UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : Noghag Amel

Théme

Étude d'une équation hypoerbolique quasi linéaire en n dimensions et application numérique

Soutenu publiquement le : 31/05/2017

Devant le jury composé de :

Dr. ASILA . Mustafa	M. C. B. UKMO université-Ouargla	Président
Dr. GUERFI . Amara	M. C.A UKMO université-Ouargla	Examinateur
Dr. SAID . Mohamed .Said	M.C. A. UKMO université-Ouargla	Rapporteur

Dédication

Je dédie ce travail à :

Mes parents

-A mes frères

et mes soeurs,et toute la famille NOGHAG

- A mes chers amis

- Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.

-Et tous mes professeurs

Finalement à tous ceux qui m'ont aidée de proche ou de loin

Remerciements

Mes remerciements vont premiérement Allah le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donneé pour acherer mon travail de recherche.

Je tiens exprimer ma profonde gratitude, mes sincéres et chaleureux remerciements mon encadreur **Docteur : SAID MEM SAID**, pour confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadere ce travail et pour ses multiples consils.

je remercie également tous mes enseignants du département de mathématiques à l'université de Ouargla.

je remercie également tous les membres de jury, **Docteur : ACILA Mustafa**, d'avoir accepté la présidence du jury, et **Docteur : GUERFI Amara**, d'avoir accepté l'examinateur de ce travail.

Enfin, je me permets égamement de remercier mes parents et tout ma famille qui a supporté toutes les diffcultées pour me soutemir tout au long de mes études.

Table des matières

Notations et conventions

- $\mathbb{N}$: corps des naturels .
- $\mathbb{R}$: corps des réels .
- $[0, T]$: l'intervalle fermé $0 \leqslant t \leqslant T$.
- Ω : un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Γ : la frontière topologique de Ω .
- $Q = [0, T] \times \Omega$; T est fini.
- Σ : la frontière laterele de $\Omega \times]0, T[$.
- $x = (x_1, ..., x_n)$: point générique de $\mathbb{R}^n$
- $\|.\|$ la norme associée aux produits scalaires .
- $D(\Omega)$: désigne l'espace des fonctions de classe c^∞ à support compact dans Ω .
- $D'(\Omega)$: l'espace des distributions sur Ω
- $L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} mesurable; sup|u(t)| < +\infty$.

- $L^2(\Omega)$: l'espace des fonctions carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dx .

- L^p : l'espace des fonctions de puissance $p - ime$ intégrable pour la mesure de Lebesgue dx.

- $p.p$ presque partout.

- $H^1(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre 1 .

- $H^2(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre 2 .

- $\|x\|$: la norme de x .

- E' : le dual topologique de E .

- $\langle , \rangle_{E' \times E}$: le crochet de dualité entre l'espace E et son dual topologique .

- $W^{1,p}$: l'espace de Sobolev , $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

- $W^{1,2} = H^1(\Omega)$: espace de Sobolev .

- $\sigma(E, E')$: la topologie faible définie sur E .

- $\sigma(E', E)$: la topologie faible* définie sur E' .

- $L^p(0, T, X) = \{f : (0, T) \rightarrow x; mesurable : \int_0^T \|f\|_x^p < \infty\}$.

- $L^\infty(0, T, X) = \{f : (0, T) \longrightarrow X; \text{mesurable} : esssup\|f\|_X < \infty\}$

- $C([0, T], X) = \{f \longrightarrow X; \text{continue}\}$

► $\mathfrak{D}'(0,T,X)$:l'espace de distribution vectoriles à valeurs dans X.

Introduction

Dans notre travail on va étudier l'existenceet l'unicité de la solution du problème de réaction diffusion quasi lineaire en deux dimension .
Nous allons consider deux cas :
Cas stationnaire

$$(P_1)\begin{cases} -u''(x)+\frac{1}{x}u'(x)+F(u)=0 \text{ dans } \Omega \\ u(x)=0 \text{ sur } \Gamma \qquad\qquad (\text{condition aux limite}) \\ u(x_0)=0 \quad u'(x_0)=u_1 \quad x\in\Omega \quad (\text{condition initialle}) \end{cases} \tag{0.1}$$

Où

$$F(u)=\begin{cases} u-\dfrac{u}{\sqrt{|u|}}=u-u|u|^{-\frac{1}{2}} \quad \text{si} \quad u_m\neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad u=0 \end{cases}$$

Cas d'evolution

$$(P_2)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=-u|u|^{-\frac{1}{2}}+f \text{ dans } Q \\ u=0 \text{ sur } \sum=\Gamma\times]0,T[\qquad\qquad (\text{condition aux limite}) \\ u(x,0)=u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,0)=u_1(x) \quad x\in\Omega \quad (\text{condition initialle}) \end{cases} \tag{0.2}$$

Cés probléme sont deja étudié par **J.Lions**[7].
Et ceci par la méthode de compacité, cette méthode est datée des années 30 et des travaux de J.Leray sur les équations de Navier Stockes.
Elle a été appliqué depuis de façon systèmatique à grand nombre des équations dipersives ou dissipatives.

Cette méthode est basée sur les étapes suivantes :

1. On construit des solutions approchées par réduction à la dimenssion finie par la méthode de Galarkin (cas stationnaire) ou de Faedo Galarkin (cas d'evolution).
2. On établi une estimation à priori pour la solution approchée qui nous l'existence globale.
3. Enfin, on passe à la limite sur la dimension grâce au lemme de compacité.

Ce mémoire contient un itroduction et 4 chapitres.

On donne dans **le premier chapitre**, quelques notions et définitions utiles concernant :

1. La topologie faible et faible étoile.
2. La séparabilité et la réflexivité des espaces.
3. Quelques inégalités auxilliaires.

Et en plus dans ce chapitre on s'intéresse à exposer les outils de travail , l'espace de travail, la méthode de compacité .

Dans **le deusiéme chapitre**, nous proposons d'étudier l'existence et l'unicité de la solution dans le cas stationnaire .

Nous allons d'abord montrer l'unicité par une méthode classique **(Lemme de Gronwall)** .

Dans **le troisième chapitre**, de la même maimére de chapitre 3, nous proposons d'étudier l'existence et l'unicité de la solution dans le cas d'evolution et nous montrons l'unicité par une méthode classique **(Lemme de Gronwall)** .

enfin,elle facilitent l'usage dés chémas numériques (élément finis, differnce fini,.....) pour chaque sous probleme, pour valider notre travail on fera une application numerique on utiluse la methode Newten Raphson et la méthode déffrences finis et noue avons estime l'erreur du dernier chapitre.

Chapitre 1

Préliminaires

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle utilisés dans le travail

On rappellera ci-dessous les principaux résultats d'analyse fonctionnelle, dont nous aurons besoin dans toute la suite.

1.1 Espace de Banach-Espace dual

Un espace vectoriel normé E appelé espace de Banach s'il est complet pour sa norme .

le dual topologique de E noté par E' est l'espace des formes linéaires continues sur E .ie :

$$f \in E' \Leftrightarrow f : E \to \mathbb{R},$$

linéaire et

$$\exists c > 0, |\langle f, x \rangle| \leqslant c\|x\|_E . \forall x \in E$$

on muni l'espace dual E' de la norme suivante :

$$\|f\|_{E'} = \underset{\|x\| \leqslant 1}{sup} \langle f, x \rangle.$$

Avec cette norme E' est un espace de Banach .

1.2 Topologie faible et la topologie faible*

1.2.1 Topologie faible

Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique , et soit $f \in E'$.
On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$, l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$.
Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *La topologie faible sur E qui notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Définition 1.2.2 ***(La convergence faible)***
La Suite (x_n) tend vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si :
$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ pour toute $f \in E'$.

Proposition 1.2.3 *Soit (x_n) uns suite de E.On a*
$x_n \longrightarrow x$ si seulement si $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ pour tout $f \in E'$
(i) Si $x_n \longrightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$.
(ii) $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf \|x_n\|$.
(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ et $f_n \longrightarrow f$ fortement dans E'.
Alors $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

Preuve. la démonstration se trouve dans [2] . ■

Théorème 1.2.4 *[11] Soit E un espace de Banach réflexif et soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraite $\{x_{nk}\}$ qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

1.2.2 Topologie faible*

On va définir maintenant une autre topologie sur E' : la topologie faible* que l'on note $\sigma(E', E)$.
Pour chaque $x \in E$ on considère l'application :

$$\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$$

définie par

$$f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle.$$

Lorsque x parcourt E on obtient une famille d'application $(\varphi_x)_{x\in E}$.

Définition 1.2.5 *La topologie faible* désignée aussi par $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$.*

Proposition 1.2.6 *Soit f_n une suit de E''. On a*

(i) $[f_n \rightharpoonup^* f \quad pour \quad \sigma(E', E)] \quad \Leftrightarrow [\prec f_n, x \succ \longrightarrow \prec f, x \succ \quad \forall x \in E].$

(ii) Si $f_n \longrightarrow f$ *fortement alors* $f_n \rightharpoonup^* f$ *pour* $\sigma(E', E)$.

(iii) $f_n \rightharpoonup^* f$ *pour* $\sigma(E', E)$, *alors* $\|f_n\|$ *est bornne et*$\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

(vi) Si $f_n \rightharpoonup^* f$ *pour* $\sigma(E', E)$*et si* $x_n \longrightarrow x$.

Preuve. la démonstration se trouve dans [2] . ■

1.3 Espaces réflexifs- espaces séparables

1.3.1 Espaces réflexifs

Définition 1.3.1 *On dit que E est réflexif si cette isometrie est bijective, c'est à dire $E = E''$.*

Remarque 1 *Si E est un espace réflexif alors E est un espace de Banach.*

Proposition 1.3.2 *Soit E un espace de Banach E' on dual et E'' son bidual on pose :*

$$J : E \to E''$$

$$x \longmapsto J_x$$

E définie par :

$$\forall f \in E' \quad J_x(f) = f(x).$$

C'est une isométrie ($\|J_x\| = \|x\|$) qui injecte E dans son bidual.

Preuve. la démonstration de cette proposition se trouve dans **M.SAMUELIDES, L. TOU-ZILLIER [10]** (page 169) ■

Théorème 1.3.3 *[11] Si E est un espace de Banach alors :*

$$E \quad \textit{réflexif} \Leftrightarrow E' \textit{est réflexif} \quad .$$

1.3.2 Espaces séparables

Définition 1.3.4 *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble D dense et dénombrable.*

Théorème 1.3.5 *Soit E un espace de Banach séparable, alors toute suite bornée$(f_n)_{n\geqslant 0}$ dans E' admet au moins une sous-suite faiblement* convergente.*

Preuve. la démonstration de ce théoréme se trouve dans [11] ; (corollaire III.26, page 50). ■

Théorème 1.3.6 *[8] Soit E un espace de Banach , si E' est séparable alors E l'est aussi. la réciproque est en général fausse .*

Corollaire 1.3.7 *[10] Soit E un espace de Banach alors :*
E est réflexif et séparable si et seulement si E' est réflexif et séparable .

Proposition 1.3.8 *Soient E et F des espaces normés séparables et G un sous-espace de E, alors :*

(i) L'espace $E \times F$ est séparable .
(ii) L'espace G est séparable .

Preuve. la démonstration se trouve dans [8] . ■

1.4 La compacité faible

Définition 1.4.1 *On dit que un ensemble M d'un espace de Banach E est faiblement compact si toute suitede ses èlèments on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans E.*

Proposition 1.4.2

1. *Tout ensemble faiblement compact est borné.*

2. *Tout ensemble borné dans un espace de Banach réflexif est faiblement compact.*

3. *E est espace de Banach séparable, pour un ensemble $M \subset E$" soit compact il suffit que M soit borné.*

Théorème 1.4.3 ***(Riesz)***
Soit E un espace vectoriel normé,alors la boule unité fermée B_E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.

Théorème 1.4.4 *[11]* ***(Banach-Alaoglu-Bouebaki)***
L'enesemble $B_{E'} = f \in E''; \|f\| \leq 1$
est compact pour la topologie faible $\sigma(E', E)$.*
*De plus si E est séparable alors : la boule unité B_E sequentiellement compacte pour la topologie faible *.i.e :pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornée de E' on peut extraire une sous suite $(u_{nk})_{k\in\mathbb{N}*}$qui converge pour la topologie faible*$\sigma(E', E)$.*
Ce théorème permet à deduire la caractrisation des espaces normés réflexifs (égaux a leurs biduales) un tel espace est necessairement un espace de Banach.

Proposition 1.4.5 *la topologie faible* $\sigma(E', E)$ est separée .*

Corollaire 1.4.6 *[3] Soit E un espace de Banach séparable et soit f_n une suite bornée dans E'. Alors il existe une sous-suite extraite f_{nk} qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$*

1.5 Rappels sur les espaces $L^p(\Omega)$

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. les fonctions f seront considérées de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.5.1 *On pose* $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ *mesurable et* $\exists$ *une constante* c *telle que* $|f(x)| \leqslant c$ *p.p.sur* $\Omega.\}$
on vérifiera ultérieurement que $\|\|_{L^\infty}$ *est une norme.*

Théorème 1.5.2 *L'espace* $L^p(\Omega)$ *est réflexive si* $1 < p < \infty$ *.*

Lemme 1.5.3 *Les espaces ,* $L^1(\Omega)$ *;* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et* $C([0,1])$ *ne sont pas réflexive.*

Preuve. la démonstration se trouve dans [15] .p.17 ■

Théorème 1.5.4 *Chaque sous-espace fermé d'un espace de Banach réflexive est réflexive.*

Preuve. la démonstration se trouve dans [11].p.18 ■

Théorème 1.5.5 $D(\Omega)$ *est dense dans* $L^P(\Omega)$ *pour* $1 \leq P \leq \infty$ *c'est dire :*

$$\overline{D(\Omega)} = L^P(\Omega). \quad \forall P, 1 \leq P \leq \infty$$

Proposition 1.5.6 *Soit* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *; on désigne par* p' *l'exposant conjugué de* p *i.e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

1- L'espace $L^p(\Omega)$ *est séparable pour* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

2- L'espace $L^\infty(\Omega)$ *est réflexivf pour* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

3- L'espace $L^\infty(\Omega)$ *ni réflexif, ni séparable et son dual contient strictement dans* $L^1(\Omega)$.

4- Pour mes$(\Omega) < \infty$, et $1 \leqslant p \leqslant \infty$ on a :

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

on peut dire que :

$$L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

1.5.1 La convergence faible dans L^p

Définition 1.5.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $n \geq 2$ on suppose que : $1 \leqslant p < \infty$ et p' est la conjugué de p i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*
$u \subset L^p(\Omega)$converge faiblement vers $u \in L^p(\Omega)$ si

$$\int_\Omega u_n v dx \longrightarrow \int_\Omega uv dx \quad \forall v \in L^{p'}(\Omega)$$

Remarque 2 *Pour $p = 1$, la suit (u_n) converge faible* vers $u \in L^\infty$ et écrit*

$$u_n \longrightarrow u faible* \ dans \ L^\infty(\Omega)$$

$$Si \int_\Omega u_n v dx \longrightarrow \int_\Omega uv dx \quad \forall v \in L^1(\Omega)$$

Théorème 1.5.8 ***(Convergence dominée de Lebésgue)***
Soit $1 \leq p < +\infty$ et soit f_n une suite des fonctions de L^p. Si la suit f_n vérifie

(i) $f_n \longrightarrow f - p.p$ dans$L^p(\Omega)$

(ii) il existe $g \in L^p$ telle que pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p dansΩ. Alors $f_n \longrightarrow f$dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.5.9 *Soit (f_n) une suite des fonctions de L^p qui converge presque partout vers une fonction f. Si $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p et si $g_n \longrightarrow g$ dans $L^p(\Omega)$ fort, alors $f_n \longrightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$ fort pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Remarque 3 *Le théorème ci-dessus est une généralisation du théorème de convregence dominée de Lebesgue.*

Théorème 1.5.10 *Pour $1 < p < \infty$, les espaces $L^p(\omega)$ sont réflexifs et separables, de plus l'application :*

$$g \in L^{p'}(\Omega, E') \longrightarrow T_g \in (L^p(\Omega, E))'$$

lel que :

$$\langle T_g, f\rangle_{E',E} = \int_\omega \langle g, f\rangle_{E',E} dx$$

est un isomorfisme.

Théorème 1.5.11 *(Represantation de Rise)*
Pour $1 \leqslant p < \infty$, soit $\phi \in (L^p)'$, alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que :

$$\langle \phi, f\rangle = \int uf \quad \forall f \in L^p$$

de plus on a : $\|f\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|f\|'_{L^p(\Omega)}$ où p' est la conjugué de p.
Ce théoréme permet d'indentifier le dual de L^p à $L^{p'}$

1.6 Inégalités auxiliaires :

1.6.1 Inégalité de Hölder :

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
Alors $f.g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$$

1.6.2 Inégalité généraliséede Hölder :

soient $f_1, f_2, ..., f_n$, des fonctions tel que

$$f_i \in L^P(\Omega),\ i = 1, ..., n \text{ avec } \frac{1}{P} = \frac{1}{P_1} + ... + \frac{1}{P_n} \leq 1$$

Alors le produit : $f_1, f_2, ..., f_n$, apparrient à $L^{P_i}(\Omega)$ et :

$$\|u\|_{L^P(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} ... \|f_1\|_{L^{p_n}(\Omega)}$$

1.6.3 Inégalités de Cauchy-Schwarz :

Pour $p = q = 2$ l'inégalité de Hölder n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz
.

$$\int_{\Omega} |f.g| \leqslant \|f\|_{L^2}.\|g\|_{L^2}.$$

1.6.4 Inégalité de Young :

Soit a, b deux réels positifs et $p > 1,\ p' < \infty$.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

ou $\frac{1}{p} + \frac{1'}{p} = 1$, de plus l'inégalité standard :

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{b^2}{2\varepsilon}.$$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$.

1.6.5 Inégalité de Poincaré

Pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ou $1 \leq p < \infty$ il existe une constant C tel que :

$$\|u\|_{L^P(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^P(\Omega)}.$$

Cas barticulier :
Pour $p = 2$ on obtient :

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx u \in H_0^1(\Omega)$$

Remarque 4 *L'inégalité de Poincaré sera fausse si* $u \in H^1(\Omega)$

Lemme 1.6.1 ***(lemme de Gronwall)*** *Soit $f \in L^1([0,T])$ une fonction positive ,g, h sont deux fonctions continuées et positives sur $[0,T]$ si h satisfait :*

$$h(t) \leqslant g(t) + \int_0^t f(\sigma).h(\sigma)d\sigma. \quad \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$h(t) \leqslant g(t).e^{\int_0^T f(\sigma)d\sigma}.$$

Remarque 5 *Si pour tout $t \in]0,T[$, et si :*

$$h^2(t) = C^2 + \int_0^t f(\sigma).h(\sigma)d\sigma$$

$$h(t) = C + \frac{1}{2}\int_0^t f(\sigma)d\sigma.$$

Théorème 1.6.2 *[3]* ***(Dunford-pettis)***
soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert borné, $\mathfrak{F} \subset L^1(\Omega)$ un sous-ensemble borné. Alors $\mathfrak{F}$ est relativment compacte pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si l'on a :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad \textit{telque} :$$

$$\int_A |f| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathfrak{F} \quad \textit{et} \quad \forall A \subset \Omega \quad \textit{avec} \quad |A| < \delta$$

Proposition 1.6.3 *Toute partie $E \subseteq L^1(\Omega)$ continue dans $L^\infty(\Omega)$ et borné dans $L^\infty(\Omega)$ et équi-intégrable.*

Lemme 1.6.4 *Soient X et Y deux espaces de Banache leurs dual X', Y' successivement avec Y' s'injecte continuement dans X', X' est dense dans X'.*
Si $v \hookrightarrow Y$ et la suite $\{v_j\} \subset X$ et bornée dans X converge faible dans Y vers $v \in Y$, alors :*
$v \in X$ et $\{v_j\}$ converge faible dans X.*

1.7 Espace de Sobolev

1.7.1 Espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.7.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est définie par :*

$$H^1(\Omega)\{v \in L^2(\Omega), \quad \forall i \in \{1,2,...,n\} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

ou $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v ,ie :

$$\int_\Omega v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega w_i \phi(x) dx$$

ou chaque w_i est appelés la i-iéme dérivéé partielle faible de v et notée par $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$. muni de la norme :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = |v|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 \tag{1.1}$$

et du produit scalaire :

$$(u,v)_{H^1} = \sum_{|\alpha| \leq 1} (D^\alpha u, D^\alpha)_{L^2}$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Remarque 6 *En physique ou en mécanique l'espace de Sobolav est souvent appelé espace de l'energie au sens où il est constité des fonctions d'energie fini (c'est a dire de la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ est finie). Les fonctions de l'energie finis peuvent eventiellement être "singuliéres" ce que a un sens physique possible.*

1.7.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.7.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$.*
On note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérance de $D(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$ c'est à dire
$\overline{D(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$
$H_0^1(\Omega)$ est un sous espace vectoriel norme, fermé de $H^1(\Omega)$ muni de norme (1.1)

1.7.3 Les espaces $H^m(\Omega)$(m entier)

Soit maintenant m un entier $m > 1$.
L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ d'ordre m sur Ω est défini par

$$H^m(\Omega)\{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq m\}$$

où : $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}....\partial x_n^{\alpha_n}}$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ $H^m(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.7.4 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $1 \leq p \leq \infty$.
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \;\; \forall i = 1, 2, ..., n \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ designe la dérivée au sens de distribution.

On pose

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$$

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \;\; \forall i = 1, 2, ..., n\}$$

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

On note aussi $W^{1,p}$

l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}$$

ou bien de la norme équivalente :

$$\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.7.5 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soint $m \geq 2$ un entier, et soit p un réel $1 < p < \infty$. L'espace de sobolev $W^{m,p}(\omega)$ est défini par :

$$W^{m,p}(\omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec} |\alpha| \leq m\}$$

L'espace $W^{m,p}(\omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Banach.

ou $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots . \partial x_n^{\alpha_n}}$ designe le dérivée d'ordre au sens de distribution avec

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$$

on pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

$H^m(\Omega)$ muni de le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_L^2$$

est un espace de Hilbert.

Injections Compactes

Définition 1.7.3 *B_1 et B_2 deux espaces de Banach .*
on dit que B_1 s'injecte d'une façon compacte dans B_2 et on note : $B_1 \underset{c}{\hookrightarrow} B_2$.
$B_1 \hookrightarrow B_2$ d'une façon continue et tout borné de B_1 est relativement compacte dans B_2.

Théorème 1.7.4 *[8] $l, m \in \mathbb{N}$ $\quad$, $0 \leqslant l < m$ $\quad$,$1 \leqslant p < \infty$.*
Les injections suivantes sont compactes :

- $\omega^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} \omega^{l,q}(\Omega)$, $\quad$ *si* $(m-l)p = n$ *et* $1 \leqslant q < \infty$.

- $\omega^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} C^l_B(\Omega)$, *si* $(m-l)p > n$.

- $\omega^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} C^l(\bar{\Omega})$, *si* $(m-l)p > n$.

- $\omega^{m,p}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} C^{l\lambda}(\bar{\Omega})$, *si* $(m-l)p > n \geqslant (m-l-1)p$. *et* $0 < \lambda < m-l-\frac{n}{p}$.

1.7.6 Espace dual

On note l'espace daul du l'espace $W^{1.p(\Omega)}$ l'espace $W^{-1.p'}(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.
Pour $p = 2$: ON définit l'espace daul du l'espace daul topologique du H^1_0 comme suit :

$$H^{-1}(\Omega)\{f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \ \text{ telque } \ f_i \in L^2(\Omega)\}$$

$$D(\omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega) \subset D'(\omega)$$

$H^{-1}(\Omega)$ est espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 1} \frac{f(u)}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \quad u \neq 0$$

$L^2(\Omega)$ est appelé l'espace **"pivot"** des ses dualités.

Proposition 1.7.5 *soit* $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$, *il existe* $f_0, f_0, ..., f_0 \in L^{p'}(\Omega)$*telque :*

$$F(u) = \int_\Omega f_0 u + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall u \in W^{-1,p'}(\Omega)$$

En plus si Ω *est bornée on peut prendre* $f_0 = 0$.

1.7.7 Théorème de Rellich-Kondrachov

Théorème 1.7.6 *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné et de classe* $C^1(\Omega)$, *alors* $W^{1,p}(\Omega)$ *s'injecte compactement dans* $L^p(\Omega)$ *: de toute sous suite borné de* $W^{1,p}(\Omega)$, *on peut extraire une sous suite qui converge fortement dans* $L^p(\Omega)$ *et faiblement dans* $W^{1,p}_0(\Omega)$ *. La convergence faible de la sous suite vient bien sûr de la réflexivité de* $W^{1,p}_0(\Omega)$.
En particulier, on a toujours :

$$H^m_0(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}_0(\Omega) \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \textit{alors on en déduit :}$$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow H^0(\Omega) = L^2(\Omega).$$

1.8 fonction à valeurs dans un espace de Banach

1.8.1 L'espace$L^2(0,T,X)$

$L^2(0,T,X)$ est l'espace des fonctoins de $]0,T[$ dans X telles que :
la fonction $t \mapsto \|v(t)\|_x$ soit mesurable et de carré intégrable,c'est à dire que :

$$\|v\|_{L^2(0,T,X)} = (\int_0^T)\|v(t)\|_x^2 dt)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

muni de cette norme l'espace $L^2(0,T,X)$ est un espace de Banach,de plus si X est un espace de Hilbert alors $L^2(0,T,X)$ est espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_X dt$$

Lemme 1.8.1 *Soit l'espace W qui définit comme suit :*

$$W = \{u \in L^2(0,T,X), \frac{du}{dt} \in L^2(0,T,X')\}$$

et

$$\|u\|_W^2 = \int_0^T (\|v\|^2 + \|\frac{du}{dt}\|^2)dt$$

Alors :

1. *W est un espace de Hilbert*
2. *$D(0,T,X)$ est dense dans x*
3. *$W \subset C([0,T],X)$*
4. *Si $u, v \in W$ alors*

$$\int_s^t (u(\sigma), \frac{dv}{dt}(\sigma)) + (\frac{du}{dt}(\sigma, v(\sigma)))d\sigma = (u(t), v(t)) - (u(s), v(s)).$$

En particulier si $u = v$ alors

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2(\frac{du(t)}{dt}, u(t)) \in L^1(0,T).$$

1.8.2 L'espace $L^p(0,T,X)$

Soit X un espace de Banach et$T > 0$, on définit l'espace $L^p(0,T,X)$ comme suit :

$$L^p(0,T,X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X \text{ mesurable.} (\int_0^T \|v(t)\|_x^p dt)^{\frac{1}{p}} \sup ess\|u(t)\|_X < \infty\}$$

et $\|u\|_x \in L^\infty(0,T,X)$.
muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup ess\|u(t)\|_X$$

1.8.3 Propriétés sur l'espace $L^\infty(0,T,X)$

— Pour $1 \leq p < \infty$,et séparable, alors $L^\infty(0,T,X)$ est un espace de Banach séparable.

— Si $1 < p < \infty$ et X réfleif alors $\|u\|_{L^\infty}(0,T,X)$

— Pour $1 \leq p < \infty$ le dual topologique du l'espace $L^\infty(0,T,X)$ s'identefie avec l'espace $L^{p'}(0,T,X')$ ou p' est le cnjugué de p.

— la dualité entre $L^{p'}(0,T,X')$ et $L^\infty(0,T,X)$ s'écrit :

$$\langle f, g \rangle_{L^{p'}(0,T,X'),L^p(0,T,X)} = \int_\Omega \langle f(t), g(t) \rangle_{X,X'} dt$$

$$f \in L^{p'}(0,T,X') \text{ et } g \in L^p(0,T,X)$$

Si $u \in L^p(0,T,X)$ est
le lui correspondant une distribution sur $]0,T[$ à valeurs dans X par :

$$u(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt \in D(0,T,X).$$

1.8.4 $D(0,T,X)$

Définition 1.8.2 *Siot X un espace de Banach l'espace $D(0,T,X)$est l'espace des distibutions vectotielles à valeurs dans X.*

$$D'(0,T,X) = \mathfrak{L}D(]0,T[,X))$$

Si $u \in D'(0,T,X)$ *on définit sa derivée d'ordre* m *au sens de distribution :* $\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}$ *par :*

$$\langle \frac{\partial^m u}{\partial t^m}, \varphi \rangle = (-1)^m \langle u, \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \rangle \forall \varphi \in D(]0,T[,X).$$

En particulier si $u \in D'(0,T,X)$ *sa derivée distribution est définie par :*

$$\frac{\partial}{\partial t}(t) = -u(\frac{\partial \varphi}{\partial t}) \ \forall \in D(]0,T[,X).$$

Lemme 1.8.3 *Si* $f \in L^p(0,T,X)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T,X)$ *tel que* $1 \leq p \leq \infty$, *alore :* f *et aprés modification eventielle sur un ensemble de mesure nulle de* $]0,T[$ *continue de* $]0,T[\longrightarrow X$.

Lemme 1.8.4 *Soit* X *un espace de Banach réflexif et* H *un espace de Hilbert tel que :* X *s'injecte continuement dans* H *on donne* $f \in L^p(0,T,X)$ *telle que* $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^{p'}(0,T,X')$ *où* X' *est le dual de* X, *et* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *alors :* f *et après modification eventielle sur un ensemble de mesure nulle de* $]0,T[$ *continue de* $]0,T[\longrightarrow H$.

Lemme 1.8.5 *soit* X *un espace de Banach et* X' *son dual tel que* $1 < p \leq \infty$

$$\begin{cases} u_m \longrightarrow u \textit{ faible* dans } L^p([0,T],X) \\ \\ u'_m \longrightarrow u' \textit{ faible* dans } L^p([0,T],X) \end{cases}$$

alors :

$$u_m(0) \longrightarrow u_0 \textit{ faible* dans } X.$$

1.8.5 l' espace $H^1(Q)$

Définition 1.8.6 *Soient* Ω *un ouvert de et* T *un réel strictement positif, on note* Q *le cylindre définie par* $Q =]0,T[\times\Omega$*,on définit l'espace :*

$$H^1(Q) = \{u \in L^2(Q); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)\}$$

muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(Q)} = \|u\|^2_{L^2(Q)} + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{L^2(Q)}.$$

1.8.6 Lemme de compacité

Théorème 1.8.7 *L'injection $H^1(Q)$ est compacte*
le résultat de compacité général dans l'espace des fonctions à valeurs vectorielles est donné
par l'equelibre théoréme de Lions-Aubin-Simon.

Théorème 1.8.8 *(Lions-Aubin-Simon)*
Soient B_0, B, B_1 trois espaces de Banach où B_0, B_1 sont réflexifs avec $B_0 \subset B \subset B_1$ on pose :que l'injection $B_0 \hookrightarrow B$ est compacte et celle $B \hookrightarrow B_1$. Soit $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$ on définit l'espace :

$$W = \{u \in L^p(0,T,B_0) telqueu' \in L^q(0,T,B_1)\}$$

W est un espace de Banach réflexif pout la norme :

$$\|u\|_W = \|u\|^2_{L^p(0,T,B_0)} + \|u'\|^2_{L^(0,T,B_1)}$$

et l'injection $W \hookrightarrow L^p(0,T,B_0)$ est compate.

Théorème 1.8.9 *Sous les hypothèses du théorème précédent on :*

$$\forall \eta > 0, \quad \textit{il existe} \quad C_\eta \ \textit{tel que}$$

$$\|u\|_B = \|u\|^2_{B_0} + \|u'\|^2_{B_1}$$

Lemme 1.8.10 *Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, les fonctions g_u et g de $L^q(O)$, $1 < q < \infty$ telles que :*

$$\|g\|_{L^q(O)} \leq C \quad g_u \longrightarrow g \quad p.p \quad \textit{dans } O$$

Alors

$$g_u \longrightarrow g \quad \textit{dans} \quad L^q(O) \quad \textit{faible.}$$

1.8.7 méthode de Galerkin et méthode de Faedo-Galerkin

Le principe des cés méthodes sont basé sur l'idée de remplacer l'espace séparable infinie V par un autre V_m finie, le problème approchée est posé sur Vmou nous se ramene a la simple solution d'unsystème d'équations differentielles ordinaires non linéaire, par ailleur on peut chisir la mode de construction de V_m de manière à ce que le sous-espace Vm soit une bonne approximation de V et que la solution um dans V_m du problème est approchée à la solution exacte u dans V .
Cette méthode n'a pas d'intérét numérique en général elle est trèe utile d'un point de vue théorique,notamment pour l'étude des problèmes non linéaires.

Remarque 7 *méthode de Galerkin en l'absence de temps, mais dans la méthode de Faedo-Galerkin l'existence du temps.*

Chapitre 2

MÉTHODE DE COMPACITE DANS LE CAS STATIONNAIRE

2.1 Position du problème

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et sa frontière (assez régulière)., et par Γ la frontière latérale, on résout le problème :

$$(P_1)\begin{cases} (2.1) \quad -u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) = u(x) - u(x)|u(x)|^{-\frac{1}{2}} \text{ dans } \Omega \\ (2.2) \quad u(x) = 0 \text{ sur } \Gamma \\ (2.3) \quad u(x_0) = 0 \quad u'(x_0) = u_1 \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq x_0 \geq 1\}$.
Nous désignons par (f, g) Le produit scalaire des fonctions f et g dans $L^2(\Omega)$.
i.e

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Nous posons :$|f|^2 = \int_\Omega (f(x))^2 dx$.
Notre problème est : trouvez la fonction u, telle que :

$$u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{2}{3}}(\Omega) \tag{2.2}$$

et

$$\frac{du}{dx} \in L^\infty(\Omega) \cap L^2 \tag{2.3}$$

Solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + F(u) = 0 \tag{2.4}$$

$$u(x_0) = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{du}{dx} = u_1 \neq 0 \tag{2.6}$$

où

$$F(u) = \begin{cases} u - \dfrac{u}{\sqrt{|u|}} = u - u|u|^{-\frac{1}{2}} \quad \text{si} \quad u \neq 0 \\ \\ 0 \quad \text{si} \quad u = 0 \end{cases}$$

Nous vérifions que la fonction F est continue dans Ω.
Nous vérifions facilement que : Pour toutes les fonctions u et u, v telle que : $u.v > 0$, Et couché dans $[-\lambda, 0[\cup]0, \lambda]$: Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|F(u) - F(v)| \leq \frac{C}{\sqrt{\min(|u|, |v|)}}|u - v| \tag{2.7}$$

Le problème (2.4) (2.5), (2.6) est formulé comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{du}{dx} = -u + \dfrac{u}{\sqrt{|u|}} \quad \text{si} \quad u \neq 0 \\ \\ u(x_0) = 0 \\ \\ \dfrac{du}{dx}(x_0) = u_1 \neq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

2.2 Existence de la solution

Nous donnerons un résultat de l'existence de la solution du problème (2.8), Après nous Établira un résultat de l'unicité de la solution de ce problème. Pour poursuivre notre étude, nous avons besoin du lemme suivant et du Corollaire

Lemme 2.2.1 *soit θ Une ouverture délimitée de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}$ et ,g_μ, g deux fonctions dans $L^q(\theta)$; $1 < q < \infty$ telle que : $\|g_\mu\| \leq C$ et $g_\mu \longrightarrow g$ p.p. dans θ puis $g_\mu \longrightarrow g$ dans $L^q(\theta)$ faiblement.*

Corollaire 2.2.2 *Il existe une suite* $\{w\}_{i=1,\ldots,\infty} \in H_0^1(\Omega) \cap L^P(\Omega)$, *telle que pour tout nombre naturel* $m \geq 0$ *les vecteurs* $\{w\}_{i=1,\ldots,m}$ *Sont linéairement indépendants et tout sous-espace engendré par ces vecteurs est dense dans* $H_0^1(\Omega) \cap L^P(\Omega)$ *;* $1 < q < \infty$.

Théorème 2.2.3 *Le problème (2.8) admet une moins solution de vérification (2.2) ,(2.3), (2.4) ,(2.5) et(2.6)*

Preuve.

La démonstration de ce théorème se fere en trois étapes :

2.2.1 Approximations

Dans l'étude du problème (2.8), il faut introduire l'espace V qui définit comme suit :

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^P(\Omega)$$

où $P = \alpha + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{2}{3}$

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{2}{3}}(\Omega)$$

Nous affectons V avec la norme suivante :

$$\|u\|_V = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^{\frac{2}{3}}(\Omega)}$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.4 *L'espace* V *est séparable, donc il admet un sous-espace dénombrable dense.*

Nous considérons un sous-espace de dimension finie $V_m \subset V$ Soit $\{w_i\}_{i=1,\ldots,m}$ est une suite dans V, de sort que les Vecteurs $\{w_i\}_{i=1,\ldots,m}$ sont linéairement indépendants.
L' espace V_m est un espace produit par les vecteurs $\{w_i\}_{i=1,\ldots,m}$
V_m est un sous espace de dimension finie dans V, nous pouvons donc choisir une base de V_m dans la forme suivant :

$$\{w_i\}_{i=1,\ldots,m}$$

Nous utiliserons la base introduite par le corollaire.
Nous définissons une solution approximative $u_m = u_m(x)$ du problème (2.8), sous la forme suivante :

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(x) w_i \tag{2.9}$$

En multipliant les deux membres de l'équation diffessentielle contenue dans (2.8) pour La fonction inconnue u_m pour w_i et en formant le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ les deux membres de l'équation différentielle contenue dans (2.8) avec w_i on obtient :

$$\left(\frac{d^2 u_m}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du_m}{dx}, w_i\right) = \left(-u_m + \frac{u_m}{\sqrt{|u_m|}}, w_i\right) \qquad i = 1, 2, .., m. \tag{2.10}$$

Pour tout i nombre naturel fixe, la formule (2.10) est un différentiel ordinaire système.
Si l'on tient compte des conditions suivantes :

$$u_m(x_0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(x) w_i \xrightarrow{m \longrightarrow \infty} u(x_0) = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{du_m(x_0)}{dx} = u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im}(x) w_i \xrightarrow{m \longrightarrow \infty} \frac{u(x_0)}{dx} = u_1 \tag{2.12}$$

Les problèmes (2.10) , (2.11), (2.12) admet au moins une solution dans $[x_0, x_m]$, où $x_0 \leq x_m \leq x_1$. Les estimations de priori suivantes montrent que $x_m = x_1$ où x_1 Est un grand nombre naturel.

2.2.2 Estimation à priori

En multipliant (2.10) par $\dfrac{dg_{jm}(x_0)}{dx}$ et somme sur j, on obtient :

$$\left(\frac{d^2 u_m}{dx^2}, \frac{du_m}{dx}\right) + \left(\frac{1}{x}\frac{du_m}{dx}, \frac{du_m}{dx}\right) = \left(-u_m, \frac{du_m}{dx}\right) + \left(\frac{u_m}{\sqrt{|u_m|}}, \frac{du_m}{dx}\right). \tag{2.13}$$

Pour simplifier nous posons : $Du_m(x) = \dfrac{du_m}{dx}$ et $D^2 u_m(x) = \dfrac{d^2 u_m}{dx^2}$.
L'equation (2.13) peut s'écrire comme suit :

$$\int_\Omega D^2 u_m(x) Du_m(x) dx + \int_\Omega \frac{1}{x}(Du_m(x))^2 dx = -\int_\Omega u_m(x) Du_m(x) dx + \int_\Omega \frac{u_m}{\sqrt{|u_m|}}(x) Du_m(x) dx \tag{2.14}$$

où :
il est clair que

$$(D^2u_m, Du_m) = \frac{1}{2}D|Du_m|$$

$$\left(\frac{1}{x}Du_m, Du_m\right) = \left|\frac{1}{\sqrt{x}}Du_m\right|^2$$

$$(u_m, Du_m) = \frac{1}{2}D|Du_m|$$

$$\left(\frac{u_m}{\sqrt{|u_m|}}, \frac{du_m}{dx}\right) = \int_\Omega |u_m|^{\frac{1}{2}}(x)\frac{u_m}{\sqrt{|u_m|}}(x)Du_m(x)dx = \int_\Omega \frac{u_m}{|u_m|}Du_m(x)dx$$

L'équation (2.14) devient :

$$\frac{1}{2}|D^2u_m + |Du_m|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{x}}Du_m\right|^2 = |^2 + \frac{2}{3}\int_\Omega |u_m|^{\frac{3}{2}}(x)dx \tag{2.15}$$

en intégrant la formule (2.15) sur on $[x_0, x]$, Et en utilisant les conditions aux limites (2.11), (2.12), il devient :

$$\frac{1}{2}D\left[|Du_m|^2 + |u_m|^2\right] + \int_{x_0}^{x}\left|\frac{1}{\sqrt{x}}Du_m\right|^2 dx + \frac{2}{3}\|u_{0m}\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} = \frac{2}{3}\|u_m\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \frac{1}{2}[u_{1m} + u_{0m}] \tag{2.16}$$

depuis

$$\frac{1}{2}D\left[|Du_m|^2 + |u_m|^2\right] \leq \frac{1}{2}D\left[|Du_m|^2 + |u_m|^2\right] + \int_{x_0}^{x}\left|\frac{1}{\sqrt{x}}Du_m\right|^2 dx + \frac{2}{3}\|u_{0m}\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}$$

nous en déduisons :

$$\frac{1}{2}D\left[|Du_m|^2 + |u_m|^2\right] \leq \frac{2}{3}\|u_m\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \frac{1}{2}[u_{1m} + u_{0m}] \tag{2.17}$$

d'aprés (2.11),(2.12), on déduit : Il existe une constante$C_1 > 0$, telle que

$$[u_{1m} + u_{0m}] \leq C_1 \tag{2.18}$$

depuis $V_m \subset V \subset L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, Alors : Il existe une constante $C_2 > 0$, telle que

$$\frac{2}{3}\|u_m\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C_2 \tag{2.19}$$

de (2.17), (2.18), (2.19), on déduit : Il existe une constante $C_3 > 0$, telle que

$$|Du_m|^2 + |u_m|^2 \leq C_3.$$

Remarque 8 *Les constantes C_k, $k = 1, 2, 3$ Sont indépendants de m.*

Enfin, nous en déduisons que : $r_m = r_1$, De plus nous obtenons le résultat suivant :

$$\text{alors } m \to \infty, \text{ la suite } \{u_m\}\text{reste dans un ensemble borné dans } V \tag{2.20}$$

et

$$\{Du_m\}\text{reste dans un ensemble borné dans} L^2(\Omega). \tag{2.21}$$

Remarque 9 *Cette preuve reste valable pour tout nombre positif $r_1 > r_0$.*

2.2.3 Passage à la limite

De $\{u_m\}$ nous pouvons extraire une sous-séquence u_μ, telle que

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty \cap H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega) \text{ faibl}^* \tag{2.22}$$

$$Du_\mu \longrightarrow Du \text{ dans } L^\infty \cap L^2(\Omega) \text{ faibl}^* \tag{2.23}$$

d'aprés (2.21), nous en déduisons que $\{u_m\}$ est délimité dans $H_0^1(\Omega)$ et Du_m est délimité dans $L^2(\Omega)$. En suit $\{u_m\}$ Reste dans un ensemble borné dans $H^1(\Omega)$.
Cependant du théorème de **Rellich Kondrachov** de la compacité, l'injection $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ Est compact. On peut supposer que la sous-suite $\{u_\mu\}$ satisfait :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort p.p} \tag{2.24}$$

de puis

$$\varphi(u_m) = \begin{cases} \dfrac{u_m}{\sqrt{|u_m|}} & \text{si } u_m \neq 0 \\ 0 \quad \text{si } u_m = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\frac{u_m}{\sqrt{|u_m|}} \text{ reste dans un ensemble borné dans } L^\infty(\Omega) \cap L^3(\Omega). \tag{2.25}$$

Nous pouvons maintenant supposer que :

$$\varphi(u_m) \longrightarrow w \text{ dans } L^\infty(\Omega) \cap L^3(\Omega) \text{ faible*} \tag{2.26}$$

où $L^3(\Omega)$ le espace daul de $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ en effet la fonction $f \longrightarrow f$.
$|f|^\alpha$ appliquer $L^p \longrightarrow L^q$, où $p = \alpha + 2; \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Dans notre cas :$\alpha = -\dfrac{1}{2}$ en suit $p = \dfrac{3}{2}$, $q = 3$.
De $u_m \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega) \subset V$ puis $\dfrac{u_m}{\sqrt{|u_m|}} \in L^3(\Omega)$.
Nous devons montrer que $\dfrac{u}{\sqrt{|u|}}$ Pour cela, nous utiliserons le lemme (2.2.1)
Nous appliquons ce lemme pour les cas particuliers où : $\theta = \Omega,\ g_\mu = \dfrac{u_\mu}{\sqrt{|u_\mu|}},\ q$ est le nombre conjugué de $p = \dfrac{3}{2}$.
Il vérifie : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ puis $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$, cela donne $q = 3$.
D'aprés (2.25) , nous obtenons : $g_\mu \longrightarrow \dfrac{u}{\sqrt{|u|}} = g\ \ p.p.$
Et d'aprés (2.26), $g_\mu \longrightarrow w$ dans $L^3(\Omega)$ faiblement, d'aprés le lemme (2.2.1), on obtient :

$$w = g = \frac{u}{\sqrt{|u|}} \tag{2.27}$$

Puisque (2.27) est prouvé, nous pouvons maintenant passer à la limite en (2.10) , où nous l'utilisons pour $m = \mu$
Soit j un nombre naturel fixe tel que : $\mu > j$. D'apres (2.10), on obtient :

$$\left(D^2 u_\mu + \frac{1}{x} D u_\mu + u_\mu,\ w_j\right) = \left(\frac{u_\mu}{\sqrt{|u_\mu|}},\ w_j\right) \tag{2.28}$$

Depuis $\{Du_m\}$ Reste dans un ensemble borné dans $L^2(\Omega)$ nous en déduisons :
$(Du_m, w_j) \longrightarrow (Du, w_j)$ dans $L^2(\Omega)$ faible* et

$$D(Du_\mu, w_j) = (D^2 u_\mu, w_j) \longrightarrow (D^2 u_\mu, w_j) \ \ \text{dans} D'(\Omega)$$

De (2.26), (2.27), nous en déduisons : $\left(\dfrac{u_\mu}{\sqrt{|u_\mu}}, w_j\right) \longrightarrow \left(\dfrac{u}{\sqrt{|u}}, w_j\right)$ dans $L^\infty(\Omega)$ faiblement.
D'aprés (2.28), nous en déduisons :

$$(D^2 u, w_j) + (\frac{1}{x} Du, w_j) + (u, w_j) = \left(\frac{u}{\sqrt{|u}}, w_j\right)$$

d'aprés les propriétés de la densité de la base $\{w_i\}_{i=1,\dots,m}$, Selon les propriétés de la densité de la base

$$(D^2u,v)+\left(\frac{1}{x}Du,v\right)+(u,v)=\left(\frac{u}{\sqrt{|u}},v\right)\forall v\in H_0^1(\Omega)\cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$$

alors u satisfait (2.2), (2.3) et (2.4). Il reste à vérifier (2.5) et(2.6).

$$u_\mu(x_0)\longrightarrow u(x_0)=u_0$$

d'aprés (2.20), (2.21), nous avons

$$u_\mu(x_0)=u_{0\mu}\longrightarrow u_0=0.$$

Aussi de (2.12), et le lemme (2.2.1), on obtient :

$$(Du_m,w_j)\longrightarrow(Du,w_j)\ \ \text{dans}L^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\ \ \text{faible*}.$$

Ainsi, en utilisant le lemme (2.2.2) avec $X=\mathbb{R}$ on obtient :

$$(Du_m,w_j)\longrightarrow(Du,w_j)=(u_1,w_j)\ \ \text{dans}\ \ L^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\ \ \text{faible*}.$$

De (2.6) , nous en déduisons

$$(Du_m,w_j)\longrightarrow(u_1,w_j)\ \ \text{dans}L^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\ \ \forall j$$

$$Du=u_1.$$

■

2.3 L'uncité de la solution

Théorème 2.3.1 *le probleme (2.8), admet une solition unique en verifant (2.2) et (2.3) .*

Preuve. soit u et v sont solition du probleme (2.8) verifaint (2.2) et (2.3).
Poson : $w=u-v$

$$D^2w+\frac{1}{x}Dw=F(V)-F(u)\tag{2.29}$$

$$w(x_0) = 0$$

$$Dw(x_0)$$

$$w \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

$$Dw \in L^\infty(\Omega).$$

En formant le produit scalaire de deux membres de (2.29) avec Du, il devient :

$$\left(D^2 w + +\frac{1}{x} Dw,\ Dw\right) = \left(\left(|v|^{-\frac{1}{2}} v - |u|^{-\frac{1}{2}} u\right),\ Dw\right) \tag{2.30}$$

l'équation (2.30) peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} D\left[|Du_m|^2 + |u_m|^2\right] + \int_\Omega \frac{1}{x} (Dw)^2 dx = \int_\Omega \left(|v|^{-\frac{1}{2}} v - |u|^{-\frac{1}{2}} u\right).Dwdx \tag{2.31}$$

on remarque que :

$$\frac{1}{2} D\left[|Du_m|^2 + |u_m|^2\right] \leq \frac{1}{2} D\left[|Du_m|^2 + |u_m|^2\right] + \int_\Omega \frac{1}{x} (Dw)^2 dx \tag{2.32}$$

a partir de (2.31), (2.32), nous obtenons :

$$\frac{1}{2} D\left[|Du_m|^2 + |u_m|^2\right] \leq \int_\Omega \left(|v|^{-\frac{1}{2}} v - |u|^{-\frac{1}{2}} u\right).Dwdx \tag{2.33}$$

Nous vérifions facilement que :

$$\int_\Omega \left(|v|^{-\frac{1}{2}} v - |u|^{-\frac{1}{2}} u\right).Dwdx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega \sup \left(|v|^{-\frac{1}{2}} v - |u|^{-\frac{1}{2}}\right) |u||Dw|dx \tag{2.34}$$

en utilisant l'inégalité de Holder, on obtient :

$$\left| \int_\Omega \sup \left(|v|^{-\frac{1}{2}} v - |u|^{-\frac{1}{2}}\right) |u||Dw|dx \right| \leq C_4 \left(\left\| |u|^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{ns}(\Omega)} + \left\| |v|^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^s(\Omega)} \right) \|w\|_{L^q(\Omega)} \|Dw\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.35}$$

où

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{s} + \frac{1}{2} = 1.$$

D'aprés (2.2), nous obtenons $u, v \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

D'aprés le prolongement du théorème de Sobolev, on obtient :

$$\left(\left\| |u|^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^n(\Omega)} + \left\| |v|^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^s(\Omega)} \right) \|w\|_{L^q(\Omega)} \|Dw\|_{L^2(\Omega)} \leq C_5 \left(\left\| |u|^{\frac{1}{2}} \right\| + \left\| |v|^{\frac{1}{2}} \right\| \right) \|w\| |Dw|. \tag{2.36}$$

Où

$$\|w\|^2 = \int_\Omega \left(\frac{dw}{dx}\right)^2.$$

A partir de (2.34), (2.36), nous obtenons

$$\int_\Omega \left(|v|^{-\frac{1}{2}}v - |u|^{-\frac{1}{2}}u\right).Dwdx \leq C_6\|w\||Dw|. \tag{2.37}$$

A partir de (2.33), (2.37), nous obtenons

$$\frac{1}{2}D\left[|Dw|^2 + |w|^2\right] \leq \frac{C_6}{2}\|w\||Dw| \leq \frac{C_6}{2}\left[\|w\|^2 + |Dw|^2\right]. \tag{2.38}$$

En intégrant les deux membres du $[r_0, r]$ nous obtenons

$$\frac{1}{2}\left[|Dw|^2 + |w|^2\right] \leq \frac{C_6}{2}\int_\Omega \left[\|w\|^2 + |Dw|^2\right]dx. \tag{2.39}$$

Cela donne $w = 0$ ■

Chapitre 3

MÉTHODE DE COMPACITE DANS LE CAS D'EVOLIUTION

3.1 Position du problème

3.1.1 Introduire l'espace

On définit l'espace V comme suit : $V = H_0^1(\Omega) \cap L^p$ tel que $p = \rho + 2$ il est un espace de Banache mini de la norme

$$\|u\|_V = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

où
$p = \rho + 2 = -\dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{3}{2}$ en suit

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$$

Nous affectons V avec la norme suivante :

$$\|u\|_V = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}$$

3.1.2 Position du probléme

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et Γ sa frontière (assez régulière). On désigne par Q, pour T fini, l'ouvert $\Omega \times]0, T[$, et par Σ la frontière latérale de Q, soit $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$

on résout le problème :

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u|u|^{-\frac{1}{2}} = f \text{ dans } Q \\ u = 0 \text{ sur } \sum = \Gamma\times]0,T[\qquad\qquad \text{(condition aux limite)} \\ u(x,0) = u_0(x) \;\; \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = u_1(x) \;\; x \in \Omega. \quad \text{(condition initialle)} \end{cases}$$

3.2 Existence de la solution

Théorème 3.2.1 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et f,u_0,u_1 des fonctions données telles que :*

$$f \in L^2(\Omega) \tag{3.1}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}} \tag{3.2}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega) \tag{3.3}$$

Alors il existe une fonction u vérifiant :

$$u \in L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}) \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = -u|u|^{-\frac{1}{2}} + f \;\; dans\ Q \tag{3.5}$$

$$u(x,0) = u_0 \;\; x \in \Omega \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_0 \;\; x \in \Omega \tag{3.7}$$

$$u = 0 \;\; sur\ \Sigma \tag{3.8}$$

$$Q = \Omega\times]0, T[.$$

Preuve du théorème

La preuve du théorème est donnée en trois étapes :

3.2.1 Solutions approchée

On construit d'abord une suite de fonctions, solutions du problème posé en dimension finie.
Soit l'espace vectoriel $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ on considère les sous-espaces vectoriel de dimension finie $V_m \subset V$.
Soit $w_1, w_2, .., w_m...$ une suite de V, tel que pour tout m, $w_1, w_2, .., w_m...$ sont liniéairement indépendants, et que V_m designant l'espace finie engendré $w_1, w_2, .., w_m, w_i$ $\forall i$ V_m est un sous-espace vectoriel de V de dimension m ($V_m \subset V$), on peut choisir une base $(w_1, w_2, .., w_m)$ de V_m.
Vest séparable donc admet une $(w_1, w_2, .., w_m)$ de V_m.
Les combinaisons liniéaires finies de w_i sont denses dans V, ie :V_m dense dans V et $V_m \subset V_{m+1}$, $\overline{\cup V_m} = V$
On cherche $u_m = u_m(t)$ solution approchée $u_m \in V_m$ tel que :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{M} g_{im} w_i.$$

Les g_{im} sont donc les coordonnées de u_m dans base. Pour s'implefier l'ecriture on pose :

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t} \ , \ v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Problème approché

On cherche une foncion $u_m : Q = \Omega \times]0, T_m[$

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{M} g_{im} w_i.$$

Les g_{im} sont des fonctions par rapport à la variable t définies sur l'intervalle $]0; T_m[$ étant à déterminer par les conditions :

$$\begin{cases} (u''_m, w_j) + a(u_m(t), w_j) = (|u|^{-\frac{1}{2}} u_{m,w_j}) + (f(t), w_j) \\ g_{im}(0) = \alpha_{im} \\ g'_{im}(0) = \beta_{im} \\ 1 \leq j \leq m \end{cases} \tag{3.9}$$

où

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \tag{3.10}$$

Les α_{im} , β_{im} étant choisir de manière

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^{M} \alpha_{im} w_i \longrightarrow u(x_0) = 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}} \tag{3.11}$$

$$u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{i=1}^{M} \beta_{im} w_i \longrightarrow u_1 \text{ dans } L^2. \tag{3.12}$$

Et ceci quand m tend vers l'infinie. $\alpha_{im} = (\alpha_{1m}, ..., \alpha_{mm})$ $\beta_{im} = (\beta_{im}, .., \beta_{im})$.
Le système (3.9) d'équation différentielle ordinaire non linéaire et compléter par les conditions unitiales (3.10) ; (3.11).
Pour tout m, $w_1, .., w_m$ sont linéairement indépendants donc $\det(w_i, w_j) \neq 0$ ce qui implique que le système composé admet une solution locale pour tout $t \in [0, t_m] \subseteq [0, T]$.
Dans cette etape on va montrer que $t_n = T$:
En multipliant (3.9) d'indice j par g'_{im} et l'on somme en j il vient :

$$(u''_m, u') + a(u_m(t), u'_m(t)) = (|u|^{-\frac{1}{2}} u_m, u'_m) + (f(t), u'_m) \tag{3.13}$$

3.2.2 Estimation à priori

$$(u''_m, u'_m) = \frac{d}{dt}(u'_m, u_m) = \frac{1}{2}|u'_m(t)|^2$$

$$a(u_m, u'_m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(a(u_m, u'_m)) = \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2$$

$$\begin{aligned}(|u|^{-\frac{1}{2}} u_m, u'_m) &= \int_\Omega |u(t)|^{-\frac{1}{2}} u_m(t) u'_m(t) dx \\ &= \int_\Omega |u(t)|^{-\frac{1}{2}+1} \frac{u_m(t)}{|u(t)|} u'_m(t) dx \\ &= \frac{2}{3}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t)|^{\frac{3}{2}} dx\end{aligned}$$

on a

$$|u_m(t)|^{-\frac{1}{2}} u_m(t) \in \mathrm{L}^3(\Omega).$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-schwartz on obtient :

$$\||u|^{-\frac{1}{2}} u_m(t)\|^3_{\mathrm{L}^3(\Omega)} = \int_\Omega |u(t)|^{-\frac{1}{2}\times 3+3} dx = \int_\Omega |u(x,t)|^{\frac{3}{2}}_{\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega)}$$

posons $\|u\| = \sqrt{a(u,u)}$ (norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \frac{2}{3}\int_\Omega |u(t)|^{\frac{3}{2}}dx = (f(t), u'_m) \tag{3.14}$$

on intégre entre 0 et t on obtient :

$$\frac{1}{2}(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + +\frac{2}{3}\|u(x,t)\|^{\frac{3}{2}}_{\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega)}$$

$$= \frac{1}{2}(|u'_m(0)|^2 + \|u_m(0)\|^2) + \frac{2}{3}\|u(0)\|^{\frac{3}{2}}_{\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \int_0^T |f(\sigma)u'_m(\sigma)|d\sigma.$$

D'aprés (3.11) ; (3.12) on obtient :

$$\frac{1}{2}(|u'_m(0)|^2 + \|u_m(0)\|^2) + \frac{2}{3}\|u_m(0)\|^{\frac{3}{2}}_{\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega)} = \frac{1}{2}(|u'_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2) + \frac{2}{3}\|u(0)\|^{\frac{3}{2}}_{\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega)}.$$

Alors :

$$\tfrac{1}{2}(|u'_{1m}|^2 + \|u_m(0)\|^2) + \tfrac{2}{3}\|u_m(0)\|^{\frac{3}{2}}_{\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C_1.$$

On applique (1.6) on trouve :

$$\int_0^t |f(\sigma)||u'_m(\sigma)|d\sigma = \frac{1}{2}\int_0^T |f(\sigma)|^2 d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T |f(\sigma)|^2 d \leq C_2 \quad \text{car } f \in \mathrm{L}^2(Q)$$

$$\frac{1}{2}(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \frac{2}{3}\|u_m(t)\|^{\frac{3}{2}}_{\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C_3 + \frac{1}{2}\int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma \tag{3.16}$$

où

$$C_3 = C_1 + \frac{1}{2}C_2$$

on peut écrire :

$$|u'_m(t)|^2 \leq C_4 + \frac{1}{2}\int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 d\sigma. \tag{3.17}$$

On applique le lemme de Gronwall, on obtient :

$$|u'_m(t)|^2 \leq C_4 e^t \leq C_5 \quad t \in [0, T_n].$$

On déduit que :

$$|u'_m(t)|^2 \leq C \text{ où } \; C \leq 0 \text{ est un constant indépendant de } m \text{ pour tout} t \in [0, t_n] \quad (3.18)$$

d'aprés(3.13) ; (3.14) que :

$$\|u_m(t)\| + \|u_m(t)\| \leq C \tag{3.19}$$

où $C \leq 0$ est un constant indépendant de m pour tout $t \in [0, t_n]$. Enfin on arrive au résultat désiré que $t_m = T$.

Lorsque $m \longrightarrow \infty$ et u_m demeure dans un borné de $L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega))$ et u'_m demeure dans un borné de $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$.

3.2.3 Passage à la limite

convergence faible

on a : u_n bornée dans $L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ donc elle est bornée dans $L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega))$ mais

$$L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega))\tilde{\ }(L^1(0, T, H^{-1}(\Omega) + L^3(\Omega)))'$$

et comme $L^1(0, T, H^{-1}(\Omega) + L^3(\Omega))$ et d'aprés la corollaire (1.4.4) on trouve : alors il existe une sous-suite extraite u_μ tel que :

$$u_\mu \longrightarrow u \;\; \text{dans} \;\; L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$$

c'est dire :

$$\int_0^T \langle u_\mu(t), \varphi\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle u_\mu(t), \varphi\rangle dt \quad \forall \varphi L^1(0, T, H^{-1}(\Omega) + L^3(\Omega))$$

les injections :

$$H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$$

et

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

sont continués, alors :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)\cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \textit{ faibel}*$$

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \textit{ faibel}$$

donc u_μ bornée dans $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$. et

$$L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \sim (L^1(0,T,L^2(\Omega)))'$$

$L^2(\Omega)$ est réflexif et séparable, $L^1(0,T,L^2(\Omega))$ est séparable, d'aprés le théorème **Banach-Alaogula-Bourbaki** il existe une sous-suite u'_μ de u'_m tel que :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } D'(0,T,H_0^1(\Omega)\cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \textit{ faibel}*$$

c'est dire :

$$\int_0^T \langle u_\mu(t),\varphi\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle u_\mu(t),\varphi\rangle dt \ \forall\varphi L^1(0,T,H_0^1(\Omega)).$$

Alors :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)\cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \textit{ faibel}*$$

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)) \textit{ faibel}$$

par l'injection continue.

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)\cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \textit{ faibel}* \tag{3.20}$$

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dane } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)) \textit{ faibel} \tag{3.21}$$

La convergence forte

u_m borné dans $L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)\cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$, on va démontré que $u_m$est borné dans $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$.

$$V = H_0^1(\Omega)\cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$$

$$\|u_m\|_{L^2(0,T,V} = \sup\|u\| < \infty$$

$$V \hookrightarrow H_0^1 \Longrightarrow \|u_m\|_{H_0^1} \leq K\|u_m\|_V,\ K>0$$

$$\int_0^T \|u_m\|^2_{H_0^1} \leq K^2 \int_0^T \|u_m\|^2_V$$
$$\leq K^2 \int_0^T M^2 dt = (KM)^2 T < \infty$$

Alors u_m est borné dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, et u'_m est borné dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$

$$\int_0^T \|u_m\|_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T [\int_\Omega^| u|^2 dx] dt \quad \text{(Fubini)}$$

$$\int_0^T \int_\Omega |u|^2 dx dt = \int_Q |u|^2 dx dt dt = \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

car

$$Q = \Omega \times]0, T[$$

u_m et u'_m demeurent borné dans $L^2(Q)$.
Aussi u_m demeure borné dans $H^1(Q)$ et on sait que l'injection $H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ est compacte.
Donc la convergence faible de la suite u_μ extraite de u_m dans $H^1(Q)$ est fort dans $L^2(Q)$

$$u_\mu \longrightarrow u \;\text{ dans }\; L^2(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \;\text{ fort p.p.} \tag{3.22}$$

$$u'_\mu \longrightarrow u' \;\text{ dans }\; L^2(0, T, L^2(\Omega)) \text{ faibel p.p.} \tag{3.23}$$

Le terme non liniéaire

On va étudier la convergence de : $|u_m|^{-\frac{1}{2}} u_m$
on a :
$$\||u_m|^{-\frac{1}{2}}\|^3_{L^3(\Omega)} = \int_\Omega |u_m|^{-\frac{1}{2}\times 3+3} dx = \int_\Omega |u_m(x,t)|^{\frac{3}{2}} dx \leq C_P$$
alors :
$|u_m|^{-\frac{1}{2}} u_m$ demeure dans un borné de $L^\infty(0, T, L^3(\Omega))$,
ce qui implique qu'il existe une sous-suite $|u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu$ et $|u_m|^{-\frac{1}{2}} u_m$ tel que :

$$|u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu \longrightarrow w \quad \text{dans } L^\infty(0, T, L^3(\Omega)) \text{ faibl}^*. \tag{3.24}$$

On va maintenant montrer que :

$$w = |u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu.$$

En effet, on applique le lemme (1.8.10) avec :

$$O = Q,\ g_\mu = |u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu \text{et } q = p'$$

et d'aprés (3.22), (3.23) on obtient :

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ et } L^2(Q) \text{ p.p}$$

et

$$|u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu \longrightarrow w \quad \text{dans } L^\infty(0, T, L^3(\Omega)) \text{ faibl}^*.$$

donc

$$g_\mu = |u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu \longrightarrow |u|^{-\frac{1}{2}} u = g \ \ p.p \text{ dans } L^3(\Omega)$$

et comme

$$|u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu \longrightarrow w \quad \text{dans } L^\infty(0, T, L^3(\Omega)).$$

et la limite est unique, alors :

$$g = |u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu = w.$$

Ce qui implique :

$$|u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu \longrightarrow |u|^{-\frac{1}{2}} u = g \quad \text{dans } L^\infty(0, T, L^3(\Omega)).$$

On va démontrer maintenant que la solution approchée u_μ verifie (3.6), on a :

$$(u''_m, w_j) + a(u_m(t), w_j) + (|u|^{-\frac{1}{2}} u_m, w_j) = (f(t), w_j).$$

Soit j fixé $\mu > j$ et $m = \mu$ alors la dernière expression sera :

$$(u''_\mu, w_j) + a(u_\mu(t), w_j) + (|u|^{-\frac{1}{2}} u_\mu, w_j) = (f(t), w_j) \tag{3.25}$$

mais

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \ \textit{faibl } *$$

$L^\infty(0, T) = (L^1(0, T))'$ et $L^1(0, T)$ est séparable alors :

$$a(u_\mu, w_j) \longrightarrow a(u, w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible } *$$

et donc :

$$(\frac{d^2 u_\mu}{dt^2}, w_j) = \frac{d}{dt}(\frac{du_\mu}{dt}, w_j) \longrightarrow (\frac{du}{dt}, w_j) \text{ dans } \mathfrak{D}(0,T)$$

et d'aprés (3.24), (3.22) on touve :

$$(|u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu, w_j) \longrightarrow (|u|^{-\frac{1}{2}} u, w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible } *$$

on deduit alors que :

$$\frac{d^2}{dt}(u, w_j) + a(u, w_j) = (|u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu, w_j) = (f, w_j)$$

et cela pour j fixé, mais comme la base w_j est dense dans l'espace séparable $H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ alors on a :

$$\frac{d^2}{dt}(u, v) + a(u, v) = (|u_\mu|^{-\frac{1}{2}} u_\mu, v) = (f, v) \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega).$$

D'où résulte que la solution u satisfait (3.5),(3.6),(3.7)
Il reste à montrer les conditions unitialles (3.8) et (3.9), en effet on a :

$$u_\mu \longrightarrow \text{ dans } L^\infty(0,T, H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \ \textit{faibl} \ *$$

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^2(0,T, L^2(\Omega))$$

$$u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^\infty(0,T, L^2(\Omega)) \ \textit{faibl} \ *$$

D'aprés le lemme (1.8.3) alors u_μ est continue sur $[0,T]$ donc continue en 0 et

$$u_\mu(0) \longrightarrow u(0) \text{ dans } L^2(\Omega) \ \textit{faibl} \ *$$

et d'après (3.7),(3.8) alors :

$$u_\mu(0) \longrightarrow u(0) = u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)).$$

Remarque 10 *On peut prendre*
$\sigma \in C^1([0,T])$ *tel que*

$$\sigma(0) = 1 \ \ et \sigma(1) = 0$$

$$\int_0^T (\frac{\partial u_m(t)}{dt}, v)\sigma(t)dt = -(u_m(0), v) - \int_0^T (u_m(t), v)\sigma(t)dt$$

D'après (3.11) on a :

$$u_\mu \longrightarrow u \ dans \ L^2(0,T,H_0^1(\Omega)\cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega)) \ faibl \ *$$

$$\frac{\partial u_\mu}{dt} \longrightarrow \frac{\partial u}{dt} \quad dans \ L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$$

donc d'aprés le lemme (1.8.3) avec $X = \mathbb{R}$ on déduit :

$$u_\mu(0) \longrightarrow u(0) = u_0 \ dans \ H_0^1(\Omega)\cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$$

et on a :

$$(u''_\mu, w_j) \longrightarrow (u'', w_j) \ \text{ dans } D'(0,T)$$

$$(u'', w_j) \longrightarrow (u'', w_j) \ \text{ dans } L^\infty(0,T) \ \ faible*$$

D'après le lemme (1.8.3) avec $X = R$ on déduit :

$$(u'_\mu(0), w_j) \longrightarrow (u'(0), w_j) \ \text{ dans } \ L^\infty(0,T)$$

et grace à (1.12) on obtient :

$$(u'_\mu(0), w_j) \longrightarrow (u_1, w_j) \ \text{ dans } \ L^\infty(0,T).$$

Alors :

$$(u'(0), w_j) \longrightarrow (u_1, w_j) \ \ \forall j.$$

Donc

$$u'(0) = u_1$$

3.2.4 L'unucité de la solution

Théorème 3.2.2 *On se place les hypothèses du théorème (3.2.1) la solution est unique.*

démonstration

Supposons que le probléme admet deux solution u et v alors on a :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + |u|^{-\frac{1}{2}}u = f \\ \\ u(0) = 0, u'(0) = u_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'' - \Delta v + |v|^{-\frac{1}{2}}v = f \\ \\ v(0) = 0, v'(0) = v_1 \end{cases}$$

si on pose : $w = u - v$ alors w vérifie :

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + (|u|^{-\frac{1}{2}}u - |v|^{-\frac{1}{2}}v) = 0 \\ \\ w(0) = 0,\ w'(0) = 0 \\ \\ w \in L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega) \\ \\ w' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \end{cases}$$

on va démontrer que $w = 0$ sur $[0, T]$. Pour $v \in H_1^0(\Omega)$ on a :

$$(w", v) + a(w, v) = (|v|^{-\frac{1}{2}}v - |u|^{-\frac{1}{2}}u)$$

mais $w' \in L^2(\Omega)$ dans ce cas on considére $0 < s < T$ et une fonction $Z(t)$ définie par :

$$Z(t) = \begin{cases} -\int_t^s w(\xi)d\xi & \text{si } \ t \leq s \\ \\ 0 & \text{si } \ t > s \end{cases}$$

et

$$w_1(t) = \int_t^s w(\xi)d\xi \ \ \forall t \leq s$$

$$w_1(t) - w_1(s) = \int_0^t w(\xi)d\xi - \int_0^s w(\xi)d\xi$$

$$= \int_t^0 w(\xi)d\xi - \int_0^s w(\xi)d\xi =$$

$$= \int_t^s w(\xi)d\xi = Z(t)$$

donc $Z(t) = w_1(t) - w_1(s)$ ou $t \leq s$

$$Z(s) = w_1(s) - w_1(s) = 0 \Longrightarrow Z(s) = 0$$

$$Z'(t) = w_1'(t) = w(t) - w(0)$$

on a $w(0) = 0 \Longrightarrow Z'(t) = w(t)$
$Z(0) = w_1(0) - w_1(s) = w_1(s)$, alors :

$$\begin{cases} Z(t) = w_1(t) - w_1(s) = -w_1(s) \\ Z(0) = w_1(s) \\ Z(s) = 0 \\ Z'(t) = w(t) \end{cases}$$

$w \in L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}(\Omega) =,\ w' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$

$$(w'', Z) + a(w, Z) = (|v|^{-\frac{1}{2}}v - |u|^{-\frac{1}{2}}u, Z)$$

on intégre entre 0 et 1 :

$$\int_0^t (w", Z)dt + \int_0^t a(w, Z)dt = \int_0^t (|v|^{-\frac{1}{2}}v - |u|^{-\frac{1}{2}}u, Z)dt = 0$$

$$\int_0^t (w'', Z) = -\int_0^t (w', Z')dt = \int_0^t (w', w)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t |w(t)|^2 dt = -\frac{1}{2}[|w(s)|^2 - |w(0)|^2]$$

$$= -\frac{1}{2}|w(s)|^2$$

$$\int_0^t a(w, Z)dt = \int_0^t a(Z', Z)dt = \int_0^t \frac{d}{dt}a(w_1(t), w_1(t) - w_1(s))dt$$

$$= a(w_1(s), w_1(s)) = -\frac{1}{2}\|w(s)\|^2$$

car $Z(0) = a(w_1(s), w_1(s)) = -w_1(s)$

$$-\frac{1}{2}|w(s)|^2 - \frac{1}{2}\|w(s)\|^2 = \int_0^t (|v|^{-\frac{1}{2}}v - |u|^{-\frac{1}{2}}u, Z)dt. \tag{3.26}$$

Le terme nn linéaire :

$$\int_\Omega |(|v|^{-\frac{1}{2}}v - |u|^{-\frac{1}{2}}u)Z|dx \leq \int_\Omega ||v|^{-\frac{1}{2}}v - |u|^{-\frac{1}{2}}u||Z|dx$$

on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(|u|^{-\frac{1}{2}}u) = -\frac{1}{2}|u|^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{1}{2}|u|^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Alors d'aprés la formule de l'acroissement finie généralisé on obtient :

$$\int_\Omega (|v|^{-\frac{1}{2}}v - |u|^{-\frac{1}{2}}u)w'dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \sup(|u|^{-\frac{1}{2}}, |v|^{-\frac{1}{2}})|u-v||w'|dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \sup(|u|^{-\frac{1}{2}}, |v|^{-\frac{1}{2}})|w||w'|dx$$

$$\leq K\int_\Omega (|u|^{-\frac{1}{2}}, |v|^{-\frac{1}{2}})|w||w'|dx$$

$$|\int_\Omega (|u|^{-\frac{1}{2}}, |v|^{-\frac{1}{2}})w'dx| \leq K\int_\Omega (|u|^{-\frac{1}{2}}, |v|^{-\frac{1}{2}})|w||w_1(t) - w_1(s)|dt \tag{3.27}$$

$$\|u\|_{L^{-\frac{n}{2}}(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^{-\frac{n}{2}})^{-\frac{2}{n}} = (((\int_\Omega \|u\|^{-\frac{1}{2}})^n)^{-\frac{1}{n}})^{-2} = \||u|^{-\frac{1}{2}}\|^{-2}$$

donc

$$\|u\|^{-\frac{1}{2}}_{L^{-\frac{n}{2}}(\Omega)} = \||u|^{-\frac{1}{2}}\|^n_{L^n(\Omega)}.$$

L'inégalité de Hôlder nous donne :

$$K\int_\Omega (|u|^{-\frac{1}{2}} + |v|^{-\frac{1}{2}})|w||w_1(t) - w_1(s)|dt \leq K(\int_\Omega (|u|^{-\frac{1}{2}} + |v|^{-\frac{1}{2}})^n)^{\frac{1}{n}}(\int_\Omega |w|^q)^{\frac{1}{q}}(\int_\Omega (|w'|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq K[(\int_\Omega (|u|^{-\frac{1}{2}})^n)^{\frac{1}{n}} + (\int_\Omega (|v|^{-\frac{1}{2}})^n)^{\frac{1}{n}}](\int_\Omega |w|^q)^{\frac{1}{q}}(\int_\Omega (|w'|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq K[\||u|^{-\frac{1}{2}}\|^n_{L^n(\Omega)} + \||v|^{-\frac{1}{2}}\|^n_{L^n(\Omega)}].[\|w'(t)\|_{L^2(\Omega)}]$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1$$

on a

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{2}{n-2}$$

alors

$$-\frac{n}{2} \leq q$$

$$|u|^{-\frac{1}{2}}, |v|^{-\frac{1}{2}} \in L^n(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega): \ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \ n \geq 3$$

$$u, v \in L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega))$$

$$\|u\|_{L^n(\Omega)} \leq c\|u\|_{H_0^n(\Omega)}$$

$$\||u|\|^{-\frac{1}{2}}\|^n_{L^n(\Omega)} \leq c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

donc

$$K(\||u|^{-\frac{1}{2}}\|_{L^n(\Omega)} + \||u|^{-\frac{1}{2}}\|_{L^n(\Omega)}) + \|w(t)\|_{L^n(\Omega)} + \|w'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$K(\||u|^{-\frac{1}{2}}\|_{H_0^1(\Omega)} + \||u|^{-\frac{1}{2}}\|_{H_0^1(\Omega)}) + \|w(t)\|_{L^n(\Omega)} + \|w'(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

et comme

$$u, v \in\in L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \ (H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega))$$

alors

$$\int_0^s (|v|^{-\frac{1}{2}}v - |u|^{-\frac{1}{2}}u, Z)dt \leq K_1 \int_0^s |w(t)|(\|w_1(t) + w_1(s)\|)dt. \tag{3.28}$$

D'aprés(3.29)on trouve :

$$\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2 \leq K_1 \int_0^s |w(t)|(\|w_1(t) + w_1(s)\|)dt$$

donc

$$|w(s)|^2 + \|w_1(s)\|^2 \leq C \int_0^s (|w(t)|^2 + w_1(t)\|^2)dt$$

d'aprés le lemme de Gronwall on a :

$$\|w_1(s)\| = 0 \Longrightarrow -w_1(s)| = 0$$

Donc

$$Z(0) = \int_0^s \|w(\xi)\|^2 d\xi = 0$$

d'après le théorème d'anulation

$$w(\xi) = 0 \Longrightarrow w(s) = 0$$

alore $w(t) = 0$ sur $[0, T]$

$$w(t) = u(t) - v(t) = 0 \Longrightarrow u(t) = v(t).$$

Enfin on arrive au résultat desiré, et la solution est unique.

Chapitre 4

Application numérique

4.1 Méthode differences finies

En analyse numérique, la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Une discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, secondes, etc., partielles ou non) peut être obtenue par les formules de Taylor.

4.1.1 schéma de 1^{ere} order

Soit $u(x)$ une fonction, par définition de la dérivée, on a :

$$u'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(h)}{h}$$

si h est petit, un développement de Taylor de $u(x+h)$ au voisinage de x donne :

$$u(x+h) = U(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + ...$$

En tronquant la série au premier ordre en h, on obtient :

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + O(h).$$

Notation

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N+1$ points x_i pour $i=0,..,N$ régulièrement espacés avec un pas h. Les points $x_i = ih$ sont appelés les noeuds du maillage.

Notation 4.1.1 *on note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i, soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au noeud x_i, on note $(u'(x)_{x=x_i} = (u'(x))_i = u'_i$. Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u.*
Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle :

$$u'(x) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h).$$

4.1.2 Schéma de 2^{eme} order

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i. Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u, on écrit :

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2}u''_i + \frac{h^3}{6}u'''_i + O(h^4) \\ u_{i-1} &= u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2}u''_i - \frac{h^3}{6}u'''_i + O(h^4) \end{aligned}$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à : $u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = h^2 u''_i + O(h^4)$. Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u :

$$u''_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

.

4.2 Méthode Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson vue précédemment pour une équation non linéaire peut être généralisée pour résoudre des systèmes à n équations non linéaires :

$$F(U)\begin{cases} f_1(u_1,u_2,...,u_n) &= 0 \\ f_2(u_1,u_2,...,u_n) &= 0 \\ . \\ . \\ . \\ f_n(u_1,u_2,...,u_n) &= 0 \end{cases}$$

On encore, chercher un vecteur $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ Vérifiant $F(U) = 0$

L'algorithme :

1) Choix d'un vecteur inital U^0
2) Itération $U^{(k+1)} = U^{(k)} - [J(U^{(k)})]^{-1}F(U^{(k)})$ jusqu'à convergence.
   où $J(U^{(k)})$ est la matrice jacobienne évalué en $U^{(k)}$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} u_1^{(k+1)} \\ u_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ u_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ \vdots \\ u_n^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial un} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}^{-1}_{(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)} \times \begin{bmatrix} f_1(u_{(1)}^k, x_{(2)}^k, \cdots, u_n^{(k)}) \\ f_2(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_n^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \cdots, u_n^{(k)}) \end{bmatrix}$$

L'erreur :

Pour un système d'équations et une suite de vecteurs, le critère d'arrêt est basé sur la norme entre le résultats de deux itérations successives : $\varepsilon_k = \|U^{(k+1)} - U^k\|$, (par exemple, $\varepsilon < 10^{-5}$). qui doit être inférieure à une valeur donnée.

Utilisée la norme infinie $\|u_i\|_\infty = \max_i |u_i|$

4.3 Application numérique

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} u''(x) + \dfrac{1}{x}u'(x) = u(x) - u(x)|u(x)|^{-\frac{1}{2}} & x \in [0,1] \\ \\ u(x0) = 0 \quad u'(x_0) = u_1 \end{cases}$$

et

$$\varphi(u) = \begin{cases} u(x) - u(x)|u(x)|^{-\frac{1}{2}} & x \in [0,1] \\ \\ 0 \quad u = u \end{cases}$$

L'intervalle $[0,1]$ est discrétisé en $9+1$ noeuds de coordonnées x_i (i variant de 0 à N) régulièrement espacés. Notons $h = 0.1$ le pas d'espace, au noeud $x_i = ih$.
Approximons la dérivée de u au moyen d'un schéma à l'ordre 1 :

$$u'(x) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}.$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2 :

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

L'équation discrétisée est ainsi :

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{1}{ih}\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u_i + u_i|u_i|^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Les systemes d'equations :

$$F(U^{(k)}) = \begin{cases} -301u_1^{(k)} + u_1^{(k)}|u_1^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} + 200u_2^{(k)} & i=1 \\ 100u_1^{(k)} - 251u_2^{(k)} + u_2^{(k)}|u_2^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} + 150u_3^{(k)} & i=2 \\ 100u_2^{(k)} - 234.33u_3^{(k)} + u_3^{(k)}|u_3|^{-\frac{1}{2}} + 133.33u_4^{(k)} & i=3 \\ 100u_3^{(k)} - 226u_4^{(k)} + u_4^{(k)}|u_4^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} + 125u_5^{(k)} & i=4 \\ 100u_4^{(k)} - 221u_5^{(k)} + u_5^{(k)}|u_5^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} + 120u_6^{(k)} & i=5 \\ 100u_4^{(k)} - 217.67u_5^{(k)} + u_6^{(k)}|u_6^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} + 116.67u_7^{(k)} & i=6 \\ 100u_6^{(k)} - 215.29u_7^{(k)} + u_7^{(k)}|u_7^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} + 114.29u_8^{(k)} & i=7 \\ 100u_7 - 213.5u_8^{(k)} + u_8^{(k)}|u_8^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} + 112.5u_9^{(k)} & i=8 \\ 100u_8^{(k)} - 212.11u_9^{(k)} + u_9^{(k)}|u_9^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} & i=9 \end{cases}$$

La matrice jacobienne $J(U^{(k)})$:

$$J(U^{(k)}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} & a_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix}$$

où les $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 9}$ d'où donnes par ce qui suit :

$i = 1 \qquad a_{11} = -301 + 0.5|u_1^{(k)}|^{\frac{1}{2}} \qquad a_{12} = 200$

$i = 2 \qquad a_{21} = 100 \qquad a_{22} = -251 + 0.5|u_2^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} \qquad a_{23} = 150$

$i = 3 \qquad a_{32} = 100 \qquad a_{33} = -234.33 + 0.5|u_3^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} \qquad a_{34} = 133.33$

$i = 4 \qquad a_{43} = 100 \qquad a_{44} = -226 + 0.5|u_4^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} \qquad a_{45} = 125$

$i = 5 \qquad a_{54} = 100 \qquad a_{55} = -221 + 0.5|u_5^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} \qquad a_{56} = 120$

$i = 6 \qquad a_{65} = 100 \qquad a_{66} = -217.67 + 0.5|u_6^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} \qquad a_{67} = 116.67$

$i = 7 \qquad a_{76} = 100 \qquad a_{77} = -215.29 + 0.5|u_7^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} \qquad a_{78} = 114.29$

$i = 8 \qquad a_{87} = 100 \qquad a_{88} = -213.5 + 0.5|u_8^{(k)}|^{-\frac{1}{2}} \qquad a_{89} = 112.5$

$i = 9 \qquad a_{98} = 100 \qquad a_{99} = -212.11 + 0.5|u_9^{(k)}|^{-\frac{1}{2}}$

1. Choixi d'un vecteur inital $U^0 = [1, 0, 2, 0, 0, 4, 1, 0, 1]^t$ donner
2.
$$F(u^{(0)}) = \begin{bmatrix} -300 \\ 400 \\ -467.24 \\ 200 \\ 480 \\ -752.01 \\ 185.67 \\ 212.5 \\ -211.11 \end{bmatrix}$$

   et

$$J(u^{(0)}) \begin{bmatrix} -300.5 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & -251 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -233.98 & 133.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & -226 & 125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & -221 & 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & -217.42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & -214.29 & 116.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & -213.5 & 112.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & -211.61 \end{bmatrix}$$

et

$$U^{(1)} = U^{(0)} - [J(U^{(0)})]^{-1}F(U^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.0208 \\ 0.0309 \\ 0.0379 \\ 0.0388 \\ 0.0395 \\ 0.0403 \\ 0.0324 \\ 0.0218 \\ 0.0127 \end{bmatrix}$$

En utilisant la même méthode que nous trouvons :

$$U^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0067 \\ 0.0096 \\ 0.0119 \\ 0.0129 \\ 0.0126 \\ 0.0143 \\ 0.0094 \\ 0.0067 \\ 0.0035 \end{bmatrix} \quad U^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.0333 \\ -0.0344 \\ -0.1047 \\ -0.1534 \\ -0.1886 \\ -0.2130 \\ -0.2286 \\ -0.2334 \\ -0.2292 \end{bmatrix} \quad U^{(4)} = \begin{bmatrix} -0.0333 \\ -0.0492 \\ -0.0586 \\ -0.0643 \\ -0.0671 \\ -0.0675 \\ 0.03914 \\ 0.0622 \\ 0.068 \end{bmatrix} \quad U^{(5)} = \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.002 \\ -0.0023 \\ -0.0034 \\ -0.0034 \\ -0.0031 \\ -0.0002 \\ -0.0038 \\ -0.0023 \end{bmatrix}$$

$$U^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.0057 \\ 0.004 \\ 0.0027 \\ 0.0017 \\ 0.001 \\ 0.0006 \\ 0.0001 \\ -0.0002 \\ -0.0002 \end{bmatrix} \quad U^{(7)} = \begin{bmatrix} -0.00008 \\ 0.0002 \\ 0.0004 \\ 0.0002 \\ 0.00009 \\ -0.00004 \\ -0.0008 \\ -0.0008 \\ -0.0005 \end{bmatrix} \quad U^{(8)} = \begin{bmatrix} 0.0003 \\ 0.00004 \\ 0.0002 \\ 0.0003 \\ 0.00006 \\ -0.0001 \\ -0.0001 \\ -0.0002 \\ -0.0002 \end{bmatrix} \quad U^{(9)} = \begin{bmatrix} 0.00017 \\ 0.0002 \\ 0.00002 \\ 0.0001 \\ -0.0004 \\ 0.0005 \\ -0.00014 \\ -0.00013 \\ -0.00008 \end{bmatrix}$$

Les erreurs :

ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9
3.9597	-0.05900	-0.3123	0.6653	-0.4319	0.0061	-0.00278	0.00038	-0.00046

Conclusion

Dans ce travaill, nous avons étudé des problémes aux limits pour les éqaution aux dériver partielles qausi linéaire du deusiéme order de la raction diffition.

Pour chaque cas, on a démontre l'existance des solutions. Les technique utilisées, sont celles de méthode de compacite(de Galerkin cas staionaire, de Feado-Galarkin cas d'evolution).

Pour l'unicité nous avons appliqué une méthode classique on part du fait que le problème admet deux solutions , l'utilisation du lemme de Gronwall montre que les deux solutions coïncident , d'où l'unicité .

Enfin on à validé notre travail en faisant une applicatin numérique en utilisant la méthode de Newoten-Raphson et differences finies.

Bibliographie

[1] F.Demengel et G.Demengel,Espaces fonctionnels utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles, ISBN CNRS-Edition 2007.

[2] H . Bresis . Analyse fonctionnelle , Sobolev Spaces and Patial Différentiable Equations, Springer (2010) .

[3] H . Bresis . Analyse fonctionnelle , Théorie et Applications , Masson (1983) .

[4] J. Beuneu. Algorithmes pour le calcul scintifique. Cours de l'Ecole Universitaire d'lngenicurs de Lille, 1999.

[5] J . L . DEMIALLY - Analyse numérique et équations différentielles , OPU . Alger (1993) .Introduction générale.

[6] J.L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1, Dunod, 1968.

[7] J . L . Lions , Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod , Gauthier Villars , Paris , 1969.

[8] KRAY . MARIE - Perturbation d'un système différentiel ayant une solution périodique, 2007 .

[9] L. Debnath, Non linear Partial Differential Equations for scientists and engineers.

[10] M . SAMUELIDES , L . TOUZILLIER - Analyse fonctionnelle , Cepadues - éditions, $n°$ 255 . (1989).

Birkhauser, Boston (1997).

[11] R.Adams.Sobolev Spaces, New York : Academic Press (1977).

[12] R . CHILL .Quelques méthodes de résolution pour les équations non linéaires , Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz . 2007/8.

[13] P. Lascaux and R. Theodor. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes I et II. Masson, Paris, 1986.

[14] SAID M.S. Résolution d'un système non linéaire intervenant en dynamique des Gaz par la méthode de compacité Actes du CNAMA université de Jijel Algérie Novembre 2004 pp 165-174.

[15] S.DOUCOURE .Methode de décomposition de domaines pour les équations de Navier-Stokes en jonction fleuve / Océan et les lois de conservation scalaires,UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL , CH-2009 (suisse).

ملخص

في هذا العمل تطرقنا لدراسة وجود ووحدانية الحل للمسائل ذات معادلات تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية النصف خطية درسنا الحالة الساكنة والتطورية حيث كانت الطريقة المتبعة طريقة التراص.

في حين تطرقنا لوحدانية الحل بطرق تقليدية (توطئة غرانوال) .

قدمنا في الجزء الأخير من المذكرة تطبيق عددي باستعمال طريقة نيوتن –رافسون و الفروق المنتهية وقدرنا الخطأ.

*الكلمات المفتاحية: - طريقة التراص – وجود – وحدانية – رد فعل الانتشار.

Abstract

In this work, we studied the existeme and uniqueness of the solution of the problems in extereme case for the partial derivative equations quasi lineiare of second- order of the diffusion reaction for stationary and evolution cases . The thchniques used, are those of the method of compactness. While we were talking to the uniqueness of the traditional methods of solution (lemme Grunwall).

The final work, we studied Numerical application used by Newton-Raphson and finite differences and we estimate the error.

Key words :(compactness method, diffusion reaction, existence, uniqueness, diffusion reaction).

Résumé

Dans ce travail nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution problème avec limites pour les équations aux débiner partiels quasi-linaires de deuxième ovidé de la rection diffusion pour le cas stationnaire et cas d'évolution. Les techniques utilises, sont celles de la méthode de compacité.

Pendant que nous parlions à l'unicité des méthodes traditionnelles de la solution (lemme Grunwall).

Enfin nous avons fait une application numérique en utilisons la méthode de Newton et déférences finis et nous avons estime l'erreur.

Mots – cités :(méthode de compacité, existence, unicité, réaction diffusion).