



**UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA**  
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la  
Matière



**DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**MASTER**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Modélisation et**

**Analyse Numérique**

**Par : MESKINE ABDELLAH**

**Thème**

**HOMOGÉNÉISATION DES PLAQUES HÉTÉROGÈNE**

**DE VON KARMAN**

**Soutenu publiquement**

**le : 31/05/2017**

**Devant le jury**

**composé de :**

Merabet Ismail                      M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla                      Président

Bensayah Abdellah                      M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla                      Examineur

Chacha Djamel Ahmed                      P.r. Université KASDI Merbah- Ouargla                      Rapporteur

---

# DÉDICACES

---

Je dédie ce modeste travail :

-Aux joyaux de ma vie "**mes parents**" qui sont la source de ma réussite, je souhaite qu'ils trouvent à travers ce mémoire le faible témoignage de leurs efforts et sacrifices.

- A mes frères et soeurs .

- A **toute la famille** .

- Pour la famille de la grande soeur (Nourhanna - Rami - Nihad) .

- A mes chers amis .

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion.

- Pour tous ceux qui me connaît.

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

---

# REMERCIEMENT

---

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail. Ensuite, **je remercie mes parents, surtout mon père, qui est mort il y a quelques mois " Dieu leur a donné Paradis"**.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur Pr : **Chacha Djamel Ahmed** de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrais aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématiques de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Merci également à tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de près ou de loin qui a contribué à la finalisation de ce travail.

---

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Dédication</b>	<b>i</b>
<b>Remerciement</b>	<b>ii</b>
<b>Notations et Conventions</b>	<b>v</b>
<b>1 Exemple introductif à l'homogénéisation</b>	<b>4</b>
1.1 Concepts de base pour l'homogénéisation . . . . .	4
1.2 Position du problème . . . . .	5
1.2.1 Existence et unicité de $u^\varepsilon$ . . . . .	5
1.3 Homogénéisation par la méthode double échelle . . . . .	7
1.3.1 Conditions d'applications : . . . . .	7
1.3.2 Développement asymptotique . . . . .	8
1.3.3 Etude de l'équation microscopique . . . . .	10
1.3.4 Etude de l'équation macroscopique (globale) . . . . .	11
<b>2 Matériaux élastiques non linéaire</b>	

---

	<b>13</b>
2.1 matériau élastiques	
.....	13
2.1.1 Problème dans le cadre de l'élasticité	13
2.1.2 Les plaques du type de von Karman	15
2.2 Homogénéisation d'une plaque de von Karman	
.....	16
2.2.1 Position du problème	16
2.2.2 Problème d'équilibre d'une plaque hétérogène de Von Karman	19
2.2.3 Formulation variationnelle mixte du problème	19
2.2.4 Existence et unicité de $u^\varepsilon$	20
<b>3 Formulation du problème dans un domaine de référence</b>	<b>22</b>
3.1 La mise à l'échelle	
.....	22
3.2 Développement asymptotique	
.....	26
3.3 L'étude de l'équation microscopique	
.....	30
3.4 L'étude de l'équation macroscopique	
.....	31

---

---

# NOTATION ET CONVENTIONS

---

## **NOTATION :**

$\Omega^\varepsilon$  : Configuration de référence d'une plaque mince.

$\omega$  : Surface moyenne de la plaque.

$\Gamma_\pm^\varepsilon$  : Les faces supérieure et inférieure respectivement de  $\Omega^\varepsilon$ .

$\delta_{ij}$  : Symbole de Kronecker.

$\sigma_{ij}$  : Tenseur des contraintes.

$\bar{\gamma}_{ij}^\varepsilon$  : Tenseur de déformation non linéaire.

$e_{ij}$  : Tenseur de déformation linéaire.

$u(x)$  : Champ de déplacement.

$f^\varepsilon(x)$  : Forces volumiques.

$g^\varepsilon(x)$  : Forces de surface agissant sur les faces supérieure et inférieure.

$h^\varepsilon(x)$  : Forces de surface agissant sur les face latérale.

$\varepsilon$  : Paramètre de la période.

$a_{ijkl}$  : Les coefficients élastiques.

$|Y|$  : La mesure de  $Y$ .

Indices  $\alpha, \beta = 1, 2$ .

$\bar{x} = (x_1, x_2)$ .

$\partial_\alpha^y = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ .

**CONVENTIONS :**

$$\bar{\gamma}_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon}$$

$$e_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{2} (\partial_i^\varepsilon u_j^\varepsilon + \partial_j^\varepsilon u_i^\varepsilon).$$

$a(u, v)$  est continue :  $\exists k \geq 0$  tel que  $a(u, v) \leq k \|u\|_{H_0^1}^2 \cdot \|v\|_{H_0^1}^2$ .

$a_{ij}^H$  est dit elliptique :  $\exists C > 0 : a_{ij}^H \zeta_j \zeta_i \geq C \zeta_j \zeta_j$

$a_{ij}^H$  : est dite symétrique :  $a_{ij}^H = a_{ji}^H$

L'opérateur moyenne  $\tilde{Q} = \frac{1}{|Y|} \int_Y Q dx$ .

---

# INTRODUCTION

---

## **Introduction générale :**

Les équations de von Karman, qui constituent un modèle mathématique de l'équilibre d'une plaque, ont été proposées par **T. von Karman** en 1910, elles se caractérisent par leur non linéarité d'une part et par leur aspect bidimensionnel d'autre part, en ce sens que les inconnues s'expriment en fonction de deux variables seulement (les coordonnées des points de la surface moyenne de la plaque). Dans ce mémoire l'objectif est homogénéiser ce modèle à partir du modèle de l'élasticité 3D non linéaire classique. Nous considérons le cas où la taille de la période de l'hétérogénéité est de même ordre de grandeur que l'épaisseur de la plaque. La méthode que nous employons est celle de la méthode des développements asymptotiques à double échelle d'une façon purement formelle.

Notre objectif dans ce travail nous essayons de compter sur les résultats de G.Duvaut [3] au cas des plaques en théorie "non linéaire" de Von Karman dans le milieu 2D afin d'atteindre des résultats au milieu 3D. Par une méthode d'homogénéisations asymptotique on a réussi réduire un problème tridimensionnel posé sur une plaque de type de von Karman en un problème bidimensionnel posé sur le plan moyen d'une même plaque équivalente lorsque l'épaisseur de la plaque tend vers zéro.



---

**BASE D'HOMOGENÉISATION**

---

L'homogénéisation se fait en suivant trois grandes étapes :

1. . Représentation
2. . Localisation
3. . Homogénéisation

**Représentation**

Cette étape est la plus importante. Elle consiste en la description mathématique du matériau hétérogène. On décrira le comportement, la forme, la fraction volumique de chacune des phases. De plus, outre les cas des structures périodiques, comme les tissus, on devra introduire des statistiques pour représenter un matériau composé de plusieurs phases distribuées. Dans la majeure partie des cas, il ne sera pas possible de fournir une description complète et exacte du matériau. Il faudra donc introduire des hypothèses simplificatrices.

**Localisation**

Une fois la définition du problème d'homogénéisation à résoudre établie, on doit arriver à obtenir un lien entre les quantités à l'échelle microscopique  $(\sigma, \epsilon)$  et celles à l'échelle macroscopique  $(\Sigma, E)$ . L'étape de localisation vise principalement à définir deux tenseurs :

- Le tenseur de localisation des déformations.
- Le tenseur de concentration des contraintes.

## Homogénéisation

L'homogénéisation est la dernière étape du processus. Elle vise à la détermination de la relation entre les contraintes macroscopiques et les déformations macroscopique afin de déterminer les propriétés élastiques effectives à échelle macroscopique.

L'étape d'homogénéisation a pour objectif d'établir le lien entre  $\Sigma$  et  $E$ . Pour ce faire, nous allons introduire le concept de phase. Une phase va être définie comme un élément du matériau hétérogène qui a un ensemble de caractéristiques unique.

Nous partageons ce travail à **trois chapitre**. Le premier c'est une introduction à l'homogénéisation. Le deuxième il se compose de deux sections, une section sur les matériau élastiques non linéaire, et l'autre il défini une problème élastique non linéaire d'un plaque hétérogène de von Karman . Le dernier chapitre c'est la formulation d'un problème élastique 3D dans un domaine de référence fixé 2D. Et nous finalisée se travail par une conclusion.

---

# EXEMPLE INTRODUCTIF À L'HOMOGENÉISATION

---

## 1.1 CONCEPTS DE BASE POUR L'HOMOGENÉISATION

---

---

Avant la formulation, plusieurs concepts et notations de base doivent être définis. Pour faire face à deux échelles différentes de longueur associés à des comportements microscopiques et macroscopiques, coordonnée globale est désignée par  $x$  et coordonnée locale par  $y$ . Les coordonnées globales et locales sont liés les unes aux autres par un paramètre réel positif  $\varepsilon$ .

$$y = \frac{x}{\varepsilon}$$

A partir d'une fonction  $f(y)$   $Y$ -périodique dans le repère local, une fonction  $\varepsilon Y$ -périodique  $f^\varepsilon(x)$  dans la coordonnée globale peut être définie comme suit :  $f^\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = f(y)$ .

---

## 1.2 POSITION DU PROBLÈME

---

On propose un exemple unidimensionnel qu'on trouve dans la plupart des livres (par exemple [8]) sur l'homogénéisation qui illustre bien la méthode de l'homogénéisation .

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[ a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] = f(x), & x \in ]0, 1[ \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

sous hypothèse que  $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  est régulière, périodique et elliptique.

### 1.2.1 Existence et unicité de $u^\varepsilon$

Formulation variationnelle du problème

Pour tout  $v$  régulier :  $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ .

$$-\int_0^1 \frac{d}{dx} \left[ a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] \cdot v dx = \int_0^1 f \cdot v dx \iff \int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx - \left[ a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx} v \right]_0^1 = \int_0^1 f v dx$$

supposons que  $a \in L^\infty(0, 1)$ ,  $f \in L^2(0, 1)$  .

Soit

$$V = \left\{ v \in L^2(0, 1), \frac{dv}{dx} \in L^2(0, 1), v(1) = v(0) = 0 \right\} = H_0^1(0, 1). \quad (1.2)$$

Donc la formulation variationnelle du problème  $(\mathcal{P}^\varepsilon)$  est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in H_0^1(0, 1) \text{ tel que} \\ \int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H_0^1(0, 1). \end{cases} \quad (1.3)$$

Posons :

$$\begin{cases} a(u^\varepsilon, v) = \int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx \\ l(v) = \int_0^1 f \cdot v dx \end{cases} \quad (1.4)$$

Il est facile de vérifier que  $a^\varepsilon(\cdot, \cdot)$  est bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur  $V$ , et  $l(\cdot)$  est linéaire continue sur  $V$ .

Donc d'après le théorème de **Lax-Milgram** on a l'existence et l'unicité de  $u^\varepsilon \in H_0^1(0, 1)$ .

Donc maintenant la question qui se pose c'est le comportement lorsque  $(\varepsilon \downarrow 0)$  .

Comme  $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  est périodique de période 1 on a la proposition suivante :

**Proposition 1.2.1** soit  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$  périodique de période 1 alors la suite de fonction  $a(\frac{\cdot}{\varepsilon})$  converge faiblement (\*) vers la fonction constante  $\langle a \rangle = \int_0^1 a dx$ .

**Proposition 1.2.2** La solution  $u^\varepsilon \in H_0^1(0,1)$  de  $(\mathcal{P}^\varepsilon)$  converge fortement dans  $L^2$  vers  $u^* \in H_0^1(0,1)$  solution de  $-\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\langle 1/a \rangle} \frac{du^*}{dx} \right] = f$ .

**Preuve.** On a :

$$\int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H_0^1(0,1) \quad (1.5)$$

si on prend  $v = u^\varepsilon$  alors on a

$$\int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx} \cdot \frac{du^\varepsilon}{dx} dx = \int_0^1 f u^\varepsilon dx \leq \|f\|_{L^2} \|u^\varepsilon\|_{L^2}$$

( d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz).

En utilisant l'inégalité de Poincaré on obtient :

$$\frac{a_0}{c^2} \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq a_0 \left\| \frac{du^\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|u^\varepsilon\|_{L^2}$$

$$(i) \quad \|u^\varepsilon\|_{L^2} \leq c$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{du^\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2} \leq C$$

Ceci implique la premier inégalité (i) est majorée implique qu' il existe une sous suite  $(u^\varepsilon)$  qui converge faiblement vers  $u^*$  dans  $L^2$ .

La même pour la deuxième inégalité (ii) elle converge faiblement vers  $\xi$  dans  $L^2$  on montre ensuite que  $\xi = \frac{du^*}{dx}$ .

$H^1(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1) \implies u^\varepsilon$  converge fortement vers  $u^*$  dans  $L^2$ .

$$-\frac{d}{dx} \left[ a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] = f \iff -a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx} = \int_0^1 f \cdot dx + c_\varepsilon.$$

$c_\varepsilon$  reste bornée  $\forall \varepsilon \implies c_\varepsilon \rightarrow c$ .

$$-\frac{du^\varepsilon}{dx} = \frac{1}{a} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \left( \int_0^1 f \cdot dx + c_\varepsilon \right)$$

$\frac{1}{a} \in L^\infty$  et périodique  $\implies \frac{1}{a}$  converge faiblement étoile vers  $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle$ .

Donc :

$$-\frac{du^\varepsilon}{dx} = \frac{1}{a} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \left( \int_0^1 f \cdot dx + c_\varepsilon \right) \rightharpoonup \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \left( \int_0^1 f \cdot dx + c \right) \implies \frac{du^*}{dx} = - \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \left( \int_0^1 f \cdot dx + c \right)$$

$$-\frac{1}{\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle} \frac{du^*}{dx} = \int_0^1 f \cdot dx + c.$$

$$-\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle} \frac{du^*}{dx} \right] = f.$$

Alors le problème homogénéisé  $(\mathcal{P}^H)$  est

$$(\mathcal{P}^H) \begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\left\langle 1/a \right\rangle} \frac{du^*}{dx} \right] = f. \\ u^*(0) = u^*(1) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

■

### 1.3 HOMOGÉNÉISATION PAR LA MÉTHODE DOUBLE ÉCHELLE

#### 1.3.1 Conditions d'applications :

- Milieux hétérogènes à structure périodique lorsque la période est petite par rapport aux dimensions du milieu.

- Milieux composites .

- Mélanges solides, fluides-solides, fluides, milieux poreux.

•Cas aléatoire.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\partial\Omega$  régulière.

On considère le problème aux limites

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}) = f(x) & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

### 1.3.2 Développement asymptotique

Sous l'hypothèse que les  $a_{ij}$  sont régulières et périodiques et  $a_{ij}(y)$  sont elliptiques, la solution du problème  $(\mathcal{P}^\varepsilon)$  dépendra de  $x$  et  $\varepsilon$ .

On prend  $u^\varepsilon$ .

$$u^\varepsilon = u^0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon u^1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots + \varepsilon^k u^k(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots \quad (1.8)$$

si

$$\phi^\varepsilon(x) = \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

alors

$$\frac{d}{dx} \phi^\varepsilon = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

On substitue  $u^\varepsilon(x)$  par (1.8) dans l'équation  $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ , et on utilise la règle de la chaîne (dérivation d'une fonction composée). On obtient :

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\varepsilon \partial y_i}\right) \left[ a_{ij}(y) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\varepsilon \partial y_j}\right) (u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots) \right] = f \\ & = -\frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \frac{\partial}{\partial y_i} (a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j}) (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots) \right] - \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j}) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial y_i} (a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j}) \right] (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots) \right\} \\ & \quad - \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots) \right\} = f \end{aligned}$$

Posons

$$A^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}A^{-2} + \frac{1}{\varepsilon}A^{-1} + A^0 + \varepsilon A^1 + \dots$$

$$A^{-2}u^0 = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_j} \right] = 0. \quad (1.9)$$

$$A^{-1}(u^0, u^1) = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^1}{\partial y_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_j} \right] - \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (1.10)$$

$$A^0(u^0, u^1, u^2) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^1}{\partial y_j} \right] - \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^1}{\partial y_j} \right] - \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^2}{\partial y_j} \right] = f. \quad (1.11)$$

**Etude de l'équation (1.9)**

$$A^{-2}u^0 = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_j} \right] = 0$$

. On définit :

$$H_y = \{v \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n), Y\text{-periodique}\}.$$

$$V_y = \{v \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n), Y\text{-periodique}\}$$

**Lemme 1.3.1** Soit  $A\phi = F$  un problème aux limites posé sur une période de référence  $Y$ ,  $A = -\frac{\partial}{\partial y_i} (a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j})$ .

Les hypothèses :  $\phi$  est  $Y$ -périodique,  $F \in H_y$  alors :

-  $\exists$  une solution faible  $\phi$   $Y$ -périodique si et seulement si  $\langle F \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y F dy = 0$ .

- Si la solution  $\phi$  existe, alors il est unique à une constante additive près.

Alors multiplions (1.9) par  $v \in V_Y$  :

$$\begin{aligned} - \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_j} \right] v &= \int_Y 0v. \\ &= \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_j} \frac{\partial v}{\partial y_i} - \int_{\partial Y} a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_j} v. n d\sigma. \end{aligned}$$



La formulation variationnelle de (1.9) est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u^0 \in V_y \\ a_y(u^0, v) = \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_j} \frac{\partial v}{\partial y_i} dy \quad \forall v \in V_y \end{cases} \quad (1.12)$$

Par application du lemme précédent notre problème admet une solution unique (à une constante additive près) dans  $V_y$ .

Dans la formulation variationnelle on prend  $v = u^0$ , on obtient :

$$c \left\| \frac{\partial u^0}{\partial y_i} \right\|_{H_y}^2 \leq a_y(u^0, u^0) = \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_j} \frac{\partial u^0}{\partial y_i} dy = 0$$

$$\implies \frac{\partial u^0}{\partial y_i} \equiv 0 \implies u^0 \equiv u^0(x)$$

### 1.3.3 Etude de l'équation microscopique

D'après l'équation (1.11)

$$A^{-1}(u^0, u^1) = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^1}{\partial y_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial y_j} \right] - \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \right] = 0.$$

On a le deuxième terme est nulle par ce que  $u^0$  dépend seulement de  $x$ .

L'équation microscopique (locale)

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \left( \frac{\partial u^1}{\partial y_j} + \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \right) \right] = 0 \quad (1.13)$$

Soit

$$\langle \phi \rangle = \tilde{\phi} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \phi dy$$

l'opérateur moyenne.

Résolution de (1.13) : on suppose que  $u^0$  est donné, alors l'équation microscopique sert à chercher  $u^1$  en fonction de  $u^0$  alors :

$$(\mathcal{P}_{loc}) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \left( \frac{\partial u^1}{\partial y_j} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \\ u^1 \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (1.14)$$

D'après le lemme précédent le problème  $(\mathcal{P}_{loc})$  admet une solution unique  $u^1$  à une constante additive près dans  $V_y$  si et seulement si :

$$\langle F \rangle = \left[ \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \right] = 0.$$

$$\langle F \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(y) \frac{\partial u^0}{\partial x_j} dy = \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(y) dy$$

$$= \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} a_{ij}(y) n_i d\sigma$$

(d'après la formule de Green).

Soit  $\psi = (\psi^k) \in V_Y$  solution de :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \frac{\psi^{(k)}}{\partial y_j} \right] = \frac{\partial}{\partial y_i} (a_{ik}) \\ \psi^k \text{ est } Y\text{-périodique} \\ \tilde{\psi}^k = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Alors :

$$u^1(x, y) = \frac{\partial u^0}{\partial x_k} \psi^k(y) + \check{u}^1(x) \quad (1.16)$$

### 1.3.4 Etude de l'équation macroscopique (globale)

D'après l'équation(1.11)

$$A^0 u^0 = f \iff A^0(u^0, u^1, u^2) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ij}(y) \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u^1}{\partial y_j} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ a_{ij}(y) \left[ \frac{\partial u^1}{\partial x_j} + \frac{\partial u^2}{\partial y_j} \right] \right] = f \quad (1.17)$$

On a la moyenne du deuxième terme est égal à zéro d'après la périodicité. Alors l'équation macroscopique(1.12) revient

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ij}(y) \left( \frac{\partial u^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u^1}{\partial y_j} \right) \right] = \tilde{f} = f \quad (1.18)$$

On remplace  $u^1$  par sa valeur (1.16) on obtient

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ij}(y) \left( \frac{\partial u^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u^0}{\partial x_k} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y_j} \right) \right] = f \quad (1.19)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ij}(y) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y_j} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x_k} \right] = f \quad (1.20)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ij}(y) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y_j} \right) \right] \frac{\partial u^0}{\partial x_k} = f \quad (1.21)$$

Soit

$$a_{ik}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[ a_{ij}(y) \left( \delta_{kj} + \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y_j} \right) \right] dy$$

Alors on obtient à la fin

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ik}^H \frac{\partial u^0}{\partial x_k} \right] = f \quad (1.22)$$

C'est l'équation homogénéisée .

$a_{ik}^H$  : les coefficients homogénéisés qui vérifient des propriétés d'ellipticité et de symétrie.

---

# MATÉRIAUX ÉLASTIQUES NON LINÉAIRE

---

## 2.1 MATÉRIAU ÉLASTIQUES

---

---

**Définition 2.1.1** (voir [9])

*On dira qu'un matériau est élastique s'il existe un état de référence sans contrainte et si, après déformation, le tenseur des contraintes ne dépend que du tenseur des déformations calculé à partir de cet état de référence.*

### 2.1.1 Problème dans le cadre de l'élasticité

On suppose que  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

On applique deux forces :

$f$  : force volumique sur  $\Omega$

$g$  : force extérieure sur  $\Gamma_2$

### Cas : élasticité linéaire

On considère ( $PL$ ) un problème d'élasticité linéaire :

$$(PL) \begin{cases} \text{trouver } u = (u_i)_{1 \leq i \leq 3} \\ -\partial_j \sigma_{ij} = f_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \\ \sigma_{ij} = a_{ijkl}(x) e_{kl}(u) \\ u|_{\Gamma_1} = 0 \\ \sigma_n = (\sigma_{ij} n_j) = g_i \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{tenseur des déformations linéaire})$$

$a_{ijkl}$  dépend de  $x$  : les coefficients élastiques non homogène

$a_{ijkl}$  est indépendant de  $x$  : cas homogène

- corps isotrope : symétrique dans toutes les directions
- corps anisotrope : il n'y a pas de symétrie

### Cas : élasticité non linéaire

On considère ( $PNL$ ) un problème d'élasticité non linéaire :

$$(PNL) \begin{cases} \text{trouver } u = (u_i)_{1 \leq i \leq 3} \\ -\partial_j [\sigma_{ij} + \sigma_{kj} \partial_k u_i] = f_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \\ \sigma_{ij} = a_{ijkl}(x) \bar{\gamma}_{kl}(u) \\ u|_{\Gamma_1} = 0 \\ \sigma_n = (\sigma_{ij} n_j) = g_i \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

$$\bar{\gamma}_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \quad (\text{tenseur des déformations non linéaire})$$

### Propriétés de $A = (a_{ijkl})$

1-La symétrie :

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij} = a_{klji}$$

2-Ellipticité :

$$\exists c > 0 \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad (\xi = (\xi_{ij}))$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c \xi_{ij}\xi_{ij}$$

$$3- \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$$

### 2.1.2 Les plaques du type de von Karman

On considère dans le cadre de l'élasticité non linéaire une plaque élastique tridimensionnelle non homogène et anisotrope dont l'épaisseur constante d'une façon non symétrique par rapport au plan moyen en général.

On suppose que l'épaisseur de la plaque est de même ordre de grandeur  $\varepsilon$  que la taille de la période, si la surface supérieure et inférieure sont planes alors on s'appelle la plaque une plaque élastique de von Karman.

Si les forces volumiques et surfaciques sont verticales alors on obtient la formulation variationnelle du problème bidimensionnel des plaques élastiques, non linéaires, non homogènes et anisotropes de von Karman.

**Définition 2.1.2** (*Forces du type de von Karman*) voir [5]

Ces forces spécifiques forcent à agir sur la frontière  $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  de sa face latérale sont horizontales, en conséquence les déplacements admissibles sont ceux dont les composantes horizontales sont indépendantes de la variable verticale et dont la composante verticale disparaît. Ces conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{cases} u_3^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \text{ et } u_\alpha^\varepsilon \text{ indépendants de } x_3^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon + \sigma_{k\beta}^\varepsilon \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) \nu_\beta = h_\alpha^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \end{cases}$$

---

## 2.2 HOMOGENÉISATION D'UNE PLAQUE DE VON KARMAN

---

### 2.2.1 Position du problème

Soit  $\omega$  un domaine dans le plan parcouru par les vecteurs  $e_\alpha$ .

Nous désignons par  $(\nu_\alpha)$  et  $(\tau_\alpha)$  le vecteur normal de l'unité et le vecteur tangent unitaire le long de la frontière  $\gamma$  de  $\omega$ , lié par  $\nu_1 = \tau_2, -\nu_2 = \tau_1$ . Etant donné  $\varepsilon > 0$ , soit :

$$\begin{cases} \Omega^\varepsilon = \omega \times \{-\varepsilon, +\varepsilon\} \\ \Gamma_\pm^\varepsilon = \omega \times \{\pm\varepsilon\} \\ \Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \end{cases} \quad (2.1)$$

De sorte que la frontière  $\partial\Omega^\varepsilon$  de l'ensemble  $\Omega^\varepsilon$  est partitionnée en la face latérale  $\gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  et les faces supérieure et inférieure  $\Gamma_+^\varepsilon$  et  $\Gamma_-^\varepsilon$ .

Enfin on désigne par  $(n_i^\varepsilon) : \partial\Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ , le vecteur normal extérieur de unitaire le long de  $\partial\Omega^\varepsilon$ , Donc  $(n_i^\varepsilon) = (\nu_1, \nu_1, 0)$  le long de la face latérale  $\gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ . Nous supposons que pour chaque  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $\bar{\Omega}^\varepsilon$  est la configuration de référence d'une plaque élastique non linéaire, soumise à trois types de forces appliquées

- Les forces volumiques de densité  $(f_i^\varepsilon) : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$

- Forces de surface agissant sur les faces supérieure et inférieure, de densité

$$(g_i^\varepsilon) : \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- Forces de surface appliquées parallèlement au plan parcouru par les vecteurs qui agissent sur la face latérale  $\gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ , dont seule la densité résultante :

$$(h_1^\varepsilon, h_2^\varepsilon, 0) : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Comme le montre la figure :

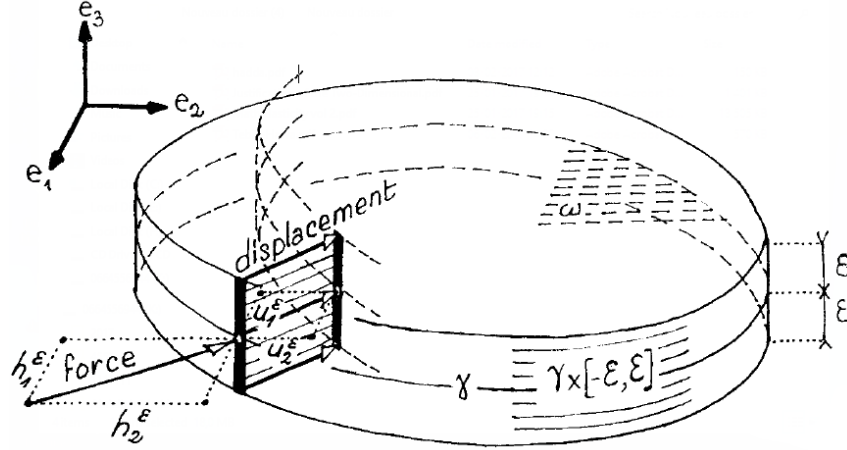


FIGURE 2.1 –

Par unité de longueur, obtenue par intégration à travers l'épaisseur, est connue le long de la frontière  $\gamma$  de la surface moyenne  $\omega$  de la plaque.

Nous supposons à ce stade que

$$\begin{cases} f_i^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon). \\ g_i^\varepsilon \in L^2(\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon) \\ h_\alpha^\varepsilon \in L^2(\gamma^\varepsilon) \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour les indices grecs ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) et les indices latins ( $i, j = 1, 2, 3$ )

Les conditions aux limites impliquant le champ de déplacement  $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  sont :  $u_i^\varepsilon$  indépendant de  $x_3^\varepsilon$  et  $u_3^\varepsilon = 0$  sur  $\gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ .

Nous supposons que la plaque est constituée d'un matériau de St Venant-Kirchhoff, mais l'analyse actuelle porte sur des matériaux élastiques non linéaires

Le problème tridimensionnel consiste alors à trouver le champ vectoriel de déplacement  $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  et le second champ de tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff  $H^\varepsilon = (\sigma_{ij}^\varepsilon) : \rightarrow \mathbb{S}^3$  ( $\mathbb{S}^3$  désigne l'ensemble de toutes les matrices symétriques d'ordre 3) qui satisfont les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j^\varepsilon} (\sigma_{ij}^\varepsilon + \sigma_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) = f_i^\varepsilon & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ (A\sigma^\varepsilon)_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}(u^\varepsilon) & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ (\sigma_{i3}^\varepsilon + \sigma_{k3}^\varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) n_3^\varepsilon = g_i^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon + \sigma_{k\beta}^\varepsilon \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) \nu_\beta = h_\alpha^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon \end{cases} \quad (2.3)$$



et les conditions aux limites

$$u_3^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon \quad \text{et} \quad u_\alpha^\varepsilon \quad \text{indépendants de} \quad x_3^\varepsilon \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon \quad (2.4)$$

Les équations tridimensionnelles sont caractérisées par des conditions aux limites spécifiques sur toute la face latérale  $\gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ , où  $\gamma = \partial\omega$ . Des forces de surface appliquées parallèlement au plan parcouru par les vecteurs  $e_\alpha$  agissent sur la face latérale à travers leur résultat  $(h_\alpha^\varepsilon) : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  obtenu par intégration à travers l'épaisseur de la plaque.

Les déplacements admissibles sont indépendants de  $x_3^\varepsilon$  et  $u_3^\varepsilon = 0$  le long de  $\gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ , en d'autres termes, tout segment "vertical" le long de la face latérale ne peut subir que des déplacements "horizontales".

Enfin, toutes les forces appliquées sont "verticales", c'est-à-dire  $f_\alpha^\varepsilon = 0$  et  $g_\alpha^\varepsilon = 0$ .

Les coefficients sont définis de la manière suivante :

Soit  $a_{ijkh}(y)$  des fonctions bornées définies pour  $y \in \mathbb{R}^2 \times ]-1, 1[$  et  $Y$ -périodique sur  $y_1, y_2$  et  $(Y = ]0, y_1[ \times ]0, y_2[)$ .

On pose  $\mathcal{Y} = Y \times ]-1, 1[$ .

Ces fonctions satisfont les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ijkh}(y) = a_{jikh}(y) = a_{khij}(y) \quad p.p \quad y \in \mathcal{Y} \\ \exists m > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall \tau = (\tau_{ij}), \tau_{ij} = \tau_{ji} \\ m\tau_{ij}\tau_{ij} \leq a_{ijkh}(y)\tau_{ij}\tau_{kh} \quad p.p \quad y \in \mathcal{Y}. \\ \exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad M = \sup a_{ijkh}(y), \quad y \in \mathcal{Y}, \quad (k, h = 1, 2, 3). \end{array} \right. \quad (2.5)$$

On suppose que l'épaisseur de la plaque est de même ordre de grandeur  $\varepsilon$  que la taille de la période.

### 2.2.2 Problème d'équilibre d'une plaque hétérogène de Von Karman

Le problème d'équilibre d'une plaque 3D hétérogène de Von Karman est :

$$(P^\varepsilon) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j^\varepsilon} (\sigma_{ij}^\varepsilon + \sigma_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) = f_i^\varepsilon & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ (A\sigma^\varepsilon)_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}(u^\varepsilon) & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ (\sigma_{i3}^\varepsilon + \sigma_{k3}^\varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) n_3^\varepsilon = g_i^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^\varepsilon (\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon + \sigma_{k\beta}^\varepsilon \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) \nu_\beta = h_\alpha^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon. \\ u_3^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon \\ u_\alpha^\varepsilon \text{ indépendants de } x_3^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon \end{cases} \quad (2.6)$$

En "première approximation", on peut chercher des lois de comportement dans lesquelles la relation entre  $\sigma_{ij}^\varepsilon(x^\varepsilon)$  et  $\bar{\gamma}_{kl}(u^\varepsilon(x^\varepsilon))$  est linéaire :

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(x^\varepsilon) = a_{ijkl}(x^\varepsilon) \bar{\gamma}_{kl}^\varepsilon(u^\varepsilon(x^\varepsilon)) \quad (2.7)$$

**Définition 2.2.1** La application  $A : S^3 \longrightarrow S^3, S^3$  est l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 3 , est définie par :  $(AX)_{ij} = b_{ijkl}X_{kl}, \forall X = (X_{ij}) \in S^3$ . la application  $A^{-1} : S^3 \longrightarrow S^3$  est définie par :  $(A^{-1}Y)_{ij} = a_{ijkl}Y_{kl}, \forall Y = (Y_{ij}) \in S^3$  , les fonctions  $a_{ijkl}$  sont les coefficient élastique , ils vérifient les propriétés de symétrie (2.5)

voir ([1])

et les composantes du tenseur de déformation non linéaire :

$$\bar{\gamma}_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} \quad (2.8)$$

### 2.2.3 Formulation variationnelle mixte du problème

Nous définissons également les espaces :

$$\begin{cases} H^\varepsilon = \{ \tau^\varepsilon = (\tau_{ij}^\varepsilon) \in L^2(\Omega^\varepsilon)_s \text{ (s pour "symétrique"), } \\ V^\varepsilon = \{ v^\varepsilon \in W^{1,4}(\Omega^\varepsilon) \mid v_\alpha^\varepsilon \text{ est indépendant de } x_3^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \text{ et } v_3^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \} \end{cases} \quad (2.9)$$

Le problème consiste à trouver un couple  $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in H^\varepsilon \times V^\varepsilon$  tel que :

$$(A\sigma^\varepsilon)_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon). \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \quad (2.10)$$

alors :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} (A\sigma^\varepsilon)_{ij} \tau_{ij}^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} \bar{\gamma}_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tau_{ij}^\varepsilon, \quad \forall \tau^\varepsilon \in H^\varepsilon. \quad (2.11)$$

$$- \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j^\varepsilon} (\sigma_{ij}^\varepsilon + \sigma_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) v_i^\varepsilon dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon, \quad \forall v^\varepsilon \in V^\varepsilon \quad (2.12)$$

En appliquant la formule de Green à l'équation, (2.12) on obtient :

$$- \int_{\partial\Omega^\varepsilon} (\sigma_{ij}^\varepsilon + \sigma_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) n_j^\varepsilon v_i^\varepsilon ds^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} (\sigma_{ij}^\varepsilon + \sigma_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon, \quad \forall v^\varepsilon \in V^\varepsilon \quad (2.13)$$

d'où :

$$- \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} g_i^\varepsilon v_i^\varepsilon ds^\varepsilon - \int_{\Gamma_0^\varepsilon} h_i^\varepsilon v_i^\varepsilon ds^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} (\sigma_{ij}^\varepsilon + \sigma_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon}) \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon, \quad \forall v^\varepsilon \in V^\varepsilon. \quad (2.14)$$

En ce qui concerne les données , nous ferons désormais l'hypothèse plus commode :

$$f_\alpha^\varepsilon = 0, \quad g_\alpha^\varepsilon = 0$$

Le problème consiste à trouver un couple  $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in H^\varepsilon \times V^\varepsilon$  alors :

$$(P^\varepsilon) \begin{cases} \text{trouver } (\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in H^\varepsilon \times V^\varepsilon \\ \int_{\Omega^\varepsilon} (A\sigma^\varepsilon)_{ij} \tau_{ij}^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} \bar{\gamma}_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tau_{ij}^\varepsilon, \quad \forall \tau^\varepsilon \in H^\varepsilon. \\ \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{kj}^\varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_k^\varepsilon} \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f_3^\varepsilon v_3^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} g_3^\varepsilon v_3^\varepsilon ds^\varepsilon + \\ \int_\gamma (\int_{-\varepsilon}^\varepsilon v_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon) h_\alpha^\varepsilon, \quad \forall v^\varepsilon \in V^\varepsilon \end{cases} \quad (2.15)$$

### 2.2.4 Existence et unicité de $u^\varepsilon$

Nous allons donner un résultat d'existence pour le problème non-linéaire tridimensionnel dans un cas particulier .

**Théorème 2.2.2** ( voir [4][p.19 – 20])

On suppose que  $\Gamma_0 = \Gamma$  (et que  $\Gamma$  est "aussi régulière que nécessaire"), auquel cas l'espace  $V^\varepsilon$  est l'espace  $(W_0^{1,4}(\Omega^\varepsilon))^3$ . Pour  $p > 3$ , il existe un voisinage  $F$  de 0 dans  $(L^p(\Omega^\varepsilon))^3$  et il existe un voisinage  $U$  de 0 dans  $(W^{2,p}(\Omega^\varepsilon) \cap W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon))^3$  tel que pour tout  $f^\varepsilon = (f_i^\varepsilon)_{i=1}^3 \in H^\varepsilon$ , il existe une et une seule solution du problème  $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in H^\varepsilon \times V^\varepsilon$ .

**Preuve.** ( voir [4][p.20 – 21]) ■

---

## FORMULATION DU PROBLÈME DANS UN DOMAINE DE RÉFÉRENCE

---

Nous allons définir un problème équivalent au problème (2.15) mais posé sur un ouvert indépendant de  $\varepsilon$  :

### 3.1 LA MISE À L'ÉCHELLE

---

---

Notons par :

$$\begin{cases} \Omega = \omega \times ]-1, 1[, \Gamma_0 = \gamma \times [-1, 1] \\ \Gamma_+ = \omega \times \{+1\}, \Gamma_- = \omega \times \{-1\} \end{cases} \quad (3.1)$$

A tout point  $x \in \Omega$  on associe le point  $x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$  par la correspondance

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \longrightarrow x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \Omega^\varepsilon$$

et à tout élément  $\tau^\varepsilon = (\tau_{ij}^\varepsilon) \in H^\varepsilon$  et tout  $v^\varepsilon \in V^\varepsilon$ , nous faisons correspondre l'élément  $\tau = (\tau_{ij}) \in H$  et l'élément  $v = (v_i) \in V$  par :

$$\begin{cases} H = \{\tau = \tau_{ij} \in L^2(\Omega)_s\} \\ V = \{v \in W^{1,4}(\Omega) \mid v_\alpha \text{ est indépendant de } x_3 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } v_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous suivons Ciarlet et Destuynder [7], nous effectuons les mise à l'échelle sur les déplacements, les contraintes, les forces volumiques est les forces surfaciques :

$$\begin{cases} \tau_{\alpha\beta}^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 \tau_{\alpha\beta}(\varepsilon)(x). \\ \tau_{\alpha 3}^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 \tau_{\alpha 3}(\varepsilon)(x). \\ \tau_{33}^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^4 \tau_{33}(\varepsilon)(x). \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} v_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 v_\alpha(\varepsilon)(x). \\ v_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon v_3(\varepsilon)(x) \end{cases} \quad (3.4)$$

En ce qui concerne les données, nous ferons désormais l'hypothèse plus commode :

$$f_\alpha^\varepsilon = 0 \quad ; g_\alpha^\varepsilon = 0.$$

Définissons enfin les fonctions

$f_3$  ,  $g_3$  et  $h_\alpha$  :

$$\begin{cases} f_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 f_3(\varepsilon)(x). \\ g_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^4 g_3(\varepsilon)(x). \\ h_\alpha^\varepsilon(y) = \varepsilon^2 h_\alpha(y). \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans ces conditions, il est clair que l'on a :  $f_i \in L^2(\Omega)$  ;  $g_i \in L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$  ;  $h_\alpha \in L^2(\gamma)$

On utilise le règle de dilatation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial x_3^\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{ij}^\varepsilon \bar{\gamma}_{ij}^\varepsilon(v^\varepsilon) dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{\alpha\beta}^\varepsilon \bar{\gamma}_{\alpha\beta}^\varepsilon(v^\varepsilon) dx^\varepsilon + 2 \int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{\alpha 3}^\varepsilon \bar{\gamma}_{\alpha 3}^\varepsilon(v^\varepsilon) dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{33}^\varepsilon \bar{\gamma}_{33}^\varepsilon(v^\varepsilon) dx^\varepsilon \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{\alpha\beta}(v(\varepsilon)) = \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_\alpha(\varepsilon)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta(\varepsilon)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_\beta} \right] + \varepsilon^4 \frac{1}{2} \frac{\partial v_\delta(\varepsilon)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_\delta(\varepsilon)}{\partial x_\beta} \\ \bar{\gamma}_{\alpha 3}(v(\varepsilon)) = \varepsilon \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_\alpha(\varepsilon)}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_3} \right] + \varepsilon^3 \frac{1}{2} \frac{\partial v_\delta(\varepsilon)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_\delta(\varepsilon)}{\partial x_3} \\ \bar{\gamma}_{33}(v(\varepsilon)) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_3} \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_3} \right] + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \frac{\partial v_\delta(\varepsilon)}{\partial x_3} \frac{\partial v_\delta(\varepsilon)}{\partial x_3} \end{cases} \quad (3.8)$$


---

### 3.1. LA MISE À L'ÉCHELLE

#### CHAPITRE 3. FORM DU PROB DANA UN DOM DE RÉFÉ

où :

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{\alpha\beta}(v(\varepsilon)) = \varepsilon^2 I_{\alpha\beta}(\varepsilon) + \varepsilon^4 K_{\alpha\beta}(\varepsilon) \\ \bar{\gamma}_{\alpha 3}(v(\varepsilon)) = \varepsilon I_{\alpha 3}(\varepsilon) + \varepsilon^3 K_{\alpha 3}(\varepsilon) \\ \bar{\gamma}_{33}(v(\varepsilon)) = I_{33}(\varepsilon) + \varepsilon^2 K_{33}(\varepsilon) \end{cases} \quad (3.9)$$

Avec :

$$\begin{cases} I_{ij}(v(\varepsilon)) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_i(\varepsilon)}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j(\varepsilon)}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_i} \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_j} = e_{ij}(\varepsilon) + \frac{1}{2} \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_i} \frac{\partial v_3(\varepsilon)}{\partial x_j} \\ K_{ij}(v(\varepsilon)) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_\delta(\varepsilon)}{\partial x_i} \frac{\partial v_\delta(\varepsilon)}{\partial x_j} \quad (\delta = 1, 2) \end{cases} \quad (3.10)$$

Avec ces notations, il est aisé que les composantes de le deux équations (2.15) deviennent :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{ij}^\varepsilon \bar{\gamma}_{ij}^\varepsilon(v^\varepsilon) dx^\varepsilon &= \varepsilon \int_{\Omega} [\varepsilon^4 \tau_{\alpha\beta}(\varepsilon) I_{\alpha\beta}(\varepsilon) + \varepsilon^6 \tau_{\alpha\beta}(\varepsilon) K_{\alpha\beta}(\varepsilon)] dx + 2\varepsilon \int_{\Omega} [\varepsilon^4 \tau_{\alpha 3}(\varepsilon) I_{\alpha 3}(\varepsilon) + \\ &\varepsilon^6 \tau_{\alpha 3}(\varepsilon) K_{\alpha 3}(\varepsilon)] dx + \varepsilon \int_{\Omega} [\varepsilon^4 \tau_{33}(\varepsilon) I_{33}(\varepsilon) + \varepsilon^6 \tau_{33}(\varepsilon) K_{33}(\varepsilon)] dx = \\ &\varepsilon^5 \int_{\Omega} \tau_{ij}(\varepsilon) I_{ij}(v(\varepsilon)) dx + \varepsilon^7 \int_{\Omega} \tau_{ij}(\varepsilon) K_{ij}(v(\varepsilon)) dx \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} f_3^\varepsilon v_3 dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} g_3^\varepsilon v_3 ds + \int_{\gamma} \left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v_\alpha dx_3 \right) h_\alpha^\varepsilon &= \varepsilon^5 \left\{ \int_{\Omega} f_3 v_3 dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 v_3 ds + \right. \\ &\left. \int_{\gamma} \left( \int_{-1}^{+1} v_\alpha dx_3 \right) h_\alpha \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

d'autre part

$$(A\sigma^\varepsilon)_{ij} \tau_{ij}^\varepsilon = b_{ijkl} \sigma_{kl}^\varepsilon \tau_{ij}^\varepsilon \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} (A\sigma^\varepsilon)_{ij} \tau_{ij}^\varepsilon &= \int_{\Omega^\varepsilon} [b_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}^\varepsilon \tau_{\alpha\beta}^\varepsilon + 2b_{\alpha\beta\gamma 3} \sigma_{\gamma 3}^\varepsilon \tau_{\alpha\beta}^\varepsilon + b_{\alpha\beta 33} \sigma_{33}^\varepsilon \tau_{\alpha\beta}^\varepsilon + 2b_{\alpha 3\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}^\varepsilon \tau_{\alpha 3}^\varepsilon + 4b_{\alpha 3\gamma 3} \sigma_{\gamma 3}^\varepsilon \tau_{\alpha 3}^\varepsilon + \\ &2b_{\alpha 333} \sigma_{33}^\varepsilon \tau_{\alpha 3}^\varepsilon + b_{33\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}^\varepsilon \tau_{33}^\varepsilon + 2b_{33\gamma 3} \sigma_{\gamma 3}^\varepsilon \tau_{33}^\varepsilon + b_{3333} \sigma_{33}^\varepsilon \tau_{33}^\varepsilon] dx^\varepsilon \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} [\varepsilon^4 b_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta} \tau_{\alpha\beta} + 2\varepsilon^5 b_{\alpha\beta\gamma 3} \sigma_{\gamma 3} \tau_{\alpha\beta} + \varepsilon^6 b_{\alpha\beta 33} \sigma_{33} \tau_{\alpha\beta} + 2\varepsilon^5 b_{\alpha 3\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta} \tau_{\alpha 3} + 4\varepsilon^6 b_{\alpha 3\gamma 3} \sigma_{\gamma 3} \tau_{\alpha 3} + \\ &2\varepsilon^7 b_{\alpha 333} \sigma_{33} \tau_{\alpha 3} + \varepsilon^6 b_{33\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta} \tau_{33} + 2\varepsilon^7 b_{33\gamma 3} \sigma_{\gamma 3} \tau_{33} + \varepsilon^8 b_{3333} \sigma_{33} \tau_{33}] dx \end{aligned}$$

**Proposition 3.1.1** (voir [1])

Soit  $(\sigma(\varepsilon), u(\varepsilon)) \in H \times V$  obtenu à partir d'une solution

$(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in (H^\varepsilon \times V^\varepsilon)$  du problème (2.15) par les formules (3.3) – (3.6). Alors,  $(\sigma(\varepsilon), u(\varepsilon))$

est solution des équations variationnelles :

$$(P(\varepsilon)) \begin{cases} \text{trouver } (\sigma, u) \in (H \times V) \text{ tels que :} \\ \forall \tau \in H : \mathcal{A}_0(\sigma, \tau) + \varepsilon \mathcal{A}_1(\sigma, \tau) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_2(\sigma, \tau) + \varepsilon^3 \mathcal{A}_3(\sigma, \tau) + \varepsilon^4 \mathcal{A}_4(\sigma, \tau) - \\ \mathcal{E}(\tau, u) - \mathcal{B}(\tau, u, u) - \varepsilon^2 \mathcal{C}(\tau, u, u) = 0 \\ \forall v \in V : \mathcal{E}(\sigma, v) + 2\mathcal{B}(\sigma, u, v) + 2\varepsilon^2 \mathcal{C}(\sigma, u, v) = \mathcal{F}(v) \end{cases} \quad (3.14)$$

ou, pour des éléments génériques  $\sigma, \tau \in H$  et  $u, v \in V$ , on a posé

$$\mathcal{A}_0(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} b_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta} \tau_{\alpha\beta} dx \quad (3.15)$$

$$\mathcal{A}_1(\sigma, \tau) = 2 \int_{\Omega} [b_{\alpha\beta\gamma 3} \sigma_{\gamma 3} \tau_{\alpha\beta} + b_{\alpha 3\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta} \tau_{\alpha 3}] dx \quad (3.16)$$

$$\mathcal{A}_2(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} [b_{\alpha\beta 33} \sigma_{33} \tau_{\alpha\beta} + 4b_{\alpha 3\gamma 3} \sigma_{\gamma 3} \tau_{\alpha 3} + b_{33\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta} \tau_{33}] dx \quad (3.17)$$

$$\mathcal{A}_3(\sigma, \tau) = 2 \int_{\Omega} [b_{\alpha 333} \sigma_{33} \tau_{\alpha 3} + b_{33\gamma 3} \sigma_{\gamma 3} \tau_{33}] dx \quad (3.18)$$

$$\mathcal{A}_4(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} b_{3333} \sigma_{33} \tau_{33} dx \quad (3.19)$$

$$\mathcal{E}(\tau, u) = \int_{\Omega} \tau_{ij} e_{ij}(u) dx \quad (3.20)$$

$$\mathcal{B}(\tau, u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_{ij} \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \frac{\partial v_3}{\partial x_j} dx \quad (3.21)$$

$$\mathcal{C}(\tau, u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_{ij} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \frac{\partial v_\delta}{\partial x_j} dx \quad (3.22)$$

$$\mathcal{F}(v) = \left\{ \int_{\Omega} f_3 v_3^\varepsilon dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 v_3^\varepsilon ds + \int_{\gamma} \left( \int_{-1}^{+1} v_\alpha dx_3 \right) h_\alpha^\varepsilon \right\} \quad (3.23)$$

les fonctions  $f_3, g_3$  et  $h_\alpha$  étant obtenues par les formules (3.5).

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$



---



---

**3.2 DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE**


---



---

Nous sommes naturellement conduits à définir une série formelle d'"approximations" d'une solution  $(\sigma(\varepsilon), u(\varepsilon))$  en posant à priori :

$$(\sigma(\varepsilon), u(\varepsilon)) = (\sigma^0, u^0) + \varepsilon(\sigma^1, u^1) + \varepsilon^2(\sigma^2, u^2) + \dots \quad (3.24)$$

On postule que  $u(\varepsilon)$ ,  $\sigma_{ij}(\varepsilon)$  et  $\bar{\gamma}_{ij}(\varepsilon)$  admettent des développements asymptotiques tels que :

$$\sigma_{ij}(\varepsilon) = \sigma_{ij}^0(\bar{x}, y_1, y_2, y_3) + \varepsilon\sigma_{ij}^1(\bar{x}, y_1, y_2, y_3) + \varepsilon^2\sigma_{ij}^2(\bar{x}, y_1, y_2, y_3) + \dots \quad \text{où } \sigma_{ij}^k \text{ est Y-périodique en } y_1 \text{ et } y_2 \quad (3.25)$$

$$u(\varepsilon) = u^0(\bar{x}) + \varepsilon u^1(\bar{x}, y_1, y_2, y_3) + \varepsilon^2 u^2(\bar{x}, y_1, y_2, y_3) + \dots \quad \text{où } u^k \text{ est Y-périodique en } y_1 \text{ et } y_2 \quad (3.26)$$

$$\bar{\gamma}_{ij}(\varepsilon) = \bar{\gamma}_{ij}^0(\bar{x}, y_1, y_2, y_3) + \varepsilon\bar{\gamma}_{ij}^1(\bar{x}, y_1, y_2, y_3) + \varepsilon^2\bar{\gamma}_{ij}^2(\bar{x}, y_1, y_2, y_3) + \dots \quad \text{où } \bar{\gamma}_{ij}^k \text{ est Y-périodique en } y_1 \text{ et } y_2 \quad (3.27)$$

avec :  $\bar{x} = (x_1, x_2)$  on prend  $u^0 = u^0(\bar{x}) = u^0(x_1, x_2)$   
donc  $\frac{\partial u^0}{\partial x_3}$  et  $\frac{\partial u^0}{\partial y_i}$  sont égaux à zéro.

Et si on applique la règle de la chaîne sur (2.8) on a donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial y_3} \end{cases} \quad (3.28)$$

alors :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha\beta}(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) (u_\alpha^0 + \varepsilon u_\alpha^1 + \dots) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) (u_\beta^0 + \varepsilon u_\beta^1 + \dots) + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) (u_m^0 + \varepsilon u_m^1 + \dots) \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) (u_m^0 + \varepsilon u_m^1 + \dots) \end{aligned}$$

3.2. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

CHAPITRE 3. FORM DU PROB DANA UN DOM DE RÉFÉ

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha\beta}(\varepsilon) = & \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\alpha^1}{\partial y_\beta} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon \left( \frac{\partial u_\alpha^1}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\alpha^2}{\partial y_\beta} \right) + \dots \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\beta^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\beta^1}{\partial y_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon \left( \frac{\partial u_\beta^1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\beta^2}{\partial y_\alpha} \right) + \dots \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\alpha} \right) \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\beta} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon \left[ \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial u_m^1}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_m^2}{\partial y_\beta} \right) + \frac{\partial u_m^1}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\beta} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\alpha} \left( \frac{\partial u_m^1}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_m^2}{\partial y_\beta} \right) + \frac{\partial u_m^2}{\partial y_\alpha} \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\beta} \right) \right] + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma}_{\alpha 3}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_3} (u_\alpha^0 + \varepsilon u_\alpha^1 + \dots) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) (u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \dots) +$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) (u_m^0 + \varepsilon u_m^1 + \dots) \frac{\partial}{\partial y_3} (u_m^0 + \varepsilon u_m^1 + \dots)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha 3}(\varepsilon) = & \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial u_\alpha^1}{\partial y_3} + \dots \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon \left( \frac{\partial u_3^1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_3^2}{\partial y_\alpha} \right) + \dots \right\} + \\ & \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon \left[ \frac{\partial u_m^1}{\partial y_3} \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\alpha} \right) + \frac{\partial u_m^2}{\partial y_3} \right] + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma}_{33}(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial y_3} (u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \dots) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_3} (u_m^0 + \varepsilon u_m^1 + \dots) \frac{\partial}{\partial y_3} (u_m^0 + \varepsilon u_m^1 + \dots)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha\beta}^0(\bar{x}, y) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\alpha^1}{\partial y_\beta} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\beta^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\beta^1}{\partial y_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\alpha} \right) \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\beta} \right) \\ \bar{\gamma}_{\alpha\beta}^1(\bar{x}, y) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha^1}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\alpha^2}{\partial y_\beta} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\beta^1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\beta^2}{\partial y_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial u_m^1}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_m^2}{\partial y_\beta} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial u_m^1}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\beta} \right) + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\alpha} \left( \frac{\partial u_m^1}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_m^2}{\partial y_\beta} \right) + \frac{\partial u_m^2}{\partial y_\alpha} \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\beta} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha 3}^0(\bar{x}, y) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_\alpha} \right) \\ \bar{\gamma}_{\alpha 3}^1(\bar{x}, y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^1}{\partial y_3} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_3^2}{\partial y_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_m^1}{\partial y_3} \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_\alpha} \right) \\ \bar{\gamma}_{33}^0(\bar{x}, y) &= 0 \\ \bar{\gamma}_{33}^1(\bar{x}, y) &= \frac{\partial u_3^1}{\partial y_3} \end{aligned} \right.$$

On suppose que les fonctions test  $v, \tau$  admettent le développement :

$$\begin{cases} v = v^0(\bar{x}) + \varepsilon v^1(\bar{x}, y_1, y_2, y_3) + \dots \\ \tau = \tau^0(\bar{x}, y) + \varepsilon \tau^1(\bar{x}, y_1, y_2, y_3) + \dots \end{cases} \quad (3.29)$$

### 3.2. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

#### CHAPITRE 3. FORM DU PROB DANA UN DOM DE RÉFÉ

**Proposition 3.2.1** Soit  $Y = \pi_{i=1}^n a_i, b_i[$  et  $\xi$  une fonction de  $L^p(\Omega \times Y)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Prolongeons  $\xi(x, \cdot)$  par périodicité de  $Y$  à  $\mathbb{R}^n$  tout entier.

Soit  $\xi^\varepsilon = \xi(x, \frac{x}{\varepsilon})$  définie sur  $\Omega$  alors :

$$\xi^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\xi} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \xi(x, y) dy \text{ dans } L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$$

et

$$\xi^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\xi} \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ si } p = +\infty$$

**Preuve.** voir Sanchez Palencia [8] ■

En remplaçant dans l'expression (3.14) les relations (3.25), (3.26) et (3.29) et en égalant les termes du même ordre par rapport à  $\varepsilon$ .

Nous obtenons :

$$(P(\varepsilon)) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_0((\sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \dots), (\tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \dots)) + \varepsilon\mathcal{A}_1((\sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \dots), (\tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \dots)) + \\ \varepsilon^2\mathcal{A}_2((\sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \dots), (\tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \dots)) + \varepsilon^3\mathcal{A}_3((\sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \dots), (\tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \dots)) + \\ \varepsilon^4\mathcal{A}_4((\sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \dots), (\tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \dots)) - \mathcal{E}((\tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \dots), (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots)) - \\ \mathcal{B}((\tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \dots), (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots), (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots)) - \\ \varepsilon^2\mathcal{C}((\tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \dots), (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots), (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots)) = 0 \quad \forall \tau \in H \\ \mathcal{E}((\sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \dots), (v^0 + \varepsilon v^1 + \dots)) + \\ 2\mathcal{B}((\sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \dots), (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots), (v^0 + \varepsilon v^1 + \dots)) + \\ 2\varepsilon^2\mathcal{C}((\sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \dots), (u^0 + \varepsilon u^1 + \dots), (v^0 + \varepsilon v^1 + \dots)) = \mathcal{F}((v^0 + \varepsilon v^1 + \dots)) \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (3.30)$$

A l'ordre  $\varepsilon^0$  on trouve :

$$(P(\varepsilon^0)) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\sigma^0, u^0) \in (H \times V) \\ \forall \tau \in H : \mathcal{A}_0(\sigma^0, \tau^0) - \mathcal{E}(\tau^0, u^0) - \mathcal{B}(\tau^0, u^0, u^0) = 0 \\ \forall v \in V : \mathcal{E}(\sigma^0, v^0) + 2\mathcal{B}(\sigma^0, u^0, v^0) = \mathcal{F}(v^0) \end{array} \right. \quad (3.31)$$

On définit :

$$H_y = \{v \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3) \text{ , Y-périodique en } y_1, y_2 \} .$$

### 3.2. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

#### CHAPITRE 3. FORM DU PROB DANA UN DOM DE RÉFÉ

$V_y = \{v \in W_{loc}^{1,4}(\mathbb{R}^3) \text{ , } Y\text{-périodique en } y_1, y_2 \}$

Nous avons pour l'ordre  $(\varepsilon^0)$  :

$$\begin{cases} \text{trouver } (\sigma^0, u^0) \in (H_y \times V) \\ \int_{\Omega} b_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}^0 \tau_{\alpha\beta}^0 dx - \int_{\Omega} \tau_{ij}^0 e_{ij}^0(u^0) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_{ij}^0 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_3^0}{\partial x_j} dx = 0 \text{ , } \forall \tau^0 \in H. \\ \int_{\Omega} \sigma_{ij}^0 e_{ij}^0(v) dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^0 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_i} \frac{\partial v_3^0}{\partial x_j} dx = \mathcal{F}(v) \text{ , } \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.32)$$

où :

$$\sigma_{ij}^0 = a_{ijkl} \bar{\gamma}_{kl}^0 \quad (3.33)$$

donc :

$$\sigma_{ij}^0 = a_{ij\lambda\mu} \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^0(u) + 2a_{ij\lambda 3} \bar{\gamma}_{\lambda 3}^0(u) \quad (3.34)$$

alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 &= a_{ij\lambda\mu} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\lambda}^0}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial u_{\lambda}^1}{\partial y_{\mu}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\mu}^0}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial u_{\mu}^1}{\partial y_{\lambda}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_{\lambda}} \right) \left( \frac{\partial u_m^0}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial u_m^1}{\partial y_{\mu}} \right) \right] + \\ &2a_{ij\lambda 3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_{\lambda}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}^0(v) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{\alpha}^0}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\alpha}^1}{\partial y_{\beta}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{\beta}^0}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial v_{\beta}^1}{\partial y_{\alpha}} \right) = e_{\alpha\beta}^x(v^0) + e_{\alpha\beta}^y(v^1) \\ e_{\alpha 3}^0(v) &= \frac{1}{2} \frac{\partial v_{\alpha}^0}{\partial y_3} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3^0}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial v_3^1}{\partial y_{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} \partial_{\alpha}^x v_3^0 + \frac{1}{2} \partial_{\alpha}^y v_3^1 \quad \text{car } \frac{\partial v_{\alpha}^0}{\partial y_3} = 0 \\ e_{33}^0(v) &= \frac{\partial v_3^0}{\partial y_3} = 0 \end{aligned}$$

on applique la proposition (2.3.1) à (3.32) :

$$\begin{cases} \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} b_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}^0 \tau_{\alpha\beta}^0 d\bar{x} dy - \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \tau_{ij}^0 e_{ij}^0(u^0) d\bar{x} dy - \frac{1}{2} \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \tau_{ij}^0 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_3^0}{\partial x_j} d\bar{x} dy = 0 \text{ , } \forall \tau^0 \in H. \\ \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \sigma_{ij}^0 e_{ij}^0(v) d\bar{x} dy + \frac{1}{|Y|} \int_{\omega \times Y} \sigma_{ij}^0 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_i} \frac{\partial v_3^0}{\partial x_j} d\bar{x} dy = \mathcal{F}(v) \text{ , } \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.36)$$

Prenons le choix  $v^0 = 0$  dans (3.36) alors :

$$\begin{cases} \int_{\omega \times Y} \left[ b_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}^0 \tau_{\alpha\beta}^0 - [\tau_{\alpha\beta}^0 (e_{\alpha\beta}^x(u^0) + e_{\alpha\beta}^y(u^1)) + \tau_{\alpha 3}^0 (\partial_{\alpha}^x u_3^0 + \partial_{\alpha}^y u_3^1)] - \frac{1}{2} \tau_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial u_3^0}{\partial x_{\beta}} \right] d\bar{x} dy = 0 \text{ , } \\ \forall \tau^0 \in H. \\ \int_{\omega \times Y} [\sigma_{\alpha\beta}^0 e_{\alpha\beta}^y(v^1) + \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_{\alpha}^y v_3^1] d\bar{x} dy = 0 \text{ , } \forall v \in V \quad (\text{Équation microscopique}) \end{cases} \quad (3.37)$$

3.3 L'ÉTUDE DE L'ÉQUATION MICROSCOPIQUE

On prend  $v^1 = \theta(\bar{x})W(y)$ ,  $\theta \in \mathcal{D}(\omega)$ ,  $W \in V_Y$ .

$W = (W_1, W_2, W_3)$  ,  $\bar{x} = (x_1, x_2)$  et  $\theta > 0$

$$\int_{\omega \times Y} [\sigma_{\alpha\beta}^0 e_{\alpha\beta}^y \theta(W) + \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_\alpha^y \theta W_3] d\bar{x} dy = 0 \quad , \forall \theta \in \mathcal{D}(\omega).$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\omega} \left( \int_Y \sigma_{\alpha\beta}^0 e_{\alpha\beta}^y(W) dy \right) \theta d\bar{x} + \int_{\omega} \left( \int_Y \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_\alpha^y W_3 dy \right) \theta d\bar{x} = 0 \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(\omega)$$

$\Rightarrow$

$$\int_Y \sigma_{\alpha\beta}^0 e_{\alpha\beta}^y(W) dy + \int_Y \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_\alpha^y W_3 dy = 0 \quad \forall W \in V_Y$$

$\Rightarrow$

$$\int_Y [a_{\alpha\beta\lambda\mu} \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^0(u) + 2a_{\alpha\beta\lambda 3} \bar{\gamma}_{\lambda 3}^0(u)] e_{\alpha\beta}^y(W) dy + \int_Y [a_{\alpha 3\lambda\mu} \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^0(u) + 2a_{\alpha 3\lambda 3} \bar{\gamma}_{\lambda 3}^0(u)] \partial_\alpha^y W_3 dy = 0$$

$\forall W \in V_Y$

$\Rightarrow$

Le problème local est :

$$(P_{loc}^1) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u^1(x, \cdot) \in V_Y \text{ (en supposant que } u^0 \text{ est connue)} \\ \int_Y [a_{\alpha\beta\lambda\mu} [\bar{\gamma}_{\lambda\mu}^y(u^1) + \frac{1}{2} [\partial_\lambda^x u_m^0 \partial_\mu^y u_m^1 + \partial_\lambda^y u_m^1 \partial_\mu^x u_m^0]] + a_{\alpha\beta\lambda 3} \partial_\lambda^y u_3^1] e_{\alpha\beta}^y(W) dy + \\ \int_Y [a_{\alpha 3\lambda\mu} [\bar{\gamma}_{\lambda\mu}^y(u^1) + \frac{1}{2} [\partial_\lambda^x u_m^0 \partial_\mu^y u_m^1 + \partial_\lambda^y u_m^1 \partial_\mu^x u_m^0]] + a_{\alpha 3\lambda 3} \partial_\lambda^y u_3^1] \partial_\alpha^y W_3 dy = \\ - \int_Y [a_{\alpha\beta\lambda\mu} \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^x(u^0) + a_{\alpha\beta\lambda 3} \partial_\lambda^x u_3^0] e_{\alpha\beta}^y(W) dy - \int_Y [a_{\alpha 3\lambda\mu} \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^x(u^0) + a_{\alpha 3\lambda 3} \partial_\lambda^x u_3^0] \partial_\alpha^y W_3 dy \\ \forall W \in V_Y \\ u^1 \text{ est } Y - \text{périodique} \end{array} \right.$$

On prend  $W = (0, 0, W_3)$  alors le problème locale devient :

$$(P_{loc}^1) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u^1(x, \cdot) \in V_Y \text{ (en supposant que } u^0 \text{ est connue)} \\ \int_Y [a_{\alpha 3\lambda\mu} [\bar{\gamma}_{\lambda\mu}^y(u^1) + \frac{1}{2} [\partial_\lambda^x u_m^0 \partial_\mu^y u_m^1 + \partial_\lambda^y u_m^1 \partial_\mu^x u_m^0]] + a_{\alpha 3\lambda 3} \partial_\lambda^y u_3^1] \partial_\alpha^y W_3 dy + \\ \int_Y [a_{\alpha 3\lambda\mu} \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^x(u^0) + a_{\alpha 3\lambda 3} \partial_\lambda^x u_3^0] \partial_\alpha^y W_3 dy = 0 \\ \forall W_3 \in V_Y \\ u^1 \text{ est } Y - \text{périodique} \end{array} \right.$$

**Remarque 3.3.1** *Le problème  $(P_{loc}^1)$  est un problème non linéaire, il a besoin d'une étude plus approfondie pour résoudre*

### 3.4 L'ÉTUDE DE L'ÉQUATION MACROSCOPIQUE

---

L'équation macroscopique nécessite la connaissance de  $u^1(\bar{x}, y)$ .

Si on prend dans (3.36) le choix  $v^1 = 0$

$$\int_{\omega \times Y} [\sigma_{\alpha\beta}^0 e_{\alpha\beta}^x(v^0) + \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_{\alpha}^x v_3^0] d\bar{x} dy + \int_{\omega \times Y} \sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v_3^0}{\partial x_{\beta}} d\bar{x} dy = F(v^0)$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\omega} [\widetilde{\sigma_{\alpha\beta}^0} e_{\alpha\beta}^x(v^0) + \widetilde{\sigma_{\alpha 3}^0} \partial_{\alpha}^x v_3^0] d\bar{x} + \int_{\omega} \widetilde{\sigma_{\alpha\beta}^0} \frac{\partial u_3^0}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v_3^0}{\partial x_{\beta}} d\bar{x} = F(v^0)$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\omega} \left[ [q_{\alpha\beta\lambda\mu} \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^0(u) + 2q_{\alpha\beta\lambda 3} \bar{\gamma}_{\lambda 3}^0(u)] e_{\alpha\beta}^x(v^0) + [q_{\alpha 3\lambda\mu} \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^0(u) + 2q_{\alpha 3\lambda 3} \bar{\gamma}_{\lambda 3}^0(u)] \partial_{\alpha}^x v_3^0 \right] d\bar{x} +$$

$$\int_{\omega} [q_{\alpha\beta\lambda\mu} \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^0(u) + 2q_{\alpha\beta\lambda 3} \bar{\gamma}_{\lambda 3}^0(u)] \frac{\partial u_3^0}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v_3^0}{\partial x_{\beta}} d\bar{x} = F(v^0)$$

Avec  $q_{ijkl} = \langle a_{ijkl} \rangle$  : les coefficients de comportement homogénéisé

$\Rightarrow$

D'où l'équation homogénéisée :

$$\int_{\omega} \left[ [q_{\alpha\beta\lambda\mu} [\bar{\gamma}_{\lambda\mu}^x(u^0) + \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^y(u^1)] + \frac{1}{2} [\partial_{\lambda}^x u_m^0 \partial_{\mu}^y u_m^1 + \partial_{\lambda}^y u_m^1 \partial_{\mu}^x u_m^0]] + q_{\alpha\beta\lambda 3} [\partial_{\lambda}^x u_3^0 + \partial_{\lambda}^y u_3^1]] e_{\alpha\beta}^x(v^0) + \right.$$

$$\left. [q_{\alpha 3\lambda\mu} [\bar{\gamma}_{\lambda\mu}^x(u^0) + \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^y(u^1)] + \frac{1}{2} [\partial_{\lambda}^x u_m^0 \partial_{\mu}^y u_m^1 + \partial_{\lambda}^y u_m^1 \partial_{\mu}^x u_m^0]] + q_{\alpha 3\lambda 3} [\partial_{\lambda}^x u_3^0 + \partial_{\lambda}^y u_3^1]] \partial_{\alpha}^x v_3^0 \right] d\bar{x} +$$

$$\int_{\omega} \left[ q_{\alpha\beta\lambda\mu} [\bar{\gamma}_{\lambda\mu}^x(u^0) + \bar{\gamma}_{\lambda\mu}^y(u^1)] + \frac{1}{2} [\partial_{\lambda}^x u_m^0 \partial_{\mu}^y u_m^1 + \partial_{\lambda}^y u_m^1 \partial_{\mu}^x u_m^0]] + q_{\alpha\beta\lambda 3} [\partial_{\lambda}^x u_3^0 + \partial_{\lambda}^y u_3^1]] \right] \frac{\partial u_3^0}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v_3^0}{\partial x_{\beta}} d\bar{x} =$$

$$F(v^0)$$

---

# CONCLUSION

---

Dans ce mémoire on a présenté un résultat d'étude sur l'homogénéisation des plaques élastique de von Karman . Cette étude est basée sur développement asymptotique d'un problème 3D vers un problème 2D, et l'application de la méthode d'homogénéisation à double échelle au problème limite. Comme perspective de ce travail on peut posé plusieurs questions reliées au sujet :

- plaques de von Karman.
- plaques hétérogène .

**Résumé :**

On s'intéresse dans ce travail à l'homogénéisation d'une plaque mince, périodiquement hétérogène, non linéairement élastique de type von Karman, considérée comme un milieu 3D. On propose un modèle mathématique pour les plaques hétérogène élastiques type von Karman par une étude asymptotique lorsque l'épaisseur tend vers zéro. La méthode a été appliquée à l'estimation de l'efficacité des modules avec des micro-structures périodiques. Un milieu hétérogène peut être remplacé par un effet homogène, à condition que la période est très petite par rapport à la longueur de l'échelle mondiale. Les modules efficaces sont alors obtenus par l'étude du comportement asymptotique de la moyenne comme la période de l'approche de la micro-structure à zéro.

**Mots clés :** Von Karman, élasticité, développement asymptotique, homogénéisation

**Abstract :**

We are interested in the homogenization of a thin, periodically heterogeneous, nonlinear elastic plate of the von Karman type, considered as a 3D middle. We propose a mathematical model for heterogeneous elastic of von Kármán's type plates by an asymptotic study when the thickness tends to zero. The method was applied to estimate the efficiency of the modules with microstructures périodiques. Un heterogeneous medium may be replaced with a uniform effect, provided that the period is very small compared to the length of the world. Effective modules are then obtained by the study of the asymptotic behavior as the average period of the microstructure approach zero.

**Keywords :** Von Karman, Elasticity, asymptotic development, homogenization.

**ملخص :**

الهدف من هذا العمل هو تطبيق طريقة التجانس على لوحات دورية من نوع فون كرممان، متباينة وغير متجانسة، التي سمكها ثابت وغير متناظر في مرونة ثلاثية الأبعاد غير خطية. نحن نقدم طريقة دراسة مقارب عندما يميل السمك إلى الصفر تم تطبيق طريقة لتقدير كفاءة الوحدات مع المجهرية الدورية، حيث أن الأوساط الغير متجانسة يمكن إستبدالها بأخرى متجانسة شريطة أن يكون الدور صغير هذا الأسلوب الجديد يبدو أسهل وأسرع من الطريقة التقليدية.

**كلمات مفتاحية:**

فون كرممان، مرونة، النشر المقارب، التجانس



---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Djamel Ahmed Chacha : Asymptotic analysis of nonlinear elastic plates .2002
- [2] D. Caillerie : Thin elastic and periodic plates. Meth. in the Appl. Sci. 6 (1984) 159-191.
- [3] G.Duvaut : Homogénéisation des plaques à structure périodique en théorie non linéaire de Von Karman. Laboratoire de mécanique théorique. Université Paris VI. Tour 66. 4 Place Jussieu. 75 230 Paris Cedex 05.
- [4] Philippe G. Ciarlet Patrick Rabier : Les équation de Von Karman. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York 1980.
- [5] Philippe G. Ciarlet : Mathematical elasticity VOLUME II : Theory of plates.
- [6] Philippe. Bénilan. Jacques.Robert : Lecture Notes in Mathematics : Journées d'Analyse Non Linéaire : Proceedings, Besançon, France, June 1977
- [7] P.G. Ciarlet, P. Destuynder, A justification of a nonlinear model in plate theory, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 17/18 (1979) 227-258.
- [8] Sanchez-Palencia,E. :Non -homogeneous media and vibration theory.Berlin :Springer 1980.
- [9] Georges Duvaut :Mécanique des milieux continus .Dunod, Paris, 1998