



# جامعة قاصدي مرباح ورقلة

N° d'ordre :  
N° de série :

كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي

فرع: رياضيات

إختصاص: إحصاء وإحتمالات

من إعداد الطالب: وقاد إبراهيم

الموضوع

## نمذجة الظواهر القابلة للعد بواسطة صفوف الإنتظار

نوقشت يوم 2017/06/06 من طرف لجنة المناقشة :

جامعة قاصدي مرباح ورقلة رئيسا

جامعة قاصدي مرباح ورقلة مناقشا

جامعة قاصدي مرباح ورقلة مشرفا

أ- ميروك مفلح

أ- شطي جمال الدين

أ- بهدي عيسى

# الفصل الأول

## عموميات ومفاهيم أولية

### لمحة تاريخية

تعود بداية ظهور نظرية صفوف الإنتظار إلى سنة 1910م على يد العالم الدنماركي إيرلنغ (A,K,ERLANG) من خلال تجاربه على مشاكل الإزدحام في مركز تحويل المكالمات الهاتفية، ومن خلال هذه التجارب ظهرت أول محاولة لنمذجة ظاهرة الطوابير ومع نهاية الحرب العالمية الثانية 1945م شملت هذه الدراسات جل المجالات التي تعاني من مشاكل الإزدحام.<sup>1</sup>

### 1.1 المقدمة العامة

إن ظواهر الإنتظار هي ظواهر مشاهدة بكثرة في الواقع اليومي للإنسان أمام شبائك التذاكر ومحطات البريد والمستشفيات... إلخ، حيث تهدف هذه النظرية لنمذجة ظاهرة الإنتظار على شكل نماذج رياضية، مما يسهل على الباحثين إيجاد الحلول المثلى لمشاكل الإنتظار، واتخاذ القرار المناسب بشأنها.<sup>2</sup>

وهو الهدف من هذه الدراسة، حيث قننا بعملية جمع لجل نماذج صفوف الإنتظار المعروفة وإعطاء خصائص ومميزات كل نوع منها، وقد قسم هذا العمل إلى ثلاثة فصول رئيسية وفصل

<sup>1</sup> علي حسن شرقي وأخرون، بحوث العمليات، تحليل كمي في الإدارة، دار الميزة للنشر والتوزيع عمان، 1997، بتصرف

<sup>2</sup> علي حسين علي وأخرون، بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المنشأة، دار زهران عمان، 1999، بتصرف

تمهيدي، تناول هذا الأخير الدراسات السابقة لهذه النظرية والعلاقة التي تربطها بهذه الدراسة، في حين خصص الفصل الأول للتعريف بأهم التعاريف والمبادئ الأساسية لهذه الظاهرة، أما الفصل الثاني فعالج أهم النماذج الرياضية لصفوف الإنتظار والبراهين الخاصة بها، بينما الفصل الأخير عبارة عن دراسة حالة للقباضة الرئيسية للبريد بورقلة وعليه فإن الهدف من الدراسة هو الإجابة على الإشكالية التالية:

كيف نمذج الظواهر القابلة للعد بواسطة صفوف الإنتظار؟ وماهي الطرق المناسبة لإختيار أحسن نموذج؟

## الإشكاليات الفرعية

1. ماهي السيوررات العشوائية الخاصة بنموذج صفوف الإنتظار؟
2. ماهي أنواع صفوف الإنتظار؟ و ماهي خصائص كل نوع منها؟
3. كيف نختار أحسن نموذج لصف الإنتظار؟ و ماهي العوامل المتحكمة في ذلك؟

## الفرضيات

1. السيوررات العشوائية الخاصة بنظرية صفوف الإنتظار هي سيوررات ماركوف.
2. الأنواع الأساسية لصفوف الإنتظار هي التفرع والتسلسل والشبكات.
3. يختار الزبون الصف الأقصر في حين صاحب العمل يختار النموذج الأقل تكلفة.

## أهمية الدراسة

تكمن أهمية هذه الدراسة في كونها:

1. تهدف إلى إيجاد النموذج الأنسب لصفوف الإنتظار.
2. وجود مادة في تخصص الاحتمالات تدرس هذه النماذج مما يجعلها مرجعا للطلبة إن شاء الله.
3. الدراسة تركز على الجانب الرياضي لنظرية صفوف الإنتظار على عكس الدراسات السابقة التي تهتم بنموذج دراسة الحالة فقط.
4. إظافة للمكتبة الجامعية باللغة العربية في هذا المجال.

## العوائق المصادفة أثناء الدراسة.

1. إنعدام المراجع المتخصصة بالمكتبة الجامعية.

2. الدراسات السابقة باللغة العربية لم تتناول هذه الظاهرة رياضياً بشكل مناسب مما جعلنا نجد صعوبة في إيجاد المراجع المتخصصة.
3. الصعوبة في الحصول على البيانات في دراسة الحالة.

### الدراسات السابقة

#### المراجع السابقة

#### أ-تحسين خدمات الموائى بإستخدام نماذج صفوف الإنتظار

1. عنوان المرجع:تحسين خدمات الموائى بإستخدام نماذج صفوف الإنتظار.
2. المؤلف:الطالب رشيد علاب.
3. نوع المرجع: مذكرة ماجستير.
4. الإشكالية: كيف وإلى إي مدى يمكن لنظرية صفوف الإنتظار أن تساعد في إتخاذ أفضل القرارات لتحسين مستوى الخدمة في الموائى؟
5. النتائج:تساعد نظرية صفوف الإنتظار في تحسين مستوى الخدمة وذلك لأنها تدرس النموذج المعتمد فيها وتتحقق من ملائمتة وتعطي النموذج البديل في حالة كان النموذج غير صالح.

#### ب-محاضرات السنة الثانية ماستر إحتتمالات

1. عنوان المرجع:محاضرات السنة الثانية ماستر إحتتمالات جامعة ورقلة.
2. المؤلف:محاضرات مقياس نظرية صفوف الإنتظار.
3. نوع المرجع:محاضرات.
4. الإشكالية:ماهي أنواع نماذج صفوف الإنتظار وماهي مميزات كل نوع وكيفية إختيار النموذج الأحسن؟

5. النتائج: تنقسم صفوف الإنتظار حسب النوع إلى ثلاثة أقسام أساسية و هي: الشبكات والنماذج ذات مرحلة واحدة والنماذج ذات عدة مراحل, وتوجد عدة تصنيفات أخرى منها التصنيف حسب الأولوية أو حسب عدد المراكز أو محدودية النظام.

### ج-دراسة صفوف الإنتظار في مؤسسات القطاع الصحي

1. عنوان المرجع:دراسة صفوف الإنتظار في مؤسسات القطاع الصحي.
2. المؤلف:الطالبين ديدي عز الدين وعلو رشيد.
3. نوع المرجع:مذكرة ماستر.
4. الإشكالية: كيف والى أي مدى يمكن لنظرية صفوف الانتظار. أن تساعد في اتخاذ أفضل القرارات لتحسين مستوى الخدمة في المؤسسات الصحية؟
5. النتائج:يعتبر زمن الإنتظار مؤشر على جودة الخدمة الصحية ولذلك يجب تقليصه إلى أقصى حد ويتم ذلك بزيادة عدد القنوات للخدمة أو تسريع معدل الخدمة وذلك بجلب طاقم طبي أكثر خبرة وسرعة في العمل.

### \*د-دور إستخدام نماذج صفوف الإنتظار في تحسين جودة الخدمات الصحية

1. عنوان المرجع:دور إستخدام نماذج صفوف الإنتظار في تحسين جودة الخدمات الصحية.
2. المؤلف:الطالبة دريدي أحلام.
3. نوع المرجع:مذكرة ماجستير.
4. الإشكالية:ماهو دور إستخدام نماذج صفوف الإنتظار في تحسين جودة الخدمات الصحية؟
5. النتائج: ضرورة إستخدام نماذج صفوف الإنتظار من أجل تحسين جودة الخدمات في جميع المؤسسات التي تعاني من مشاكل الإزدحام وتدريب العاملين في هذه المؤسسات على معرفة نماذج صفوف الإنتظار.

## هـ - Statistique, Files d'attente et simulation

1. عنوان المرجع: Statistique, Files d'attente et simulation

2. المؤلف: BABES Malika.

3. نوع المرجع: كتاب.

4. الإشكالية: ماهي مختلف النماذج الرياضية لنظرية صفوف الإنتظار وإلى أي قسم تنقسم؟

5. النتائج: تنقسم النماذج الأساسية لصفوف الإنتظار إلى أربعة أقسام أساسية وهي  $M/M/C$  بمرحلة واحدة، بعدة مراحل، الأولوية، الشبكات.

تحليل النتائج

بعد الإطلاع على المراجع أعلاه يمكن إستنتاج مايلي:

أوجه التشابه

1. كل المراجع السابقة درست العناصر الأساسية للنظرية وهي: متوسط الوحدات في الصف وفي النظام ومتوسط الوقت في الصف وفي النظام

2. تطرقت المراجع أعلاه إلى ترميز كاندل والعناصر الأساسية له.

أوجه الاختلاف

1. عدد المراحل: دراسات تطرقت للصفوف ذات مرحلة واحدة والأخرى للصفوف ذات الأكثر من مرحلة

2. عدد مراكز الخدمة: توجد دراسات تناولت الصفوف ذات مركز الخدمة الوحيد والأخرى ذات مركز الخدمة المتعدد.

3. الأولوية في إستخدام النظام: توجد دراسات تناولت النظام ذو الأولوية حسب درجة الإحتياج ودراسات تناولت النظام  $fifo$  ودراسات تناولت النظام  $lifo$ .

العلاقة بين الإشكالية المدروسة والدراسات السابقة

الإشكالية المطروحة تبحث عن النموذج الرياضي لكافة أنواع صفوف الإنتظار، أما الدراسات السابقة فبحثت في النموذج المناسب حسب الحالة المدروسة، لذلك تعتبر الإشكالية المطروحة ربط لكل هذه النتائج بشكل مغاير و طرح جديد.<sup>3</sup>

نتيجة

الدراسات السابقة لم تنطرق إلى الجانب الرياضي بشكل كامل، وإقتصرت دراستها على النماذج المناسبة لنوع الدراسة المتطرق لها فقط.

## 2.1 السيوروات العشوائية

### 1.2.1 السيوروة العشوائية

هي مجموعة من المتغيرات العشوائية  $X_t$  بحيث  $t \subseteq T$  و  $T$  جزء من الزمن و  $t$  و  $T$  قيم  $T$  هما:<sup>4</sup>

1- الحالة الأولى

إذا كان  $T$  زمن متقطع  $T = \{T_1, T_2, T_3, \dots\}$  نكون بصدد دراسة متتالية عشوائية نرسم لها بالرمز  $X_t$  أما إذا كانت عبارة عن مجال  $T = [T_1; T_2]$  فتسمى سيوروة عشوائية.

2- الحالة الثانية

إذا كانت قيم  $X_t$  هي قيم محدودة أو قابلة للعد تسمى سيوروة ذات فضاء متقطع أما إذا كانت العكس فتسمى سيوروة ذات فضاء مستمر.

<sup>3</sup>النموذج المناسب: النموذج المختار لدراسة الحالة محل الدراسة

<sup>4</sup>السعدي رجال، الإحصاء الرياضي، منشورات جامعة قسنطينة، السنة الجامعية 2003-2004



### 2.2.1 سلاسل ماركوف

نقول أن المتتالية  $\{X_t : t = 1, 2, 3, \dots\}$  سيرورة ماركوف إذا كان من أجل كل لحظة زمنية  $t$  وكل حالة من  $X_t$  لدينا:

$$P(X_{t+1} = j / X_0 = a, X_1 = b, \dots, X_t = i) = P(X_{t+1} = j / X_t = i)$$

أي أن احتمال كل حادثة مستقبلية  $X_{t+1}$  يتعلق فقط بالحادثة الحالية  $X_t$  وتسمى هذه السيرورة بالسيرورة دون ذاكرة.

### 3.2.1 سيرورة الميلاد والموت

تعتبر هذه السيرورة الأكثر إستخداما لنمذجة ظواهر الإنتظار وتنقسم لقسمين :

أ- سيرورة الميلاد:

تستعمل هذه السيرورة لدراسة الظواهر التي يتجدد ظهورها عبر الزمن<sup>5</sup> مثل وصول الحافلات للمحطة.

إذا كان لدينا في مجتمع  $k$  فرد فإننا نعتبر عن:

1-إحتمال ظهور فرد جديد في المجال الزمني  $\Delta t$ :

$$\lambda_K \Delta t + 0(\Delta t)$$

2-إحتمال عدم ظهور فرد جديد في المجال الزمني  $\Delta t$ :

$$1 - \lambda_K \Delta t + 0(\Delta t)$$

<sup>5</sup>Robert Faure et autres, Précis de recherche opérationnelle, 5eme édition , Dunod, Paris, 2000

ب - سيرورة الموت:

تستعمل هذه السيرورة لدراسة الظواهر التي يتجدد إختفائها عبر الزمن مثل مغادرة الزبائن بعد إتمام الخدمة.

إذا كان لدينا في مجتمع  $k$  فرد فإننا نعبر عن:

1-إحتمال إختفاء فرد في المجال الزمني  $\Delta t$ :

$$\mu K \Delta t + 0(\Delta t)$$

2-إحتمال عدم إختفاء فرد في المجال الزمني  $\Delta t$ :

$$1 - \mu K \Delta t + 0(\Delta t)$$

حيث:

1.  $0(\Delta t)$ : قيمة متناهية في الصغر.

2.  $\lambda_K$ : متوسط الظهور.

3.  $\mu_K$ : متوسط الإختفاء.

ج - سيرورة الميلاد والموت:

تجمع هذه السيرورة بين السيوررتين السابقتين بعد إحداث التطابق بينهما ,مع إقتراض حصول ميلاد أو موت فقط بحيث نتحصل على العلاقات التالية :<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Robert Faure et autres, Précis de recherche opérationnelle, 5eme édition , Dunod, Paris, 2000

1-إحتمال ميلاد بين الزمنين  $t$  و  $t + \Delta t$ :

$$P_{i+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + 0(\Delta t)$$

2-إحتمال موت بين الزمنين  $t$  و  $t + \Delta t$

$$P_{i-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + 0(\Delta t)$$

3-إحتمال عدم ميلاد وعدم موت بين الزمنين  $t$  و  $t + \Delta t$

$$P_i(\Delta t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + 0(\Delta t)$$

4.2.1 توزيع بواسون

هو توزيع خاص بالإحتمالات الصغيرة وهو حالة خاصة من سيرورة الميلاد بحيث  $\lambda_K = \lambda$ .

أ-توزيع بواسون:

$$P(X = K) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^K}{K!}$$

ب-خصائص توزيع بواسون:

1. توزيع متجانس مع الزمن.
2. سيرورة تجميعية بزيادات مستقلة.
3. إحتمال حدوث حادثين في نفس اللحظة مهمل مقارنة بإحتمال حدوث واحدة فقط.
4. يتم إستبعاد الحالات التي إحتمالها مساوي للعدد 1 أو لل 0.

ج-التوقع والتباين لتوزيع بواسون:

1-التوقع:

$$E(X) = \lambda$$

2-التباين:

$$var(X) = \lambda$$

5.2.1 التوزيع الأسّي

هو حالة خاصة من سيرورة الموت بحيث المتغير العشوائي يكون يتبع القانون الأسّي بثابت

$$\mu_K = \mu$$

أ-التوزيع الأسّي:

$$P(X > t) = \exp(-\lambda t)$$

ب-التوقع والتباين للتوزيع الأسّي:

1-التوقع:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

2-التباين:

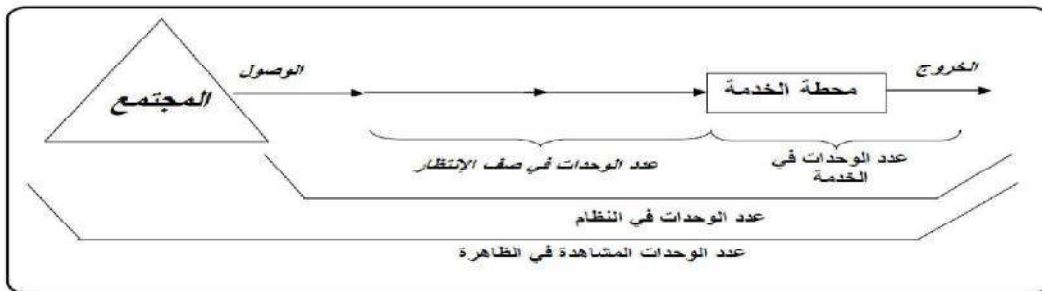
$$var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

7

<sup>7</sup>Robert Faure et autres, Précis de recherche opérationnelle, 5eme édition , Dunod, Paris, 2000

### 6.2.1 صفوف الإنتظار

هو تدفق الوحدات على مراكز الخدمة والإصطفاف في طابور أو عدة طوابير يختلف طولها على حسب درجة التوافد ومدة الخدمة بحيث تأخذ كل وحدة عملها وتغادر. والشكل العام لصفوف الإنتظار كما يلي:<sup>8</sup>



شكل 1.1: الشكل العام لصفوف الإنتظار.

### 7.2.1 العناصر الأساسية في نظرية صفوف الإنتظار

1- متوسط عدد الوحدات في صف الإنتظار:

هو العدد المتوسط للوحدات في صف الإنتظار ويرمز له بالرمز:  $\bar{n}_l$ .

2- متوسط عدد الوحدات في النظام:

هو متوسط عدد الوحدات في الخدمة وصف النظام معا ويرمز له بالرمز:  $\bar{n}_s$ .

3- متوسط الوقت في صف الإنتظار:

هو الوقت المتوقع لبقاء عميل في إنتظار دخوله إلى الخدمة ويرمز له بالرمز:  $\bar{t}_l$ .

4- متوسط الوقت في النظام:

هو متوسط الوقت الذي يقضيه الزبون في الإنتظار والخدمة معا ويرمز له بالرمز:  $\bar{t}_s$ .

<sup>8</sup> أبو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، منشورات التحدي، سرت ليبيا، 1997م

أمثلة لصفوف الإنتظار

الوافدون	الخدمة المقدمة	مركز الخدمة
الزبائن	بيع سلعة معينة	البائع
السفن	التفريغ	الميناء
الطائرات	الهبوط	المدرجات
المكالمات الهاتفية	تحويل المكالمات	الدارات الهاتفية
قدوم السيارات	المراقبة الجمركية	الجمارك
الرسائل الإلكترونية	إلغاء التشفير	جهاز فك التشفير
الألات المعطوبة	التصليح	الميكانيكي أو الكهربائي

9

### 8.2.1 ترميز كاندل

يهدف هذا الترميز لوصف خصائص نظام الإنتظار وذلك بإستعمال سلسلة من الرموز كالتالي:

10

$$T/X/C/K/M/Z$$

1.  $T$  توزيع زمن بين الواصلين.

2.  $X$  توزيع زمن الخدمة.

3.  $C$  عدد موزعي الخدمة.

4.  $K$  سعة النظام.

<sup>9</sup>Kaufmann (A) et autres, Méthodes et modèles de recherche opérationnelle, les mathématiques de l'entreprise, Dunod, Paris, 1972.

<sup>10</sup>Bruno Baynat, Théorie des files d'attente, des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit, Edition Hermes science Europe, Paris, 2000

5.  $M$  عدد طالبي الخدمة.

6.  $Z$  نمط الخدمة.

1- توزيع زمن بين الوصول  $T$

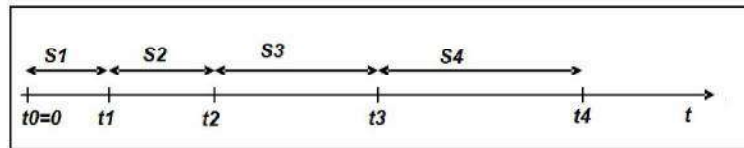
هو المجال من الزمن الذي يفصل بين وصولين متتاليين للصف وهو زمن عشوائي يتبع قانون احتمالي معين ويمكن حسابه بالعلاقة التالية:<sup>11</sup>

$$\Delta t = x_i - x_{i-1}$$

حيث:

1-  $x_i$  زمن وصول الزبون ذو الرتبة  $i$ .

2-  $x_{i-1}$  زمن الوصول للزبون ذو الرتبة  $i-1$ .



شكل 2.1: زمن بين الوصول.

2- توزيع زمن الخدمة  $X$

يقصد بزمن الخدمة الزمن اللازم لأحد مقدمي الخدمة لتقديم الخدمة لأحد العملاء، وقد يكون زمن الخدمة ثابتاً أو متغيراً ذو توزيع احتمالي معروف.

3- عدد موزعي الخدمة  $C$

تختلف أنظمة صفوف الإنتظار على حسب عدد موزعي الخدمة فيوجد صفوف ذات مراكز خدمة متعددة، وأخرى ذات مركز خدمة وحيد.

<sup>11</sup>Bruno Baynat, Théorie des files d'attente, des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit, Edition Hermes science Europe, Paris, 2000

## 4- طاقة النظام K

يقصد بطاقة النظام العدد الأقصى من العملاء الذين يستطيع النظام استقبالهم سواء في مركز الخدمة أو في الصف, وقد يكون محدودا أو غير محدود.

طاقة النظام = عدد الوحدات في الصف + عدد الوحدات في الخدمة.

## 5- عدد طالبي الخدمة M

يقصد بها العدد الأقصى لطالبي الخدمة وقد يكون محدودا أو غير محدود

## 6- نمط الخدمة Z

هي الطريقة التي تقدم بها الخدمة للوحدات وتقسم إلى ثلاثة طرق أساسية وهي:<sup>12</sup>

1 - FIFO القادم أولا يعمل أولا.

2 - LIFO القادم أخيرا يعمل أولا.

3 - PRIORITY تقدم الخدمة حسب درجة الحاجة لها.

<sup>12</sup>Bruno Baynat, Théorie des files d'attente, des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit, Edition Hermes science Europe, Paris, 2000



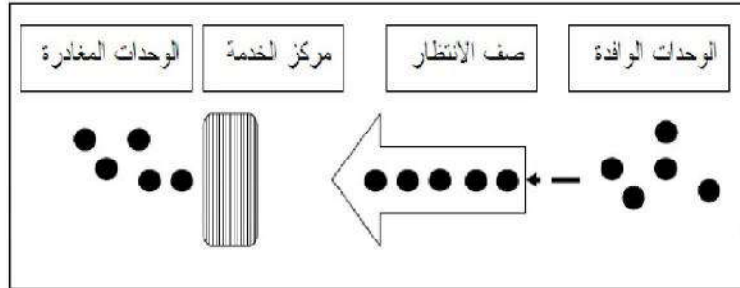
# الفصل الثاني

## النماذج الرياضية لصفوف الإنتظار

### 1.2 النموذج $M/M/1$

#### 1.1.2 تعريف

النموذج  $M/M/1$  هو النموذج ذو صف إنتظار وحيد بمركز خدمة وحيد, ويمكن تمثيل النموذج بالشكل التالي:<sup>1</sup>



شكل 1.2: نموذج صف إنتظار وحيد بمركز خدمة وحيد.

<sup>1</sup> سليمان محمد مرجان, بحوث العمليات, دار الكتب الوطنية, بنغازي ليبيا, 2002.

2.1.2 مميزات النموذج  $M/M/1$ 

- متوسط عدد الزبائن الواصلين يخضع لتوزيع بواسون بمتوسط  $\lambda$ .<sup>2</sup>
- معدل الخدمة يخضع للتوزيع الأسي بمعدل خدمة  $\frac{1}{\mu}$ .
- نظام الخدمة  $fifo$  "من يأتي أولاً يعمل أولاً".
- نظام مستقر  $\lambda > \mu$ .
- الإحتمالات التي إحتمالها 1 أو 0 تهمل في الدراسة.

3.1.2 أنواع النموذج  $M/M/1$ 

ينقسم النموذج حسب عدد الزبائن إلى نوعين:

النوع الأول: عدد الزبائن غير محدود:

المؤشرات الأساسية للنموذج  $M/M/1$  بعدد زبائن غير محدود:

$$1. \text{ إحتمال أن يكون مركز الخدمة مشغول: } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

ملاحظة:

$$\lambda > \mu$$

ومنه:

$$0 \leq \rho \leq 1$$

2. إحتمال وجود  $n$  شخص في النظام:

$$P_n = P_0 \cdot \rho^n = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

<sup>2</sup>تحسين خدمات الموائج باستخدام نماذج صفوف الإنتظار، مذكرة ماجستير، الطالب رشيد غلاب

البرهان

لوجود  $n$  وحدة في النظام خلال الزمن  $[t, t + \Delta_t]$  حيث  $\Delta_t$  قيمة متناهية في الصغر  $\Delta_t \rightarrow 0$  تميز أربع حالات :

- 1- مغادرة وحدة للنظام "إنهاء خدمة وحدة".
- 2- دخول وحدة للنظام "وصول وحدة جديدة للنظام".
- 3- عدم خروج أو دخول أي وحدة للنظام.
- 4- دخول وحدة وخروج وحدة من النظام "هذه الحالة مهملة لأن:  $\Delta_t \rightarrow 0$ "

بإهمال الحالة الرابعة يكون لدينا الحالات التالية:

الإحتمال المقابل	عدد الوحدات في الزمن $t + \Delta_t$	عدد الوحدات المغادرة في $\Delta_t$	عدد الوحدات الوافدة في $\Delta_t$	عدد الوحدات في الزمن $t$	الحالة
$P_{n-1}(t)(\lambda\Delta_t)(1 - \mu\Delta_t)$	$n$	0	1	$n - 1$	01
$P_n(t)(1 - \lambda\Delta_t)(1 - \mu\Delta_t)$	$n$	0	0	$n$	02
$P_{n+1}(t)(1 - \lambda\Delta_t)(\mu\Delta_t)$	$n$	1	0	$n + 1$	03

من خلال الجدول السابق يكون لدينا :

$$P_n(t + \Delta_t) = P_{n-1}(t)(1 - \mu\Delta_t) \cdot \lambda\Delta_t + P_n(t)(1 - \lambda\Delta_t)(1 - \mu\Delta_t) + P_{n+1}(t)(1 - \lambda\Delta_t) \cdot \mu\Delta_t$$

$$P_n(t + \Delta_t) = P_{n-1}(t)\lambda\Delta_t + P_n(t) + P_n(t)(-\lambda - \mu)\Delta_t + P_{n+1}(t)\mu\Delta_t + 0(\Delta_t)$$

نقوم بحساب المعادلة التفاضلية  $P_n(t)'$ :

$$P_n(t)' = \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \frac{P_n(t + \Delta_t) - P_n(t)}{\Delta_t} = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda + \mu)P_n(t) + P_{n+1}(t)\mu$$

بما أن عدد الوحدات مستقل على الزمن فإن:  $P_n(t)' = 0$  وبإهمال تأثير الزمن نجد:

$$P_{n-1}\lambda - (\lambda + \mu)P_n + P_{n+1}\mu = 0 \quad (1.2)$$

إذا كان  $n = 0$  نجد حالتين فقط هما:

الحالة	عدد الوحدات في الزمن $t$	عدد الوحدات الوافدة في $\Delta_t$	عدد الوحدات المغادرة في $\Delta_t$	عدد الوحدات في الزمن $t + \Delta_t$	الإحتمال المقابل
01	0	0	0	0	$P_0(t)(\lambda\Delta_t)(1 - \mu\Delta_t)$
02	1	0	0	1	$P_1(t)(1 - \lambda\Delta_t)(1 - \mu\Delta_t)$

من خلال الجدول نجد: <sup>3</sup>

$$P_0(t + \Delta_t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta_t) + P_1(t)(1 - \lambda\Delta_t)\mu\Delta_t$$

$$= P_0(t) - \lambda P_0(t)\Delta_t + P_1(t)\mu\Delta_t + 0(\Delta_t)^2$$

وباستعمال نفس الطريقة في الحالة العامة نجد أن:

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \quad (2.2)$$

لما:  $n = 1$  في (1.2) نجد:

$$\lambda P_0 - (\lambda + \mu)P_1 + \mu P_2 = 0 \quad (3.2)$$

وبتعويض  $P_1$  من العلاقة (2.2) في العلاقة (3.2) نجد:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{\mu}[-\lambda P_0 + (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)P_0] \\ &= \frac{1}{\mu}[-\lambda P_0 + \frac{\lambda^2}{\mu}P_0 + \lambda P_0] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu} \cdot P_0 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \end{aligned}$$

<sup>3</sup>تحسين خدمات الموائى باستخدام نماذج صفوف الإنتظار، مذكرة ماجستير الطالب رشيد غلاب

وهكذا من أجل كل علاقة  $n$  نحصل على العلاقة العامة:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad (4.2)$$

البرهان

البرهان على صحة العلاقة (4.2) بإستعمال البرهان بالتراجع.

1. من أجل  $n = 0$  نجد:

$$P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 P_0 = 1 \cdot P_0 = P_0$$

ومنه الخاصية الإبتدائية صحيحة.

2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  أي:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

3. نبرهن صحة الخاصية من أجل  $n + 1$  أي: <sup>4</sup>

$$P_{n+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot P_n$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$  ومنه فهي صحيحة مهما يكن  $n \geq 0$ .

<sup>4</sup>تحسين خدمات الموافى بإستخدام نماذج صفوف الإنتظار، مذكرة ماجستير الطالب رشيد غلاب

3-إحتمال عدم وجود أي وحدة في النظام:

$$P_0 = 1 - \rho$$

البرهان

لدينا:

(5.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot \rho^n = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n}$$

ولدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} = \frac{1}{1 - \rho} \quad (6.2)$$

لأن:  $0 \leq \rho \leq 1$ .

بتعويض (5.2) في (6.2) نجد:

$$P_0 \frac{1}{1 - \rho} = 1 - \rho$$

5

4-متوسط عدد الوحدات في النظام:

$$\bar{n}_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

البرهان

$$\bar{n}_s = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n \cdot P_0 = P_0 \cdot \rho \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} =$$

$$\rho \cdot P_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\rho^n)' = P_0 \cdot \rho [\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n]' = \rho \cdot P_0 \left( \frac{1}{1 - \rho} \right)' = \rho P_0 \cdot \frac{1}{1 - \rho^2}$$

<sup>5</sup>تحسين خدمات الموازي باستخدام نماذج صفوف الإنتظار، مذكرة ماجستير الطالب رشيد علاب

$$\begin{aligned}\bar{n}_s &= \rho.(1 - \rho). \frac{1}{(1 - \rho)^2} = \rho. \frac{1}{1 - \rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\mu - \lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu - \lambda} \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}\end{aligned}$$

5-متوسط الوقت في النظام:

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

البرهان

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}_s}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

6-متوسط عدد الوحدات في صف الإنتظار:

$${}^6 \bar{n}_l = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

البرهان

$$\bar{n}_l = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \bar{n}_s - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$\begin{aligned} \bar{n}_s - (1 - P_0) &= \bar{n}_s - (1 - (1 - \rho)) = \bar{n}_s - \rho \\ &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda\mu - \lambda\mu + \lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \end{aligned}$$

7-متوسط الوقت في صف الإنتظار:

$$\bar{t}_l = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

البرهان

$$\bar{t}_l = \frac{\bar{n}_l}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\lambda \mu(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

<sup>6</sup>تحسين خدمات الموائء باستخدام نماذج صفوف الإنتظار، مذكرة ماجستير الطالب رشيد غلاب



### 4.1.2 النوع الثاني: النوع المحدود

يوجد عدة أنواع للنموذج على حسب نوع المحدودية وهي: <sup>7</sup>

1. النموذج  $M|M|1|fifo|N|\infty$

العدد الأعظمي للوحدات المسموح لها بالتواجد في النظام محدود ويساوي  $N$  مما يعني أن عدد الوحدات في الصف هو  $N - 1$ .

1-مميزات النموذج:

- العدد الأعظمي للنظام محدود.
- معدل الوصول الفعلي للوحدات  $\lambda > \lambda_{eff}$ .
- $\rho$  ليس بالضرورة أقل من 1.

2-مؤشرات النموذج  $M|M|1|fifo|N|\infty$

1. إحتمال وجود  $n$  وحدة في النظام:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N-1}} \rho^n & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{N+1} & \rho = 1 \end{cases}$$

2. متوسط عددالوحدات في النظام:

$$\bar{n}_s = \begin{cases} \frac{\rho[1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} & \rho \neq 1 \\ \frac{N}{2} & \rho = 1 \end{cases}$$

3. معدل الوصول الفعلي:

بما أن إمكانية وصول وحدة جديدة للصف محدودة فإن معدل الوصول الفعلي يكون  $\lambda_{eff}$  بحيث:

$$\lambda_{eff} = \lambda(1 - P_N)$$

بحيث:  $1 - P_N$  هو إحتمال عدم وجود  $N$  وحدة في النظام.

4. متوسط عدد الوحدات في صف الإنتظار:

$$\bar{n}_i = \lambda_{eff} - \bar{t}_i$$

<sup>7</sup>تحسين خدمات الموائى باستخدام نماذج صفوف الإنتظار، مذكرة ماجستير الطالب رشيد غلاب

5. متوسط الوقت في النظام:

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}_s}{\lambda_{eff}}$$

6. متوسط الوقت في الصف:

$$\bar{t}_l = \bar{n}_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\bar{n}_l}{\lambda_{eff}}$$

2. النموذج  $M|M|1|fifo|\infty|N$

مميزات النموذج:

- المجتمع محدود.
- يتغير معدل الوصول على حسب عدد الوحدات في الصف.<sup>8</sup>

المؤشرات الأساسية للنموذج

1. احتمال عدم وجود أي وحدة في النظام:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

2. احتمال وجود  $n$  وحدة في النظام:

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

3. متوسط عدد طالبي الخدمة في النظام:

$$\bar{n}_s = \bar{n}_l + (1 - P_0) = N - \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda} + 1 - P_0$$

4. متوسط عدد طالبي الخدمة في الصف:

$$\bar{n}_l = N - \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda(1 - P_0)}$$

5. متوسط الوقت في الصف:

$$\bar{t}_l = \frac{\bar{n}_l}{(N - \bar{n}_s)\lambda}$$

6. متوسط الوقت في النظام:

$$\bar{t}_s = \bar{t}_l + \frac{1}{\mu}$$

<sup>8</sup> تحسين خدمات الموائى باستخدام نماذج صفوف الإنتظار، مذكرة ماجستير الطالب رشيد غلاب

3. النموذج  $G|M|1|fifo|\infty|\infty$

أ-مميزات النموذج:

معدل الخدمة يتبع التوزيع العام  $\mu$ .

ب- مؤشرات النموذج:

1. معدل الخدمة مشغول:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

2. متوسط عدد طالبي الخدمة في الصف:

$$\bar{n}_l = \frac{\lambda^2 f^2 + (\frac{\lambda}{\mu})^2}{2[1 - \frac{\lambda}{\mu}]}$$

بحيث  $f^2$  هو التباين.

3. متوسط عدد طالبي الخدمة في النظام:

$$\bar{n}_s = \bar{n}_l + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. متوسط الوقت في النظام:

$$\bar{t}_s = \bar{t}_l + \frac{1}{\mu}$$

5. متوسط الوقت في الصف:

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}_l}{\lambda}$$

6. إحتمال عدم وجود أي وحدة في النظام:

$$P_0 = 1 - (\frac{\lambda}{\mu})$$

\* حالة خاصة للنموذج  $G|M|1|fifo|\infty|\infty$

في حالة: <sup>9</sup>

$$f^2 = 0$$

أ- مميزات النموذج:

معدل الخدمة ثابت.

ب- مؤشرات النموذج:

1- متوسط الوحدات في النظام:

$$n_s = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)} + \frac{\lambda}{\mu}$$

2- متوسط الوحدات في صف الإنتظار:

$$n_l = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

3- متوسط الوقت في النظام:

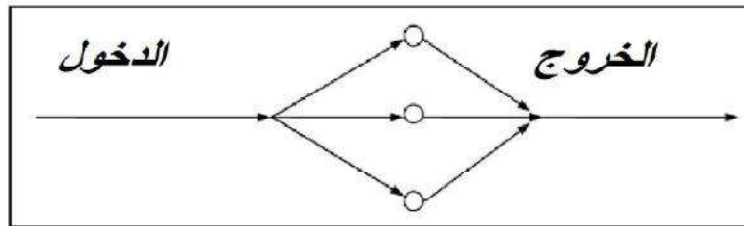
$$t_s = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

4- متوسط الوقت في صف الإنتظار:

$$t_l = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)} + \frac{1}{\mu}$$

## 2.2 النموذج M/M/C

النموذج M/M/C هو النموذج ذو صف الإنتظار الوحيد ومراكز الخدمة المتعددة ويمثل بالشكل التالي: <sup>10</sup>



شكل 2.2: النموذج M/M/C

<sup>9</sup>دراسة صفوف الإنتظار في مؤسسات القطاع الصحي، مذكرة ماستر من إعداد الطالبين: علو رشيد وديدي عز الدين.

<sup>10</sup>الطالب:وقاد إبراهيم

### 1.2.2 مميزات النموذج

- يوجد أكثر من مركز تقديم خدمة.
- توزيع الوصول يتبع بواسون بمتوسط  $\lambda$ .
- توزيع الخدمة يتبع القانون الأسي بمتوسط  $\frac{1}{\mu}$ .
- نظام الأولوية من يأتي أولاً يعمل أولاً.
- معدل الخدمة ثابت لكل مراكز الخدمة.<sup>11</sup>

### 2.2.2 النموذج $M/M/C/fifo/\infty/\infty$

المؤشرات الأساسية للنموذج:

1. احتمال مركز الخدمة مشغول:  $\frac{\lambda}{c\mu}$ <sup>12</sup>

البرهان

بما أن النظام مربوط على التفرع فإن:

$$\rho = \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} + \dots + \frac{\mu}{\lambda}} = \frac{1}{\frac{c\mu}{\lambda}} = \frac{\lambda}{c\mu}$$

2. احتمال وجود  $n$  شخص في النظام:

$$P_0 = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} . P_0 & 1 \leq n \leq s \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s! s^{n-s}} . P_0 & n \geq s \end{cases}$$

ملاحظة:

- معدل الوصول  $\lambda$  ثابت مهما يكن عدد الوحدات في الطابور.
- معدل الخدمة يختلف على حسب عدد الوحدات في النظام و تميز حالتين:

• إذا كان:  $1 \leq n \leq c$   $\mu_n = n\mu$

• إذا كان:  $n \geq c$   $\mu_n = c\mu$

<sup>11</sup>دراسة صفوف الإنتظار في مؤسسات القطاع الصحي، مذكرة ماستر من إعداد الطالبين: علو رشيد وديدي عز الدين.  
<sup>12</sup>دور إستخدام نماذج صفوف الإنتظار في تحسين جودة الخدمات الصحية، رسالة ماجستير، من إعداد الطالبة دريدي أحلام.

البرهان

من نظرية الميلاد والموت نجد:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(t + \Delta_t) = (1 - \lambda\Delta_t)P_0(t) + \mu\Delta_t P_1(t) \\ \\ P_n(t + \Delta_t) = \lambda\Delta_t P_{n-1}(t) + [1 - (\lambda + n\mu)\Delta_t]P_n(t) + (n+1)\mu\Delta_t P_{n+1}(t) \quad 1 \leq n \leq c \\ \\ P_n(t + \Delta_t) = \lambda\Delta_t P_{n-1}(t) + [1 - (\lambda + c\mu)\Delta_t]P_n(t) + c\mu\Delta_t P_{n+1}(t) \quad \forall n \geq c \end{array} \right.$$

نقوم بحساب المعادلة التفاضلية لما  $(\Delta_t \rightarrow 0)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \\ P'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_n(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) \quad 1 \leq n \leq c \\ \\ P'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + c\mu)P_n(t) + c\mu P_{n+1}(t) \quad \forall n \geq c \end{array} \right.$$

بالتراجع نجد أن:

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \cdot P_0 & 1 \leq n \leq c \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{c!c^{n-c}} \cdot P_0 & \forall n \geq c \end{cases}$$

3. إحتمال عدم وجود أي وحدة في النظام:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!(1 - \frac{\lambda}{\mu c})}}$$

البرهان

لدينا:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n &= 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} P_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{c!c^{n-c}} P_0 = 1 \\ \Rightarrow P_0 [\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{c!c^{n-c}}] &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{c!c^{n-c}}}$$
 (7.2)

نضع في العلاقة (7.2)  $k = n - c$  نجد:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{c+k}}{c!c^k}$$
 (8.2)

لدينا:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{c+k}}{c!c^k} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{c+1}}{c!c} + \dots = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} [1 + \frac{\lambda}{\mu c} + (\frac{\lambda}{\mu c})^2 + \dots]$$

ولدينا:

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

ومنه:

$$1 + \frac{\lambda}{\mu c} + (\frac{\lambda}{\mu c})^2 + (\frac{\lambda}{\mu c})^3 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{\lambda}{\mu c})^n}{1 - (\frac{\lambda}{\mu c})} = \frac{1}{1 - (\frac{\lambda}{\mu c})}$$
 (9.2)

نعوض (9.2) في (8.2) نجد:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu c}}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!(1 - \frac{\lambda}{\mu c})}}$$

4. متوسط عدد الوحدات في النظام:

$$n_s = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{c+1}}{c!c(1 - \frac{\lambda}{\mu c})^2} \cdot P_0$$

5. متوسط عدد الوحدات في صف الإنتظار:

$$\bar{n}_l = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} k (\frac{\lambda}{\mu c})^k$$

6. متوسط الوقت في صف الإنتظار:

$$\bar{t}_i = \frac{c \cdot \mu \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!(c\mu - \lambda)^2} P_0$$

7. متوسط الوقت في النظام:

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{\mu \cdot c! c \left(1 - \frac{\lambda}{\mu c}\right)^2} \cdot P_0$$

### 3.2.2 النموذج $M/M/C/fifo/N/\infty$

أ- مميزات النموذج:

- أكبر عدد من الوحدات في النظام هو  $N$ .
- أكبر عدد من الوحدات في الصف هو  $N - c$ .
- معدلات الوصول والخدمة: <sup>13</sup>

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & 0 \leq n \leq N \\ 0 & n \geq N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 \leq n < c \\ nc & c < n \leq N \end{cases}$$

ب- مؤشرات النموذج:

1. إحتمال وجود  $n$  وحدة في النظام:

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0 & 0 \leq n < c \\ \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} \cdot P_0 & c < n \leq N \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda_n}{\mu_n} \quad \text{علما أن:}$$

2. إحتمال عدم وجود اي وحدة في النظام:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{P_n}{n!} + \rho^c \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}}{c!(1 - \frac{\rho}{c})}} & \frac{\rho}{c} \neq 1 \\ \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{P_n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} (N - c + 1) \right]^{-1} & \frac{\rho}{c} = 1 \end{cases}$$

<sup>13</sup> دور إستخدام نماذج صفوف الإنتظار في تحسين جودة الخدمات الصحية، رسالة ماجستير، من إعداد الطالبة دريدي أحلام.



3. معدل الوصول الفعلي للنظام  $\lambda_{eff}$  :

$$\lambda_{eff} = \lambda(1 - P_n) = \mu(c - \bar{c})$$

حيث :

- $\bar{c}$  متوسط عدد مراكز الخدمة العاطلة على العمل.
- $(c - \bar{c})$  عدد مراكز الخدمة المشغولة في حالة العمل

4. متوسط عدد طالبي الخدمة في النظام:

$$\bar{n}_s = \bar{n}_l + \left(\frac{\lambda_{eff}}{\mu}\right) = \bar{n}_l + (c - \bar{c})$$

5. متوسط عدد الوحدات في الصف:

$$\bar{n}_f = \begin{cases} \frac{P_0 \cdot \rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \left[1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} \left(1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)\right)\right] & \frac{\rho}{c} \neq 1 \\ \frac{P_0 \rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!} & \frac{\rho}{c} = 1 \end{cases}$$

6. متوسط الوقت في النظام:

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}_s}{\lambda_{eff}}$$

7. متوسط الوقت في الصف:

$$\bar{t}_l = \bar{t}_s - \left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\bar{n}_l}{\lambda_{eff}}$$

#### 4.2.2 النموذج $M/M/C/fifo/N/N$

أ- مميزات النموذج:

- عدد طالبي الخدمة محدود  $N$ .
- طاقة النظام محدودة  $N$ .
- طاقة الصف  $N - c$ .

ب- مؤشرات النموذج:

1. إحتمال وجود  $n$  وحدة في النظام:

$$P_n = \begin{cases} C_N^n \rho^n \cdot P_0 & 0 \leq n \leq c \\ C_N^n \frac{\rho^n \cdot n!}{c! c^{n-c}} P_0 & c < n \leq N \end{cases}$$

2. إحتمال عدم وجود أي وحدة في النظام:

$$P_0 = [\sum_{n=0}^c C_N^n \rho^n + \sum_{n=c+1}^N \frac{C_N^n n! \rho^n}{c! c^{n-c}}]^{-1}$$

3. متوسط عدد الوحدات في صف الإنتظار:

$$\bar{n}_l = \sum_{n=c+1}^N (n-c) \rho^n \quad c > 1$$

4. متوسط عدد الوحدات في النظام:

$$\bar{n}_s = \bar{n}_l + (c - \bar{c}) = \bar{n}_l + \left( \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \right)$$

حيث  $\bar{c}$  يمثل متوسط الوحدات العاطلة على الخدمة بسبب عدم وجود طالبي خدمة وبحسب بالعلاقة التالية:

$$\bar{c} = \sum_{n=0}^c (c-n) \rho^n$$

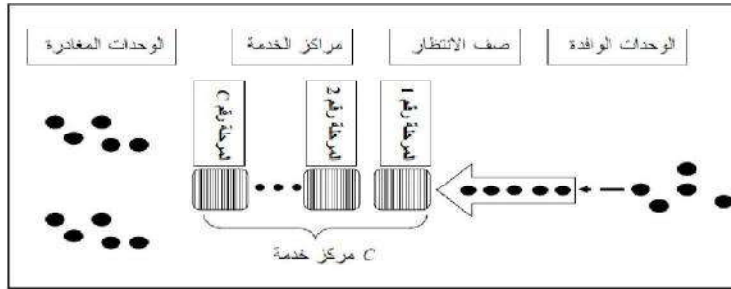
ومعدل الوصول الفعلي علاقته هي: <sup>14</sup>

$$\lambda_{eff} = \mu(c - \bar{c})$$

<sup>14</sup> دور استخدام نماذج صفوف الإنتظار في تحسين جودة الخدمات الصحية، رسالة ماجستير، من إعداد الطالبة دريدي أحلام.

### 3.2 نماذج صفوف الإنتظار ذات عدة مراحل

يقصد بهذا النموذج الأنظمة التي تقدم خدماتها على عدة مراحل و يمثل النموذج انخاص بها بالشكل التالي:<sup>15</sup>



شكل 3.2: نموذج صف إنتظار ذو عدة مراحل

#### 1.3.2 مميزات النموذج

- يحتوي على أكثر من مركز خدمة واحد.
- لا يمكن مغادرة النظام حتى إنتهاء الخدمة.
- لا يمكن الإنتقال من مرحلة حتى نهاية المرحلة السابقة لها.
- نموذج معقد إذا تجاوز مرحلتين ومركزي خدمة يدرس بإستعمال الطرق التكرارية .
- لكل مرحلة  $i$  متوسط خدمة  $\mu_i$  خاص بها.<sup>16</sup>

#### 2.3.2 مؤشرات النموذج

1. إحتمال مركز الخدمة مشغول:

$$\rho = \rho_A \cdot \rho_B$$

بجيث:

$$\rho_A = \frac{\mu_A}{\lambda}; \rho_B = \frac{\mu_B}{\lambda}$$

<sup>15</sup> سليمان محمد مرجان ,بحوث العمليات ,دار الكتب الوطنية,بنغازي ليبيا,2002

<sup>16</sup>Babes(M), Statistique, Files d'attente et simulation, coll : Le cours d'informatique, OPU, Alger, 1995

2. إحتمال عدم وجود أي وحدة في النظام:

$$P_0 = (1 - \rho_A)(1 - \rho_B)$$

3. إحتمال وجود  $n$  وحدة في النظام:

$$P_n = \sum_{i+j=n} P_{i,j} = (1 - \rho_A)(1 - \rho_B)\lambda^n \sum_{i=0}^n \frac{1}{\mu_A^i \mu_B^{n-i}}$$

البرهان

$P_{i,j}$ : إحتمال وجود  $i$  وحدة في المرحلة  $A$  و  $j$  وحدة في المرحلة  $B$ .

$$P_{i,j} = P (A \text{ وحدة في المرحلة } i) \wedge (B \text{ وحدة في المرحلة } j)$$

$$\Leftrightarrow P (A \text{ وحدة في المرحلة } i) \cap (B \text{ وحدة في المرحلة } j)$$

ولدينا الوحدة  $A$  والوحدة  $B$  مستقلين عن بعضهما البعض ومنه:

$$P_{i,j} = P (A \text{ وحدة في المرحلة } i) \cdot (B \text{ وحدة في المرحلة } j) = P_{i,A} \cdot P_{j,B}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} P_{i,A} = (1 - \frac{\lambda}{\mu_A})(\frac{\lambda}{\mu_A})^i \\ P_{j,B} = (1 - \frac{\lambda}{\mu_B})(\frac{\lambda}{\mu_B})^j \end{cases}$$

ولدينا:

$$\Leftrightarrow j = n - i \Leftrightarrow n = i + j$$

$$P_{j,B} = (1 - \frac{\lambda}{\mu_B})(\frac{\lambda}{\mu_B})^j = P_{n-i,B} = (1 - \frac{\lambda}{\mu_B})(\frac{\lambda}{\mu_B})^{n-i}$$

ولدينا:  $P_n$  تعني وجود  $n$  وحدة في النظام مقسمة بين مرحلتين  $A$  و  $B$  ومنه:

$$P_n = P ((A \text{ وحدة في } 0) \wedge (B \text{ وحدة في } n) \vee$$

$$(A \text{ وحدة في } 1) \wedge (B \text{ وحدة في } n-1) \vee$$

$$(A \text{ وحدة في } 2) \wedge (B \text{ وحدة في } n-2) \vee \dots$$

$$\dots \vee (A \text{ وحدة في } n-1) \wedge (B \text{ وحدة في } 1) \vee$$

$$(A \text{ وحدة في } n) \wedge (B \text{ وحدة في } 0)) \Leftrightarrow$$

$$P_n = P ((A \text{ وحدة في } 0) \cdot (B \text{ وحدة في } n) +$$

$$(A \text{ وحدة في } 1) \cdot (B \text{ وحدة في } n-1) +$$

$$(A \text{ وحدة في } 2) \cdot (B \text{ وحدة في } n-2) + \dots$$

$$\dots + (A \text{ وحدة في } n-1) \cdot (B \text{ وحدة في } 1) +$$

$$(A \text{ وحدة في } n) \cdot (B \text{ وحدة في } 0))$$

17

$$\begin{aligned}
 &= P_{0,A}.P_{n,B} + P_{1,A}.P_{n-1,B} + \dots + P_{n,A}.P_{0,B} = \sum_{i=0}^n P_{i,A}.P_{n-i,B} \\
 &= \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_A}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_A}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_B}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_B}\right)^{n-i} \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_A}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_B}\right) \sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu_A}\right)^i \left(\frac{\lambda}{\mu_B}\right)^{n-i} \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_A}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_B}\right) \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i \lambda^{n-i}}{\mu_A^i \mu_B^{n-i}} \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_A}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_B}\right) \lambda^n \sum_{i=0}^n \frac{1}{\mu_A^i \mu_B^{n-i}}
 \end{aligned}$$

4. متوسط عدد الوحدات في النظام:

$$\bar{n}_s = \frac{\lambda(\mu_A + \mu_B - 2\lambda)}{(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)}$$

البرهان

$$\begin{aligned}
 \bar{n}_s &= \bar{n}_s(A) + \bar{n}_s(B) = \frac{\lambda}{\mu_A - \lambda} + \frac{\lambda}{\mu_B - \lambda} \\
 &= \frac{\lambda(\mu_B - \lambda) + \lambda(\mu_A - \lambda)}{(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)} = \frac{\lambda\mu_B - \lambda^2 + \lambda\mu_A - \lambda^2}{(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)} \\
 &= \frac{\lambda(\mu_B + \mu_A - 2\lambda)}{(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)}
 \end{aligned}$$

5. متوسط عدد الوحدات في الصف:

$$\bar{n}_l = \frac{\lambda^2(\mu_B^2 + \mu_A^2 - \lambda\mu_B - \lambda\mu_A)}{\mu_B\mu_A(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)}$$

البرهان

$$\begin{aligned}
 \bar{n}_l &= \bar{n}_l(A) + \bar{n}_l(B) = \frac{\lambda^2}{\mu_A(\mu_A - \lambda)} + \frac{\lambda^2}{\mu_B(\mu_B - \lambda)} \\
 &= \frac{\lambda^2\mu_B(\mu_B - \lambda) + \lambda^2\mu_A(\mu_A - \lambda)}{\mu_B\mu_A(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)} = \frac{\lambda^2\mu_B^2 - \lambda^3\mu_B + \lambda^2\mu_A^2 - \lambda^3\mu_A}{\mu_B\mu_A(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)} \\
 &= \frac{\lambda^2(\mu_B^2 - \lambda\mu_B + \mu_A^2 - \lambda\mu_A)}{\mu_B\mu_A(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)}
 \end{aligned}$$

<sup>17</sup>Babes(M), Statistique, Files d'attente et simulation, coll : Le cours d'informatique, OPU, Alger, 1995

6. متوسط الوقت في النظام: <sup>18</sup>

$$\bar{t}_s = \frac{(\mu_B + \mu_A - 2\lambda)}{(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)} = \frac{\bar{n}_s}{\lambda}$$

البرهان

$$\begin{aligned} \bar{t}_s &= \bar{t}_s(A) + \bar{t}_s(B) = \frac{1}{\mu_A - \lambda} + \frac{1}{\mu_B - \lambda} \\ &= \frac{\mu_B - \lambda + \mu_A - \lambda}{(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)} = \frac{\mu_A + \mu_B - 2\lambda}{(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)} \end{aligned}$$

7. متوسط الوقت في الصف:

$$\bar{t}_l = \frac{\lambda(\mu_B^2 + \mu_A^2 - \lambda\mu_B - \lambda\mu_A)}{\mu_B\mu_A(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)}$$

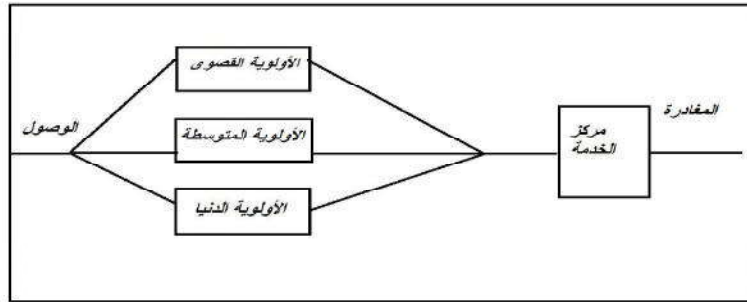
البرهان

$$\begin{aligned} \bar{t}_l &= \bar{t}_l(A) + \bar{t}_l(B) = \frac{\lambda}{\mu_A(\mu_A - \lambda)} + \frac{\lambda}{\mu_B(\mu_B - \lambda)} \\ &= \frac{\lambda\mu_B(\mu_B - \lambda) + \lambda\mu_A(\mu_A - \lambda)}{\mu_B\mu_A(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)} = \frac{\lambda\mu_B^2 - \lambda^2\mu_B + \lambda\mu_A^2 - \lambda^2\mu_A}{\mu_B\mu_A(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)} \\ &= \frac{\lambda(\mu_B^2 - \lambda\mu_B + \mu_A^2 - \lambda\mu_A)}{\mu_B\mu_A(\mu_A - \lambda)(\mu_B - \lambda)} \end{aligned}$$

<sup>18</sup>Babes(M), Statistique, Files d'attente et simulation, coll : Le cours d'informatique, OPU, Alger, 1995

## 4.2 النموذج ذو الأولوية

يقصد بهذا النموذج من الصفوف النظام الذي يأخذ في الحسبان درجة حاجة الزبائن لتلقي الخدمة، ويمثل بالشكل التالي: <sup>19</sup>



شكل 4.2: النموذج ذو الأولوية.

### 1.4.2 خصائص النموذج

- يوجد أكثر من صف إنتظار.
- كل صف إنتظار له زمن وصول  $\lambda_i$  خاص به.
- يوجد عدة مراكز خدمة لها نفس معدل الخدمة  $\mu$ .
- نظام عمل مختلط بين نظام الأولوية والنظام *fifo*.

### 2.4.2 مؤشرات النموذج

- أ-إحتمال إستخدام النظام:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

• بحيث: <sup>20</sup>

$$\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

- ب: متوسط الوقت للزبون في صف الإنتظار في المنطقة K:

$$\bar{t}_K = \frac{1}{A * B_{K-1} * B_K}$$

<sup>19</sup>الطالب وقاد إبراهيم

<sup>20</sup>محاضرات السنة الثانية ماستر إحصاءات وإحصاء جامعة ورقلة، السنة الدراسية: 2016/2017

• ج- متوسط الوقت للزبون في المنطقة K:

$$\bar{t}_S = \bar{t}_K + \frac{1}{\mu}$$

• د- متوسط عدد الزبائن في صف الإنتظار في المنطقة K:

$$\bar{n}_K = \lambda_K * \bar{t}_K$$

بجيث:

$$A = \frac{\lambda}{(1 - \rho)\bar{n}_i}$$

$$B_k = 1 - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{c\mu}$$

$$B_0 = 1$$

$$\bar{n}_i = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{c+1}}{c.c!(1 - \frac{\lambda}{\mu})^2} \cdot P_0$$



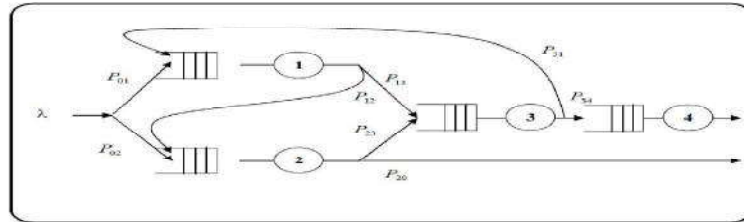
## 5.2 الشبكات

### 1.5.2 تعريف

يقصد بشبكات صفوف الإنتظار مجموعة من أنظمة صفوف الإنتظار البسيطة المركبة مع بعضها البعض وتميز نوعين أساسيين هما: <sup>21</sup>

أ- شبكات صفوف الإنتظار المفتوحة:

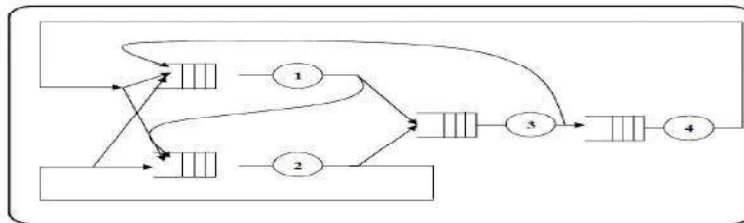
يتوافد الزبائن من خارج النظام ويتلقون الخدمة في مختلف محطات الشبكة ويغادرونها, والشكل التالي يبين نموذجاً من نماذج شبكات الإنتظار المفتوحة: <sup>22</sup>



شكل 5.2: شبكات الإنتظار المفتوحة.

ب- شبكات الإنتظار المغلقة:

يكون عدد الزبائن محدوداً في هذا النموذج ولا يوجد قدوم ولا مغادرة للزبائن والشكل التالي يبين نموذجاً من نماذج شبكات الإنتظار المغلقة: <sup>23</sup>



شكل 6.2: شبكات الإنتظار المغلقة.

<sup>21</sup> Bruno Baynat, Théorie des files d'attente, des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit, Edition Hermes science Europe, Paris, 2000

<sup>22</sup> سليمان محمد مرجان, بحوث العمليات, دار الكتب الوطنية, بنغازي ليبيا, 2002

<sup>23</sup> سليمان محمد مرجان, بحوث العمليات, دار الكتب الوطنية, بنغازي ليبيا, 2002

### 2.5.2 دراسة النموذج

إن الدراسة الرياضية لهذا النموذج معقدة , وصعب الحصول على خصائص ثابتة لشبكات معينة منها >> لأنها تختلف حسب إختلاف عدد مراكز الخدمة وعدد صفوف الإنتظار, والتي تخضع للقوانين المدروسة سابقا في الأنظمة M/M/C, M/M/1... <<<sup>24</sup>.

### 3.5.2 مجالات إستعمال الشبكات

- 1- الإتصالات والكمبيوتر.
- 2- شبكات الأترنات .
- 3- مراكز البحث العلمي.

## 6.2 التكلفة

### 1.6.2 معادلة التكلفة

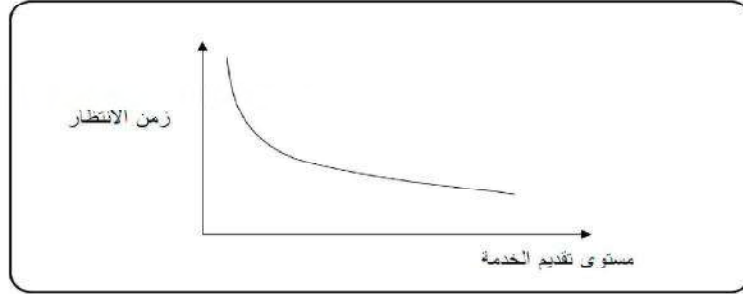
$$T = C.W.Z + K.M$$

- حيث:  $Z$ : (الزمن) عدد الوحدات الزمنية للخدمة.  
 $T$ : التكلفة الكلية.  
 $M$ : عدد الوحدات الزمنية في الصف.  
 $K$ : تكلفة الخدمة لكل وحدة زمنية للزبائن.  
 $c$ : عدد المراكز.  
 $W$ : تكلفة الخدمة لكل وحدة زمنية لمراكز الخدمة.

<sup>24</sup>Bruno Baynat, Théorie des files d'attente, des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit, Edition Hermes science Europe, Paris, 2000

### 2.6.2 العلاقة بين مستوى تقديم الخدمة وتكلفة الإنتظار

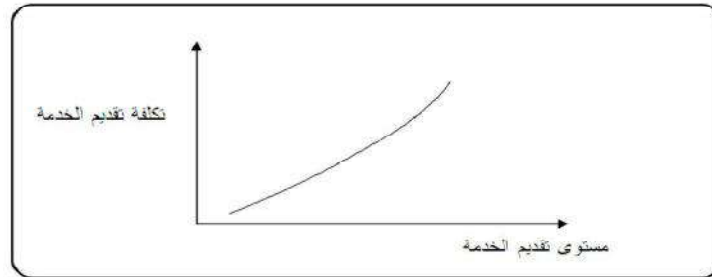
كلما زاد مستوى تقديم الخدمة نقصت تكلفة الإنتظار والمخطط التالي يبين ذلك:<sup>25</sup>



شكل 7.2: العلاقة بين مستوى تقديم الخدمة وتكلفة الإنتظار.

### 3.6.2 العلاقة بين مستوى تقديم الخدمة وتكلفة الخدمة

كلما زاد مستوى تقديم الخدمة زادت تكلفة الخدمة والمخطط التالي يبين ذلك:<sup>26</sup>



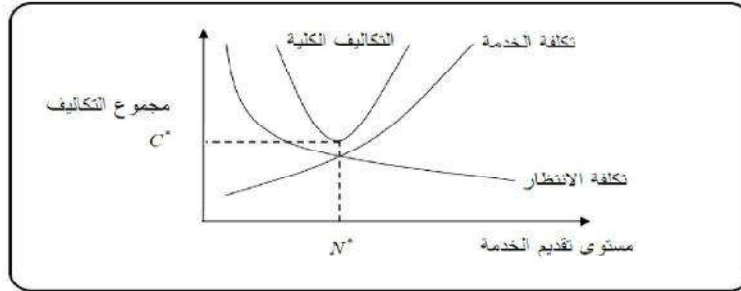
شكل 8.2: العلاقة بين مستوى تقديم الخدمة وتكلفة الخدمة.

<sup>25</sup> سليمان محمد مرجان, بحوث العمليات, دار الكتب الوطنية, بنغازي ليبيا, 2002.

<sup>26</sup> سليمان محمد مرجان, بحوث العمليات, دار الكتب الوطنية, بنغازي ليبيا, 2002.

## 4.6.2 العلاقة بين تكلفة الخدمة وتكلفة الإنتظار

أفضل مستوى خدمة وأقل تكاليف يقع عند النقطة  $(C^*, N^*)$ ، وهي نقطة تقاطع منحنى تكلفة الخدمة وتكلفة الإنتظار والمخطط التالي يبين ذلك: <sup>27</sup>



شكل 9.2: العلاقة بين تكلفة الخدمة وتكلفة الإنتظار.

<sup>27</sup> سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، دار الكتب الوطنية، بنغازي ليبيا، 2002.

# الفصل الثالث

## دراسة حالة: القباضة الرئيسية للبريد بورقلة

### 1.3 حدود الدراسة

الدراسة تمت بالقباضة الرئيسية للبريد بورقلة في الفترة الممتدة من السبت 22 أبريل 2017 م الساعة 8:00 إلى الأربعاء 26 أبريل 2017 م الساعة 18:00.

### 2.3 دراسة النموذج

القباضة الرئيسية للبريد بورقلة تتكون من 8 مراكز، 5 مراكز مخصصة لكل العمليات (محل الدراسة)، أما المراكز الثلاثة الباقية مخصصة لهذه الوحدة مفتوحة لكل الزبائن من الساعة 8:00 إلى 18:00 يومياً عدا الجمعة ونظام العمل فيها يتبع النظام *Fifo* (من يأتي أولاً يعمل أولاً) ومنه النموذج الخالص بهذه الوحدة هو:

$$M \setminus M \setminus 5 \setminus \infty \setminus \infty \setminus Fifo$$

### 3.3 الإشكاليات

أ-هل النموذج  $M \setminus M \setminus 5 \setminus \infty \setminus \infty \setminus Fifo$  صالح لقباضة بريد الجزائر؟  
ب-إذا كان النموذج غير صالح فما هو النموذج المناسب لهذه القباضة؟

### 4.3 الفرضيات

- 1- النموذج غير صالح لهذه القباضة لأن متوسط الوقت الملاحظ أثناء الدراسة كبير .
- 2- النموذج الصالح لقباضة بريد الجزائر الرئيسية هو النموذج:

$$M \setminus M \setminus 6 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$$

### 5.3 زمن الوصول

أ- عدد الواصلين:

عدد الواصلين خلال فترة الدراسة كان كالتالي:

الأيام	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	المجموع
العدد	1435	1218	1276	1363	1574	6866

ب- معدل الوصول:

$$\lambda = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{T} = \frac{6866}{3000} = 2.288667$$

عدد دقائق مدة الدراسة:

$$T = 5 * 10 * 60 = 3000min$$

### 6.3 زمن الخدمة

عدد متلقي الخدمة خلال فترة الدراسة:

الأيام والعدد	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	المجموع
عدد متلقي الخدمة	1390	1135	1182	1302	1521	6530
عدد المتخلفين عن النظام	45	83	34	61	53	336
العدد الكلي	1435	1218	1276	1363	1574	6866

أ- معدل الخدمة:

$$E(x) = \frac{\sum x_i}{T} = \frac{6530}{3000} = 2.17667$$

قيمة الثابت  $\mu$

$$E(x) = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{1}{E(x)} = \frac{3000}{6530} = 0.4594181$$

## 7.3 العناصر الأساسية للنموذج المدروس

معدل تشغيل النظام

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu c} = \frac{2.2887}{5 * 0.4594} = 0.9963329 = 99.64\%$$

إحتمال عدم وجود أي شخص في النظام

$$\rho_0 = \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \right]^{-1} = \left[ \sum_{n=0}^4 \frac{(4.9819)^n}{n!} + \frac{(4.9819)^5}{5!(1 - 0.9964)} \right]^{-1} = 0.0001421098$$

عدد الزبائن في الصف

$$\bar{n}_l = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{c+1}}{c \cdot c! (1 - \frac{\lambda}{\mu c})^2} \cdot \rho_0 = \frac{2.1404}{0.0078} = 274.1795 \simeq 274 \text{ client}$$

عدد الزبائن في النظام

$$\bar{n}_s = \bar{n}_l + \frac{\lambda}{\mu} = 274.1795 \text{ client}$$

متوسط الوقت في الصف

$$\bar{t}_l = \frac{\bar{n}_l}{\lambda} = \frac{274.4103}{2.2887} = 119.6221 \text{ min}$$

متوسط الوقت في النظام

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}_s}{\lambda} = 119.7988 \text{ min}$$

### 8.3 تحليل النتائج

#### 1.8.3 طول الصف

الصف يتألف من عدد كبير من الوحدات في الإنتظار مما يؤدي إلى مغادرة بعض الوحدات .

#### 2.8.3 وقت الإنتظار

وقت الإنتظار طويل جدا مايقارب ساعتين مما يؤدي إلى تعطل مصالح الزبائن.

نتيجة النموذج  $M \setminus M \setminus 5 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$  نموذج غير صالح للقبضة الرئيسية لبريد الجزائر بورقلة.

### 9.3 النموذج المقترح

النموذج المقترح للقبضة الرئيسية لبريد الجزائر بورقلة هو:

$$M \setminus M \setminus 6 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$$

### العناصر الأساسية للنموذج المقترح هي:

معدل تشغيل النظام:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu c} = \frac{2.2887}{6 * 0.4594} = 0.8302774 = 83.03\%$$

إحتمال وجود 0 شخص في النظام:

$$\rho_0 = [90.22457 + 125.0762]^{-1} = 0.004644665$$

متوسط عدد الزبائن في الصف:

$$\bar{n}_l = \frac{(4.9819)^7}{6 * 6!(1 - 0.8303)^2} * 0.004644665 = 2.841925 \simeq 3client$$

متوسط عدد الزبائن في النظام:

$$\bar{n}_s = \bar{n}_l + \frac{\lambda}{\mu} = 7.82359 \simeq 8client$$



متوسط الوقت في صف الانتظار:

$$\bar{t}_l = \frac{\bar{n}_l}{\lambda} = \frac{2.8408}{2.2887} = 1.241738min$$

متوسط الوقت في النظام:

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}_s}{\lambda} = \frac{7.8227}{2.2887} = 3.418405min$$

### 1.9.3 مقارنة بين النموذجين

طول الصف ومدة الإنتظار:

التنمؤج $M \setminus M \setminus 6 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$	التنمؤج $M \setminus M \setminus 5 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$	العناصر الأساسية للنمؤج
3	269	$\bar{n}_l$
8	274	$\bar{n}_s$
3min25s	2h2min5s	$\bar{t}_s$
1min14s	1h59min54s	$\bar{t}_l$
0.8303	0.9964	معدل تشغيل النظام

النموذج  $M \setminus M \setminus 6 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$  أقل صف إنتظار:  $1h59min$  كمعدل, ومنه من ناحية الوقت وطول الصف النموذج المناسب هو النموذج  $M \setminus M \setminus 6 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$  بدلا من النموذج المستعمل الآن  $M \setminus M \setminus 6 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$

### 2.9.3 التكلفة

أ-معادلة التكلفة:

$$T = C.W.Z + K.M$$

$Z$ : (الزمن) عدد دقائق الخدمة  
 $T$ : التكلفة الكلية  
 $M$ : عدد الدقائق في الصف  
 $K$ : (حسب الأجر الوطني الأدنى المضمون) تكلفة كل دقيقة  
 $c$ : عدد المراكز  
 $W$ : تكلفة كل دقيقة (حسب سلم الأجور رتبة 21 أعلى درجة لعمال البريد)

ب-تكلفة النظام  $M \setminus M \setminus 5 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$ :

$$Z = 2.176667min ; C = 5وحدة ; M = 117.6221min$$

$$K = \frac{18000}{30 * 8 * 60} = 1.25DA$$

$$W = \frac{77000}{30 * 8 * 60} = 5.347222DA$$

$$T_5 = 5 * (5.35) * 2.18 + 1.25 * 120 = 205.2232DA$$

تكلفة النظام  $M \setminus M \setminus 6 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$

$$WN = ; KN = 1.25DA ; ZN = 2.176667min ; CN = 6وحدة ; MN = 1.241738min$$

$$5.347222DA$$

$$TN = 71.3869DA$$

نتيجة:

النموذج  $M \setminus M \setminus 6 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$   
 أقل تكلفة من النموذج  $M \setminus M \setminus 5 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$  ب:  $133.8363DA$

### 10.3 المحاكاة في برنامج ال R

## الخلاصة

من خلال هذه الدراسة تمكنا من إستخلاص النتائج التالية:

1. تطبيق نظرية صفوف الإنتظار في المراكز الخدمية ليست خيار بل ضرورة ماسة لكل المؤسسات.
2. تنوع نظرية صفوف الإنتظار حسب عدد المراكز إلى قسمين أساسيين هما :
  - 1- صفوف ذات مركز خدمة وحيد
  - 2- صفوف ذات عدة مراكز خدمة
3. تنقسم نظرية صفوف الإنتظار حسب عدد مراحل العمل إلى نوعين أساسيين هما:
  - 1- صفوف بمرحلة واحدة.
  - 2- صفوف بأكثر من مرحلة.
4. من حيث نظام التشغيل تنقسم صفوف الإنتظار إلى :
  - 1- صفوف بنظام الأولوية
  - 2- صفوف تتبع النظام *fifo*
  - 3- صفوف تتبع النظام *lifo*
  - 4- صفوف مختلطة.
5. النموذج المناسب للقباضة الرئيسية للبريد ورقلة هو النموذج  $M \setminus M \setminus 6 \setminus \infty \setminus \infty \setminus FiFo$  لأنه الأقل تكلفة والأقل وقت إنتظار والأقصر صفاء.

# المراجع العلمية

- [1] الإحصاء الرياضي, السعدي رجال, منشورات جامعة قسنطينة, السنة الجامعية 2003-2004
- [2] بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المنشأة, علي حسين علي وأخرون, دار زهران عمان, 1999
- [3] بحوث العمليات, سليمان محمد مرجان, دار الكتب الوطنية, بنغازي ليبيا, 2002
- [4] بحوث العمليات, أبو القاسم مسعود الشيخ, منشورات التحدي, سرت ليبيا, 1997م
- [5] تحسين خدمات الموائى باستخدام نماذج صفوف الإنتظار, مذكرة ماجستير, الطالب رشيد علاب
- [6] تحليل كمي في الإدارة, علي حسن شرقي وأخرون, بحوث العمليات, دار الميزة للنشر والتوزيع عمان, 1997
- [7] دراسة صفوف الإنتظار في مؤسسات القطاع الصحي, مذكرة ماستر, من إعداد الطالبين: علو رشيد وديدي عز الدين.
- [8] دور إستخدام نماذج صفوف الإنتظار في تحسين جودة الخدمات الصحية, رسالة ماجستير, من إعداد الطالبة دريدي أحلام.
- [9] محاضرات السنة الثانية ماستر إحتتمالات وإحصاء جامعة ورقلة, السنة الدراسية: 2016/2017
- [10] BABES(M), STATISTIQUE, FILES D'ATTENTE ET SIMULATION, COLL : LE COURS D'INFORMATIQUE, OPU, ALGER, 1995
- [11] BRUNO BAYNAT, THÉORIE DES FILES D'ATTENTE, DES CHAÎNES DE MARKOV AUX RÉSEAUX À FORME PRODUIT, EDITION HERMES SCIENCE EUROPE, PARIS, 2000
- [12] KAUFMANN (A) ET AUTRES, MÉTHODES ET MODÈLES DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE, LES MATHÉMATIQUE DE L'ENTREPRISE, DUNOD, PARIS, 1972.
- [13] ROBERT FAURE ET AUTRES, PRÉCIS DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE, 5EME ÉDITION , DUNOD, PARIS, 2000

## ملخص

تتناول هذه المذكرة موضوع عملية النمذجة الرياضية لصفوف الانتظار باستعمال سيرورات العد (سيرورة بواسون، السيرورة الأسية و سيرورات الميلاد و الموت) وذلك من أجل استخلاص القوانين الأساسية لنظرية صفوف الانتظار.

تشتمل هذه المذكرة على جانب نظري وجانب تطبيقي، يتناول الجانب التطبيقي دراسة ميدانية لتطبيق نظرية صفوف الانتظار في البريد المركزي لبلدية ورقلة.

**كلمات مفتاحية:** صفوف الانتظار - السيرورة الأسية - متوسط الوقت - متوسط الوحدات في الصفوف والنظام - النمذجة الرياضية.

## Abstract

This paper deals with the subject of mathematical modeling process queues by using counting processes (Poisson process and exponential processes and birth and death processes), and to define the fundamental laws of the theory of queues.

This paper is composed of two parts (theoretical and practical). It deals with the practical aspect of the field study of the application of the theory of queues in the postal center of the city of Ouargla.

**Keywords:** queues - exponential process - average duration - average number in the queue - mathematical modeling.

## Résumé

Ce mémoire traite le sujet des files d'attente du processus de modélisation mathématique en utilisant les processus de comptage (processus Poisson et processus exponentielles et processus de naissance et de la mort), et afin de définir les lois fondamentales de la théorie des files d'attente.

Ce mémoire est composé de deux parties (théorique et pratique). Il traite l'aspect pratique, l'étude sur terrain de l'application de la théorie des files d'attente dans le centre postal de la ville de Ouargla.

**Mots-clés:** files d'attente - processus exponentielle - durée moyenne - nombre moyen dans la file - modélisation mathématique.