



UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences
de la Matière



N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : MERDACI seddik

Thème

Homogénéisation asymptotique des plaques hétérogènes visco-élastique affaiblies par des micro-fissures

Soutenu publiquement le : 04/06/2017

Devant le jury composé de :

| | | |
|---------------------|---|------------|
| Merabet Ismail | M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla | Président |
| Bensayah Abdallah | M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla | Examineur |
| Ghezal Abderrazek | M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla | Examineur |
| Chacha Djamel Ahmed | Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla | Rapporteur |

DÉDICACES

Je dédie ce mode

- *Mère*
- *Mère*
- *Mon encadreur D.*
- *Cous me*
hammed, D.
- *Mère*
- *Cous le*
m'excuser.

Merdaci Seddik.

REMERCIEMENT

Au terme de ce travail, je voudrais exprimer mes sincères remerciements à Monsieur **Chacha Djamel Ahmed** professeur au département de mathématiques de l'Université de Ouargla d'avoir accepté d'être le rapporteur de ce mémoire, pour ses précieux conseils et encouragements tout au long de ce travail.

Je remercie AYADI Abdelhamid Prof Université d'Oum el Bouaghi.

Mes remerciements vont vivement à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je remercie également tous les enseignants des département de mathématiques de l'université de Ouargla et d'Oum el Bouaghi qui ont participé à ma formation pendant tout le cycle universitaire.

Sans oublier les membres du jury qui ont bien voulu examiné ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----------|
| Dédication | i |
| Remerciement | ii |
| Notations et Préliminaires | 1 |
| 1 GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D’HOMOGENÉISATION | |
| 1.1 Méthode d’homogénéisation cas périodique | 4 |
| 1.1.1 Position du problème | 4 |
| 1.1.2 Formulation variationnelle du problème | 5 |
| 1.1.3 Existence et unicité de u^ε | 6 |
| 1.1.4 Mise en oeuvre de l’homogénéisation asymptotique | 6 |
| 1.1.5 Formulation variationnelle de (1.9) | 7 |
| 1.1.6 Équation homogénéisé | 8 |
| 1.2 Méthode de l’énergie de Tartar | 9 |
| 1.3 Élasticité linéaire | 12 |
| 1.3.1 Position du problème | 13 |
| 1.3.2 Formulation variationnelle de $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ | 13 |
| 1.3.3 Existence et unicité de u^ε | 15 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.3.4 | Développements asymptotiques | 16 |
| 1.3.5 | Localisation | 17 |
| 1.3.6 | Homogénéisation | 18 |
| 2 | Homogénéisation asymptotique des plaques hétérogènes visco-élastique affaiblies par des micro-fissures | 20 |
| 2.1 | Position du problème | 20 |
| 2.1.1 | Équation d'équilibre d'une plaque fissurée hétérogène visco-élastique | 22 |
| 2.1.2 | L'état cinématique sur la fissure | 23 |
| 2.2 | Formulation variationnelle de $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ | 24 |
| 2.3 | Existence et unicité de u^ε | 25 |
| 2.4 | Développement asymptotique | 27 |
| 2.5 | Comportement local | 29 |
| 2.5.1 | L'étude de l'équation microscopique | 35 |
| 2.6 | La loi de comportement homogénéisé | 37 |
| 2.7 | Le problème homogénéisé | 41 |
| 3 | Annexe A | 46 |
| 4 | Annexe B | 48 |

NOTATIONS

- ε Un petit paramètre positif.
- $\mathcal{D}(\Omega)$ L'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω .
- $H^1(\Omega)$ L'espace de Sobolev.
- e_i Les vecteurs unitaires des axes.
- Ω^ε Configuration de référence d'une plaque.
- ω Surface moyenne de la plaque.
- Γ_\pm^ε Les faces supérieure et inférieure respectivement de Ω^ε .
- δ_{ij} Symbole de Kronecker.
- σ_{ij} Composantes du tenseur des contraintes.
- e_{ij} Composantes du tenseur des déformations.
- u Champ de déplacement.
- $\varepsilon^3 F(x_1, x_2)e_3$ Force normale à la plaque.
- a_{ijkl}^0 Les coefficients élastiques indépendants du temps t .
- a_{ijkl}^1 Les coefficients viscosités indépendants du temps t .
- $\langle \cdot \rangle = \widetilde{(\cdot)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\cdot) dY$ L'opérateur moyenne.
- $|Y|$ La mesure de Y .
- $\bar{x} = (x_1, x_2)$.
- Indices $\alpha, \beta = 1, 2$.

INTRODUCTION

Introduction générale :

La méthode d'homogénéisation est une technique qui consiste à approcher un matériau qui présente de fortes hétérogénéités matérielles ou géométriques par un matériau (ou une structure) homogène asymptotiquement équivalent. En effet, faire des calculs de charges critiques ou de modes de flambage etc, par des méthodes standards telles que la méthode des éléments finis ou la méthodes des différences finies, est beaucoup plus complexe et peut conduire à des résultats erronés. Ce n'est qu'après une étude par homogénéisation qui discerne l'échelle macroscopique que l'on peut implémenter sous une forme ou une autre les effets de ces phénomènes locaux dans les éléments finis. En calcul de structure, on montre qu'il y a une grande influence de ces hétérogénéités sur le comportement de la structure globale. Souvent la présence de ces hétérogénéités permet de renforcer la rigidité de la structure.

L'homogénéisation permet donc de définir un milieu homogène équivalent. Cette technique s'est bien développée depuis les années 1970. Les travaux de E.Sanchez-Palencia [10] A. Bensoussan, J.Lions, G.Papanicolaou [1] et d'autres présentent une première formulation claire et simplifiée des problèmes d'homogénéisation sous forme d'un problème asymptotique avec petit paramètre.

Présentation de ce travail

Dans le **premier chapitre** de ce travail nous allons faire un rappel des techniques d'homogénéisation qui représentent un outil considérable permettant de rendre compte du rôle de certaines hétérogénéités dans le renforcement des rigidités des structures. On citera aussi quelques domaines d'utilisation de ces techniques.

Au **deuxième chapitre** on considère dans le cadre de la visco-élasticité une plaque visco-élastique tridimensionnelle non homogène et anisotrope dont l'épaisseur est du même ordre que la taille de la période, sachant que les forces appliquées sont de type surfacique sur la face supérieure. L'objet de ce chapitre est d'étudier le comportement de la solution tridimensionnelle d'un problème visco-élastique de plaque fissuré. On utilise, d'une façon formelle, la technique des développements asymptotiques, appliquée à la formulation variationnelle du problème posé dans un domaine. Il s'agit donc d'étudier le comportement de cette plaque grâce à une approche asymptotique à deux échelles de variations, le but escompté de cette étude est donc de trouver pour la structure en question un modèle équivalent (modèle bidimensionnel).

GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION

1.1 MÉTHODE D'HOMOGENÉISATION CAS PÉRIODIQUE

On considère un problème aux limites thermique simple et classique posé sur une structure périodique de période ε , on pose le petit paramètre d'échelle du problème

1.1.1 Position du problème

Les coefficients physiques du matériau constitutif de la structure, a_{ij} varient rapidement en fonction de ε . le problème se formule de la façon suivante :

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \begin{cases} -\frac{d}{dx_j} \left[a_{ij}^\varepsilon(x) \cdot \frac{du^\varepsilon}{dx_i} \right] = f(x), & x \in \Omega. \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION
1.1. MÉTHODE D'HOMOGENÉISATION CAS PÉRIODIQUE

Où f désigne un terme de source qui est supposé donné.

On utilise la convention de sommation par rapport aux indices répétés.

On définit $y = \frac{x}{\varepsilon}$.

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = a_{ij}(y).$$

ε : un petit paramètre représentant la dimension de la cellule.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ variable macroscopique (globale).

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) = \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \dots, \frac{x_n}{\varepsilon}\right)$ variable microscopique (locale).

Hypothèses :

H1. $a_{ij}(y)$ est régulière, Y -périodique.

H2. $a_{ij} = a_{ji}$ est symétrique.

H3. a_{ij} est elliptique :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } : a_{ij}(y)\xi_j\xi_i \geq M|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in Y.$$

Y la cellule de base.

H4. $f \in L^2(\Omega)$

1.1.2 Formulation variationnelle du problème

La première étape de la méthode de l'énergie consiste à trouver une formulation variationnelle du problème. En effet on cherche u^ε dans un espace V de Hilbert tel que :

$$V = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (1.2)$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION
1.1. MÉTHODE D'HOMOGENÉISATION CAS PÉRIODIQUE

En multipliant l'équation (1.1) par v appartenant à l'ensemble V , on obtient la formulation variationnelle suivante après des intégrations par parties :

$$a(u^\varepsilon, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (1.3)$$

où :

$$a(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx. \quad (1.4)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx. \quad (1.5)$$

1.1.3 Existence et unicité de u^ε

On est bien dans le cadre d'application du théorème de **Lax-Milgram**, se qui établit l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.1).

1.1.4 Mise en oeuvre de l'homogénéisation asymptotique

On suppose que $u^\varepsilon(x)$ admet un développement asymptotique à double échelles,

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \dots + \varepsilon^k u^k(x, y) + \dots \quad (1.6)$$

avec $u^k(x, \cdot)$ Y -périodique. $\forall k \in \mathbb{N}$.

On utilise la règle de dérivation :

$$\text{Soit } \Phi^\varepsilon(x) = \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \Phi(x, y),$$

$$\frac{\partial \Phi^\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (1.7)$$

On remplace (1.6) dans la 1^{ère} équation de $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ et en tenant compte de (1.7) on obtient

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ij}(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots) \right\} \right] - \\ & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[a_{ij}(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots) \right\} \right] = f. \end{aligned} \quad (1.8)$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION
1.1. MÉTHODE D'HOMOGENÉISATION CAS PÉRIODIQUE

A l'ordre ε^{-2}

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left[a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_i} \right] = 0. \quad (1.9)$$

A l'ordre ε^{-1}

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_j} \right] - \frac{\partial}{\partial y_j} \left[a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial x_i} \right] - \frac{\partial}{\partial y_j} \left[a_{ij}(y) \frac{\partial u^1}{\partial y_i} \right] = 0. \quad (1.10)$$

A l'ordre ε^0

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial x_i} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ij}(y) \frac{\partial u^1}{\partial y_i} \right] - \frac{\partial}{\partial y_j} \left[a_{ij}(y) \frac{\partial u^1}{\partial x_i} \right] - \frac{\partial}{\partial y_j} \left[a_{ij}(y) \frac{\partial u^2}{\partial y_i} \right] = f. \quad (1.11)$$

Résolution de l'équation (1.9)

On utilise le Lemme suivant :

Lemme 1.1.1 *Considérons le problème aux limites*

$$A\phi = F \quad \text{sur } Y$$

Y une période de référence, avec $A = -\frac{\partial}{\partial y_i} (a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j})$.

ϕ est Y -périodique, $F \in L^2(Y)$.

Alors on a :

1. Il existe une solution faible unique de notre problème si et seulement si $\langle F \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y F dy = 0$.
2. S'il existe une solution faible du problème, alors elle est unique à une constante additive près.

1.1.5 Formulation variationnelle de (1.9)

On définit :

$$H_p^1(Y) = \{v \in H^1(Y), Y\text{-périodique}\}.$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION
1.1. MÉTHODE D'HOMOGENÉISATION CAS PÉRIODIQUE

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^0 \in H_p^1(Y) \text{ telle que} \\ \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_j} dy = 0, \quad \forall v \in H_p^1(Y). \end{array} \right. \quad (1.12)$$

On choisit $v = u^0$ et on utilise l'ellipticité de (a_{ij}) , on obtient :

$$M \int_Y \left(\frac{\partial u^0}{\partial y_i} \right)^2 dy \leq 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u^0}{\partial y_i} = 0 \quad \forall i \Rightarrow$$

$$u^0 \equiv u^0(x). \quad (1.13)$$

Lorsque on remplace (1.13) dans (1.10) on obtient l'équation local

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left[a_{ij}(y) \frac{\partial u^1}{\partial y_i} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ij}(y) \underbrace{\frac{\partial u^0}{\partial y_j}}_0 \right] = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} a_{ij}(y) \right) \cdot \frac{\partial u^0}{\partial x_i}. \quad (1.14)$$

Étude de l'équation locale

Supposons que u^0 est connue, d'après le Lemme 1.1.1 on a l'existence et unicité (à une constante additive près) dans $H_p^1(Y)$ d'une solution faible du problème local, car

$$\langle F \rangle = \frac{\partial u^0}{\partial x_i} \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_j} dy = 0,$$

Alors

$$u^1(x, y) = \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_k} \chi^k(y) + \hat{u}^1(x). \quad (1.15)$$

avec $\chi^k(y) \in H_p^1(Y)$, est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[a_{ij}(y) \frac{\partial \chi^k}{\partial y_i} \right] = \frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_j} \\ \langle \chi^k \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

1.1.6 Équation homogénéisé

On applique l'opérateur moyenne $\langle \cdot \rangle$ à l'équation (1.11)

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \langle a_{ij}(y) \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u^1}{\partial y_i} \right) \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ij}(y) \frac{\partial u^1}{\partial x_i} \right) \rangle = \langle f \rangle = f. \quad (1.17)$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION
1.2. MÉTHODE DE L'ÉNERGIE DE TARTAR

On introduit (1.15) dans (1.17) on obtient

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle a_{ij}(y) \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u^0}{\partial x_k} \frac{\partial \chi^k}{\partial y_i} \right) \right\rangle = f. \quad (1.18)$$

\Leftrightarrow

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle a_{ij}(y) \left(a_{kj}(y) + a_{ij}(y) \frac{\partial \chi^k}{\partial y_i} \right) \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x_k} = f. \quad (1.19)$$

Alors l'équation homogénéisé est :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{kj}^H \frac{\partial u^0}{\partial x_k} \right] = f. \quad (1.20)$$

avec :

$$a_{kj}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[a_{kj}(y) + a_{ij}(y) \frac{\partial \chi^k(y)}{\partial y_i} \right] dy \quad (1.21)$$

1.2 MÉTHODE DE L'ÉNERGIE DE TARTAR

Convergence de u^ε vers u^0 lorsque $(\varepsilon \rightarrow 0)$

La formulation variationnelle de $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_\Omega a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.22)$$

On prend dans (1.22) $v = u^\varepsilon$ et on utilise l'ellipticité des (a_{ij}^ε)

$$\begin{aligned} M \| u^\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= M \| \nabla u^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_\Omega a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} dy = \int_\Omega f u^\varepsilon dx \leq C_0 \| f \|_{L^2(\Omega)} \| u^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \\ &= C_0 \| f \|_{L^2(\Omega)} \| u^\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

d'où

$$\| u^\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C. \quad (1.24)$$

Alors u^ε admet une sous-suite qu'on note u^ε qui converge faiblement :

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^* \text{ dans } H_0^1(\Omega). \quad (1.25)$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION
1.2. MÉTHODE DE L'ÉNERGIE DE TARTAR

$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ toute suite convergente faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ est convergente fortement dans $L^2(\Omega)$.

$$\| a_{ij}^\varepsilon(x) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \|_{L^2(\Omega)} \leq C \Rightarrow a_{ij}^\varepsilon(x) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup p_i^* \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (1.26)$$

On pose

$$p_i^\varepsilon = a_{ij}^\varepsilon(x) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup p_i^* \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (1.27)$$

On sait

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p_i^\varepsilon = f \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} p_i^* = f \quad (1.28)$$

si

$$p_i^* = a_{ij}^H \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \quad (1.29)$$

alors u^* est solution du même problème que u^0 .

Montrons maintenant que (1.29) est satisfaite.

Soit w^k la solution de (même formulation variationnelle de χ^k)

$$\begin{cases} \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial w^k}{\partial y_j} \frac{\partial v}{\partial y_i} dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(y) v dx, & \forall v \in H_0^1(\Omega). \\ \langle w^k \rangle = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

On pose $w^\varepsilon(x, y) = \chi_k(x) + \varepsilon w^k(y)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y}.$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} \right] &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}^\varepsilon \left(\delta_{kj} + \frac{\partial w^k}{\partial y_j} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ik}(y) + a_{ij}(y) \frac{\partial w^k}{\partial y_j} \right] \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left[a_{ik}(y) + a_{ij}(y) \frac{\partial w^k}{\partial y_j} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Donc

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (1.32)$$

La formulation variationnelle de (1.32)

$$\int_\Omega a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.33)$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION
1.2. MÉTHODE DE L'ÉNERGIE DE TARTAR

on choisit $v = \varphi u^\varepsilon$ dans (1.33) avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on obtient

$$\int_{\Omega} a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u^\varepsilon + \varphi \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right) dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.34)$$

Dans la formulation variationnelle de u^ε

$$\int_{\Omega} a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.35)$$

on choisit $v = \varphi w^\varepsilon$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on obtient

$$\int_{\Omega} a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w^\varepsilon + \varphi \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\Omega} f \varphi w^\varepsilon dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.36)$$

On soustrait (1.47) de (1.36)

$$\int_{\Omega} a_{ij}^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w^\varepsilon - \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u^\varepsilon \right) dx = \int_{\Omega} f \varphi w^\varepsilon dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.37)$$

$w^\varepsilon \rightarrow \chi_k$ dans $L^2(\Omega)$.

$p_i^\varepsilon = a_{ij}^\varepsilon(x) \cdot \frac{du^\varepsilon}{dx_j} \rightarrow p_i^*$ dans $L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} p_i^\varepsilon w^\varepsilon &\rightarrow \chi_k p_i^* \\ \langle p_i^\varepsilon w^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)} &\rightarrow \langle \chi_k p_i^*, p_i^\varepsilon w^\varepsilon \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

D'autre par on a :

$$a_{ij}^\varepsilon(x) \cdot \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} \xrightarrow{\text{Th.4.0.4}} \langle a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} \rangle \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (1.39)$$

D'où

$$u^\varepsilon a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} \rightarrow u^* \langle a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} \rangle \quad (1.40)$$

D'où

$$\langle a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} u^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle_{L^2(\Omega)} \rightarrow \langle \langle a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} \rangle u^*, \frac{\partial \varphi}{x_j} \rangle \quad (1.41)$$

$$\int_{\Omega} \underbrace{f \varphi}_{\in \mathcal{D}(\Omega)} w^\varepsilon dx \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi \chi_k dx \quad (1.42)$$

Alors quand $\varepsilon \rightarrow 0$, en utilisant (1.40), (1.41) et (1.42) on obtient que l'équation (1.39)

à la limite :

$$\int_{\Omega} \left[\chi_k p_i^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \langle a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_j} \rangle u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] dx = \int_{\Omega} f \varphi \chi_k dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.43)$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION
1.3. ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

⇔

$$\int_{\Omega} \left[\chi_k p_i^* - \underbrace{\langle a_{ij} \left(\delta_{kj} + \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_j} \right) \rangle}_{a_{ik}^H} u^* \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f \varphi \chi_k dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.44)$$

Au sens des distributions, on obtient

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} [\chi_k p_i^* - a_{ik}^H u^*] = f \chi_k. \quad (1.45)$$

⇔

$$\underbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial x_i} p_i^* - f \right)}_0 - p_k^* + [a_{ik}^H u^*] = 0. \quad (1.46)$$

⇒

$$p_k^* = \frac{\partial}{\partial x_i} [a_{ik}^H u^*]. \quad (1.47)$$

Conclusion : $u^* \equiv u^0$.

1.3 ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

On va considérer un problème classique d'élasticité linéaire posé sur une structure périodique. Désignons par ε la longueur de la période, ainsi à une nouvelle échelle que l'on qualifera de microscopique. Dans la cellule de base (une période) règne donc des champs de déplacements, de déformation et de contraintes $(u^\varepsilon, e^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$. Le matériau constitutif de la structure est supposé être anisotrope de coefficients d'élasticité a_{ijkl}^ε . Le paramètre ε étant petit, on cherche s'il existe (u^0, e^0, σ^0) limite de $(u^\varepsilon, e^\varepsilon, \sigma^\varepsilon)$ quant ε tend vers 0. Si c'est le cas, la loi de comportement homogénéisée sera par définition la relation liant ces limites. C'est la technique adoptée par E. Sanchez-Palencia [10] et D. Cioranescu et J. Saint-Jean-Paulin [3]

1.3.1 Position du problème

Supposons que la structure, occupant un volume Ω , est soumise à des efforts volumiques imposée f_i , des efforts surfaciques F_i sur une partie Γ_F de sa frontière $\partial\Omega$, un déplacement nul étant imposé sur la partie complémentaire Γ_0 de $\partial\Omega$. Le champ de contrainte σ_{ij}^ε et de déplacement u^ε sont solution du problème d'élastostatique suivant :

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3. \\ \sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh}^\varepsilon(x) e_{kh}(u^\varepsilon) \text{ dans } \Omega \text{ (Loi de comportement ou loi de Hooke).} \\ \sigma_{ij}^\varepsilon n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_F \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \end{array} \right. \quad (1.48)$$

avec :

$$e_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.49)$$

$$A = (a_{ijkh}). \quad (1.50)$$

a_{ijkh} les coefficients élastique.

Propriétés de $A = (a_{ijkh})$

1. La symétrie :

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{k hij} = a_{khji}.$$

2. Ellipticité : $\exists C > 0, \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji} \quad (\xi = (\xi_{ij}))$.

$$a_{ijkh} \xi_{kh} \xi_{ij} \geq C \xi_{ij} \xi_{ij} (\equiv A\xi : \xi \geq C\xi : \xi).$$

3. $a_{ijkh} \in L^\infty(\Omega)$.

1.3.2 Formulation variationnelle de $(\mathcal{P}^\varepsilon)$

Soit :

$$V = \{v \in (L^2(\Omega))^3, \quad \nabla v \in (L^2(\Omega))^3, \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \quad (1.51)$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION
1.3. ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

qui est un espace de Hilbert (sous espace fermé de $H^1(\Omega)$),

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_j} v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx, \quad \forall v \in V. \quad (1.52)$$

On suppose que $f_i \in L^2(\Omega)$, $F_i \in L^2(\Gamma_F)$.

On applique la formule de Green à (1.52) on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^{\varepsilon} n_j v_i ds = \int_{\Omega} f_i v_i dx, \quad \forall v \in V. \quad (1.53)$$

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^{\varepsilon} n_j v_i ds = \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij}^{\varepsilon} n_j \underbrace{v_i}_0 ds + \int_{\Gamma_F} \underbrace{\sigma_{ij}^{\varepsilon} n_j}_{F_i} v_i ds.$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ji}^{\varepsilon} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\varepsilon} e_{ij}(v) dx. \end{aligned}$$

Alors la formulation variationnelle de $(\mathcal{P}^{\varepsilon})$ est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{\varepsilon} \in V \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\varepsilon} e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} a_{ijkh}^{\varepsilon}(x) e_{kh}(u^{\varepsilon}) e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_F} F v ds, \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (1.54)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{\varepsilon} \in V \text{ telle que} \\ a(u^{\varepsilon}, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (1.55)$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} A e(u) : e(v) dx. \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_F} F v ds. \end{aligned}$$

Propriétés de $a(., .)$

1. $a(., .)$ forme bilinéaire symétrique (car a_{ijkh} symétrique).

2. $a(.,.)$ continue

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq M \int_{\Omega} |e(u)||e(v)| dx \\ &\leq M \|e(u)\|_{L^2(\Omega)} \|e(v)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M \|u\|_V \|v\|_V \end{aligned} \tag{1.56}$$

3. $a(.,.)$ est coercive.

On utilise l'inégalité de Korn¹

D'où

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} Ae(v) : e(v) dx \\ &\geq M \int_{\Omega} e(v) : e(v) dx = M \|e(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq C \|v\|_V^2 \quad (\text{par l'inégalité de Korn}). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Propriétés de $L(.)$

1. $L(.)$ est forme linéaire sur V (évident).

2. $L(.)$ est continue :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|F\|_{L^2(\Gamma_F)} \|v\|_{L^2(\Gamma_F)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V + C \|F\|_{L^2(\Gamma_F)} \|v\|_V \\ &= (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|F\|_{L^2(\Gamma_F)}) \|v\|_V \\ &= C \|v\|_V. \end{aligned}$$

1.3.3 Existence et unicité de u^ε

Ce problème, étant bien défini, admet donc une solution faible unique (d'après le théorème de **Lax-Milgram**).

1. Voir annexe A

1.3.4 Développements asymptotiques

L'idée est chercher $(u^\varepsilon, \sigma_{ij}^\varepsilon)$ sous forme d'un développement asymptotique à double échelle (x, y) en ε . On développe les champs de déplacement et contrainte de la façon suivante :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots, /y = \frac{x}{\varepsilon}, Y\text{-périodique.} \\ \sigma_{ij}^\varepsilon(x) = \sigma_{ij}^0(x, y) + \varepsilon \sigma_{ij}^1(x, y) + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^2(x, y) + \dots, /y = \frac{x}{\varepsilon}, Y\text{-périodique.} \\ e_{ij}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} e_{ij}^{-1}(x, y) + e_{ij}^0(x, y) + \varepsilon e_{ij}^1(x, y) + \dots + \varepsilon^k e_{ij}^k(x, y) + \dots, /y = \frac{x}{\varepsilon}, Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (1.58)$$

L'étape suivante consiste à substituer ces développements dans l'équation d'équilibre et la loi de comportement en tenant du fait que la dérivation par rapport à la variable globale x sera remplacé par une formule qui tient compte de la dépendance en la variable locale y soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2, 3. \\ e_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \\ \quad = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial y_i} \right] \\ \quad = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial y_i} \right) \\ \quad = e_{ijx}(u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} e_{ijy}(u^\varepsilon). \end{cases} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} e_{ij}^\varepsilon &= e_{ij}(u^\varepsilon) = e_{ijx}(u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots) + \frac{1}{\varepsilon} e_{ijy}(u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} e_{ijy}(u^0) + \varepsilon^0 (e_{ijx}(u^0) + e_{ijy}(u^1)) + \dots + \varepsilon^k (e_{ijx}(u^k) + e_{ijy}(u^{k+1})) + \dots \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$e_{ij}^{-1}(x, y) = e_{ijy}(u^0), \quad / \text{à l'ordre } \varepsilon^{-1}. \quad (1.61)$$

$$e_{ij}^0(x, y) = (e_{ijx}(u^0) + e_{ijy}(u^1)), \quad / \text{à l'ordre } \varepsilon^0. \quad (1.62)$$

et en général

$$e_{ij}^k(x, y) = (e_{ijx}(u^k) + e_{ijy}(u^{k+1})), \quad k \in \mathbb{N}^* \quad / \text{à l'ordre } \varepsilon^k. \quad (1.63)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) e_{kh}^\varepsilon \Rightarrow \sigma_{ij}^m(x, y) = a_{ijkh}(y) e_{kh}^m(x, y), \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (1.64)$$

On applique (1.58) et (1.61) à l'équation d'équilibre on obtient alors :

$$\begin{cases} \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}^0 + \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}^1 + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^0 + f \right) + \dots = 0 \\ \sigma_{ij}^0 + \varepsilon \sigma_{ij}^1 + \dots = a_{ijkh}(y) [\varepsilon^{-1} e_{ijy}(u^0) + (e_{ijx}(u^0) + e_{ijy}(u^1)) + \dots] \end{cases} \quad (1.65)$$

On procède ensuite par une identification successive des termes de même puissance en ε . Ainsi à l'ordre -1 nous déduisons en première approximation que la champ de contrainte est localement auto-équilibré et le champ de déplacement ne dépend que de la variable lente x soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}^0 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \\ u^0 = u^0(x) \end{cases} \quad (1.66)$$

Ce résultat est très classique en homogénéisation. Le champ de déplacement à l'ordre 0 caractérise en fait le champ de déplacement macroscopique.

À l'ordre suivant on trouve que le champ de contrainte à l'ordre 0 s'écrit :

$$\sigma_{ij}^0 = a_{ijkh}(e_{ijx}(u^0) + e_{ijy}(u^1)). \quad (1.67)$$

On constate donc que est solution du problème suivant qui est posé sur la cellule de base et ou la variable globale x joue le rôle d'un paramètre :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}^0 = 0 \quad i = 1, 2, 3. \\ \sigma_{ij}^0 = a_{ijkh}(e_{ijx}(u^0) + e_{ijy}(u^1)) \\ u^1 \text{ } Y\text{-périodique en } y \\ \sigma_{ij}^0 n_j \text{ } Y\text{-antipériodique en } y \end{cases} \quad (1.68)$$

1.3.5 Localisation

On définit

$$H_Y = \{u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \text{ } Y\text{-périodique}\}.$$

$$V_Y = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \text{ } Y\text{-périodique}\}.$$

Le problème local est

$$(\mathcal{P}_{loc}) \begin{cases} \text{Trouver } u^1 \in V_Y \text{ tel que} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [a_{ijkh}(y) e_{khy}(u^1)] = \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkh}(y)) e_{khx}(u^0) \\ u^1 \text{ } Y\text{-périodique en } y. \end{cases} \quad (1.69)$$

Formulation variationnelle de (\mathcal{P}_{loc})

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^1 \in V_Y \text{ tel que} \\ - \int_Y a_{ijkh}(y) e_{khy}(u^1) e_{khy}(v) dy = e_{khx}(u^0) \int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkh}(y)) v_i dy, \quad \forall v \in V_Y. \end{cases} \quad (1.70)$$

Pour l'existence et l'unicité on utilise le Lemme de Korn pour l'ellipticité et la continuité, qui sont des problèmes posés sur la cellule de base et admettent une solution unique à une constante additive près dans V_Y .

Ce problème étant linéaire il existe donc χ^{kh} et ψ_{ij}^{kh} tel que

$$\begin{cases} u^1 = \chi^{kh}(y) e_{khx}(u^0(x)) + \widehat{u}^1(x), \\ \sigma_{ij}^0(x, y) = \psi_{ij}^{kh} e_{khx}(u^0(x)). \end{cases} \quad (1.71)$$

Les nouvelles inconnues χ^{kh} et ψ_{ij}^{kh} sont appelés tenseurs de localisation et sont donc solution des problèmes locaux suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \psi_{ij}^{kh} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \\ \psi_{ij}^{kh} = a_{ijkh} e_{kh} (P^{kh} + \chi^{kh}) \quad \text{où } (P^{kh})_i = y_h \delta_{ki}. \\ \chi^{kh} \text{ } Y\text{-périodique en } y. \\ \psi_{ij}^{kh} .n_j \text{ } Y\text{-antipériodique en } y. \end{cases} \quad (1.72)$$

1.3.6 Homogénéisation

Une fois que les fonctions χ^{kh} et ψ_{ij}^{kh} sont connues, les coefficients homogénéisés se déduisent par application de l'opérateur moyenne à ψ_{ij}^{kh} .

L'opérateur moyenne est défini par :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\cdot) dY \quad \text{où } |Y| \text{ est la mesure de } Y.$$

La moyenne sur la cellule de base de $\sigma_{ij}^0(x, y)$ s'écrit :

$$\langle \sigma_{ij}^0(x, y) \rangle = \langle \psi_{ij}^{kh}(y) \rangle e_{kh}(u^0). \quad (1.73)$$

Cette équation définit la loi de comportement homogénéisée où les coefficients de comportement homogénéisé (G. Duvaut [7]) s'écrivent :

$$a_{ijkh}^H = \langle \psi_{ij}^{kh}(y) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y [a_{ijmn}(y) e_{mny} (P^{kh} + \chi^{kh})] dY. \quad (1.74)$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION
1.3. ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

Maintenant appliquons l'opérateur moyenne à l'équation d'équilibre à l'ordre zéro qui s'écrivait :

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij}^1 = -f_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^0, \quad i = 1, 2, 3.. \quad (1.75)$$

Par Y -antipériodicité de $\sigma_{ij}^1 \cdot n_j$ sur les bords de Y , on obtient l'équation d'équilibre homogénéisée suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma_{ij}^0 \rangle + f_i = 0. \quad (1.76)$$

En posant alors $\langle \sigma_{ij}^0 \rangle = \tau_{ij}(x)$.

On obtient que le couple (u^0, τ_{ij}) est solution du problème homogénéisé suivant :

$$(\mathcal{P}^H) \begin{cases} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 & \text{dans } \Omega \quad i = 1, 2, 3, \\ \tau_{ij} = a_{ijkh}^H e_{kh}(u^0) & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \tau_{ij} \cdot n_j = F_i & \text{sur } \Gamma_F. \end{cases} \quad (1.77)$$

Ainsi on a substitué au milieu initial un milieu élastique homogène de coefficients constants a_{ijkh}^H . Les champs de contraintes τ_{ij} et de déformation $e_{kh}(u^0)$ solutions de ce problème sont appelés champs de contraintes et de déformation macroscopique. On peut dire qu'un développement asymptotique cohérent en échelles multiples x et $y = \frac{x}{\varepsilon}$ permet d'établir les équations globales du comportement du milieu (comportement en x) dont les lois de comportement s'obtiennent à l'aide des équations en y .

Les premiers termes non nuls des développements asymptotiques des champs e^ε et σ^ε sont e^0 et σ^0 : ils constituent en fait les champs de déformations et de contraintes microscopiques.

HOMOGENÉISATION ASYMPTOTIQUE DES
PLAQUES HÉTÉROGÈNES
VISCO-ÉLASTIQUE AFFAIBLIES PAR DES
MICRO-FISSURES

2.1 POSITION DU PROBLÈME

Les notations générales sont standard dans ce genre de problèmes. Les vecteurs en présence d'entités physiques de l'espace \mathbb{R}^3 , comme les espaces de Sobolev¹ standard correspondants :

$$u = (u_1, u_2, u_3); \quad \underline{H}^1 = (H^1)^3$$

Les indices supérieurs sont utilisés en général pour les termes d'un développement et les indices inférieurs pour les composantes d'un vecteur :

1. Sergueï Lovovitch Sobolev, (1908-1989) est un mathématicien russe.

$$u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^3 + \dots$$

Nous utilisons des lettres grecques pour des indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$, des lettres latines pour des indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et nous adoptons la convention de sommation des indices répétés utilisée, de 1 à 3 pour les indices latins et de 1 à 2 pour les indices grecques :

$$u_i e_i = \sum_{i=1}^3 u_i e_i, \quad u_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha=1}^2 u_\alpha e_\alpha.$$

où e_i désignent les vecteurs unitaires des axes.

Nous considérons une plaque hétérogène visco-élastique définie comme suit :

Soit ω un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^2 (avec des variables x_1, x_2) avec une frontière $\partial\omega$.

Soit ε un paramètre qui tendra vers zéro.

La plaque est formée par le domaine Ω^ε de \mathbb{R}^3 (des variables x_1, x_2, x_3) :

$$\Omega^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{x} = (x_1, x_2) \in \omega, \quad x_3 \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\} \quad (2.1)$$

Il est clair que Ω^ε est un domaine cylindrique d'épaisseur 2ε .

Les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sont définies par :

$$\Gamma^{\pm\varepsilon} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{x} = (x_1, x_2) \in \omega, \quad x_3 = \pm\varepsilon\}. \quad (2.2)$$

La surface latérale est définie par :

$$\Gamma_0^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{x} = (x_1, x_2) \in \partial\omega, \quad x_3 \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\}. \quad (2.3)$$

Considérons également un espace auxiliaire \mathbb{R}^3 avec des variables y_1, y_2, y_3 et un parallélépipède Y avec des arêtes $a_1, a_2, 2$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_\alpha \in]0, a_\alpha[, \quad \alpha = 1, 2, \quad y_3 \in]-1, +1[\} \quad (2.4)$$

A l'intérieur de Y (ou même allant à sa frontière), nous considérerons une partie d'une surface lisse F , qui sera considérée comme une fissure.

Soit Y_F (voir FIGURE 2.2) le domaine obtenu de Y en supprimant F , i.e. $Y_F = Y \setminus F$.

Soient εY et εY_F les homothétiques de Y et Y_F avec le rapport ε .

Le domaine Ω^ε sera considéré divisé en εY périodes.

La plaque fissurée sera définie par (voir FIGURE 2.1) :

$$\Omega_F^\varepsilon = \Omega^\varepsilon \setminus \cup \varepsilon F \quad (2.5)$$

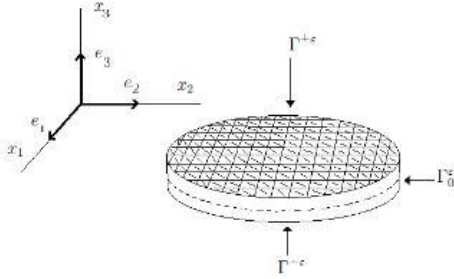


FIGURE 2.1 – Ω_F^ε .

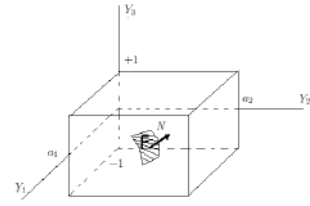


FIGURE 2.2 – Y_F .

2.1.1 Équation d'équilibre d'une plaque fissurée hétérogène visco-élastique

La plaque est formé d'un corps anisotrope visco-élastique , à structure périodique de la variable x_1, x_2 , la période est de l'ordre d'un petit paramètre ε . Les coefficients sont définis de la manière suivante :

Soit $a_{ijkh}^{(0)}$ (resp. $a_{ijkh}^{(1)}$) les coefficient d'élasticité (resp. de viscosité) définies sur Y_F . C'est - à-dire $a_{ijkh}^{(m)}(y)$ ($m=0,1$) des fonctions bornées de y définies sur Y_F (et en suite Y_F -périodique à y_1, y_2 , puisque Y_F peut être étendue par périodicité). On suppose que les coefficients $a_{ijkh}^{(m)} \in L^\infty(\Omega_F^\varepsilon)$ vérifient la propriété de la symétrie et la propriété de l'ellipticité i.e :

$$\begin{cases} a_{ijkh}^{(m)}(y) = a_{jikh}^{(m)}(y) = a_{khij}^{(m)}(y), & m = 0, 1 \\ a_{ijkh}^{(m)} e_{kh} e_{ij} \geq c e_{ij} e_{ij}, & \forall e_{ij}, \text{ avec } e_{ij} = e_{ji} \end{cases} \quad (2.6)$$

où c désigne une constante strictement positive.

On définit alors sur Ω^ε de la variable x , les coefficients élastiques et viscosités donnés par $a_{ijkh}^{(0)}(y)$ et $a_{ijkh}^{(1)}(y)$ sous l'application $y = \frac{x}{\varepsilon}$.

Nous désignons par u_i^ε , $i = 1, 2, 3$, les composantes du champ de déplacement des points de coordonnées x_1, x_2, x_3 de la plaque.

On définit le champ de déformation linéarisé associé au champ de déplacement u^ε de composantes u_i^ε par :

$$e_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

On définit le champ de contrainte par :

$$\sigma_{ij}(u^\varepsilon) = a_{ijkh}^{(0)} e_{kh}(u^\varepsilon) + a_{ijkh}^{(1)} \frac{\partial e_{kh}(u^\varepsilon)}{\partial t} \quad (2.8)$$

Nous allons appliquer à la surface supérieure de la plaque une force normale de densité $\varepsilon^3 F_3(x_1, x_2) e_3$ la surface inférieure est libre de tout effort, ici, bien sûr l'indice 3 tient compte du fait que la force est dans la direction e_3 (c'est-à-dire normale à la plaque).

Le coefficient ε^3 implique que les forces appliquées diminuent en ε^3 lorsque ε tend vers zéro.

2.1.2 L'état cinématique sur la fissure

Pour décrire l'état de frontière sur les fissures, on définit les lèvres de la fissure F avec les indices 1 et 2 et on note N la normale unitaire avec sens du côté 1 vers le côté 2. L'état cinématique sur la fissure est :

$$[u_i^\varepsilon N_i] \geq 0 \quad \text{sur } \varepsilon F \quad (2.9)$$

avec $[\phi] = \phi_2 - \phi_1$ le saut.

Les conditions aux limites de forces sont : $\sigma_{ij} n_j$ doit disparaître des deux côtés aux points où la fissure est ouverte, i.e. pour " $\gamma > 0$ " dans (2.9), à des points où la fissure est fermée, i.e. pour " $\gamma = 0$ " dans (2.9), $\sigma_{ij} n_j$ est une contrainte normale de compression. Ce qui peut être exprimée par :

$$\sigma_{ij} n_j|_1 = \sigma_{NN}|_1 N_i, \quad \sigma_{ij} n_j|_2 = -\sigma_{NN}|_1 N_i, \quad \sigma_{NN}|_1 \leq 0 \quad \text{sur } \varepsilon F, \quad (2.10)$$

$$" > 0" \text{ dans (2.9)} \Rightarrow \sigma_{NN}|_1 = 0 \text{ dans (2.10)} \quad (2.11)$$

Donc les équations d'équilibre et le comportement de la structure sont :

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \begin{cases} -\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} = 0 & \text{dans } \Omega_F^\varepsilon \\ u^\varepsilon(x, 0) = 0. \\ u^\varepsilon(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon \\ \sigma_{ij}^\varepsilon n_j = \begin{cases} \varepsilon^3 F_3 e_3 & \text{sur } \Gamma^{+\varepsilon} \\ 0 & \text{sur } \Gamma^{-\varepsilon} \end{cases} \end{cases} \quad (2.12)$$

et bien sûr (2.9)-(2.11) sur chaque εF .

2.2 FORMULATION VARIATIONNELLE DE $(\mathcal{P}^\varepsilon)$

Pour donner la formulation variationnelle de ce problème, nous définissons l'espace de Hilbert V^ε (sous-espace de $\underline{H}^1(\Omega_F^\varepsilon)$) par

$$V^\varepsilon = \{v \in \underline{H}^1(\Omega_F^\varepsilon) | v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\} \quad (2.13)$$

et on définit K_F^ε un sous ensemble convexe fermé non vide de V^ε par :

$$K_F^\varepsilon = \{v \in V^\varepsilon | [v_i N_i] \geq 0 \text{ sur chaque } \varepsilon F\} \quad (2.14)$$

Considérons $u^\varepsilon(x, t)$ comme une fonction de t à valeurs dans un espace fonctionnel défini sur Ω_F^ε . Plus précisément, si l'on se donne un temps final $T > 0$, on considère que u^ε est définie par

$$\begin{aligned} u^\varepsilon :]0, T[&\rightarrow \underline{H}^1(\Omega_F^\varepsilon) \\ t &\mapsto u^\varepsilon(t) \end{aligned}$$

et nous notons $u^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(t)(x)$. Nous multiplions donc l'équation d'équilibre par une fonction test $(v(t) - u^\varepsilon(t))(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon(t) \in K_F^\varepsilon \text{ telle que :} \\ \int_{\Omega_F^\varepsilon} \left[a_{ijkh}^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e_{kh}(u^\varepsilon) + a_{ijkh}^{(1)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e_{kh}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) \right] \cdot e_{ij}(v - u^\varepsilon) dx \geq \int_{\omega} \varepsilon^3 F_3 \cdot (v_3 - u_3^\varepsilon) d\bar{x} \\ \forall v \in K_F^\varepsilon, 0 < t < T, \\ u^\varepsilon(0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

On introduit alors le produit scalaire de $L^2(\Omega_F^\varepsilon)$ et la forme bilinéaire $a^m(w, v)$ définis par

$$(w, v)_{L^2(\Omega_F^\varepsilon)} = \int_{\Omega_F^\varepsilon} w_i(x, t) v_i(x) dx \quad \text{et} \quad a^m(w, v) = \int_{\Omega_F^\varepsilon} a_{ijkh}^{(m)} e_{kh}(w) e_{ij}(v) dx.$$

Soit un temps final $T > 0$, on se donne $\varepsilon^3 F_3 \in L^2(]0, T[; L^2(\omega))$. La formulation variationnelle de (2.12) est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in K_F^\varepsilon \text{ telle que :} \\ a^0(u^\varepsilon(t), v - u^\varepsilon) + a^1(u^\varepsilon(t), v - u^\varepsilon) \geq (\varepsilon^3 F_3, (v_3 - u_3^\varepsilon))_{L^2(\Omega_F^\varepsilon)}, \quad \forall v \in K_F^\varepsilon, \forall t \in]0, T[. \\ u^\varepsilon(0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

2.3 EXISTENCE ET UNICITÉ DE u^ε

Théorème 2.3.1 *Le problème (2.16) admet une solution unique u^ε , par le moyen du théorème de Stampacchia .*

Preuve.

Propriétés de $a^m(., .)$, $m = 0, 1$.

1. $a^m(., .)$ est une forme bilinéaire (évident).

2. $a^m(\cdot, \cdot)$ est continue :

$$\begin{aligned} |a^m(u^\varepsilon, w)| &= \left| \int_{\Omega_F^\varepsilon} a_{ijkl}^{(m)} e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(w) dx \right| \\ &\leq M \int_{\Omega_F^\varepsilon} |e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(w)| dx \\ &\leq M \left(\int_{\Omega_F^\varepsilon} (e_{kh}(u^\varepsilon))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (e_{kh}(w))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M \|u^\varepsilon\|_{\underline{H}^1(\Omega_F^\varepsilon)} \|w\|_{\underline{H}^1(\Omega_F^\varepsilon)} \quad (\text{d'après l'inégalité de Korn}). \end{aligned}$$

3. $a^m(\cdot, \cdot)$ est coercive. En effet,

$$\begin{aligned} a^m(w, w) &= \int_{\Omega_F^\varepsilon} a_{ijkl}^{(m)} e_{kh}(w) e_{ij}(w) dx \\ &\geq C \int_{\Omega_F^\varepsilon} e_{kh}(w) e_{ij}(w) dx \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Korn² on obtient :

$$a^m(w, w) \geq C \|w\|_{\underline{H}^1(\Omega_F^\varepsilon)}^2.$$

Propriétés de $L(v)$

1. $L(v)$ est une forme linéaire (évident).
2. $L(v)$ est continue, sur V^ε . En effet on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega} \varepsilon^3 F_3 v_3 d\bar{x} \right| &\leq \left(\int_{\omega} |\varepsilon^3 F_3|^2 d\bar{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\omega} |v_3|^2 d\bar{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|v\|_{L^2(\Omega_F^\varepsilon)} \\ &\leq C \|v\|_{\underline{H}^1(\Omega_F^\varepsilon)}. \end{aligned}$$

■

Dans la section suivante, nous étudions le comportement asymptotique de u^ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour une utilisation ultérieure, nous définirons ici le cadre du problème local.

Soit $\underline{H}_{per}^1(Y_F)$ l'espace des fonctions vectorielles Y -périodiques de la classe \underline{H}^1 (cela correspond au sous-espace de $\underline{H}^1(Y_F)$ des fonctions ayant la même trace sur des faces verticales

2. Voir annexe A

opposées de la frontière).

De plus, soit $\underline{\tilde{H}}_{per}^1(Y_F)$ l'espace des fonctions de $\underline{H}_{per}^1(Y_F)$ de moyenne nulle, i.e.

$$\underline{\tilde{H}}_{per}^1(Y_F) = \{v \in \underline{H}_{per}^1(Y_F) | \tilde{v} = 0\}, \quad (2.17)$$

$$\tilde{v} = \frac{1}{a_1 a_2} \int_{Y_F} v(y) dy. \quad (2.18)$$

On note que la valeur moyenne est définie ici par rapport à la surface dans le plan horizontal, mais ceci n'est pas essentiel.

En outre, soit \tilde{K}_{Y_F} l'ensemble convexe fermé

$$\tilde{K}_{Y_F} = \{v \in \underline{\tilde{H}}_{per}^1(Y_F) | [vN] \geq 0 \text{ sur } F\}. \quad (2.19)$$

Les problèmes locaux auront la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \tilde{K}_{Y_F} \text{ telle que :} \\ \int_{Y_F} \left[a_{ijkh}^{(0)}(y) e_{kh}(u) + a_{ijkh}^{(1)}(y) e_{kh} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \cdot e_{ij}(v - u) dy \geq \langle L, (v - u) \rangle \quad \forall v \in \tilde{K}_{Y_F}. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

où L désigne une forme linéaire et continue sur $\underline{\tilde{H}}_{per}^1(Y_F)$. Et le bilinéaire du côté gauche qui est continue et coercive sur $\underline{\tilde{H}}_{per}^1(Y_F)$, les problèmes de la forme (2.20) jouissent de l'existence et de l'unicité de la solution.

2.4 DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

On prend $\bar{z} = \bar{x}$.

L'idée est de chercher u^ε sous la forme d'un développement asymptotique à double échelle (\bar{z}, y) en ε . On développe le champs de déplacement de la façon suivante :

$$u^\varepsilon(x, t) = u^0(\bar{z}, y, t) + \varepsilon u^1(\bar{z}, y, t) + \varepsilon^2 u^2(\bar{z}, y, t) + \dots, u^k(\bar{z}, \cdot, t) \text{ } Y_F\text{-périodique, } \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

où chaque terme du développement dépend de $\bar{z} = (z_1, z_2)$ défini sur ω et de $y = (y_1, y_2, y_3)$ défini sur la période de référence Y_F net du temps t .

La dépendance de x est décrite par la variable macroscopique \bar{z} et par la variable microscopique y .

La règle de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.22)$$

où z_3 n'existe pas dans la réalité, nous avons $\frac{\partial}{\partial z_3} = 0$.

Le développement asymptotique du tenseur de déformation pour chaque terme u^k :

$$e_{ij}(u^k) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right) = e_{ijz}(u^k) + \frac{1}{\varepsilon} e_{ijy}(u^k) \quad (2.23)$$

on plus explicitement

$$e_{\alpha\beta}(u^k) = e_{\alpha\beta z}(u^k) + \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta y}(u^k), \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.24)$$

$$e_{\alpha 3}(u^k) = e_{3\alpha}(u^k) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^k}{\partial z_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} e_{3\alpha y}(u^k), \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.25)$$

$$e_{33}(u^k) = \frac{1}{\varepsilon} e_{33y}(u^k). \quad (2.26)$$

où la variable \bar{z} (resp. y) joue le rôle d'un paramètre.

En considérant le développement (2.21), nous avons

$$e_{ij}(u^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} e_{ij}^{-1} + e_{ij}^0 + \varepsilon e_{ij}^1 + \dots, \quad e_{ij}^k(\bar{z}, \cdot, t) \text{ } Y_F\text{-périodique} \quad (2.27)$$

avec

$$e_{ij}^{-1} = e_{ijy}(u^0), \quad (2.28)$$

$$e_{ij}^k = e_{ijz}(u^k) + e_{ijy}(u^{k+1}), \quad k \geq 0. \quad (2.29)$$

Le développement correspondant du tenseur des contraintes est simplement.

$$\sigma_{ij}(u^\varepsilon) = a_{ijkh}^{(0)} e_{kh}(u^\varepsilon) + a_{ijkh}^{(1)} \frac{\partial e_{kh}(u^\varepsilon)}{\partial t} = \varepsilon^{-1} \left[a_{ijkh}^{(0)} e_{kh}^{-1}(u^0) + a_{ijkh}^{(1)} \frac{\partial e_{kh}^{-1}(u^0)}{\partial t} \right] + \dots, \quad (2.30)$$

Y_F -périodique

Pour obtenir le développement asymptotique des expressions intégrales, nous utiliserons la proposition suivante qui se démontre facilement en décomposant l'intégrale sur Ω^ε en intégrale sur les périodes εY .

Proposition 2.4.1 *Soit $\Phi(\bar{z}, y)$ une fonction définie sur $\omega \times Y$, Y -périodique par rapport à y . Alors*

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \Phi\left(\bar{x}, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon \int_{\omega} \tilde{\Phi}(\bar{z}) dz_1 dz_2 = o(\varepsilon), \quad (2.31)$$

avec

$$\tilde{\Phi}(\bar{z}) = \frac{1}{a_1 a_2} \int_{Y_F} \Phi(\bar{z}, y) dy \quad (2.32)$$

et $o(\varepsilon)$ désigne un terme tendant vers 0 plus rapide que ε .

2.5 COMPORTEMENT LOCAL

Conformément à des considérations générales sur l'analogie avec la flexion de la plaque homogène, nous postulons un développement asymptotique de la solution $u^\varepsilon(x, t)$ de la forme (2.21). Afin d'éviter des calculs inutiles, nous commencerons par un terme principal u^0 dépendant uniquement de la variable macroscopique \bar{z} et de la direction e_3 :

$$u^\varepsilon(x, t) = u_3^0(\bar{z}, t)e_3 + \varepsilon u^1(\bar{z}, y, t) + \varepsilon^2 u^2(\bar{z}, y, t) + \dots \quad (2.33)$$

En conséquence, les termes e_{ij}^{-1} et σ_{ij}^{-1} dans (2.29) et (2.30) disparaîtront. Nous prendrons.

$$u^i(\bar{z}, \cdot, t) \in \underline{H}_{per}^1(Y_F), \forall t \in [0, T]. \quad (2.34)$$

i.e. les fonctions u^i sont des fonctions de \bar{z} définies sur ω avec des valeurs dans $\underline{H}_{per}^1(Y_F)$. Ceci garantit que, en prenant $\bar{z} = \bar{x}$, $y = \frac{x}{\varepsilon}$, le côté droit de (2.33) appartient à K_F^ε , comme u^0 est continue à travers les fissures.

Pour obtenir la structure locale (c'est-à-dire la dépendance de y des termes successifs dans (2.33)), soit

$$\theta \in \mathcal{D}(\omega) \quad \text{et} \quad w \in \tilde{K}_{Y_F} \quad (2.35)$$

étant des fonctions de l'espace correspondant, satisfaisant la condition

$$0 \leq \theta(\bar{z}) \leq 1 \quad \text{sur} \quad \omega. \quad (2.36)$$

Nous considérons ensuite les fonctions test

$$v^\varepsilon(x, t) = u_3^0(\bar{z}, t)e_3 + \varepsilon u^1(\bar{z}, y, t) + \varepsilon \theta(w(y, t) - u^1(\bar{z}, y, t)) \quad (2.37)$$

l'étape suivante consiste à substituer (2.33), (2.23) et (2.37) dans l'expression générale (2.15). Ceci est possible parce que v^ε défini par (2.37) appartient à K_F^ε (après avoir pris $\bar{z} = \bar{x}$ et $y = \frac{x}{\varepsilon}$). L'identité intégrale (2.15) devient

$$\int_{\Omega_F^\varepsilon} [\sigma_{ij}^0 + \dots] \left[e_{ijz}(\varepsilon\theta(w - u^1) + \dots) + \frac{1}{\varepsilon} e_{ijy}(\varepsilon\theta(w - u^1) + \dots) \right] dx \geq \varepsilon^3 \int_{\omega} F_3 [\varepsilon\theta(w_3 - u_3^1) + \dots] d\bar{x}. \quad (2.38)$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & \varepsilon^0 \left\{ \int_{\Omega_F^\varepsilon} \sigma_{ij}^0 e_{ijy}(\theta(w - u^1)) dx \right\} + \\ & \varepsilon^1 \left\{ \int_{\Omega_F^\varepsilon} \sigma_{ij}^0 [e_{ijz}(\theta(w - u^1)) - e_{ijy}(u^2)] \right\} + \dots \\ & \geq \varepsilon^4 \int_{\omega} F_3 \theta(w_3 - u_3^1) + \varepsilon^5 \int_{\omega} \dots \end{aligned} \quad (2.39)$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (2.39) on obtient

$$\int_{\Omega_F^\varepsilon} [\sigma_{ij}^0 e_{ijy}(w - u^1)] \theta dx \geq 0, \forall \theta \in \mathcal{D}(\omega). \quad (2.40)$$

D'après la Proposition 2.4.1 on obtient

$$\frac{\varepsilon}{a_1 a_2} \int_{\omega} \left[\int_{Y_F} \sigma_{ij}^0 e_{ijy}(w - u^1) dy \right] \theta dz_1 dz_2 \geq 0, \forall \theta \in \mathcal{D}(\omega). \quad (2.41)$$

\Leftrightarrow

$$\int_{\omega} \left[\int_{Y_F} \{ \sigma_{ij}^0 e_{ijy}(w - u^1) \} dy \right] \theta dz_1 dz_2 \geq 0, \forall \theta \in \mathcal{D}(\omega). \quad (2.42)$$

Et comme θ est arbitraire (satisfaisant (2.35), (2.36)), son coefficient dans l'intégrante de (2.42) doit être non négatif. Cela donne

$$\int_{Y_F} \sigma_{ij}^0 e_{ijy}(w - u^1) dy \geq 0 \quad \forall w \in \tilde{K}_{YF}, \quad (2.43)$$

Telle est l'équation locale (inéquation variationnelle, pour être plus précis).

Cette inéquation, quand on considère $u^0 = u_3^0 e_3$ comme connue et $u^1 \in \tilde{K}_{YF}$ est de la forme (2.20),

Problème local :

$$(\mathcal{P}_{\text{loc}}^1) \begin{cases} \text{Trouver } u^1 \in \tilde{K}_{YF} \text{ tel que} \\ \int_{Y_F} \sigma_{ij}^0 e_{ijy}(w - u^1) dy \geq 0, \forall w \in \tilde{K}_{YF}. \end{cases} \quad (2.44)$$

avec

$$\sigma_{ij}^0 = a_{ijkh}^{(0)}(y) [e_{khz}(u^0) + e_{khy}(u^1)] + a_{ijkh}^{(1)}(y) \left[\frac{\partial e_{khz}(u^0)}{\partial t} + \frac{\partial e_{khy}(u^1)}{\partial t} \right]. \quad (2.45)$$

où \bar{z} joue le rôle d'un paramètre.

Existence et inusité de u^1

Théorème 2.5.1 *Le problème local (2.44) admet un solution unique.*

Preuve. On peut écrire l'inéquation variationnelle de $(\mathcal{P}_{\text{loc}}^1)$ sous forme :

$$a^0(u^1, w) + a^1\left(\frac{\partial u^1}{\partial t}, w\right) \geq 0. \quad \forall w \in \tilde{K}_{YF}.$$

On pose $a^m(u^1, w) = \int_{Y_F} a_{ijkh}^{(m)} e_{kh}(u^1) e_{ij}(w) dx$.

$a^m(u^1, w)$ est une forme bilinéaire continue coercive. En effet, $a^m(u^1, w)$ est une forme bilinéaire (qui est déjà démontrée dans le théorème 2.3.1) Donc par le moyen du théorème de Stampacchia³, cette inéquation admet une solution unique.

■

Par conséquent, (2.44) et (2.45) définissent u^1 (à une constante additive près, considérée comme une fonction) lorsque u^0 est considéré comme connue. Il suffit de démontrer que le champ :

$$u^1 = -\frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha. \quad (2.46)$$

satisfait (2.44) et $u^1 \in \tilde{K}_{YF}$

3. Voir annexe A

1. u^1 satisfait (2.44) ?

O na $u^1((\bar{z}), y) = \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial z_1} y_3, \frac{\partial u_3^0}{\partial z_2} y_3, 0 \right)$ et $u^0(\bar{z}) = (0, 0, u_3^0(\bar{z}))$.

On simplifie $e_{khy}(u^1)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} e_{33y}(u^1) + e_{33z}(u^0) &= 0 + 0 = 0. \\ e_{\alpha 3y}(u^1) + e_{\alpha 3z}(u^0) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} = 0. \\ e_{\alpha \beta y}(u^1) + e_{\alpha \beta z}(u^0) &= 0 + 0 = 0. \end{aligned} \tag{2.47}$$

D'où

$$e_{khy}(u^1) = -e_{khz}(u^0).$$

D'après (2.46) $\sigma_{ij}^0 = 0$ alors u^1 vérifié (2.44).

2. $u^1 \in \tilde{K}_{YF}$?

Par hypothèse (2.34), $u^1(\bar{z}, \cdot, t) \in \underline{H}_{per}^1(Y_F) \Rightarrow -\frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha \in \underline{H}_{per}^1(Y_F)$, de plus

$$\begin{aligned} \tilde{u}^1 &= -\frac{1}{a_1 a_2} \int_{Y_F} \frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha dy \\ &= -\frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} e_\alpha \int_0^{a_1} \left[\int_0^{a_2} \left(\int_{-1}^1 y_3 dy_3 \right) dy_2 \right] dy_1 \\ &= -\frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} e_\alpha \int_0^{a_1} \left[\int_0^{a_2} 0 dy_2 \right] dy_1 = 0 \end{aligned}$$

$u^\varepsilon \in K_F^\varepsilon$ est équivalent dans le développement asymptotique à $[u^1 N] \geq 0$ sur F

d'où $u^1 \in \tilde{K}_{YF}$.

Par conséquent, en tant que fonction, la solution est celle-ci plus une constante (par rapport aux variables locales), c'est-à-dire

$$u^1 = \hat{u}^1(\bar{z}) - \frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha. \tag{2.48}$$

La vérification que (2.48) est la solution de (2.44) et (2.45) consiste simplement à remarquer que

$$e_{ij}^0 = e_{ijz}^0(u^0) + e_{ijy}^0(u^1) = 0 \Rightarrow \sigma_{ij}^0 = 0. \tag{2.49}$$

non seulement (2.48) est une solution, mais les termes d'ordre zéro de la contrainte et du déformation disparaissent.

Le champ u^1 défini par (2.48) est le champ Love-Kirchhoff qui est classiquement prescrit comme une hypothèse dans la théorie des plaques classique⁴. Ici, il apparaît comme une conséquence du processus asymptotique.

La signification cinématique de (2.48) est que, à cet ordre, les segments matériels normaux au plan $x_3 = 0$ restent, après déformation, normaux au plan déformé, et de même longueur. Comme la contrainte $\sigma^0 \equiv 0$, il faut passer à l'ordre suivant pour obtenir les contraintes dans la plaque.

Pour obtenir u^2 , nous considérons encore θ et w comme dans (2.35) et nous considérons les fonctions test

$$v^\varepsilon(x, t) = u_3^0(\bar{z}, t)e_3 + \varepsilon u^1(\bar{z}, y, t) + \varepsilon^2 u^2(\bar{z}, y, t) + \varepsilon^2 \theta(\bar{z}) [w(y, t) - u^2(\bar{z}, y, t)]. \quad (2.50)$$

$$\bar{z} = \bar{x}, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Ce qui appartient à K_F^ε (en particulier, le saut à travers les fissures est non négatif pour $\varepsilon > 0$). Nous remplaçons (2.50) et (2.34) et en utilisant (2.23) dans l'identité intégrale (2.15). On obtient une expression analogue à (2.38) mais avec $\sigma^0 = 0$ et u^2 au lieu de u^1 .

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_F^\varepsilon} [\sigma_{ij}^0 + \varepsilon \sigma_{ij}^1 + \dots] \left[e_{ijz}(\varepsilon^2 \theta(w - u^2) - \dots) + \frac{1}{\varepsilon} e_{ijy}(\varepsilon^2 \theta(w - u^2) - \dots) \right] dx \\ & \geq \varepsilon^3 \int_{\omega} F_3 [\varepsilon^2 \theta(w_3 - u_3^2) - \dots] d\bar{x}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & \varepsilon^1 \left\{ \int_{\Omega_F^\varepsilon} \sigma_{ij}^0 e_{ijy}(\theta(w - u^2)) dx \right\} + \\ & \varepsilon^2 \left\{ \int_{\Omega_F^\varepsilon} \sigma_{ij}^0 e_{ijz}(\theta(w - u^2)) dx + \int_{\Omega_F^\varepsilon} \sigma_{ij}^1 e_{ijy}(\theta(w - u^2)) dx \right\} + \dots \quad (2.52) \\ & \geq \varepsilon^5 \int_{\omega} F_3 \theta(w_3 - u_3^2) d\bar{x} + \varepsilon^6 \int_{\omega} \dots \end{aligned}$$

4. Théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. Elle s'inspire de la théorie des poutres.

On divise (2.52) sur ε^2 et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ on obtient :

$$\int_{\Omega_F^\varepsilon} [\sigma_{ij}^1 e_{ijy}(w - u^2)] \theta dx \geq 0, \forall \theta \in \mathcal{D}(\omega). \quad (2.53)$$

D'après la Proposition 2.4.1

$$\frac{\varepsilon}{a_1 a_2} \left\{ \int_{\omega} \left[\int_{Y_F} \sigma_{ij}^1 e_{ijy}(w - u^2) dy \right] \theta dz_1 dz_2 \right\} d\bar{x} \geq 0, \forall \theta \in \mathcal{D}(\omega). \quad (2.54)$$

\Leftrightarrow

$$\int_{\omega} \left[\int_{Y_F} \{ \sigma_{ij}^1 e_{ijy}(w - u^2) \} dy \right] \theta dz_1 dz_2 \geq 0, \forall \theta \in \mathcal{D}(\omega). \quad (2.55)$$

\Leftrightarrow

$$\int_{Y_F} \sigma_{ij}^1 e_{ijy}(w - u^2) dy \geq 0, \quad \forall w \in \tilde{K}_{Y_F}. \quad (2.56)$$

L'équation locale (**microscopique**), analogue à (2.44) et (2.45), est :

$$(\mathcal{P}_{\text{loc}}^2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^2 \in \tilde{K}_{Y_F} \text{ tel que} \\ \int_{Y_F} \sigma_{ij}^1 e_{ijy}(w - u^2) dy \geq 0, \quad \forall w \in \tilde{K}_{Y_F}. \end{array} \right. \quad (2.57)$$

avec

$$\sigma_{ij}^1 = a_{ijkh}^{(0)}(y) [e_{khz}(u^1) + e_{khy}(u^2)] + a_{ijkh}^{(1)}(y) \left[\frac{\partial e_{khz}(u^1)}{\partial t} + \frac{\partial e_{khy}(u^2)}{\partial t} \right]. \quad (2.58)$$

où nous prenons $u^2 \in \tilde{K}_{Y_F}$ parce que u^0 et u^1 sont continues à travers les fissures. Nous considérons cela comme une équation pour l'inconnue u^2 avec $e_{khz}(u^1)$ pris comme connu.

Existence et unicité de u^2

On applique le même Théorème (2.3.1) (voir la section 2.3) sur l'équation de $(\mathcal{P}_{\text{loc}}^2)$.

On utilise (2.48) on obtient

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta z}(u^1) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha^1}{\partial z_\beta} + \frac{\partial u_\beta^1}{\partial z_\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \left(\hat{u}^1(\bar{z}) - \frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha \right)_\alpha}{\partial z_\beta} + \frac{\partial \left(\hat{u}^1(\bar{z}) - \frac{\partial u_3^0}{\partial z_\beta} y_3 e_\beta \right)_\beta}{\partial z_\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 (u_3^0 y_3)_\alpha}{\partial z_\beta \partial z_\alpha} + \frac{\partial \hat{u}_\alpha^1}{\partial z_\beta} - \frac{\partial^2 (u_3^0 y_3)_\beta}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \frac{\partial \hat{u}_\beta^1}{\partial z_\alpha} \right) \\ &= e_{\alpha\beta z}(\hat{u}^1) - \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} y_3 \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$e_{\alpha 3z}(u^1) = e_{3\alpha z}(u^1) = e_{\alpha 3z}(\widehat{u}^1) - \underbrace{\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial z_\alpha \partial z_3}}_0 y_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \widehat{u}_3^1}{\partial z_\alpha}, \quad (2.60)$$

$$e_{33z}(u^1) = 0. \quad (2.61)$$

2.5.1 L'étude de l'équation microscopique

Comme dans le cas de l'équation (2.43) et (2.45), l'équation locale (2.57) et (2.58) définit u^2 à une constante additive près (dépende de \bar{z}) lorsque les données (2.59), (2.60) et (2.61) sont connues. Cela définit $e_{khy}(u^2)$ d'une manière unique.

Alors, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.5.1 *L'inéquation variationnelle locale (2.57) et (2.58) définit (à chaque point \bar{z}) u^2 à une constante additive près, quand on connaît les valeurs des $e_{khy}(u^1)$ (qui sont données en (2.59), (2.60) et (2.61) d'une manière explicite). Les valeurs de $\sigma_{ij}^1(\bar{z}, y)$ sont alors définies d'une manière unique.*

Lemme 2.5.1 *les valeurs de $e_{\alpha 3z}(u^1)$ n'ont aucune influence sur σ^1 et par conséquent elles peuvent être prises nulle dans le contexte de la Proposition 2.5.1*

Preuve. Soit $E_{3\alpha} = E_{\alpha 3}$ les valeurs (constantes par rapport à y) de $e_{\alpha 3z}(u^1)$. On voit immédiatement que la solution de (2.57) lorsque les autres valeurs de $e_{ijz}(u^1)$ sont nulles est la solution u^2 qui satisfait $\sigma_{kh}^1 = 0 \Rightarrow e_{khy}(u^2) + e_{khy}(u^1) = 0$ sur Y_F . Comme seul les $e_{\alpha 3z}(u^1)$ sont considérés non nul alors

$$e_{\alpha 3z}(u^1) + e_{\alpha 3y}(u^2) = 0$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} e_{3\alpha z}(u^1) &= -e_{3\alpha y}(u^2) \\ \Rightarrow E_{3\alpha} &= -e_{3\alpha y}(u^2) \\ \Rightarrow E_{3\alpha} &= -\left(\frac{\partial u_\alpha^2}{\partial y_3}\right) \\ \Rightarrow E_{3\alpha} y_3 &= -u_\alpha^2 e_\alpha \quad (\text{par l'intégration}), \end{aligned}$$

donc la solution est

$$u^2 = -E_{3\alpha}y_3e_\alpha \quad (2.62)$$

De plus, $E_{3\alpha}$ et (2.62) peuvent être ajoutés à n'importe quelle solution sans modifier la valeur de σ^1 , ni le fait d'appartenir à \tilde{K}_{YF} (comme chaque terme est continu sur F) ■

De plus, lorsque les $\sigma_{ij}^1(y)$ sont connus (c'est-à-dire les termes principaux de la contrainte sont connus), on peut calculer les intégrales

$$T_{ij}^2 = \frac{1}{a_1a_2} \int_{Y_F} \sigma_{ij}^1(y)dy, \quad (2.63)$$

$$M_{ij}^3 = \frac{1}{a_1a_2} \int_{Y_F} \sigma_{ij}^1(y)y_3dy. \quad (2.64)$$

Ce qui définit une sorte de tensions et de moments homogénéisés.

Lemme 2.5.2 *Les quantités T_{3i}^2 et M_{3i}^3 définies en (2.63), (2.64) disparaissent pour $i = 1, 2, 3$.*

Preuve. Prenons $w = u^2 \pm y_3e_i$ (resp. $w = u^2 \pm \frac{1}{2}y_3^2e_i$) dans (2.57). Ceci est possible parce que $u^2 \in \tilde{K}_{YF}$ et y_3e_i sont continues sur F .

Pour $i = \alpha$ ($\alpha = 1, 2$) cela donne

$$\begin{aligned} e_{\alpha 3}(w - u^2) &= e_{3\alpha}(w - u^2) = e_{3\alpha}(y_3e_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial(y_3e_\alpha)_\alpha}{\partial y_3}}_1 + \underbrace{\frac{\partial(y_3e_\alpha)_3}{\partial y_\alpha}}_0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \quad (\text{resp. } \frac{1}{2}y_3). \end{aligned}$$

alors que les autres e_{kh} sont zéro. Alors, (2.57) donne que $T_{3\alpha}^2 = 0$ (resp. $M_{3\alpha}^3 = 0$).

De même, $i = 3$ donne que

$$\begin{aligned} e_{33}(w - u^2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(y_3e_3)_3}{\partial y_3} + \frac{\partial(y_3e_3)_3}{\partial y_3} \right) \\ &= 1 \quad (\text{resp. } \frac{3}{2}y_3^2), \end{aligned}$$

et l'autre $e_{kh} = 0$. Ensuite, (2.57) donne $T_{33}^2 = 0$ (resp. $M_{33}^3 = 0$). ■

En vertu du Lemme 2.5.1, on peut supposer que les données du problème local sont

$$e_{\alpha\beta z}(u^1) = E_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}y_3, \quad (2.65)$$

$$e_{i3z}(u^1) = 0. \quad (2.66)$$

Lorsque $E_{\alpha\beta}$ et $C_{\alpha\beta}$ sont des tenseurs symétriques de 2×2 , on note

$$E_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta z}(\widehat{u}^1), \quad C_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}. \quad (2.67)$$

Le problème local définit alors, par la Proposition 2.5.1, les valeurs de $T_{\alpha\beta}^2$ et $M_{\alpha\beta}^3$ (notez que les autres composantes T_{i3}^2 et M_{i3}^3 disparaissent par le Lemme 2.5.2). De plus, $T_{\alpha\beta}^2$, $M_{\alpha\beta}^3$ sont également des tenseurs symétriques.

Soit $\mathbb{R}_s^{2 \times 2}$ l'espace des matrices symétriques 2×2 . Alors, nous avons la Proposition suivante.

Proposition 2.5.2 *Le problème local (2.57), avec (2.62) - (2.67), définit un opérateur (non linéaire) de $(\mathbb{R}_s^{2 \times 2})^2$ dans lui-même par*

$$(E, C) \mapsto (T, M) \quad (2.68)$$

(Ici et dans la suite, T, M dénotent T^2, M^3 , sans ambiguïté).

La section suivante est consacrée à l'étude de la loi non linéaire (2.68).

2.6 LA LOI DE COMPORTEMENT HOMOGENÉISÉ

Pour étudier les propriétés de la loi de comportement non linéaire (2.68), définissons une fonction W sur $(\mathbb{R}_s^{2 \times 2})^2$ comme suit.

Soit $(E, C) \in (\mathbb{R}_s^{2 \times 2})^2$ donné, on complète l'ensemble des composantes $E_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta}$ avec $E_{i3} = C_{i3} = 0$. Nous résolvons alors le problème local, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \widetilde{K}_{YF} \text{ tel que} \\ \frac{1}{a_1 a_2} \left\{ \left(\int_{Y_F} a_{ijkh}^{(0)}(y) [E_{kh} + C_{kh} y_3 + e_{kh}(u)] + \right. \right. \\ \left. \left. a_{ijkh}^{(1)}(y) \left[\frac{\partial (E_{kh} + C_{kh} y_3)}{\partial t} + \frac{\partial e_{kh}(u)}{\partial t} \right] \right) e_{ij}(w - u) dy \right\} \geq 0, \quad \forall w \in \widetilde{K}_{YF}. \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Ou nous avons écrit u au lieu de u^2 et e_{ij} au lieu de e_{ijy} et nous définissons

$$W(E, C) = \frac{1}{2a_1 a_2} \left\{ \left(\int_{Y_F} a_{ijkh}^{(0)}(y) [E_{kh} + C_{kh} y_3 + e_{kh}(u)] + a_{ijkh}^{(1)}(y) \left[\frac{\partial (E_{kh} + C_{kh} y_3)}{\partial t} + \frac{\partial e_{kh}(u)}{\partial t} \right] \right) [E_{ij} + C_{ij} y_3 + e_{ij}(u)] dy \right\} \quad (2.70)$$

Nous notons que u est définie comme une fonction, à une constante additive près, mais W est définie de façon unique. Clairement, W désigne le terme principal de l'énergie visco-élastique par unité de surface de la plaque.

Nous étudions les propriétés de la fonction W , qui seront utilisées dans la section suivante. Cette étude est analogue à celle d'un corps fissuré à trois-dimension (voir Sanchez-Palencia[10]) avec des modifications mineures, et ne sera pas prouver en détails.

Lemme 2.6.1 *La fonction W définie dans (2.70) est continue, convexe, et (T, M) définie dans (2.68) est un sous-gradient de celle-ci.*

Preuve. Nous notons d'abord que la solution u de (2.69) est continue de $(\mathbb{R}_s^{2 \times 2})^2$ dans $\tilde{H}^1(Y_F)$. Ceci est facilement prouvé en prenant les points (E^1, C^1) et (E^2, C^2) et en prenant comme fonction de test w en (2.69) pour chacun la solution de l'autre, et en ajoutant les expressions correspondantes. Ensuite, en remplaçant u pour définir W , on voit que W est continue.

De plus, soit (E, C) et $(E + \delta E, C + \delta C)$ deux points de $\mathbb{R}_s^{2 \times 2}$. Soient u et $u + \delta u$ les solutions correspondantes. On note par e_{ij}^*

$$e_{ij}^* = E_{ij} + C_{ij} y_3 + e_{ij}(u).$$

et par $e^* + \delta e^*$ l'expression analogue avec $E + \delta E$, $C + \delta C$ et $u + \delta u$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \delta W &= W(E + \delta E, C + \delta C) - W(E, C) \\
 &= \frac{1}{a_1 a_2} \int_{Y_F} \left(a_{ijkh}^0 e_{kh}^* + a_{ijkh}^{(1)} \frac{\partial e_{kh}^*}{\partial t} \right) \delta e_{ij}^* dy + \frac{1}{2a_1 a_2} \int_{Y_F} \left(a_{ijkh}^0 \delta e_{kh}^* + a_{ijkh}^{(1)} \delta \frac{\partial e_{kh}^*}{\partial t} \right) \delta e_{ij}^* dy \\
 &= \frac{1}{a_1 a_2} \int_{Y_F} \left[a_{ijkh}^0 e_{kh}^* + a_{ijkh}^1 \frac{\partial e_{kh}^*}{\partial t} \right] \left[\delta E_{ij} + \delta C_{ij} y_3 + e_{ij}(\delta u) \right] dy + \\
 &\quad \frac{1}{2a_1 a_2} \int_{Y_F} \left(a_{ijkh}^0 \delta e_{kh}^* + a_{ijkh}^{(1)} \delta \frac{\partial e_{kh}^*}{\partial t} \right) \delta e_{ij}^* dy \\
 &= T_{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta C_{\alpha\beta} + \frac{1}{a_1 a_2} \int_{Y_F} \left[a_{ijkh}^0 e_{kh}^* + a_{ijkh}^1 \frac{\partial e_{kh}^*}{\partial t} \right] e_{ij}(\delta u) dy + \\
 &\quad \frac{1}{2a_1 a_2} \int_{Y_F} \left(a_{ijkh}^0 \delta e_{kh}^* + a_{ijkh}^{(1)} \delta \frac{\partial e_{kh}^*}{\partial t} \right) \delta e_{ij}^* dy.
 \end{aligned}$$

Mais la première intégrale dans le côté droit n'est pas négative comme on le voit en prenant $w = u + \delta u$ en (2.69). Ainsi

$$\delta W \geq T_{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta C_{\alpha\beta} + \frac{1}{2a_1 a_2} \int_{Y_F} \left(a_{ijkh}^0 \delta e_{kh}^* + a_{ijkh}^{(1)} \delta \frac{\partial e_{kh}^*}{\partial t} \right) \delta e_{ij}^* dy. \quad (2.71)$$

Comme l'intégrale dans le côté droit de (2.71) est évidemment non négative, nous avons que (T, M) est un sous-gradient de W . En outre, une fonction ayant un sous-gradient en tout point est convexe. ■

Théorème 2.6.1 *La fonction W est convexe, de classe C^1 et (M, T) est son gradient, c.-à-d.*

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial E_{\alpha\beta}}, \quad M_{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial C_{\alpha\beta}}. \quad (2.72)$$

Preuve. Nous avons vu dans la preuve du Lemme 2.6.1 que u est une fonction continue de $\mathbb{R}_s^{2 \times 2}$ avec des valeurs en $\tilde{H}^1(Y_F)$. Puis, en la substituant aux (2.58), (2.63) et (2.64), on voit que (T, M) est une fonction continue de (E, C) .

Mais si une fonction (w dans notre cas) est continue et elle a en tout point un sous-gradient qui est continue, la fonction est de classe C^1 et le sous-gradient est un gradient. ■

Lemme 2.6.2 *W est non négatif et ne s'annule qu'à l'origine.*

Preuve. la première assertion est évidente. Supposons que $W(E, C) = 0$. Par la positivité des coefficients (2.7), nous avons

$$E_{kh} + C_{kh}y_3 + e_{kh}(u) = 0 \quad \text{dans } Y_F. \quad (2.73)$$

Où bien sûr $E_{i3} = C_{i3} = 0$ et u est la solution correspondante. Comme les e_{kh} sont donnés par (2.73), u est définie à un déplacement solide près par (2.73). Il est immédiatement vu que

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}(u) &= -E_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}y_3 \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} &= -E_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}y_3 \\ u_\alpha &= -E_{\alpha\beta}y_\beta - C_{\alpha\beta}y_3y_\beta + \frac{1}{2}C_{\alpha\beta}y_3 \\ u &= -E_{\alpha\beta}y_3e_\alpha - C_{\alpha\beta}y_3y_\beta e_\alpha - \frac{1}{2}C_{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta e_3 \end{aligned} \quad (2.74)$$

satisfait (2.73). Ensuite, c'est la solution correspondante (à un déplacement solide près). Mais alors, u est Y_F -périodique, et de (2.74), nous remarquons que $E_{\alpha\beta}$ et $C_{\alpha\beta}$ doivent être nulles. ■

Le théorème suivant donne d'autres propriétés supplémentaires de W .

Théorème 2.6.2 (a) *W est positive et homogène de degré 2, i.e.*

$$W(\lambda E, \lambda C) = \lambda^2 W(E, C), \quad \lambda \geq 0, \quad (2.75)$$

et

$$2W(E, C) = T_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}. \quad (2.76)$$

(b) *Il existe deux constantes positives α et β telle que*

$$\beta|E, C|^2 \leq W(E, C) \leq \alpha|E, C|^2. \quad (2.77)$$

(c) W est strictement convexe, i.e.

$$\delta W \geq T_{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta C_{\alpha\beta}. \quad (2.78)$$

avec " = " $\Rightarrow \delta E = \delta C = 0$.

(d) (T, M) est strictement monotone, i.e.

$$(T_{\alpha\beta}^2 - T_{\alpha\beta}^1) (E_{\alpha\beta}^2 - E_{\alpha\beta}^1) + (M_{\alpha\beta}^2 - M_{\alpha\beta}^1) (C_{\alpha\beta}^2 - C_{\alpha\beta}^1) \geq 0. \quad (2.79)$$

avec " = " $\Rightarrow E^2 = E^1, C^2 = C^1$.

2.7 LE PROBLÈME HOMOGÉNÉISÉ

Dans cette section, nous donnons l'équation homogénéisée (c'est-à-dire macroscopique) et les conditions aux limites. Nous remarquons dans (2.67) que la relation entre le tenseur des contraintes-tenseur des déformations généralisées (2.68) implique que les trois fonctions $u_3^0(\bar{z}), \hat{u}_1^1(\bar{z}), \hat{u}_2^1(\bar{z})$ définies sur ω . On obtient des équations macroscopiques pour elles. Avant de continuer, nous notons que, en vertu de (2.48), le développement asymptotique de la solution (2.48) prend la forme

$$u^\varepsilon = u_3^0 e_3 + \varepsilon \left[\hat{u}_i^1 e_i - \frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha \right] + O(\varepsilon^2) \quad (2.80)$$

Ensuite, pour satisfaire la condition limite $u^\varepsilon = 0$ sur la surface latérale Γ_0^ε (voir (2.13)) i.e. pour $\bar{z} \in \partial\omega$ et $y_3 \in]-1, +1[$, les inconnues u_3^0, \hat{u}_α doivent satisfaire

$$u_3^0 = \hat{u}_\alpha = \frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \quad (2.81)$$

En particulier, on voit que la condition $u^\varepsilon = 0$ sur Γ_0^ε

Par conséquent, l'inconnue définissant le comportement limite sera

$$\vec{u} \in \mathcal{V} \quad \text{avec } \vec{u} = (u_3^0, \hat{u}_1^1, \hat{u}_2^1), \quad \mathcal{V} = H_0^2(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega). \quad (2.82)$$

Pour obtenir l'équation macroscopique, on prend la fonction de test

$$v^\varepsilon = u^\varepsilon + v_3^0 e_3 + \varepsilon \left[\hat{v}_\alpha e_\alpha - \frac{\partial v_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha \right] \quad (2.83)$$

Ceci est possible parce que le v^ε juste défini appartient à K_F^ε . Ainsi, les termes correspondants du tenseur de déformation e_{ij} sont

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}(v^\varepsilon - u^\varepsilon) &= e_{\alpha\beta} \left(v_3^0 e_3 + \varepsilon \left[\widehat{v}_\alpha e_\alpha - \frac{\partial v_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha \right] \right) \\ &= \underbrace{e_{\alpha\beta z}(v_3^0 e_3)}_0 + \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{e_{\alpha\beta y}(v_3^0 e_3)}_0 + \varepsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \left(\widehat{v}_\alpha e_\alpha - \frac{\partial v_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha \right)_\beta}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial \left(\widehat{v}_\alpha e_\alpha - \frac{\partial v_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha \right)_\alpha}{\partial z_\beta} \right) \right] + \\ &\quad \underbrace{e_{\alpha\beta y}(\widehat{v} e_\alpha)}_0 - e_{\alpha\beta y} \left(\frac{\partial v_3^0}{\partial z_\alpha} y_3 e_\alpha \right) \\ &= \varepsilon \left[e_{\alpha\beta z}(\widehat{v}) - \frac{\partial^2 v_3^0 y_3}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right] - \frac{\partial v_3^0}{2 \partial z_\alpha} \left(\frac{\partial (y_3 e_\alpha)_\beta}{y_\alpha} + \frac{\partial (y_3 e_\alpha)_\alpha}{y_\beta} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$e_{\alpha\beta}(v^\varepsilon - u^\varepsilon) = \varepsilon \left[e_{\alpha\beta z}(\widehat{v}) - \frac{\partial^2 v_3^0 y_3}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right], \quad e_{3i}(v^\varepsilon - u^\varepsilon) = 0. \quad (2.84)$$

On remplace (2.80),(2.83) et (2.84) dans (2.15) on obtient

$$\int_{\Omega_F^\varepsilon} [\varepsilon \sigma_{\alpha\beta}^1 + \dots] \cdot \left[e_{\alpha\beta z}(\widehat{v}) - \frac{\partial^2 v_3^0 y_3}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right] \varepsilon dx \geq \int_\omega \varepsilon^3 F_3 \cdot v_3^0 d\bar{x} \quad \forall v \in K_F^\varepsilon.$$

On applique la Proposition 2.4.1

$$\frac{\varepsilon}{a_1 a_2} \int_\omega \left\{ \int_{Y_F} [\varepsilon \sigma_{\alpha\beta}^1 + \dots] \cdot \left[e_{\alpha\beta z}(\widehat{v}) - \frac{\partial^2 v_3^0 y_3}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right] \varepsilon dy \right\} dz_1 dz_2 \geq \int_\omega \varepsilon^3 F_3 \cdot v_3^0 d\bar{z}.$$

\Leftrightarrow

$$\frac{\varepsilon^3}{a_1 a_2} \left\{ [\sigma_{\alpha\beta}^1 + \dots] \cdot \left[e_{\alpha\beta z}(\widehat{v}) - \frac{\partial^2 v_3^0 y_3}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right] dy \right\} dz_1 dz_2 \geq \varepsilon^3 \int_\omega F_3 \cdot v_3^0 d\bar{z} \quad (2.85)$$

On divise (2.85) sur ε^3 et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ on obtient :

$$\frac{1}{a_1 a_2} \left\{ \int_{Y_F} \sigma_{\alpha\beta}^1 \left[e_{\alpha\beta z}(\widehat{v}) - \frac{\partial^2 v_3^0 y_3}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right] dy \right\} dz_1 dz_2 \geq \int_\omega F_3 \cdot v_3^0 d\bar{z} \quad (2.86)$$

Etude de l'inéquation variationnelle (2.86) :

$$(2.86) \Leftrightarrow \int_\omega \left[T_{\alpha\beta}^2 e_{\alpha\beta}(\widehat{v}) - M_{\alpha\beta}^3 \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right] d\bar{z} \geq \int_\omega F_3 \cdot v_3^0 d\bar{z}, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V}. \quad (2.87)$$

$$\int_{\omega} \left[T_{\alpha\beta}^2 e_{\alpha\beta}(\hat{v}) - M_{\alpha\beta}^3 \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \right] d\bar{z} - \int_{\omega} F_3 \cdot v_3^0 d\bar{z} = 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V}. \quad (2.88)$$

En effet, on a le signe \geq dans (2.88), prenant \vec{v} et $-\vec{v}$ on voit que le signe est en fait $=$.

Avec une notation évidente, (2.88) peut être récrit comme suit :

$$\int_{\omega} [T(\vec{u})E(\vec{v}) + M(\vec{u})C(\vec{v})] d\bar{z} - \int_{\omega} F_3 \cdot v_3^0 d\bar{z} = 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V}. \quad (2.89)$$

Il est facile de montrer que cette équation équivaut à la minimisation d'une certaine fonctionnelle sur l'espace \mathcal{V} . Définition de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\vec{v}) - \mathcal{F}(\vec{v}) \text{ avec} \\ \mathcal{W}(\vec{v}) = \int_{\omega} W(\vec{v}(\bar{z})), \quad \mathcal{F}(\vec{v}) = \int_{\omega} \varepsilon^3 F_3 \cdot v_3^0 d\bar{z}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

où

$$W(\vec{v}(\bar{z})) \equiv W \left(e_{\alpha\beta}(\hat{v}^1(\bar{z})), \frac{\partial^2 v_3^0(\bar{z})}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \right). \quad (2.91)$$

Lemme 2.7.1 *La fonctionnelle $\mathcal{W} - \mathcal{F}$ est strictement convexe et continue sur l'espace \mathcal{V} . De plus, elle tend vers $+\infty$ quand $\|\vec{v}\|_{\mathcal{V}} \rightarrow \infty$.*

Preuve. La stricte convexité est une conséquence du théorème 2.6.2 (c) par l'intégration sur ω . La continuité sur

$$\mathcal{W}(\vec{v}) - \mathcal{W}(\vec{u}) \text{ lorsque } \|\vec{v} - \vec{u}\|_{\mathcal{V}} \rightarrow 0. \quad (2.92)$$

reste vraie par passage à la limite d'après le théorème 2.6.1 et la convergence dominée, en utilisant le théorème 2.6.2(b) la limite à ∞ lorsque $\|\vec{v}\|_{\mathcal{V}} \rightarrow \infty$.

la norme sur \mathcal{V} est

$$\int_{\omega} \sum_{\alpha,\beta} \left[(e_{\alpha\beta}(\hat{v}^1(\bar{z})))^2 + \left(\frac{\partial^2 v_3^0(\bar{z})}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \right)^2 \right] d\bar{z}$$

■

Lemme 2.7.2 *L'équation (2.89) équivaut à la minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{W} - \mathcal{F}$ sur \mathcal{V} .*

L'existence et l'unicité de \vec{u} minimisant $\mathcal{W} - \mathcal{F}$ est alors classique sous les hypothèses vérifiées dans le Lemme 2.7.1 (voir Ekeland et Temam [11]). Nous avons donc le théorème suivant.

Théorème 2.7.1 *Il existe un seul $\vec{v} \in \mathcal{V}$ résolvant le problème homogénéisé (2.90). Il minimise la fonctionnelle $\mathcal{W} - \mathcal{F}$ sur \mathcal{V} .*

CONCLUSION

Dans ce mémoire on a présenté un résultat d'étude sur l'homogénéisation des plaques visco-élastiques quasi statiques affaiblies par des micro-fissures. Cette étude est basée sur l'analyse asymptotique d'un problème 3D par application de la méthode des développements asymptotiques à double échelle au problème considéré.

Ce travail modeste a pour objectif d'étude le travail de Chacha and Sanchez Palencia [4] sur l'homogénéisation des plaques élastiques affaiblies par des micro-fissures au cas visco-élastique quasi statique.

ANNEXE A

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue dx , et de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. V et H sont deux espaces de Banach des normes respectives $\| \cdot \|_V, \| \cdot \|_H$.

Lemme 3.0.1 Korn :

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 et $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, ($\text{mes}\Gamma_0 \neq \emptyset$)

Soit $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$

qui est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. Alors il existe C telle que :

$$C^{-1}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|e(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in V.$$

Théorème 3.0.1 Stampacchia :

Soit H un espace de Hilbert et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H . Soit K un sous ensemble fermé et convexe de H . Ensuite, étant donné $f \in H$ il existe un unique $u \in K$ telle-que

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K$$

Preuve. voir. [2] ■

Définition 3.0.1 Soient V et H deux espaces de Banach, on dit que V s'injecte d'une façon continue dans H et on note $V \hookrightarrow H$ si :

- $V \subset H$.

- $\exists C > 0 : \|u\|_H \leq C \|u\|_V$

On dit que V s'injecte d'une façon compacte dans H , et on note $V \hookrightarrow_c H$ si :

- $V \hookrightarrow H$

- L'image de tout borné de V est relativement compact dans H .

Théorème 3.0.2 (Rellich¹-Kondrachov²). On suppose que Ω est borné de classe C^1 . On a

(1)- si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

(2)- si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$,

(3)- si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, avec injections compactes .

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec injection compacte pour tout p .

Preuve. voir[2] ■

Considérons le problème

$$\text{Min}_{x \in X} f(x)$$

Définition 3.0.2 Soient une fonction convexe $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ où $X \subset \mathbb{R}^n$ et un point $\bar{x} \in X$ où f prend une valeur finie. Un vecteur $\gamma \in \mathbb{R}^n$ est un sous-gradient de f à \bar{x} si pour tout $x \in X$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \gamma^T(x - \bar{x}).$$

1. Franz Rellich (14 septembre 1906 - 25 septembre 1955) était un mathématicien allemand. Il contribua aux fondements de la mécanique quantique et au développement de la théorie des EDP.

2. Vladimir Iosifovich Kondrashov était un mathématicien soviétique. Il est mort le 26 février 1971.

ANNEXE B

LA CONVERGENCE FAIBLE ET FAIBLE * DANS UN ES- PACE DE BANACH

Soit $(B, \|\cdot\|_B)$ un espace de Banach et $(B', \|\cdot\|_{B'})$ son dual.

$$\|u\|_{B'} = \sup_{\|f\|_B \leq 1} \langle u, f \rangle_{B', B}.$$

Définition 4.0.1 *On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ converge fortement vers $u \in B$ quand $n \rightarrow \infty$ si :*

$$\|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \tag{4.1}$$

on note $u_n \rightarrow u$ dans B

Définition 4.0.2 *On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ converge faiblement vers $u \in B$ quand $n \rightarrow \infty$ si :*

$$\langle u^*, u_n \rangle_{B', B} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle u^*, u \rangle_{B', B}, \quad \forall u^* \in B' \tag{4.2}$$

on note $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ dans B

Cas particulier

$B = L^p(\Omega)$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n

1. $w_n \rightarrow w$ dans $L^p(\Omega)$

$$\|w_n - w\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |w_n(x) - w(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.3)$$

2. $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$ dans $L^p(\Omega)$

$$\int_{\Omega} w_n \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} w \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^q(\Omega), (L^p(\Omega))' = L^q(\Omega), \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1. \quad (4.4)$$

Théorème 4.0.1 *Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ (Banach) tel que :*

$$u_n \rightharpoonup u, \quad (4.5)$$

alors

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans B .

2. $\|u\|_B \leq \liminf \|u_n\|_B$.

(La norme dans B est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible).

Résultat de convergence d'un produit de fonctions

$1 \leq p \leq \infty$ alors

$$\text{si } f_n \rightarrow f \text{ dans } L^p \text{ et } g_n \rightarrow g \text{ dans } L^q \Rightarrow f_n \cdot g_n \rightarrow fg \text{ dans } L^1 \quad (4.6)$$

Remarque 4.0.1 *Si B est un Banach réflexif ($B'' = B$) et $u_n \rightharpoonup u$ dans B avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|u\|_B$ alors*

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } B. \quad (4.7)$$

Théorème 4.0.2 (Eberlin-Smuljan) :

Soient B un espace de Banach réflexif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ avec $\|u_n\|_B \leq C$ (bornée) alors :

1. Il existe une sous-suite $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}^*}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $u \in B$ tel que $u_{n_j} \rightharpoonup u$ dans B .
2. Si chaque sous-suite extraite converge faiblement vers $u \in B$, alors toute la suite (u_n) converge faiblement vers u .

Définition 4.0.3 On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B'$ converge faiblement * vers $u \in B'$ si

$$\langle u_n, u^* \rangle_{B', B} \longrightarrow \langle u, u^* \rangle, \quad \forall u^* \in B. \quad (4.8)$$

on note $u_n \xrightarrow{*} u$

Remarque 4.0.2 Si B est réflexif la convergence faible * coïncide avec la convergence faible dans B .

Théorème 4.0.3 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert bornée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$

- (i) $f_n \xrightarrow{*} f$ dans $L^p(\Omega) \Rightarrow f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$.
- (ii) $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega) \Rightarrow \|f_n\|_p \longrightarrow \|f\|_p$.
- (iii) Si $1 \leq p < \infty$ et $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ alors il existe $C > 0$ tel que :

$$\|f_n\|_p \leq C \quad (4.9)$$

de plus

$$\|f\|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|f_n\|_p \quad (4.10)$$

Le résultat reste vrai si $p = +\infty$ a condition que $f_n \xrightarrow{*} f$ dans $L^\infty(\Omega)$

- (iv) $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$, ($1 \leq p \leq \infty$)
 $\exists (f_{k_j}) \subset (f_k)$ tel que $f_k \rightharpoonup f$ p.p et $|f_{k_j}| \leq h$, p.p avec $h \in L^p$.

Lemme 4.0.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert et $u \in L^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.11)$$

alors $u = 0$, $p.p.$

Théorème 4.0.4 Soient $\Omega = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[$ et $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.

On suppose que f est étendue par périodicité de Ω à \mathbb{R}^n .

Soit $f_n = f(nx)$ et $\bar{f} = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx$ alors

$$f_n \rightharpoonup \bar{f} \text{ dans } L^p(\Omega), (1 \leq p < \infty). \quad (4.12)$$

si $p = +\infty$:

$$f_n \xrightarrow{*} \bar{f} \text{ dans } L^\infty(\Omega). \quad (4.13)$$

Lemme 4.0.2 Soit B un espace de Banach séparable alors de toute suite bornée dans B' on peut extraire une sous-suite qui converge faible *.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Bensoussan, J.Lions, G.Papanicolaou : Asymptotic analysis for periodic structures , North Holland, Amsterdam 1978.
- [2] Brezis. H, *Analyse fonctionnelle théories et applications*. Dunod 1999.
- [3] Cioranesai D, Saint-Jean Paulian J :Une méthode d'étude du comportement global des matériaux composites ; L'homogénéisation CNRS 1988.
- [4] D. Chacha and E. Sanchez-Palencia : Overall behavior of elastic plates with periodically distributed fissures, *Asymptotic Analysis* 5(1992) 381-396.
- [5] D.Caillerie :Homogénéisation des matériaux à structure .Ecole d'été « Méthodes asymptotiques en mécanique »Quiberon septembre 2012
- [6] Duvaut ,G ;lions,J.l. :Les inequations en mécanique et en physique.Paris :Dunod 1972.
- [7] Duvaut ,G :" Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus, Application à l'étude des matériaux composites élastiques à élastiques à structure périodique, Homogénéisation "Theoretical and Applied Mechanics, W.T. Koiter Editor, P. 119-132, North Holland Publishing Company 1976.
- [8] Martin. Lévesque :Homogénéisation Analytique.MEC6418 - NOTES DE COURS.Hiver 2011.
- [9] Philippe G. Ciarlet :Mathematical elasticity VOLUME II : Theory of plates, 1997.
- [10] Sanchez-Palencia,E. :Non-homogeneous media and vibration theory.Berlin :Springer 1980.

- [11] T.Ekeland and R.Temam, *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels* (Dunod, Paris, 1974).
- [12] Yeong-Moo Yi, Sang-Hoon Park et Sung-Kie Youn :Asymptotic homogenization of visco-elastic composites with periodic microstructures ,All rights reserved. Printed in Great Britain, *Int. J. Solids Structures* Vol. 35, No. 17, pp. 2039-2055, 1998

Résumé

Nous étudions dans ce mémoire l'homogénéisation asymptotique des plaques visco-élastiques linéaires affaiblies par des micro-fissures (la plaque contenant un grand nombre de petites fissures distribuées périodiquement) la période étant du même ordre que l'épaisseur de la plaque. Nous supposons que les constituants du matériau sont anisotropes et non homogènes. Les forces appliquées sont de type surfaciques sur la face supérieure et la face inférieure est libre de tout effort. On impose une contrainte unilatérale du type Signorini dans les fissures. Le comportement macroscopique fait intervenir une loi de comportement non linéaire monotone, et il apparait un couplage entre les tensions et les flexions.

Mots Clés : Homogénéisation asymptotique, Plaque, Visco-élasticité, Fissure, Signorini, comportement macroscopique.

Abstract

We study in this memory the asymptotic homogenization of linear visco-elastic plates weakened by micro-cracks (the plate containing many small fissures distributed periodically), the period being of the same order as the thickness of the plate. We assume that the constituents of the material are anisotropic and non homogeneous. The applied forces are of surface type on the upper face and the lower face is free of any effort. In the fissures a one-side constraint of the Signorini's kind is prescribed. The macroscopic behavior involves a nonlinear monotone strain-stress law, and there appears a coupling between the tensions and the flexions.

Keywords : Asymptotic homogenization, Plate, Visco-elasticity, Fissure, Signorini, macroscopic behavior.

ملخص

ندرس في هذه المذكرة التجانس المقارب للوحات لزجة مرنة أضعفته الشقوق الصغيرة (لوحة تحتوي على عدد كبير من الشقوق الصغيرة موزعة دوريا) الدور كونه من نفس رتبة سمك اللوحة. ونحن نفترض أن مكونات هذه المواد هي متباينة الخواص و غير متجانسة. القوة المطبقة من نوع السطحية على الجانب العلوي والسفلي خالي من جميع القوة. نفرض قيودا من جانب واحد سينيوريني ممثل على الشقوق. ويشمل السلوك العيانية قانون السلوك رتيب غير الخطي، ويبدو اقتران بين التوتر و الإنحناء.

الكلمات المفتاحية : التجانس المقارب، لوحات لزجة مرنة، الشقوق، سينيوريني، السلوك العيانية.