UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilité et Statistique

Par :Arid Nour Elimane

Thème

Étude des risques d'un phénomène aléatoire par le calcul stochastique-cas du risq

Soutenu le :05/06/2017

Devant le jury composé de :

Mdm. Khathera Bouanane	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. El cheti Djamel el dine	M.C. Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Baheddi Aissa	M.C. Université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Au meilleur des pères

A ma très chère maman ,Mon trésore,

Qui je trouve en elle la lumiere, et que je suis toujour en sécurité dans sa coeur ,

A qui je dois tout,

A mon mari mon ange,

A mes beaus parents,

A mes soeurs et mes frères

A mes belles soeurs et mon beau frére,

A qui je souhaite un avenir radieux plein de réussite

A mes Amis

A tous ceux qui me sont chers

Remerciement

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.
J'adresse tout d'abord mes remerciements les plus sincères, toute ma gratitude à l'encadreur

***Bahaddi Aissa**,*

pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.
Et ma grand remerciment,
Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche. Un grand merci à Brahim pour les conseils concernant la base de données, à mon amie narimane , bouthaina et sara pour leur confiance et leur support inestimable.

Table des matières

Dédicaces **i**

Remerciement **ii**

Notations et Prémilinaires **vi**

Introduction **vi**

1 **3**

1.1 Revue de littérature : 3

1.2 l'étude théorique : 5

1.2.1 les marchés financiers : 5

1.2.2 Comparaison de portefeuilles : 6

1.2.3 Modèle binomial à une période : 7

1.2.4 Modèle binomial à n périodes : 9

1.3 Rappel du calcul stochastique : 10

1.3.1 Bruit Blanc : 10

1.3.2 Martingales : 10

1.3.3 Mouvement Brownien : 11

1.3.4 Intégrale Stochastique : 12

1.3.5 Processus d'Itô : 12

1.3.6 Formule d'Itô : 13

1.3.7 Équation différentielles stochastique : 14

1.4 Méthode de simulation : 15

1.4.1 Méthode de Monte-Carlo : 16
1.4.2 Principe de la méthode de monte carlo : 16

2 **18**

2.1 Modèle de Black et Scholes : 18
2.2 pratique : 19
2.3 Application : 22
2.4 présentation du CAC 40 par un schéma : 24

Table des figures

2.1 Résultat du calcul de $V(t, x)$. 23
2.2 CAC 40 from December 1964 to May 2016 (daily closings). 24

Notations

- ➤ X_t : processus brownienne
- ➤ $\mathbb{P}$: signe de probabilité
- ➤ Y_t : procesuss
- ➤ Ω : l'ensemble des états du monde
- ➤ $\mathcal{F}_t$: la filtration
- ➤ $\mathcal{B}$: l'ensemble Borélien
- ➤ $\dot{W}$: procesuss de Winner
- ➤ $g(S^i)$: un nouyon suit d'un loi Normale
- ➤ I_g : l'intervale de confience
- ➤ S_t : un actifs risqué
- ➤ K : Strike de l'option
- ➤ S : prix de l'action
- ➤ r : taux sans risque
- ➤ σ : volatilité implicite du sous-jacent

Introduction

Le risque de crédit au sens classique désigne le risque qu'un particulier ou une enterprise ne rembourse pas sa dette à l'échance, cette expression peut avoire une sens plus large. Elle peut désigner le risque de défaut d'une entreprise, dans une crise financiére, ou le risque lié à un changement brutal de la valeur d'un portfeuille d'actifs, conséquence d'un evenement qui n'est pas nécessairement issu de l'ctivité de transaction financiéres(comme transition de catégorie dans une note de crédit, catastrophe naturelle, fraude, etc...) un point commun de ces risques est que le flux de prix des produits financiers avant l'evenement de contrepartie ne donnent pas toutes les informations du risque de crédit.

Le risque financier[1] est un phénomène de perdre de l'argent à la suite d'une opération financiére(sur un actif financiere) ou à une opération économique ayant une incidence financiére.

Il existe de nombreux risques mais notre objet est d'étudier les risques financiéres dans les marchés par le calcul stochastique .

Notre problème est : "***Quelle sont les du calcul stochastique à utiliser afin de maitriser les risque dans les marchés financiers ?***" ;

et les sous problemes sont :

–1/Quelle sont les stratégies de portefeuilles financiers ?

–2/Quelle sont les méthodes qu'on peut utiliser ?

Donc les hypothéses sont :

1- le marché est fluide : on peut acheter où vendre à tout moment ;

2- il y a plusieurs méthode où modéles tel que :

–*simulation de monte-carlo .

[1]https ://fr.wikipedia.org/wiki/Risque-financier

–**La formule d'ito : modéle Black-Scholes.
Ces hypothéses, constituent une premiére tentative de la modélisation ayant l'avantage de pouvoir fournie une evaluation des produits dérivés dans le marché , notamment à l'aide de calcul stochastique.
Notre travail est composé deux partie :

le chapitre 1 présente une revue de littérature et l'étude théorique.dans la revue de littérature est répartit en trois documents ; l'étude générale compose aussi trois partie : les marchés financiers, rappel du calcul stochastique et une méthode de simulation(monté-carlo)

Dans **le chapitre 2**, la partie pratique : contient le modéle de Black-scholes et une application.

Chapitre 1

On aborde deux sections :la premiére couvre la revue de littérature, la deuxiéme contient l'étude théorique.

1.1 Revue de littérature :

1/ -le théme est : calcul stochastique appliqué à la finance.

-l'auteur est : Ramuald Elie.

-Problématique :

–*Quelles sont les évolutions possibles du marchés ?

–* Qelles sont les stratégies d'investissement ?

–* Qu'est ce qu'une startégie d'arbitrage ?

-Hypothéses :

–* la stratégie d'un portfeuille autofinançant.

–* la stratégie d'arbitrage $\Leftrightarrow$ un portfeuille autofinançant.

–* Modéle Black and Scholes

2/ -le théme est : l'introduction à la modélisation financiére en temps continue et calcul stochastique.

-L'auteur est : Mireille Bossy.

-Problématique :

–*comment utiliser le calcul stochastique pour une modélisation finaanciére ?

–* Quelles sont les stratégies de financement ?

-Résultats :

–* Modéle Black and Scholes

3/ -le théme est : couverture des risques dans les marchés financiers.

-L'auteur est : Nicole El Karoui.

-Problématique :

–* Quelles sont les produits dérivés ? et les activités du marchés financiers ?

-Résultats :

–* L'utilité des produits

–* Modéle Black and Scholes

similitudes :

- les stratégies du portfeuille

- Modéle Black and Scholes.

Résultat finale :

Dans ce mémoire, on étudie les risques financiers par le calcul stochastique .

1.2 l'étude théorique :

1.2.1 les marchés financiers :

Définition 1[1] **:**Un portefeuille d'auto-financemant est une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent. On notera X_t la valeur en t du portefeuille X.

On se donne donc simplement un capital initial et une stratégie dynamique d'investissement dans les actifs du marché à partir de ce capital de départ.

Qu'est ce qu'une stratégie d'arbitrage ?

Définition 2 : Un arbitrage sur la période $[0; T]$ est un portefeuille d'auto-financemant X de valeur nulle en $t = 0$ dont la valeur X_T en T est positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive.

X_T est un processus aléatoire vérifie :

$$X_0 = 0; X_T \geq 0 \text{ et } \mathbb{P}(X_T > 0) > 0$$

On supposera qu'il y a sur le marché l'hypothèse **d'absence d'opportunités d'arbitrage** (AOA, no free lunch) entre tout instant 0 et T.

$$\{X_0 = 0 \text{ et } X_T \geq 0\} \Rightarrow \mathbb{P}(X_T > 0) = 0$$

L'hypothèse signifie simplement : "Si ma richesse d'aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle", soit "On ne peut gagner d'argent sans capital initial".

Le raisonnement (défaitiste) est : "Si il y avait un arbitrage, quelqu'un en aurait déjà profité". Sachant qu'il y a dans les banques beaucoup d'arbitragistes, cette hypothèse est cohérente sur les marchés.

[1] calcul stochastique pour la finance

1.2.2 Comparaison de portefeuilles :

méthodes **Proposition 1 :** En L'absence d'opportunités d'arbitrage, si deux portefeuilles d'auto-finances X et Y ont même valeur en T, ils ont même valeur en 0.

Démonstration : Supposons $X_0 < Y_0$ et proposons la stratégie suivante : A l'instant $t = 0$, ou achat de$X$,ou vente de Y et le placement de $Y_0 - X_0 > 0$ à la banque. La valeur du portefeuille à l'instant $t = T$ est $X_T - Y_T$ plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque, qui est toujours > 0.
Donc L'absence d'opportunités d'arbitrage implique $X_0 \geq Y_0$ et, de manière similaire, on obtient $X_0 \leq Y_0$ si bien que $X_0 = Y_0$.
Remarque 1 : Pour créer un arbitrage, on a acheté le moins cher et vendu le plus cher. Vu qu'ils ont même valeur en T, on y gagne, logique...

	En 0	En T
Achat de X **Achat de Y** **Placement du gain à la banque**	X_0 Y_0 $Y_0 \quad X_0$ > 0	X_T Y_0 $(Y_0 \quad X_0)$ $/B(0,T)$ > 0
valeur	0	> 0

Proposition 2 : En L'absence d'opportunités d'arbitrage, si deux portefeuilles d'auto-finance X et Y ont même valeur en T, elles ont presque sûrement même valeur en tout instant $t \leq T$.

$$X_T = Y_T \Rightarrow \forall t \leq T \; X_t = Y_t \; \mathbb{P} - p : s$$

Ce résultat est une conséquence directe du résultat suivant :

Proposition .3 : En L'absence d'opportunités d'arbitrage, considérons deux portefeuilles auto-finance X et Y , alors :

$$X_T \leq Y_T \Rightarrow \forall t \leq T \ X_t \leq Y_t \text{ p :s}$$

1.2.3 Modèle binomial à une période :

Le modèle binomial est très pratique pour les calculs et la plus grande partie des résultats obtenus se généralisent aux modèles en temps continu .

1.2.3.1 modélisation probabiliste du marché :

Considérons un marché à deux dates : $t = 0$ et $t = 1$ et deux actifs

Un actif sans risque qui vaut 1 en $t = 0$ et vaut

$$R = (1 + r) \text{ en } t = 1,$$

qui représente l'argent placé à la banque au taux r (dans une obligation), il est sans risque dans le sens où l'on connaît en $t = 0$ la valeur qu'il aura en $t = 1$.

$$1 \rightarrow R = 1 + r$$

Et un actif risqué S, il vaut S_0 en $t = 0$ et à l'instant 1, il peut avoir pris deux valeurs différentes : soit il est monté $S_1^u = u.S_0$, soit il est descendu $S_1^d = d.S_0$ avec $d < u$.

$$\begin{array}{ccc} & & uS_0 \\ & \nearrow & \\ S_0 & & \\ & \searrow & \\ & & dS_0 \end{array}$$

La modélisation probabiliste du marché est la donnée de trois choses :$\Omega, \mathcal{F}$ et $\mathbb{P}$.

Ω est l'ensemble des états du monde : deux états possibles selon la valeur de l'actif risqué en $t = 1$, état "haut" ω_u ou "bas" ω_d. $\Omega = \{\omega_u; \omega_d\}$

$\mathbb{P}$ est la probabilité historique sur Ω. $P(\omega_u) = p$ et $P(\omega_d) = 1-p$. Le prix a une probabilité réelle p de monter et $1-p$ de descendre. Attention $p \in]0; 1[$ car les deux états du monde peuvent arriver.

$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0; \mathcal{F}_1\}$ est un couple de deux tribus représentant l'information globale disponible sur le marché aux instants $t = 0$ et $t = 1$.

En $t = 0$, on ne dispose d'aucune information :$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

En $t = 1$, on sait si l'actif est monté ou descendu :$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_u\}; \{\omega_d\}\}$.

Cette tribu représente l'ensemble des parties de Ω dont je puisse dire à l'instant $t = 1$ si elles sont réalisées ou non.

Remarque 2.1.1 :Bien sûr, on a $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$, en effet plus le temps avance plus l'on acquiert de l'information.

Remarque 2.1.2 :Une variable aléatoire est $\mathcal{F}_1$-mesurable si et seulement si elle est connue avec l'information donnée par $\mathcal{F}_1$, i.e. déterminée à l'instant 1. En effet, heuristiquement.

Une variable aléatoire X est $\mathcal{F}_1$-mesurable équivant L'image réciproque de tout Borélien $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ est dans $\mathcal{F}_1$;équivant Je peux dire en $t = 1$ pour tout Borélien $\mathcal{B}$ de R si X est à valeur dans $\mathcal{B}$;équivant Je peux dire pour tout réel r si X est dans $]-\infty; r[$ ou pas ;équivant Je connais X à la date $t = 1$.

1.2.3.2 Stratégie de portefeuille simple :

Définition : Une stratégie de portefeuille simple $X^{x,\Delta}$est la donnée d'un capital initial x et d'une quantité d'actif risqué Δ.

le portefeuille ne subit aucune rentrée ou sortie d'argent la stratégie de portefeuille simple consiste en l'achat à la date 0 de Δ actifs risqués et de $x - \Delta S_0$ actifs sans-risques telle que la valeur en 0 du portefeuille est :

$$X_0^{x,\Delta} = \Delta S_0 + (x - \Delta S_0)1 = x$$

Sa valeur en t = 1 est donc donnée par :

$$\begin{aligned} X_1^{x,\Delta} &= \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R \\ &= xR + \Delta(S_1 - S_0 R) \end{aligned}$$

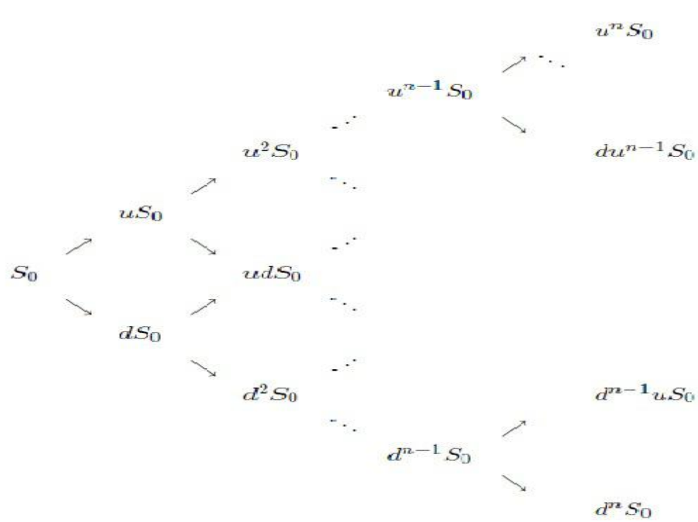
Cette stratégie est autofinançante car l'on n'apporte ni ou retire d'argent à aucun instant entre t = 0 et t = 1. On l'appelle stratégie de portefeuille simple, car elle ne comporte que des actifs de base du marché : l'actif sans risque et l'actif risqué.

1.2.4 Modèle binomial à n périodes :

L'etude de ce modèle, nommé également modèle de Cox Ross Rubinstein, il donne des résultats similaires au cas du modéle 1 période.

1.2.4.1 Modélisation du marché :

On reprend la même modélisation que on avait avant mais dans un monde à n périodes.
On considère un intervalle de temps $[0;T]$ divisé en n périodes
$0 = t0 < t1 < ... < tn = T$.
Le marché est composé de 2 actifs,
–*un actif sans risque S_t^0 : $1 \rightarrow (1+r) \rightarrow (1+r)^2 \rightarrow ... \rightarrow (1+r)^n$
–* et un actif risqué S_t :



1.2.4.2 Stratégie de portefeuille :

Une stratégie de portefeuille simple $X^{(x;\Delta)}$est la donnée d'un capital initial x et d'un processus discret $(\Delta_0, ..., \Delta_{n-1})$ qui est $\mathcal{F}$-adapté

1.3 Rappel du calcul stochastique :

Calcule stochastique est l'étude aléatoire des phénomènes selon le temps. À ce titre, c'est une extension de la théorie de probabilité
Le domaine d'application du calcul stochastique comprend la mécanique quantique, le traitement du signal, la chimie, la météorologie, et même les mathématiques financières.

1.3.1 Bruit Blanc :

Soit le processus bruit $\{\dot{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vérifiant :

a- les variables aléatoires $\{\dot{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ indépendantes.

b- $\dot{W}$ sont stationnaires , la distribution de $(\dot{W}(t+t_1), \dot{W}(t+t_2), ..., \dot{W}(t+t_n))$ ne dépend pas de t .

c- $\mathbb{E}(\dot{W}(t)) = 0$.

ce processus stochastique ne peut pas avoir des trajectoires mesurables $t \longrightarrow \dot{W}(t)$ sauf pour un processus trivial $\dot{W}(t) = 0$.
si $(t, w) \longrightarrow \dot{W}(t, w)$ est conjontement mesurable avec $\mathbb{E}(\dot{W}^2(t)) < \infty$ et $\dot{W}$ vérifie les propriets (a, b, et c) alors $\forall t \geq 0$ $\mathbb{E}[(\int_0^t \dot{W}(s)ds)^2] = 0$ avec $\dot{W}(t)$ presque souvement.

1.3.2 Martingales :

Définition[2] **:**Un processus $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ à valeur réelles, adapté et intégrable est :

(i) Une martingale si pour tout $n \in N$ on a $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$;

(ii) une surmartingale si pour tout $n \in N$ on a $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq M_n$;

[2]Introduction au calcul stochastique par Damien lamberton et Bernard lapeyre

(iii) une sousmartingale si pour tout $n \in N$ on a $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq M_n$.

Cette définition s'étendent aux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$, c.à.d. chaque composante doit etre respectivement une martingale, surmartingale, sousmartingale réelle.

Lemme : Soit X une martingale et φ une fonction convexe telle que pour tout t $\phi(X_t) \in \mathcal{L}^1$, alors $\varphi(X)$ est une sous-martingale; si φ est concave, alors $\varphi(X)$ est une sur-martingale.

1.3.3 Mouvement Brownien :

Historiquue [3] ***:***

- 1828 : Robert Brown, botaniste, observe le mouvement du pollen en suspension dans l'eau.

- 1877 : Delsaux explique que ce mouvement irrégulier est du aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (changements incessants de direction),

- 1900 : Louis Bachelier dans sa thèse "Théorie de la spéculation" modélise les cours de la bourse comme des processus à accroissements indépendants et gaussiens (problème : le cours de l'actif, processus gaussien, peut être négatif)

- 1905 : Einstein détermine la densité du MB et le lie aux EDPs. Schmolushowski le décrit comme limite de promenade aléatoire.

- 1923 : Etude rigoureuse du MB par Wiener, entre autre démonstration de l'existence.

Un mouvement brownien généralement noté B pour Brown ou W pour Wiener.

Définition : On peut dire$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisée filtré.

Un processus $B : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ s'appelle la norme «unidimensionnelle» brownienne de mouvement par tout x si :

$1/-B_0 = x \sim \forall \Omega \in \Omega, B_0(\Omega) = x$.

$2/-pour\ 0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$,les variables aléatoires $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendant (des augmentations).

3/- pour tout $t, h \geq 0$ la variable : $B_{t+h} - B_t$ de $\sim \mathbb{N}(0, h)$.

[3] calcul stochastique pour la finance

4/- fonction $B : \mathbb{R}_F \to \mathbb{R}$ est presque sûrement continu si à la mesure expliquez la prise. commencer de points sera suppose être égal à 0, $(x = 0)$.

1.3.4 Intégrale Stochastique :

Soit l'équation de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)\dot{W}(t) \quad \forall t \geq 0 \tag{1.1}$$

où encore :

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(x) + g(x)(\frac{dW(t)}{dt}) \tag{1.2}$$

la solution d'une telle équation est de la forme suivante :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s) \tag{1.3}$$

Cette forme s'appelle la formule d'Itô.

1.3.5 Processus d'Itô :

Un processus d'Itô réel, est un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$, continu et adapté de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \tag{1.4}$$

où f est un processus $\mathcal{F}_t^W$-adapté tel que

$$\int_0^t |f(s, X_s)|ds \leq +\infty \quad \mathbb{P}; ps \tag{1.5}$$

$\forall t \geq 0$, on a g un processus local vérifiants

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t \;\; avec \;\; X_0 = x \tag{1.6}$$

–* $f(t, X_t)$: s'appelle la dérive (ou le drift) du processus, et

–* $g(t, X_t)$: s'appelle le coefficient de diffusion.

1.3.6 Formule d'Itô :

Soit f une fonction réelle à valeur réelles.suffisemment réguliere.

Théorème 1 : [Première formule d'Itô] Supposons f de classe $\mathcal{C}^2$. Alors

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds \tag{1.7}$$

Cette formule s'écrit sous forme condensée

$$\begin{aligned} df(X_t) =& f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2 dt && (1.8)\\ =&(f'(X_t)b_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2)dt + f'(X_t)\sigma_t dB_t && (1.9)\\ =&f'(X_t)b_t dt + \frac{1}{2}f''(X_t)d < X >_t + f'(X_t)\sigma_t dB_t && (1.10)\end{aligned}$$

On utilise souvent la notation

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dX_t.dX_t \tag{1.11}$$

avec $dt^2 = dtdB_t = 0$ et $dB_t^2 = dt$.

En particulier,$t \longrightarrow f(X_t)$ est un processus d'ito de dérive

$$\int_0^t (f'(X_s)b_s + \frac{1}{2}f''(X_s)\sigma_s^2)ds \tag{1.12}$$

et de partie martingale

$$\int_0^t f'(X_s)\sigma_s dB_s. \tag{1.13}$$

. **Théorème 2 : [Deuxième formule d'Itô]** soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x . On a

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\sigma_s^2 ds \tag{1.14}$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) =&(f_t'(t, X_t) + \frac{1}{2}f_{xx}''(t, X_t)\sigma_t^2)dt + f_x'(t, X_t)dX_t && (1.15)\\ =&f_t'(t, X_t)dt + f_x'(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}''(t, X_t)d < X >_t && (1.16)\\ =&(f_t'(t, X_t) + f_x'(t, X_t)b_t + \frac{1}{2}f_{xx}''(t, X_t)\sigma_t^2)dt + f_x'(t, X_t)\sigma_t dB_t && (1.17)\end{aligned}$$

Théorème 3 : [Troisième formule d'Itô] soient X^1 et X^2 deux processus d'Itô issus de x_1 (resp. de x_2) de coefficient de dérive b^1 (resp. de b^2) de coefficient de diffusion σ^1 (resp. de σ^2) et portés respectivement par deux Browniens B^1 et B^2 corrélés avec coefficient ρ. On suppose que b^i, σ^i sont $\mathcal{F}_t^{B^i}$ -adaptés. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées. On a

$$\begin{gathered} f(X_t^1, X_t^2) = f(x_1, x_2) + \int_0^t f_1'(X_s^1, X_s^2)dX_s^1 + \int_0^t f_2'(X_s^1, X_s^2)dX_s^2 \\ + \frac{1}{2}\int_0^t (f_{11}''(X_s^1, X_s^2)(\sigma_s^1)^2 + 2\rho f_{12}''(X_s^1, X_s^2)\sigma_s^1\sigma_s^2 + f_{22}''(X_s^1, X_s^2)(\sigma_s^2)^2)ds \end{gathered}$$

où f_i' désigne la dérivée par rapport à x_i et f_{ij}'' la dérivée seconde par rapport à x_j puis x_i, $i, j = 1, 2$.

proposition 4 : [Formule d'intégration par parties]

$$X_t^1 X_t^2 = x_1 x_2 + \int_0^t X_s^2 dX_s^1 + \int_0^t X_s^1 dX_s^2 + \rho \int_0^t \sigma_s^1 \sigma_s^2 ds. \tag{1.18}$$

$$d(X^1 X^2)_t = X_t^2 dX_t^1 + X_t^1 dX_t^2 + d < X^1 X^2 >_t . \tag{1.19}$$

1.3.7 Équation différentielles stochastique :

Tout comme on définit dans un cadre déterministe la notion d'équation différentielle, on va définir ici la notion d'équation différentielle stochastique. Typiquement, une équation différentielle stochastique (EDS) est donnée par :

$$X_0 = x, dX_t = b(t; X_t)dt + a(t; X_t)dW_t \tag{1.20}$$

avec b et a des applications boréliennes de $\mathbb{R} \times [0; T]$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1 Un processus X est solution de cette EDS si c'est un processus $\mathcal{F}$-adapté (ou $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle du MBW) satisfaisant

$$\int_0^t \mid b(s; X_s) \mid ds + \int_0^t a^2(s; X_s)ds < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \mathbb{P} - p.s \tag{1.21}$$

et qui vérifie

$$X_t = x + \int_0^t b(s; X_s)ds + \int_0^t a(s; X_s)dW_s \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \mathbb{P} - p.s \tag{1.22}$$

Ces équations n'ont pas toujours de solution. Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution, on a besoin de deux types de conditions. Une première qui assure l'unicité de la solution grâce au caractère contractant (Lipschitz) des fonctions b et a.

Condition 1 : Il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\mid b(t;x) - b(t;y) \mid + \mid a(t;x) - a(t;y) \mid \leq L \mid x - y \mid \tag{1.23}$$

pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$.

Une deuxième qui assure que le processus n'explose pas en temps fini afin qu'il soit bien définit sur tout $\mathbb{R}^+$.

condition 2 : Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mid b(t;x) \mid^2 + \mid a(t;x) \mid^2 \leq C(1+ \mid x \mid^2) \tag{1.24}$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Théorème : Supposons que les fonctions b et a satisfont les conditions 1 et 2. Alors l'EDS admet une unique solution.

La démonstration de ce théorème utilise, comme toujours pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'équations différentielles, le théorème du point fixe.

Remarque : Dans le cas particulier où b et a sont seulement des fonctions de x et non de t (EDS autonome), la condition 2 est une conséquence de la condition 1.

1.4 Méthode de simulation :

Jusqu'ici nos avons considéré des modèles déterministes. En réalité le manque de connaissance, la procédure d'abstraction accomplie pendant la modélisation, les erreurs de mesures rendent souvent une représentation déterministe de la réalité trop limitée.Il est important donc représenter à l'intérieur de notre modèle l'incertitude et être capable de la tenir en considération pendant la simulation.Trouver une solution analytique d'un modèle probabiliste est souvent impossible. Dans ces cas, la seule manière d'étudier le système est donc la simulation.On définit simulation statistique toute méthode qui utilise des séquences des nombres aléatoires (ou random).

Il y a plusieurs méthodes de simultation comme : méthode de Rejection, méthode de Transformation inverse,méthode de von Newmann et méthode de Monté carlo

1.4.1 Méthode de Monte-Carlo :

Les méthodes de Monte-Carlo reposent sur la Loi des grands nombres. En répétant un grand nombre de fois une expérience, de façon (théoriquement) indépendante, on obtient une approximation de plus en plus fiable de la vraie valeur de l'espérance du phénomène observé.
De telles méthodes sont notamment utilisées en finance pour la valorisation d'options pour lesquelles il n'existe pas de formule fermée, mais uniquement des approximations numériques.
Il existe différentes manières d'évaluer les options. Les formes fermées, les modèles "à arbre" en sont certaines. Monté Carlo en est une autre.

Plusieurs manières d'évaluer une option doivent conduire à des résultats semblables pour des paramètres et des variables donnés.

Si on cherche un résultat rapide, les "formes fermées", les modèles binomiaux et trinomiaux, par extension les méthodes de différences finies sont souvent les plus efficaces. Si on cherche par contre une évaluation globale d'un portefeuille d'options de différents types (américaine-européenne/vanilla-exotique), ou encore l'évaluation d'options dont le payoff dépend de la performance de plusieurs sous-jacents (option sur panier par exemple), il peut être plus intéressant de l'effectuer via une simulation type "Monte Carlo".

1.4.2 Principe de la méthode de monte carlo :

[4]Les techniques de simulation par la méthode de monte carlo utilisent la loi forte des grands nombres pour estimer la valeur recherchée I_g. Si les courbes $S^i = \{S_t^i, 0 \leq t \leq T\}$,

[4]Méthode e Monté-carlo appliquées à la finance : Nicolas Baurd et ViNCent Porte

$1 \leq i \leq N$, représentent N trajectoires indépendantes distribuées suivant une méme loi , alors

$$c_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(S^i) \xrightarrow{p,s.} I_g \tag{1.25}$$

Le principe de base de la méthode de monte carlo consiste à générer N trajectoires $S^i = \{S^i_t, 0 \leq t \leq T\}$ et à considérer c_N comme estimateur du prix, celui-ci couvergeant vers le paramétre d'intéret I_g.

Le théorème centrale limite permet d'avoir une idée de l'approximation réalisée.Si le moment d'ordre 2 de $g(S_t)_{0\leq t\leq T}$ est fini, alors :

$$\sqrt{N}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(S^i) - I_g) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, var[g(S)]). \tag{1.26}$$

La détermination du nombre N de simulations nécessaires pour obtenir un estimateur satisfaisant du prix constitue l'un des probléme a uquel se trouve confronté le praticien.

D'aprés le théorème centrale limite que l'on vient de rappeler , plus la variance Var de $g(S^i)$ est élevé, plus le nombre de simulations nécessaires à l'obtention d'un estimateur précis est important.Si la réalisation d'une simulation est trés couteuse en temps de calcul, il peut etre intéressant de développer une approche alternative jouants non pas sur N mais sur Var afin de réduire le ratio $\frac{Var}{N}$.

Chapitre 2

2.1 Modèle de Black et Scholes :

Le premier modèle d'évolution des actif financiers a été proposé par Louis Bachelier dans sa thèse en 1900. Les actifs risqués étaient supposés Gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs.

Ce modèle a le nom de modèle de Black Scholes. En effet, en 1973, Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes proposent l'idée de définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture et l'appliquent à ce modèle Log-normal. Ils ont obtenus le prix nobel d'économie en 1997 pour ces travaux, ce qui n'a pas empêché, leur fond d'investissement "Long Term Capital Market" de faire faillite en 1998.

Le modèle Black-Scholes repose sur un certain nombre d'hypothèses cumulatives [1] :

**-il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage,*

**-le temps est une fonction continue*

**-il est possible d'effectuer des ventes à découvert*

**-il n'y a pas de coûts de transactions,*

**-il existe un taux sans risque , connu à l'avance et constant,*

[1] http ://financedemarche.fr/finance/le-modele-de-black-scholes-pour-levaluation-dune-option-avec-un-exemple-numerique

2.2 pratique :

On considère un marché financier comportant un actif dit sans risque de taux constant r et de prix $s_t^0 = e^{rt}$ et un actif risqué dont le prix s qui vérifie
Nous allons développé ces EDP on a trouver :

$$dS_t = S_t(bdt + \sigma dB_t) \tag{2.1}$$

alors la solution de cette EDP est :

$$dS_t = S_t(bdt + \sigma dB_t) \tag{2.2}$$
$$\frac{dS_t}{S_t} = (bdt + \sigma dB_t) \tag{2.3}$$
$$\int_0^t \frac{dS_t}{S_t} = \int_0^t (bds + \sigma dB_s) \tag{2.4}$$

on dit que $\ln S_t = f(t, S_t) = Y_t$ donc

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t)dS_t^2 \tag{2.5}$$

$\frac{\partial f}{\partial t} = 0\,;\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{S_t}\,;$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{S_t^2}$
alors la solution sera :

$$dY_t = 0dt + \frac{1}{S_t}(S_t(bdt + \sigma dB_t)) + \frac{1}{2}\frac{-1}{S_t^2}(\sigma^2 S_t^2)dt \tag{2.6}$$
$$= bdt + \sigma dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \tag{2.7}$$

et la solution générale est :

$$dY_t = (b - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t \tag{2.8}$$
$$\int_0^t dY_s = \int_0^t (b - \frac{1}{2}\sigma^2)ds + \int_0^t \sigma dB_s \tag{2.9}$$
$$Y_t = (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \tag{2.10}$$

on déduit Y_t de l'équation :

$$dY_t = d(\ln S_t) \Longrightarrow S_t = S_0 e^{Y_t} \tag{2.11}$$

alors :

$$S_t = S_0 exp[\sigma B_t + (b - \sigma^2/2)t] \tag{2.12}$$

On fixe un horizon $T > 0$ et on souhaite donner le prix d'un actif financier qui versera $h(S_T)$ à la date T.

Le cas d'un *call Européen* de maturité T et de strike K correspond au cas $h(x) = (S-K)^+$.

On procède par duplication (hedging) : on forme un portefeuille constitué d'α parts de l'actif sans risque (le montant de la richesse investie dans cet actif est αe^{rt}) et de β_t parts de l'actif risqué.

On va trouver un portefeuille *auto-financant* de valeur terminale $h(S_T)$. La valeur de ce portefeuille à la date t est :

$$V_t = \alpha_t S_t^0 + \beta_t S_t. \tag{2.13}$$

$$= \alpha_t e^{rt} + \beta_t S_0 exp[\sigma B_t + (b - \sigma^2/2)t] \tag{2.14}$$

La condition d'auto-financement se formalise par

$$dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \beta_t dS_t; \tag{2.15}$$

par dérivation on trouve :

$$\begin{aligned}
dV_t =&\alpha_t r S_t^0 dt + \beta_t (S_t(bdt + \sigma dB_t)) && (2.16)\\
=&(\alpha_t r S_t^0 + \beta_t S_t b)dt + \beta_t S_t \sigma dB_t && (2.17)\\
=&(\alpha_t r S_t^0 + \beta_t S_t (b - r + r))dt + \beta_t S_t \sigma dB_t && (2.18)\\
=&(\alpha_t r S_t^0 + \beta_t S_t (b - r) + \beta_t S_t r)dt + \beta_t S_t \sigma dB_t && (2.19)
\end{aligned}$$

donc

$$dV_t = rV_t dt + \beta_t S_t((b - r)dt + \sigma dB_t) \tag{2.20}$$

On suppose que la valeur du portefeuille à la date t est une fonction déterministe du temps et de la valeur de l'actif risqué, soit $V(t, S_t)$.

En utilisant la deuxième formule d'Itô, on calcule :

$$\begin{aligned}
dV_t =& rV_t dt + \beta_t S_t((b-r)dt + \sigma dB_t) && (2.21)\\
=& \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial s}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}dS_t^2 && (2.22)\\
=& \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial s}S_t(bdt + \sigma dB_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2 dt && (2.23)\\
=& (\frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t) + bS_t\frac{\partial V}{\partial s}(t,S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(t,S_t))dt + (\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial s}(t,S_t))dB_t. && (2.24)
\end{aligned}$$

En identifiant avec la condition d'auto-financement.

$$\sigma\beta_t S_t = \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial s}(t,S_t)$$
$$\text{soit } \beta_t = \frac{\partial V}{\partial s}(t,S_t),$$

par identification d'équation (2.20) et (2.24) on trouve

$$\begin{aligned}
dV_t =& rV_t dt + \beta_t S_t((b-r)dt + \sigma dB_t) && (2.25)\\
=& (\frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t) + bS_t\frac{\partial V}{\partial s}(t,S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(t,S_t))dt + (\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial s}(t,S_t))dB_t. && (2.26)
\end{aligned}$$

on transpose de l'autre couté on trouve une équation différentielle nule en dt et en dB_t.

$$rV_t dt + \beta_t S_t((b-r)dt + \sigma dB_t) - (\frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t) + bS_t\frac{\partial V}{\partial s}(t,S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(t,S_t))dt + (\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial s}(t,S_t))dB_t = 0 \tag{2.27}$$

$$[rV_t + \beta_t S_t(b-r) - \frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t) - bS_t\beta_t - \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(t,S_t)]dt + [0]dB_t = 0 \tag{2.28}$$

donc :

$$rS_t\frac{\partial V}{\partial s}(t,S_t) + \frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(t,S_t) - rV(t,S_t) = 0 \tag{2.29}$$

avec pour condition terminale $V(T,S_T) = h(S_T)$.

Comme S_t est une v.a qui peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}^+$, on en déduit que V satisfait l'EDP

$$rx\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) - rV(t,x) = 0 \tag{2.30}$$

Dans le cas d'un call européen $h(x) = (S-K)^+$, et pour $\sigma > 0$, cette équation se résout alors en :

$$V(t,S) = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r\times T}\mathcal{N}(d_2) = call \tag{2.31}$$

où est la fonction de répartition d'une v.a. gaussienne standard :

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du, \tag{2.32}$$

et avec les notations

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

La quantité

$$\frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) = \mathcal{N}(d_1)$$

qui représente la couverture du marché, soit le nombre de parts de l'actif sous jacent utilisées pour répliquer l'option s'appelle le delta de l'option et représente aussi la sensibilité du prix de l'option par rapport au prix du sous jacent.

Cette interprétation est fondamentale en Finance, et fait intervenir un changement de probabilité.

2.3 Application :

Soit[2] un call sur un indice Boursier CAC40 , une entreprise spécialisée dans le commerce de l'acier, dont les résultats futurs semblent prometteurs. L'action vaut aujourd'hui 80 euros. Soit un call de strike 90 et de maturité un trimestre. Les taux d'intérêts sans risque pour cette période sont équivalents à 5 %. La volatilité implicite est estimée à 35%. Donc, $S = 80, K = 90, T = 0,25, r = 0,05, \sigma = 0,35$

on calcul d_1 et d_2 on trouve :

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{80}{90}) + (0.05 + 0.35^2/2)0.25}{0.35\sqrt{0.25}} = -0.51$$

$$d_2 = -0.51 - 0.35\sqrt{0.25} = -0.69$$

donc

$$\mathcal{N}(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-u^2/2} du = 0.53$$

[2] http ://dev.ipol.im/ morel/Soutenances %20stages %20licence%202011/5-Romain-WARLOP.pdf

et

$$\mathcal{N}(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-u^2/2} du = 0.2451$$

le prix sera égale à :

$$V(t,x) = 80\mathcal{N}(d_1) - 90e^{-0.05\times 0.25}\mathcal{N}(d_2) = 2.48$$

jusqu'ici, cette option a été évaluée sans dividendes.

Maintenant en doit faire une simulation par le changement des valeurs de σ et r et étudient où bien conclus les prix du call Européen les résultats sur le tableau suivant :

σ \ R	5%	10%	15%	20%
30%	0.62€	0.789€	0.193€	-0.364€
35%	2.48€	-0.167€	0.126€	-3.62€

FIGURE 2.1 – Résultat du calcul de $V(t,x)$.

Le CAC 40 est un indice, il se calcule, on ne peut pas l'échanger en tant que tel. En revanche, un portefeuille d'actions donné peut se fixer comme contrainte d'avoir la composition la plus voisine possible de celle du CAC 40. Ainsi un portefeuille comprenant l'ensemble pondéré des quarante valeurs du CAC 40 courant s'écartera progressivement de l'indice en fonction des évolutions du poids indiciel de chaque valeur et son évolution ne sera plus exactement celle du CAC 40 trois mois plus tard et ainsi de suite au fil du temps.

2.4 présentation du CAC 40 par un schéma :

FIGURE 2.2 – CAC 40 from December 1964 to May 2016 (daily closings).

[3] En 2010, les dirigeants des entreprises du CAC 40 ont touché en moyenne 4,11 millions d'euros, en augmentation de 34 %par rapport à 200959.

En 2013, le salaire moyen pour un patron du CAC 40 s'élève à 2,25 millions d'euros60.

En 2016, la rémunération moyenne d'un patron du CAC 40 s'élève à 4,5 millions d'euros61.

[3]https ://fr.wikipedia.org/wiki/CAC-40

Conclusion

Dans ce mémoire, on étudie les risques financiers d'un phénomène aléatoire par le calcul stochastique "utiliser la formule d'ito.
Aprés une présentation théorique consacrée à la mise en oeuvre de la définition de marchés financiers, le calcul stochastique et des méthodes de simulation numérique "Monté-Carlo". De plus, on utilise le modèle de Black-scholes pour calculer $V(t, x)$ qui représente le Call Européen d'un indice boursier par exemple "CAC-40".

Bibliographie

[1] Conze, A. and Viswanathan, R. Path dependent options : "the case of lookback Options", Journal of Finance, 46 : 1893-1907, 1991.

[2] I. KARATZAS and S.E. SHREVE. "Brownian Motion and Stochastic Calculus".Springer-Verlag, New York, 1988.

[3] J. COX, J.E. INGERSOLL, and S.A. ROSS. "A theory of the term structure of the interest rates". Econometrica, 53, 1985.

[4] M. MUSIELA and M. RUTKOWSKI. "Martingale Methods in Financial Models", volume 36 of Applications of Mathematics. Springer Verlag, 1997.

[5] Rama CONT.Horizon Maths 2013." Modélisation mathématique des risques financiers".Fondation des Sciences Mathématiques de Paris.

[6] Romuald ELIE et Idris KHARROUBI."Calcul stochastique appliqué à la finance".