(2) & \dots & \hat{\rho}(p-1) \\ \hat{\rho}(1) & 1 & \hat{\rho}(1) & \dots & \hat{\rho}(p-2) \\ \hat{\rho}(2) & \hat{\rho}(1) & 1 & \dots & \hat{\rho}(p-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \hat{\rho}(p-1) & \hat{\rho}(p-2) & \hat{\rho}(p-3) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\hat{\rho} = (\hat{\rho}(i))_{i=1, \dots, p}$ et $\hat{\phi}$ le vecteur des paramètres

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix}$$

2.1.4 Moyenne mobile $MA(q)$

C'est Eugen Slutsky qui, en 1927, dans son article, a introduit pour la première fois les processus à moyenne mobile. La définition suivante présente ce processus.

Définition 2.1.6 ⁽¹⁾ *Un modèle moyenne mobile $MA(q)$ est modèle stationnaire vérifié l'équation :*

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q B_j \varepsilon_{t-j} \\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \end{array} \right.$$

Définition 2.1.7 ⁽²⁾ *On dit que la suite $\{X_t : t \geq 0\}$ est un processus à moyenne mobile d'ordre q ($q > 0$) si celui-ci peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} X_t &= m + \varepsilon_t - \sum_{k=1}^q \theta_k \varepsilon_{t-k} \quad \text{ou } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \\ X_t &= m + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

⁽¹⁾[15]

⁽²⁾[21][6]

Les θ_i ($i = 1, 2, \dots, q$) constituent les paramètres du modèle.

Dans ce cas, on note $\{X_t\} \sim MA(q)$.

Un processus MA (1) prend la forme suivante :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \quad \text{ou } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

On peut utiliser l'opérateur de retard L pour écrire ce processus sous une autre forme.

On aura donc un polynôme en L qui multipliera ε_t :

$$X_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

avec

$$\theta(L) = 1 - \theta_1L - \theta_2L^2 - \dots - \theta_qL^q.$$

La stationnarité

On considère un processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ stationnaire, d'espérance $E[X_t] = m$, représenté par un $MA(q)$ tel que :

$$X_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

$$X_t = c + \theta(L)\varepsilon_t$$

avec

$$\theta(L) = 1 - \theta_1L - \theta_2L^2 - \dots - \theta_qL^q$$

avec $\theta_0 = 1$

Remarque 2.1.3 *Si $X_t \sim MA(q)$, alors X_t est stationnaire.*

Nous considérons dans ce qui suit que le modèle moyenne mobile est centré.

Définition 2.1.8 ⁽¹⁾ *Un processus est dit causal s'il existe une suite $\{a_i\}$ réelle telle que*

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty$$

et que

⁽¹⁾[15]

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}$$

Par fois, lorsque l'on parle d'un processus causal, on dit que celui-ci a une représentation $MA(\infty)$.

Remarque 2.1.4 *Tout processus $MA(q)$ est causal.*

Théorème 2.1.1 *Un processus à moyenne mobile $MA(q)$ est inversible si et seulement si son polynôme $\theta(z)$ est tel que*

$$\theta(z) \neq 0 \quad \text{avec } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1.$$

On note la ressemblance de cet énoncé avec le théorème de stationnarité et de causalité pour les processus autorégressifs.

2.2 Caractéristiques des processus $MA(q)$

Fonction d'autocovariance

Proposition 2.2.1 *La fonction d'autocovariance γ_h d'un processus $MA(q)$ $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ défini par $X_t = m + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$ est donnée par la relation :*

$$\gamma_h = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma^2 & h = 0 \\ (-\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \theta_2\theta_{h+2} + \dots + \theta_q\theta_{q-h})\sigma^2 & 0 < h \leq q \\ 0 & h > q \end{cases}$$

Preuve. Pour obtenir ce résultat, il suffit de rappeler que $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-i}) = 0$ si $k \neq 0$ et $E(\varepsilon_{t-i}^2) = \sigma^2, \forall k$. On a :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E[(X_t - m)(X_{t-h} - m)] \\ &= E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-h} - \theta_1 \varepsilon_{t-1-h} - \theta_2 \varepsilon_{t-2-h} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q-h})] \end{aligned}$$

En développant cette expression on retrouve le résultat général énoncé ci dessus. ■

Fonction d'autocorrélation

Proposition 2.2.2 La fonction d'autocorrélation ρ_h d'un processus MA (q) $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ défini par $X_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$ est donnée par la relation :

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \frac{-\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \theta_2\theta_{h+2} + \dots + \theta_q\theta_{q-h}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & 0 < h \leq q \\ 0 & h > q \end{cases}$$

Remarque 2.2.1 La fonction d'autocorrélation d'un MA (q) s'annule à l'ordre (q + 1).

2.2.1 Fonction d'autocorrélation partielle

Proposition 2.2.3 La fonction d'autocorrélation partielle p_h d'un processus MA (q) $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ défini par $X_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$ se comporte comme une exponentielle ou une sinusoïdale amortie.

Les modèles ARMA généralisent simultanément les modèles AR purs et les MA purs. Ces modèles présentent l'avantage d'être plus souples d'utilisation et de fournir généralement de bonnes approximations des séries réelles avec moins de paramètres que les modèles AR ou MA purs.

Définition 2.2.1 ⁽¹⁾ Les modèles ARMA (p, q) s'il existe des suites réelles $\{\phi_j\}$ et $\{\theta_i\}$ telles que

$$X_t - \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} = m + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad \text{avec } \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$$

On peut aussi utiliser les polynômes $\Phi(L)$ et $\theta(L)$ pour réécrire ce modèle sous la forme

$$\Phi(L)X_t = c + \theta(L) \varepsilon_t$$

⁽¹⁾[2][15]

avec

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \quad \text{et} \quad \theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

on note $\{X_t\} \sim ARMA(p, q)$

Remarque 2.2.2 On note certaines propriétés pour les modèles $ARMA(p, q)$:

- 1 - Si $p = q = 0$, on a $X_t = \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$;
- 2 - Si $p = 0$ et $q \neq 0$, on a $\{X_t\} \sim MA(q)$;
- 3 - Si $q = 0$ et $p \neq 0$, on a $\{X_t\} \sim AR(p)$.

La stationnarité:

⁽¹⁾ On considère un processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ stationnaire, d'espérance $E[X_t] = m$, représenté par un $ARMA(p, q)$ tel que :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = m + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

avec ε_t i.i.d. $(0, \sigma^2)$. On pose

$$\Phi(L)X_t = c + \theta(L) \varepsilon_t$$

Les caractéristiques des processus $ARMA(p, q)$:

2.3 Fonction d'autocorrélation

Proposition 2.3.1 ⁽²⁾ : La fonction d'autocovariance γ_k d'un processus stationnaire $ARMA(p, q)$ $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait une relation de récurrence de la forme :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2) + \dots + \phi_p \gamma(k-p) \quad \forall k > q$$

On a donc la même relation de récurrence que pour un $AR(p)$ (équations de Yule Walker), mais cette dernière n'est valable que pour des ordres supérieurs à q . Cette relation n'est pas valable pour $k \leq q$ en raison de la corrélation entre X_{t-j} et $\theta_j \varepsilon_{t-i}$.

⁽¹⁾[20]

⁽²⁾[20]

Proposition 2.3.2 : *La fonction d'autocorrélation ρ_k d'un processus stationnaire ARMA (p, q) $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait une relation de récurrence de la forme :*

$$\rho_k = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \dots + \phi_p \rho(k-p) \quad \forall k > q$$

Tout comme pour le cas de l'AR (p) , on peut obtenir une solution à cette équation.

Lorsque les p racines sont distinctes, cette solution est de la forme

$$\rho_k = A_1 \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^k + A_2 \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^k + \dots + A_p \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^k \quad \forall k > q$$

où les paramètres $(A_i)_{i=1}^p$ sont des constantes déterminées par les conditions initiales et où les paramètres $(\lambda_i)_{i=1}^p$ désignent les p racines distinctes du polynôme associé à la composante

autoregressive du processus : $\Phi(L) = 0$. Mais dans ce cas les valeurs initiales (ρ_1, \dots, ρ_q) sont différentes de celles obtenus pour l'AR (p) et les constantes $(A_i)_{i=1}^p$ sont donc elles mêmes différentes.

Les modèles ARIMA (p, d, q)

Lorsque l'on a une série (X_t) à non stationnarité, il convient de la modéliser à l'aide d'un modèle ARIMA (p, d, q) où d désigne l'ordre de différenciation (ou d'intégration).

Définition 2.3.1 ⁽¹⁾ (X_t) est un modèle autorégressif moyenne mobile intégré stationnaire noté ARIMA (p, d, q) s'il admet la représentation

$$\Phi(L) \Delta^d X_t = \theta(L) \varepsilon_t$$

ou

$$\begin{aligned} \Phi(L) &= 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p & \phi_p &\neq 0 \\ \theta(L) &= 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q & \theta_q &\neq 0 \end{aligned}$$

La série (X_t) est une série non stationnaire alors que la série $Y_t = \Delta^d X_t$ est une série stationnaire. Estimer les paramètres du processus ARIMA (p, d, q) pour la série (X_t) non stationnaire revient à estimer les coefficients du processus ARMA (p, q) pour la série (Y_t) stationnaire.

⁽¹⁾[1][11]

Les modèles *SARIMA*

Une série (X_t) suit un processus *SARIMA* (Seasonnal AutoRegressive Integrated Moving Average) d'ordre $(p, d, q) * (P, D, Q)_s$ si cette série a une saisonnalité de période s et qu'on peut écrire:

$$\Phi_1(L)\Phi_2(L^s)(1-L)^d(1-L^s)^D X_t = \theta_1(L)\theta_2(L^s)\varepsilon_t$$

ou Φ_1 est un polynome de degré p , Φ_2 est de degré P , θ_1 est de degré q et θ_2 est de degré Q .

2.3.1 Méthode de Box et Jenkins

La méthode d'analyse statistique est utilisée dans la modélisation, la description et la prévision de séries temporelles.

⁽¹⁾ La méthodologie de Box et Jenkins permet de déterminer le modèle *ARIMA* adéquat pour la modélisation d'une série chronologique, donc il s'agit de construire un modèle restituant le mieux possible le comportement d'une série temporelle. Cette méthodologie suggère quatre étapes : l'identification, l'estimation, l'critères, les modèles.

Identification du modèle

De façon générale, l'étape d'identification du modèle consiste à identifier le modèle qui représente au mieux la série étudiée. En d'autres mots, il s'agit de trouver un modèle stationnaire qui tient compte de la variabilité dans le temps et pour lequel il y a absence d'autocorrélation des résidus. Plus particulièrement, cette étape implique les méthodes d'estimation du paramètre d'intégration d , l'estimation des ordres p et q , les tests de non stationnarité ou de racine unitaire.

Estimation du paramètre d'intégration

Lorsqu'un processus possède une non stationnarité de type *DS*, on parle alors d'un modèle intégré. Dans ce cas, il convient de déterminer l'ordre d'intégration d du processus filtré (1 –

⁽¹⁾[4][1][3]

$L)^d X_t$ pour lequel le processus est stationnaire, d'où le processus $I(d)$. L'ordre d'intégration " d " est le nombre de différentiation pour que la série initiale sera stationnaire.

2.3.2 Estimation d'un processus

Identification d'un processus AR

Soit un processus stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant une représentation $AR(p)$. Globalement, l'identification d'un processus $AR(p)$ s'effectue de la même façon que celle d'un processus $MA(q)$. La seule différence réside dans le fait que c'est l'autocorrélation partielle, plutôt que l'autocorrélation, qui est utilisée.

Identification d'un processus MA

Soit un processus stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant une représentation $MA(q)$. Pour déterminer la valeur de q , on se base sur la fonction d'autocorrélation du processus MA . En fait, q correspondra au plus grand délai tel que l'autocorrélation n'est pas statistiquement égale à 0.

Identification d'un processus $ARMA$

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer les ordres p et q d'un processus $ARMA$. On peut également se baser sur les autocorrélations et les autocorrélations partielles. Pour obtenir l'ordre de la composante MA , il faut identifier l'autocorrélation significative dont l'ordre est le plus élevé; pour la composante AR , il faut identifier l'autocorrélation partielle significative dont l'ordre est le plus élevé.

2.4 Estimation des paramètres du processus $ARMA$

(p, q)

L'estimation des coefficients du processus $ARMA(p, q)$ s'effectue principalement à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance.

2.4.1 Méthode d'estimation du maximum de vraisemblance

(1) La méthode du maximum de vraisemblance est couramment utilisée pour estimer les coefficients des modèles des séries temporelles car c'est une méthode simple à mettre en place pour estimer des modèles plus complexes que le modèle linéaire.

Soit le modèle suivant :

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + \varepsilon_t$$

On a alors :

$$E(Y_t) = a_0 + a_1 X_t \quad \text{et} \quad \text{Var}(Y_t) = \sigma_\varepsilon^2.$$

La fonction de densité de la loi normale de la variable Y_t s'écrit

$$f(Y_t) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(Y_t - E(Y_t))^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(Y_t - a_0 - a_1 X_t)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right].$$

La fonction de vraisemblance est donnée par :

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; a_0, a_1, \sigma_\varepsilon^2) = \prod_{t=1}^n f(Y_t; \alpha, \beta, \sigma_\varepsilon^2)$$

ou $f(Y_t; \alpha, \beta, \sigma_\varepsilon^2)$ est la fonction de densité de Y_t

On obtient alors :

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; a_0, a_1, \sigma_\varepsilon^2) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(Y_t - a_0 - a_1 X_t)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right]$$

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; a_0, a_1, \sigma_\varepsilon^2) = \left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left[\sum_{t=1}^n -\frac{(Y_t - a_0 - a_1 X_t)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right]$$

Pour faciliter les calculs, on considère plutôt le logarithme de la fonction de vraisemblance. Il vient alors :

$$\ln f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; a_0, a_1, \sigma_\varepsilon^2) = n \ln \left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \right) - \left[\sum_{t=1}^n \frac{(Y_t - a_0 - a_1 X_t)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\ln f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; a_0, a_1, \sigma_\varepsilon^2) = -\frac{n}{2} \ln \sigma_\varepsilon^2 - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \left[\sum_{t=1}^n \frac{(Y_t - a_0 - a_1 X_t)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right].$$

(1)[10]

Cette fonction est à maximiser. Les valeurs des coefficients qui permettent de maximiser la fonction sont issues des conditions du premier ordre suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln f(\dots)}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial \ln f(\dots)}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial \ln f(\dots)}{\partial \sigma_\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

2.4.2 Méthode des Moindres carrés conditionnels

⁽¹⁾ Cette estimation (estimation par défaut sous le logiciel SAS) est conditionnelle à l'hypothèse que les erreurs non observées passées sont égales à 0. L'estimation repose sur la forme $AR(\infty)$

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

ou les ω_j dépendent des paramètres ϕ et θ .

L'estimation CLS consiste à minimiser la somme des carrés suivante :

$$\sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^T (X_t - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j X_{t-j})^2$$

ou les valeurs passées de X_t inconnues sont posées à 0 et les valeurs de ω sont calculées à chaque étape à partir des estimations de ϕ et de θ .

2.4.3 Critères de choix des modèles

⁽²⁾ Après examen des coefficients et des résidus, certains modèles sont écartés. Pour départager les modèles restants, on fait appel aux critères standards et aux critères d'information.

Critères standards

. L'erreur absolue moyenne (Mean Absolute Error) :

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\varepsilon_t|$$

ou ε_t est le résidu du modèle $ARMA$ étudié et T le nombre d'observation.

⁽¹⁾[19]

⁽²⁾[10]

- Racine de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Squared Error):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2}$$

- Ecart absolu moyen en pourcentage (Mean Absolute Percent Error):

$$MAPE = 100 \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{\varepsilon_t}{X_t} \right|$$

Plus la valeur de ces critères est faible, plus le modèle estimé est proche des observations

Critères d'information

- Le critère d'Akaike :

$$AIC(p, q) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2 \frac{(p+q)}{T}$$

ou p est l'ordre de la partie AR et q est l'ordre de la partie MA .

- Le critère de Schwarz :

$$BIC(p, q) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + (p+q) \frac{\log(T)}{T}$$

- Le critère d'information de Hannan - Quinn :

$$HQ(p, q) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + c(p, q) \log\left(\frac{\log(T)}{T}\right) \quad \text{avec } c > 2 \text{ est une constante.}$$

On choisit le modèle qui minimise les critères standards et les critères d'information.

2.4.4 Validation

⁽¹⁾ Il s'agit de vérifier notamment que les résidus du modèle $ARMA$ estimé, résidus notés $\hat{\varepsilon}_t$, vérifient les propriétés requises pour que l'estimation soit valide, à savoir qu'ils suivent un processus BB , non autocorrélé et demême variance, et qu'ils suivent une loi normale. Si ces hypothèses ne sont pas rejetées, on peut alors mener des tests sur les paramètres.

⁽¹⁾[19]

Tests sur les résidus

Il existe un grand nombre de tests d'autocorrélation, les plus connus sont ceux Box et Pierce et Ljung et Box. Nous n'étudierons ici que le test de Box et Pierce. Le test de Ljung et Box est à appliquer lorsque l'échantillon est de petite taille.

Soit une autocorrélation des erreurs d'ordre k ($k > 1$) :

$$\varepsilon_t = \rho(1)\varepsilon_{t-1} + \rho(2)\varepsilon_{t-2} + \dots + \rho(k)\varepsilon_{t-k} + v_t \text{ ou } v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$$

Les hypothèses du test de Box - Pierce sont les suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(k) = 0 \\ H_1 : \text{il existe } i \text{ tel que } \rho(i) \neq 0 \end{cases}$$

Pour effectuer ce test, on a recours à la statistique Q qui est donnée par :

$$Q = T \sum_{k=1}^k \hat{\rho}(k)^2$$

ou T est le nombre d'observations et $\hat{\rho}(k)^2$ est le coefficient d'autocorrélation d'ordre k des résidus estimés ε_t

Sous l'hypothèse H_0 vraie, Q suit la loi du Khi-deux avec k degrés de liberté

$$Q = T \sum_{k=1}^k \hat{\rho}(k)^2 \sim \chi^2(k).$$

La règle de décision est la suivante :

Si $Q > k^*$ ou k^* est la valeur donnée par la table du Khi-Deux pour un risque fixé et un nombre k de degrés de liberté \Rightarrow On rejette H_0 et on accepte H_1 (autocorrélation des erreurs).

Test de normalité

Il s'agit de tester que les résidus estimés $\hat{\varepsilon}_t$ suivent une loi normale, c'est à dire ne présentent pas d'asymétrie (Skewness) ni d'aplatissement (Kurtosis).

En notant μ_k le moment d'ordre k de la distribution

$$\mu_k = E [(X - E(X))^k]$$

Le coefficient de Skewness est donné par :

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}.$$

et le coefficient de Kurtosis est donné par :

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$

Le test de Jarque Bera permet de tester simultanément l'absence d'asymétrie et l'absence d'aplatissement. La statistique de test est donnée par :

$$J B = \frac{T}{6}\beta_1^2 + \frac{T}{24}(\beta_2 - 3)^2$$

Cette statistique suit, sous l'hypothèse nulle de normalité, une loi du χ^2 . à (2) degrés de liberté. Si $J B \geq \chi_{1-\alpha}^2(2)$ on rejette l'hypothèse H_0 de normalité des résidus au seuil α .

La loi du χ^2 (prononcer « khi carré » ou « khi-deux ») est une loi à densité de probabilité. Cette loi est caractérisée par un paramètre dit degré de liberté à valeur dans l'ensemble des entiers naturels (non nuls).

Chapitre 3

Variations des prix de pétrole pendant les trois dernières années

journées\ans\prix	2014	2015	2016
$j \setminus k$	1	2	3
Janvier	106.85, 104.99, 104.33,	51.78, 48.87, 46.57,	31.79, 31.21, 29.79,
Février	102.55, 102.55, 102.63,	48.19, 51.77, 52.22,	29.73, 28.40, 28.65,
Mars	107.80, 106.30, 105.24,	56.74, 55.94, 55.82,	31.65, 31.72, 31.68,
Avril	103.25, 101.72, 101.57,	52.48, 52.93, 53.20,	34.54, 33.40, 32.71,
Mai	103.77, 104.25, 104.35,	62.23, 62.85, 63.62,	42.48, 41.03, 40.45,
Joan	105.60, 105.14, 105.56,	60.46, 62.26, 61.49,	45.28, 45.67, 45.82,
Juillet	108.68, 108.35, 107.17,	59.81, 59.31, 58.35,	45.42, 46.08, 44.34,
Aout	102.89, 102.58, 102.23,	48.40, 47.90, 47.89,	39.10, 38.29, 38.43,
Septembre	100.10, 98.95, 98.66,	47.80, 45.56, 47.40,	42.00, 41.47, 43.54,
Octobre	92.19, 90.40, 90.33,	44.48, 43.82, 44.95,	46.65, 46.72, 47.75,
Nouvembre	80.64, 78.67, 78.11,	43.95, 43.89, 44.43,	44.51, 43.10, 42.62,
Décembre	66.44, 68.13, 67.31,	39.25, 38.40, 37.84,	49.28, 50.42, 51.25,

TAB.3.1 L'évolution du prix de pétrole pendant periode (2014 – 2016)

3.1 Identification de la série

Pour identifier le type de chronique, nous allons procéder à des tests afin de connaître la tendance et la stationnarité.

L'analyse graphique de la série

L'analyse graphique nous permet de visualiser l'évolution temporelle de la série du prix du pétrole pendant trois années (2014 – 2016), Ainsi à partir des données de la série, nous obtenons le

graphique suivant:

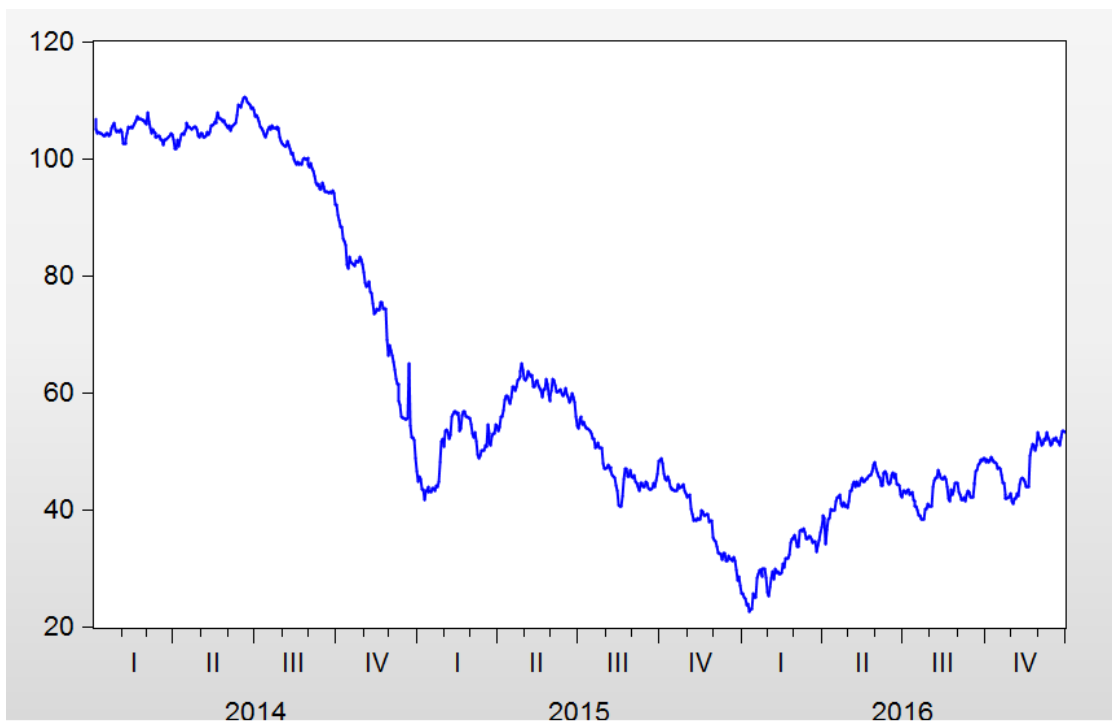


FIG.3.1- Graphique de l'évolution du prix du pétrole pendant trois années
(2014 – 2016)

Ce graphique, nous observons que la série évolue de manière décroissante dans le temps. Ce qui nous permet de tirer quelques conclusions intéressantes au vu de l'allure de la courbe ci dessus:

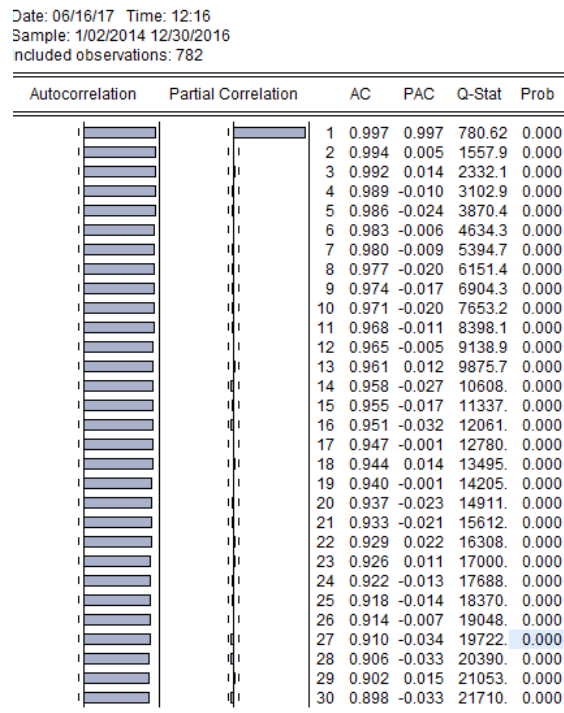


FIG.3.2 - Corrélogramme de la série

Nous observons aussi que le premier coefficient d'autocorrélation partielle est significatif. Seulement ces indicateurs sont nécessaires mais non suffisants.

3.2 Test de racine unitaire

Ce test a pour objectif

Il nous permet de vérifier la stationnarité d'une série.

Nous avançons les hypothèses suivantes pour notre test

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 1, & \text{présence de la racine unitaire c\`ad la s\`erie est non stationnaire;} \\ H_1 : \rho \neq 1, & \text{absence de la racine unitaire c\`ad la s\`erie est stationnaire.} \end{cases}$$

Ainsi, nous rencontrons les cas de figures ci après:

-Si $|t - ADF| < |VCM|$, on accepte l'hypothèse nulle, la série est non stationnaire.

-Si $|t - ADF| > |VCM|$, on rejette l'hypothèse nulle, la série est stationnaire. (Avec $VCM =$ Valeur critique de Mackinnon au seuil de 5%).

-Significativité de la tendance

$$\begin{cases} H_0 : b = 0, \text{ le trend est non significatif,} \\ H_1 : b \neq 0, \quad \text{le trend est significatif.} \end{cases}$$

Ainsi, nous rencontrons les cas de figures ci après:

-Si $|t - stat| < 2$, on accepte l'hypothèse nulle,

-Si $|t - stat| > 2$, on rejette l'hypothèse nulle.

-Significativité de l'intercept

$$\begin{cases} H_0 : c = 0, \text{ la constante est non significatif, modèle sans dérive,} \\ H_1 : c \neq 0, \quad \text{la constante est significatif, modèle avec dérive.} \end{cases}$$

Ainsi, nous rencontrons les cas de figures ci après:

-Si $|t - stat| < 2$, on accepte l'hypothèse nulle.

-Si $|t - stat| > 2$, on rejette l'hypothèse nulle.

Null Hypothesis: D(RESID,2) has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 7 (Automatic - based on SIC, maxlag=20)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-17.32912	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.969983	
5% level	-3.415648	
10% level	-3.130068	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(RESID,3)
 Method: Least Squares
 Date: 06/16/17 Time: 12:57
 Sample (adjusted): 1/16/2014 12/30/2016
 Included observations: 772 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(RESID(-1),2)	-5.183111	0.299098	-17.32912	0.0000
D(RESID(-1),3)	3.321047	0.280559	11.83726	0.0000
D(RESID(-2),3)	2.508056	0.249817	10.03958	0.0000
D(RESID(-3),3)	1.780093	0.210811	8.444024	0.0000
D(RESID(-4),3)	1.197843	0.166591	7.190327	0.0000
D(RESID(-5),3)	0.711754	0.120125	5.925111	0.0000
D(RESID(-6),3)	0.337793	0.075468	4.475991	0.0000
D(RESID(-7),3)	0.113296	0.035991	3.147881	0.0017
C	-0.004068	0.084872	-0.047931	0.9618
@TREND(1/02/2014)	1.51E-05	0.000187	0.080900	0.9355

R-squared	0.805614	Mean dependent var	-0.000777
Adjusted R-squared	0.803318	S.D. dependent var	2.610291
S.E. of regression	1.157633	Akaike info criterion	3.143500
Sum squared resid	1021.166	Schwarz criterion	3.203720
Log likelihood	-1203.391	Hannan-Quinn criter.	3.166673
F-statistic	350.8935	Durbin-Watson stat	2.018171
Prob(F-statistic)	0.000000		

FIG.3.3 - Test ADF sur série

Il ressort de cet out put du test d'ADF, que la série est non stationnaire $|t - ADF| = 17.50062 < |VCM| = 3.415655$, le trend est significatif ($|t - stat| = 0.101872 > 2$), et l'intercept est non significatif ($|t - stat| = 0.072598 < 2$).

Ce qui nous amène à mettre fin à l'étude de la stationnarité de notre série et à rejoindre la conclusion des tests préliminaires: notre série présente donc une non stationnarité

3.3 Stationnarisation de la série

Etant donné que la série présente donc une non stationnarité

Nous allons la stationnariser par l'extraction du trend grace a la méthode d'écart à la tendance.

L'élimination de la tendance peut être observée par l'estimation suivante:

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(RESID,2)
 Method: Least Squares
 Date: 06/17/17 Time: 08:52
 Sample (adjusted): 1/06/2014 12/30/2016
 Included observations: 760 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(RESID(-1))	-0.924621	0.035903	-25.75337	0.0000
R-squared	0.466329	Mean dependent var		0.004289
Adjusted R-squared	0.466329	S.D. dependent var		1.459554
S.E. of regression	1.066245	Akaike info criterion		2.967478
Sum squared resid	862.8903	Schwarz criterion		2.973574
Log likelihood	-1126.642	Hannan-Quinn criter.		2.969825
Durbin-Watson stat	2.028101			

FIG.3.4- Estimation de la tendance

Nous constatons que le coefficient de tendance est significatif.

Nous allons stationnariser cette série au moyen de la méthode .

La représentation graphique de la série stationnarisée est donnée sur la figure ci dessous

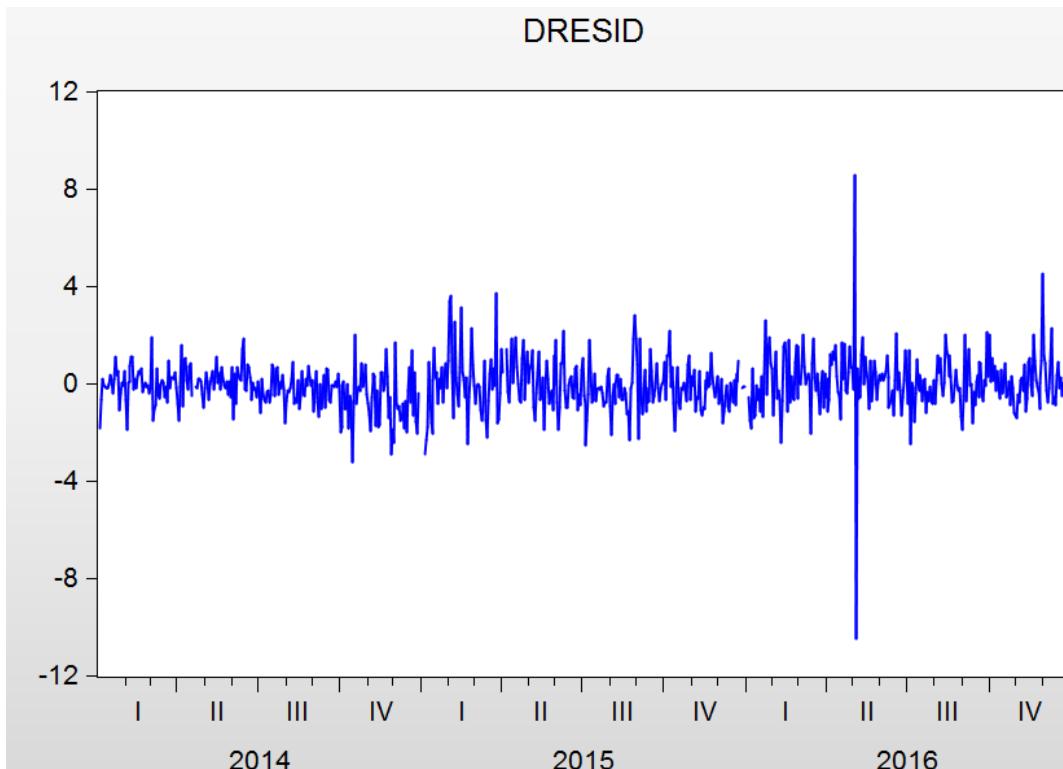


FIG.3.5-La série stationnarisée

Conclusion générale

Notre travail a été basé sur l'étude de série temporelle de façon profonde, nous avons présenté les définitions de série temporelle et ses formes en introduisant deux concepts fondamentaux. Par la suite : les séries chronologiques et nous avons rappelé les principales définitions notamment les résultats que nous avons vu dans la théorie des séries temporelles, dont la densité spectrale des fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation, la stationnarité, la modélisation d'une série temporelle, et l'estimation non paramétrique de la tendance qui ne suppose rien sur celle-ci. A priori nous avons approximé la tendance par la moyenne mobile arithmétique en utilisant les modèles: AR, MA, ARMA, ARIMA. Le type de modèle ARMA a été utilisé pour étudier la fluctuation des prix de pétrole.

Bibliographie

- [1] Asterion, D. et Halls. G. Applied Econometrics A Modern Approach Using Eviews and Microfit. Palgrave Macmillan, New York (2006)
- [2] Bourbonnais, R. Terraza, M. Analyse des séries Temporelles. Dunod, Paris (2004)
- [3] Bourbonnais, R. Econometrie : Cours et exercices corrigés , 9^{ème} Edition. Dunod, Paris (2015)
- [4] Charpentier, A. Cours des séries temporelles. Théorie et Applications. Université de Paris (2004).
- [5] Corinne, P. Séries chronologiques : Quelques éléments du cours. Paris(2005)
- [6] D.Cryer, J.,Chan, K.S,Time Series Analysis With Applications in R, Second Edition. Springer, New York(2008).
- [7] Dufour,J, TECHNIQUES DE SE'RIES CHRONOLOGIQUES (1998)
- [8] L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES Année universitaire , COURS DE STATISTIQUE et ANALYSE des DONNEES (12 juin 2007), (2006-2007)
- [9] E'ric Dor, Econométrie,synthèse de cours et exercices corrigés.
- [10] ECONOMETRIE DES SERIES TEMPORELLES, Hélène Hamisultane.
- [11] Enders, W., Applied Econometric Time Series, Iowa State University, JOHN WILEY and Sons.
- [12] JEAN-MARCBARDET,cours d'Ecomométrie 2.

- [13] Lévy, C.L. Introduction à l'étude des séries temporelles. (2013)
- [14] Modélisation de séries temporelles, V. Monbet - 2011.
- [15] Modèles MA,AR et ARMA multidimensionnels : estimation et causalité, Steven Fortier.
- [16] Serigne, M. Analyse et prévision des séries temporelles par la méthode de Box & Jenkins. (2007)
- [17] SERIES CHRONOLOGIQUES A UNE ET PLUSIEURS VARIABLES : SYNTHESE DES METHODES CLASSIQUES ET MODELES A BASE DE COPULES (MAI 2011)
- [18] Séries temporelles 2A,16 décembre 2015
- [19] UNIVERSITE PARIS I, Magistère d'Economie Deuxième année, SERIES CHRONOLOGIQUES Quelques éléments du Cours¹ Année (2004-2005), Corinne Perraudin.
- [20] U.F.R. Economie Appliquée Maîtrise d'Economie Appliquée, Cours de Tronc commun.
- [21] Yves, A. Séries temporelles avec R Methodes et cas, Springer-Verlag, France.(2011)
- [22] YAHIA DJABRANE, SERIES TEMPORELLES ET TEST D'ADEQUATION POUR UN MODELE GARCH (1, 1), (2005)

ملخص

تتناولنا في هذه المذكرة الأدوات الرياضية الأساسية المستخدمة لتقدير المعلمية لاتجاه من خلال نماذج الانحدار الذاتي. تتكون هذه المذكرة من جزأين نظري وتطبيقي. يعرض في الجزء الأول المفاهيم ما يبين الأساسية للسلسلة الزمنية. ويتناول الجزء الثاني الجانب التطبيقي، دراسة تطور أسعار النفط خلال الفترة يناير 2014 و ديسمبر 2016.

كلمات مفتاحية:

السلاسل الزمنية - نموذج الانحدار الذاتي - المتوسط المتحرك - الكثافة الطيفية - دالة تباير الذاتي - دالة الارتباط الذاتي - السكون.

Summary

This work presents the basic mathematical tools used for nonparametric estimation of the trend by autoregressive models. This work is composed of two parts (theoretical and practical). The first part introduces the fundamental concepts of a temporal series. The second part deals with the practical aspect, the study of the evolution of the price of oil during the period January 2014 - December 2016.

Keywords:

Temporal serie- autoregressive model - moving average - spectral density - autocovariance function - autocorrelation function - stationary.

Résumé

L'objet de ce mémoire est de présenter les outils mathématiques de bases utilisés pour l'estimation non paramétrique de la tendance par modèles autorégressifs. Le mémoire est composé de deux parties (théorique et pratique). La première partie introduit les concepts fondamentaux d'une série temporelle. La deuxième partie traite l'aspect pratique, l'étude de l'évolution du prix de pétrole pendant la période janvier 2014-décembre 2016.

Mots-clés:

Série temporelle- modèle autorégressif- moyenne mobile - densité spectrale- fonction d'autocovariance- fonction d'autocorrélation- la stationnarité.