UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Algèbre et Géométrie

Par :Oumelkhir Boukhelkhal

Thème

Algèbres de Weyl

Soutenu publiquement le : 01 /06 /2017

Devant le jury composé de :

Youmbai Mohammed Laid	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Guerboussa Yassine	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Badidja Salim	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Benmoussa Mohammed Tayeb	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Je dédie ce mémoire à :

L'esprit de mon père.

Ma chére mère.

Mes frères et mes sœurs.

Je le dédie aussi à mes amis,tout mes collègues de travaille et d'étude.

A tous ceux qui m'a aidé.

Remerciement

Avant toute considération,je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je remercie M^{r} ***Benmoussa Mohammed Tayeb***, mon encadreur.

Je remercie beaucoup mes Professeurs M^{r} **Guerboussa Yassine** etM^{r} **Bahayuo Mohammed Amine** .

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Les algèbres de Weyl sont intimement liée à l'étude des systèmes de racines, ce qui forment la base pour la classification des algèbres de Lie simples, et aussi l'étude des groupes de Lie et des groupes algébriques.

Ce mémoire traite des notions élémentaires sur Les algèbres de Weyl et il organisé comme suit :
Le premier chapitre contient les algèbres de Lie.
Le deuxième chapitre étude les systèmes de racines, chambres de Weyl et groupe de Weyl.
Le troisième contient les algèbres de Weyl et leurs propriétés algébriques.

Chapitre 1

Algèbres de Lie

1.1 Algèbres de Lie

1.1.1 Groupe de Lie

Définition 1.1.1. *Un groupe de Lie est un ensemble G muni d'une structure de groupe est d'une structure de variété différentielle.Telles que les applications :*

$$\begin{array}{rcl} m : G \times G & \rightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} i : G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

sont de classe C^∞.

Exemples 1.1.1.

1. *Le groupe additif* $(\mathbb{R}, +)$.
2. *Le groupe multiplicatif* $(\mathbb{R}^\times, .)$.
3. *Le groupe* $GL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), detA \neq 0\}$.

1.1.2 Algèbres de Lie

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Définition 1.1.2. *Une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel V muni d'une application bilinéaire :*

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (X,Y) & \mapsto & [X,Y] \end{array}$$

Vérifiant :

- $[X,X]=0$ *pour tout X.*
- $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$, *pour tout X,Y,Z (l'identité de Jacobi).*

Exemples 1.1.2.

1. *Tout espace vectoriel muni de $[X,Y]=0$ est une algèbre de Lie.*
2. *Soit A une algèbre associative. On peut munir A d'une structure d'algèbre de Lie en posant $[X,Y]=XY-YX$.*

1.1.3 Sous-algèbres et Idéaux

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.3. *Un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est appelé une sous-algèbre de Lie si il est stable sous le crochet de Lie, c'est-à -dire $\forall X,Y\in\mathfrak{h},[X,Y]\in\mathfrak{h}$.*

Exemple 1.1.1. *L'algèbre de Lie $s\ell(n,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.*

Définition 1.1.4. *Un idéal de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel I de $\mathfrak{g}$ tel que pour tout $X\in I$ et tout $Y\in\mathfrak{g}$, nous avons : $[X,Y]\in I$.*

Exemple 1.1.2. *L'ensemble $z(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{g},\ \forall Y\in\mathfrak{g},\ [X,Y]=0\}$ est un idéal appelé le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

1.1.4 Homomorphisme et Représentation

Définition 1.1.5. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$.*
Une application linéaire $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un homomorphisme si $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$, pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

Définition 1.1.6. *Une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V est un homomorphisme d'algèbres de Lie : $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$*

Exemple 1.1.3. *La représentation adjointe*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad} : & \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g}\ell(\mathfrak{g}) \\ & X & \mapsto & \mathrm{ad}_X \end{array}$$

1.2 Algèbres de Lie nilpotentes

Définition 1.2.1. *soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. la suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$ est la suite décroissante d'idéaux définie par :*
$C^1(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}$ *et* $C^n(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, C^{n-1}]; \forall n > 1.$
$[\mathfrak{g}, C^{n-1}] = \langle [X,Y] \rangle; X \in \mathfrak{g}, Y \in C^{n-1}.$
on dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotente s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :$C^n(\mathfrak{g}) = 0$.

Exemple 1.2.1.

1. *Tout algèbre de Lie abélienne est nilpotente.*

2. *Tout sous-algèbre de Lie et tout quotient d'une algèbre de Lie nilpotente est nilpotente .*

Théorème 1.2.1. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $n \geq 1$ tel que $C^n(0) = 0$*

2. *Il existe* $n \geq 1$ *tel que pour tout :* $X_1, ...X_n \in \mathfrak{g}; adX_n adX_{n-1}.....adX_2(X) = 0$

3. *Il existe une chaine d'idéaux de* $\mathfrak{g}, \mathfrak{g} = a_1 \supset .... \supset a_n$ *tell que pour tout* i,$a_i \setminus a_{i+1}$ *soit centrale dans* $\mathfrak{g} \setminus a_{i+1}$

Définition 1.2.2. *un drapeau de* V *est un suite de sous-espaces vectoriels enbiotés :*
$0 = V_0 \subset V_1 \subset ...V_d = V$ *tel que :* $dim_k V_i = i$*, pour tout* i*.*

Théorème 1.2.2. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de dimension finie supérieure à 1 et*
$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(v)$ *une représentation de* $\mathfrak{g}$ *de dimension finie.*
Si pour tout $X \in \mathfrak{g}, \rho(X)$ *est nilpotente,alors il existe un vecteur non nul* $v \in V$ *tel que pour tout* $X \in \mathfrak{g}$*,on ait* $Xv = \rho(X)(v) = 0$*.*

Démonstration :

voir [humphreys]

Corollaire 1.2.1. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de dimension finie et* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(v)$ *une représentation de* $\mathfrak{g}$ *de dimension finie.*
On suppose que pour tout $X \in \mathfrak{g}, \rho(X)$*est nilpotente, alors il existe un drapeau* $F := V_0 \subset V_1 \subset ...V_n = V$ *tel que :*
$\rho(g) \subset n(F) = \{\ f \in End(V)/f(V_i) \subset V_{i-1}\}$.

Théorème 1.2.3. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de dimension finie,alors* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente si et seulement si* $ad_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *est nilpotente pour tout* $X \in \mathfrak{g}$

Démonstration :

1. on suppose que $ad(X)$ est nilpotente pour tout $X \in \mathfrak{g}$, alors il existe une représentation adjoint $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(v)$,on obtient un drapeau $0 \subset a_1 \subset .... \subset a_n = \mathfrak{g}$ tel que : $ad(g) \subset n(F)$,c'est -à -dire pour tout $X \in g$ et pour tout i,$ad(X)(a_i) \subset a_{i-1}$

2. on suppose que $\mathfrak{g}$ est nilpotente ;alors :$adX_n adX_{n-1}.....adX_2(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$,donc en particulier $(adX)^{n-1} = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

1.3 Algèbre de Lie résoluble

Définition 1.3.1. *soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.*
la suite dérivée de $\mathfrak{g}$ est la suite décroissante de sous-algèbres définie par :
$D^1(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}$ *et* $D^n(\mathfrak{g}) := [D^{n-1}, D^{n-1}]; \forall n > 1.$
On dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :$D^n(\mathfrak{g}) = 0$.

Exemple 1.3.1.

1. *Tout algèbre de Lie nilpotente est résoluble.*

2. *Tout sous-algèbre de Lie et tout quotient d'une algèbre de Lie résoluble est résoluble.*

1.4 Algèbre de Lie semi simple

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle.

Définition 1.4.1.

1. *On dit que $\mathfrak{g}$ est semi simple si elle vérifie l'une des propriété équivalentes suivantes :*

i $\mathfrak{g}$ *n'admet pas un idéal abélien non nul.*

ii *le radicale de* $\mathfrak{g}$ *est nul.*

(le radicale de $\mathfrak{g}$ *est le plus grand idéal résoluble dans* $\mathfrak{g}$ *;on le note* $rad(g)$*).*

2. *On dit que* $\mathfrak{g}$ *est simple si elle n'est pas commutative ;et si elle n'a pas d'idéal propre (c'est à dire les seules idéaux de* $\mathfrak{g}$ *sont* $\{0\}$ *et* $\mathfrak{g}$*).*

Exemples 1.4.1.

1. *les algèbres de type* $A_n, n \geq 1$

   $\mathfrak{g} = sl(n+1, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C})/Tr(X) = 0\}$.

2. *les algèbres de type* $B_n, n \geq 2$

   $\mathfrak{g} = so(2n+1, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})/X + X^t = 0\}$.

3. *les algèbres de type* $C_n, n \geq 3$

   $\mathfrak{g} = sp(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C})/JX + X^tJ = 0\}, ou\ J = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix}$.

4. *les algèbres de type* $D_n, n \geq 4$

   $\mathfrak{g} = so(2n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})/X + X^t = 0\}$.

1.4.1 Sous-algèbre de Cartan

Soient un corps $\mathbb{K}$ commutatif de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K}$,qui est semi simple .
Une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant l'une des deux conditions suivants :

i $\mathfrak{h}$ est abélienne, ad_x est semi simple pour tout $x \in \mathfrak{h}$,et $\mathfrak{h}$ est maximale pour ces propriétés.

ii $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale,ad_x est semi simple pour tout $x \in \mathfrak{h}$.

1.4.2 La forme de Killing

Définition 1.4.2. *Soit* $\varphi : g \times g \to \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire symétrique .*
On dit que φ *est invariante si : pour tout :*$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ *; on a :*

$$\varphi([X, y], Z) + \varphi(X, [Z, Y]) = 0$$

Définition 1.4.3. *la forme de Killing notée* $\mathcal{K}$ *où* $\mathcal{K}_g$ *est la forme invariante associée a la représentation adjointe c'est-à -dire :*

$$\mathcal{K}(X, Y) = Tr_g(ad(X)ad(Y))$$

.

Théorème 1.4.1. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps de caractéristique nulle et* V *un* K *-espace vectoriel de dimension finie. Soit* $\mathfrak{g}$ *une sous-algèbre de Lie de* $gl(V)$*, alors* $\mathfrak{g}$ *est résoluble si et seulement si pour tout* $X \in \mathfrak{g}$ *et* $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$*,on a* $Tr(XY) = 0$*.*

Théorème 1.4.2. $\mathfrak{g}$ *est semi-simple si et seulement si* $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ *est non dégénérée.*

Démonstration :

1)Supposons que $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

considérons $a = \{\ X \in \mathfrak{g}/\forall Y \in \mathfrak{g}; \mathcal{K}_\mathfrak{g}(X, Y) = 0\} = Ker\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ comme $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ est invariante ,a est un idéal .On a ada résoluble,alors $Tr(adXadY) = 0$ pour tout $XetY$ dans a et par le théorème de Cartan .Ainsi$a$ est résoluble en tant qu'extension de ada par $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$,comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple ,on obtient $a = 0$, donc $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ est non dégénérée.

2)Supposons que $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ est non dégénérée.

On montre que $rad(\mathfrak{g}) = 0$,il suffit de montre que $\mathfrak{a}$tout idéal abélien est nul . soit donc $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$,pour montrer que $\mathfrak{a}$ est orthogonal à $\mathfrak{g}$ pour $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ soit donc

$X \in a, Y \in \mathfrak{g}$,on considère $f = adXadY$,on a $f(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}$ et $f^2(\mathfrak{g}) \subset f(\mathfrak{a}) = 0$ donc $f^2 = 0$ et $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(XY) = Tr(f) = 0$.

1.5 Algèbre de Lie réductive

Le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle qui admet une extension dans $\mathbb{C}$

Définition 1.5.1. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est réductive si pour tout idéal $\mathfrak{a}$dans $\mathfrak{g}$ il existe un idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.*

Exemple 1.5.1. *Toute algèbre de Lie semi simple est réductive.En effet si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ alors l'orthogonal $\mathfrak{a}^{\perp}$ de $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$.*

Chapitre 2

Systèmes de racines

2.1 Systèmes de racines

soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension fini .
notons : $\langle .,. \rangle$ sont produit scalaire .

Définition 2.1.1. *Soit $s : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ une application linéaire.On dit que s est une réflexion si :*

1. $\exists H \subseteq \mathbb{E} : s(x) = x; \forall x \in H.$

2. $\exists \alpha \in \mathbb{E} : s(\alpha) = -\alpha.$

On définir $P_\alpha = \{\ \beta \in E / \langle \beta, \alpha \rangle = 0\}$ l'hyperplan de α,et la réflexion

$$\begin{array}{rcl} \sigma_\alpha(\beta) : \mathbb{E} & \to & \mathbb{E} \\ \beta & \mapsto & \beta - \dfrac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha \end{array}$$

Définition 2.1.2. *Un système de racine de $\mathbb{E}$ est une partie ϕ de $\mathbb{E}$ tell que :*

(R_1) *ϕ est fini,ne contient pas 0 et engendre l'espace vectoriel $\mathbb{E}$.*

(R_2) *ϕ est invariante par $\sigma_\alpha pourtout \alpha \in \phi$.*

(R_3) *Si $\alpha \in \phi$,les seules multiple scalaire de α dans ϕ sont $\pm\alpha$.*

(R_4) *Si $\alpha, \beta \in \phi$,alors : $n(\beta, \alpha) \in \mathbb{Z}$ telque : $\langle \beta, \alpha \rangle = \dfrac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$.*

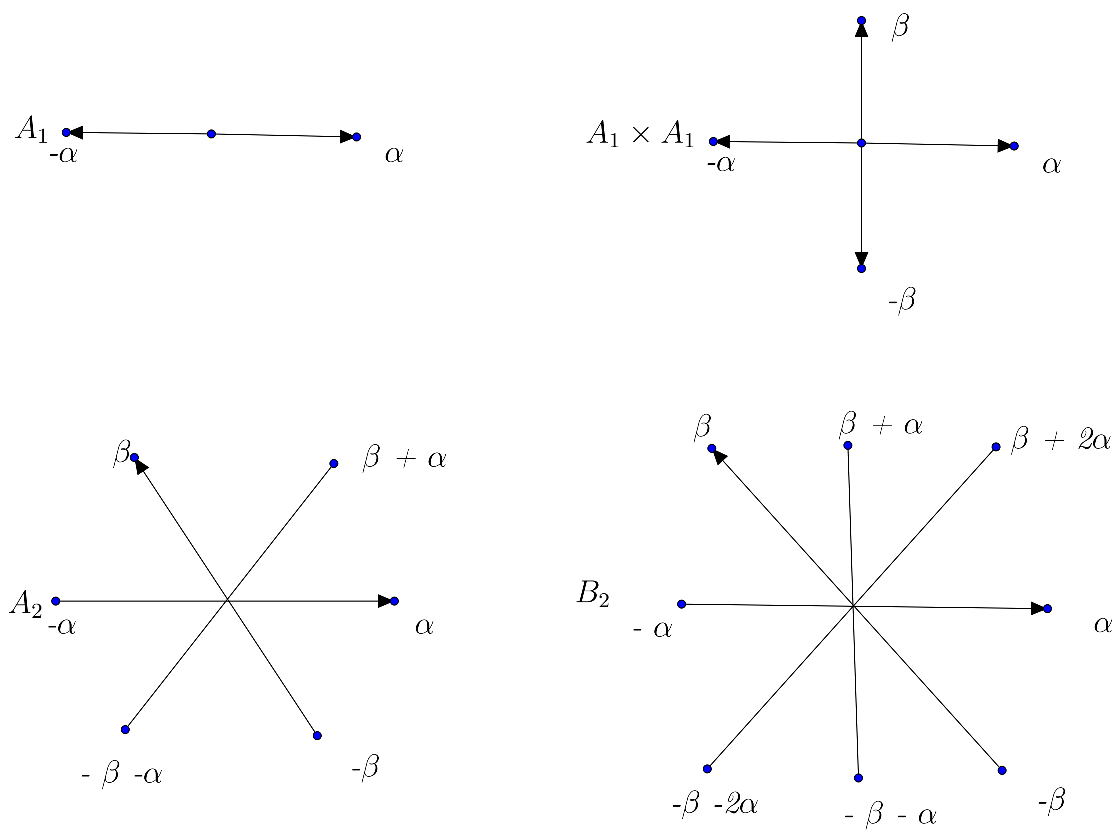
On appeler rang de ϕ la dimension de $\mathbb{E}$.

Exemple 2.1.1.

1- *L'ensemble des coracines de ϕ est un système de racines $\phi^\vee$, dit opposé à ϕ vérifier : $(\phi^\vee)^\vee = \phi$.*

2- *Un unique système de racine réduit de rang 1, $\{+1, -1\} dans \mathbb{R}$, dit de type A_1*

3- *Les systèmes des racines réduit de rang 2 sont :*



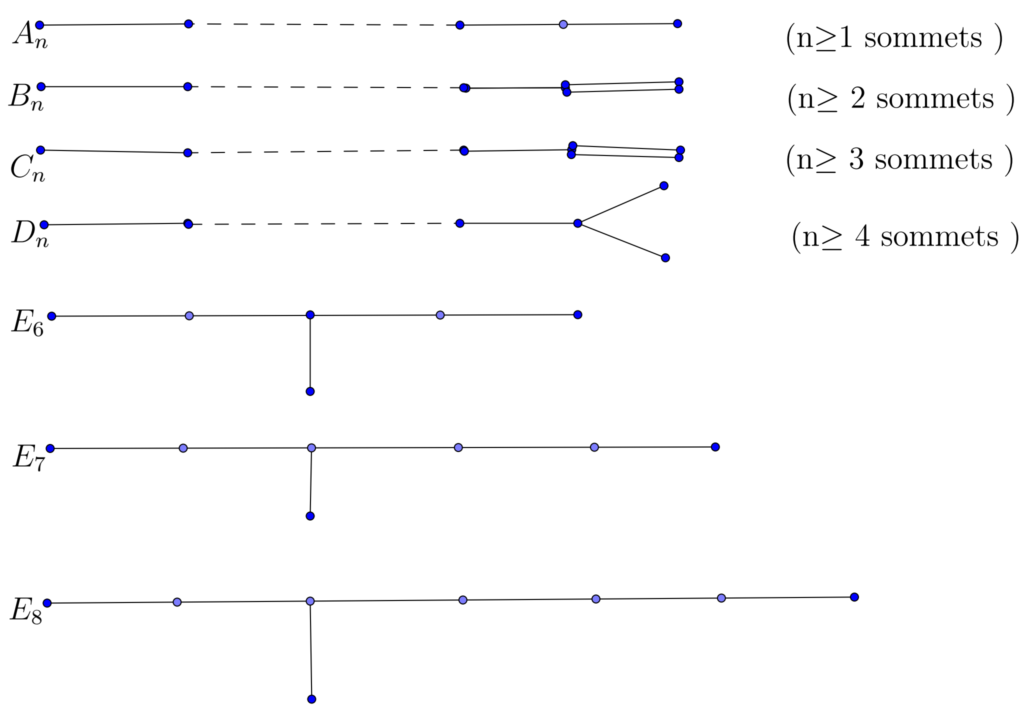
2.1.1 Matrice de Cartan et diagramme de Dynkin

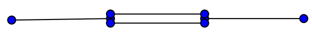
Définition 2.1.3. *La matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$ est la matrice A de coefficient* $a_{ij} = 2\dfrac{< \alpha_i, \beta_j >}{< \alpha_i, \alpha_i >}$ *ou les a_{ij} sont les racines de $\mathfrak{g}$*

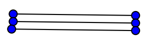
Exemples 2.1.1.

1. *La matrice de Cartan de type $A_1 \times A_2$ est* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. *La matrice de Cartan de type A_2 est* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
3. *La matrice de Cartan de type B_2 est* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Théorème 2.1.1. *Tout diagramme de Dynkin connexe non vide est isomorphe à un et à un seul des diagrammes suivants :*



F_4 

G_2 

2.1.2 Base d'un système de racines

Soit ϕ un système de racines dans un espace euclidien de démenions fini $\mathbb{E}$. On dit que Δ est une base de ϕ si :

(B_1) Δ est une base vectorielle de $\mathbb{E}$.

(B_2) toute racine β peut être écrite sous la forme $\beta = \sum K_\alpha \alpha$ tel que :$\alpha \in \Delta$ ou les coefficients K_α dans $\mathbb{Z}$ de même signe.

Les élément de Δ sont appelées les racines simples de ϕ .

Si $K_\alpha \geqslant 0$ pour tout α dans Δ,on dit que β est une racine positive.

Si $K_\alpha \leqslant 0$ pour tout α dans Δ,on dit que β est une racine négative.

On note ϕ^+ l'ensemble des racines positives et ϕ^- l'ensemble des racines négatives.

On a donc la relation :$\phi^- = -\phi^+$.

Théorème 2.1.2. *Tout système de racines admet une base.*

Pour tout vecteur $\gamma \in \mathbb{E}$,on défini :
$\phi^{+}(\gamma) = \{\ \alpha \in \phi / <\gamma, \alpha >> 0\}$ l'ensemble des racines situées du coté positif de l'hyperplan orthogonal à γ.
L'union des hyperplan P_α ne peut pas recouvrir r_α
Nous dirons que γ est régulier si $\gamma \in \mathbb{E} - \cup_{\alpha\in\phi} P_\alpha$, singulier si non.
Si γ est régulier,alors pour tout $\alpha \in \phi, (\gamma, \alpha) \neq 0$ et donc α est dans $\phi^{+}(\gamma)$ ou dans $\phi^{-}(\gamma)$.On en déduit $\phi = \phi^{+}(\gamma) \cup -\phi^{+}(\gamma$ Nous dirons que $\alpha \in \phi^{+}(\gamma)$ est décomposable s'il existe β_1, β_2 éléments de $\phi^{+}(\gamma)$ tels que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$. Dans le cas contraire ;nous dirons que α est indécomposable.

Théorème 2.1.3. *Si γ est un élément régulier de $\mathbb{E}$ alors l'ensemble $\Delta(\gamma)$ de toutes les racines indécomposables de $\phi^{+}(\gamma)$ est une base de ϕ.*

démonstration

1. Soit α une racine dans $\phi^{+}(\gamma)$ .Si α est indécomposable alors $\alpha \in \Delta(\phi)$.Sinon $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ avec $\beta_1, \beta_2 \in \phi^{+}(\gamma)$. En décomposant β_1 ou β_2 si nécessaire,on voit que toute racine de $\phi^{+}(\gamma)$ est une $\mathbb{N}-$ combinaison linéaire d'éléments de $\Delta(\phi)$.
2. Si $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ alors $(\alpha, \beta) \leq 0$ sauf si $\alpha = \beta$ .En effet,on ne peut avoir
   $\beta = -\alpha$ car il ne serait pas possible que les deux racines soient dans $\phi^{+}(\gamma)$.$\alpha - \beta \in \phi = \phi^{+}(\gamma) \cup -\phi^{+}(\gamma)$ donc $\alpha - \beta \in \phi^{+}(\gamma)$ ou $\beta - \alpha \in \phi^{+}(\gamma)$.
   Dans le premier cas $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ indique que α est décomposable,dans le second, $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ indique que β est décomposable.Ceci est contraire à l'hypothèse de départe $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$.
3. $\Delta(\gamma)$ est un ensemble linéairement indépendant .Supposons $\Sigma r_\alpha \alpha = 0 (\alpha \in \Delta(\gamma), r_\alpha \in \mathbb{R})$ .Séparons les indice α pour lesquels $r_\alpha > 0$ de ceux pour lesquels $r_\alpha < 0$.Nous

pouvons écrire$\Sigma s_\alpha \alpha = \Sigma r_\beta \beta$ avec $s_\alpha, r_\beta > 0$ et ou les ensembles de racines α et β sont disjoints .Appelons $\epsilon = \Sigma s_\alpha \alpha$ .On a $(\epsilon, \epsilon) = (\Sigma s_\alpha \alpha, \Sigma r_\beta \beta) = \Sigma_{\alpha,\beta} s_\alpha r_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$ d'après l'étape précédente. $\| \epsilon \|^2 \leq 0 \Rightarrow \epsilon = 0$ .On a alors $0 = (\gamma, \epsilon) = \Sigma s_\alpha (\gamma, \alpha) = \Sigma r_\beta (\gamma, \beta)$.Comme les α et les β sont dans $\phi^+(\gamma)$ (donc $(\gamma, \alpha) > 0$ et $(\gamma, \beta) > 0$) et que les s_α et les r_β sont positifs ,les s_α et les r_β sont nécessairement tous nuls.On vient là de montrer que tout ensemble de vecteurs situés d'un même cà´té d'un hyperplan tel que toute paire de vecteurs de cet ensemble fasse un angle obtus est linéairement indépendant.

4. $\Delta(\gamma)$ est une base de ϕ .En effet ,puisque $\phi = \phi^+(\gamma) \cup -\phi^+(\gamma)$,l'hypothèse (B_2) pour que $\Delta(\gamma)$ soit une base de ϕ est vérifiée d'après l'étape 1.Cette première étape nous indique également que $\Delta(\gamma)$ engendre $\mathbb{E}$.L'étape 3 nous assure que $\Delta(\gamma)$ est bien une base $\mathbb{E}$ et donc que (B_1) est aussi vérifiée .

5. Toute base Δ de ϕ est de la forme $\Delta(\gamma)$ pour un vecteur $\gamma \in \mathbb{E}$ régulier.Pour montrer cela,donnons-nous une base Δ et choisissons un vecteur $\gamma \in \mathbb{E}$ tel que $(\gamma, \alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$ .C'est possible car on peut montrer que l'intersection des demi-espaces positifs associés à une base de $\mathbb{E}$ est non vide .D'après (B_2),γ est régulier et $\phi^+ \subset \phi^+(\gamma), \phi^- \subset -\phi^+(\gamma)$. Comme $\phi = \phi^+(\gamma) \cup -\phi^+(\gamma)$ et $\phi = \phi^+ \cup \phi^-$,on a en fait $\phi^+ = \phi^+(\gamma)$.Si $x \in \Delta$ et $x = \alpha + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \phi^+(\gamma)$ alors $x = \alpha' + \beta'$ avec $\alpha' + \beta' \in \phi^+$ .Ceci est contradiction avec le fait que Δ doit être libre pour être une base de $\mathbb{E}$ .x n'est pas donc pas décomposable et $\Delta \subset \Delta(\gamma)$ .Mais comme $card\Delta = card\Delta(\gamma) = l, \Delta = \Delta(\gamma)$.

Exemples 2.1.2.

1. *Si Δ est une base de ϕ alors $\Delta^\vee = \{ \alpha^\vee, \alpha \in \Delta\}$ est une base de système de racines de $\phi^\vee$ opposé à ϕ .*

2. *Pour tout$\beta \in \phi$,il existe une suite $(n_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \mathbb{Z}^\Delta$ d'entiers tout positifs ou nuls,ou tout négatifs ou nuls :$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$.*

2.1.3 Paires de racines

• Soient α et β deux racines non proportionnelles,on pose θ l'angle non orienté entre α et β.

à étudions les valeurs possible du nombre :

$$n(\alpha,\beta) = 2\frac{\| \alpha \|}{\| \beta \|}cos\theta$$

. Qui est entier par (R_4).Le produit de deux entiers $n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha) = 4cos^2\theta$ ne peut prendre que les valeurs 0,1,2,3,4.Ce dernier cas étant exclu car α et β ne sont pas proportionnelles.

En particulier $n(\alpha,\beta)$ ne peut prendre que les valeurs :$0, \pm1, \pm2, \pm3$.

Alors il y a sept possibilités :

$n(\alpha,\beta) = 0, n(\beta,\alpha) = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$

$n(\alpha,\beta) = 1, n(\beta,\alpha) = 1, \theta = \frac{\pi}{3}, \mid \beta \mid = \mid \alpha \mid$

$n(\alpha,\beta) = -1, n(\beta,\alpha) = -1, \theta = \frac{2\pi}{3}, \mid \beta \mid = \mid \alpha \mid$

$n(\alpha,\beta) = 1, n(\beta,\alpha) = 2, \theta = \frac{\pi}{4}, \mid \beta \mid = \sqrt{2} \mid \alpha \mid$

$n(\alpha,\beta) = -1, n(\beta,\alpha) = -2, \theta = \frac{3\pi}{4}, \mid \beta \mid = \sqrt{2} \mid \alpha \mid$

$n(\alpha,\beta) = 1, n(\beta,\alpha) = 3, \theta = \frac{\pi}{6}, \mid \beta \mid = \sqrt{3} \mid \alpha \mid$

$n(\alpha,\beta) = -1, n(\beta,\alpha) = -3, \theta = \frac{5\pi}{6}, \mid \beta \mid = \sqrt{3} \mid \alpha \mid$

2.1.4 Systèmes de racines irréductibles

Définition 2.1.4. *On dit qu'un système de racines ϕ est irréductible si n'est pas égale à l'union de deux ensembles propres tels que les racines de l'un soient orthogonales à toutes les racines de l'autre .*

Exemples 2.1.3.

1. A_1, A_2, B_2, G_2 *sont irréductibles.*
2. $A_1 \times A_1$ *ne pas irréductible.*

Proposition 2.1.1. *Soit ϕ un système de racine irréductible .Alors il y au plus deux longueurs de racines dans ϕ .*

Proposition 2.1.2. *Soit ϕ un système de racine irréductible .Relativement à l'ordre partiel $<$.Il existe une unique racine maximal β. Si $\beta = \Sigma_{\alpha\in\Delta} K_\alpha \alpha$ alors toute les $K_\alpha$sont strictement positifs.*

2.1.5 L'algèbre de Lie g_2 et leur groupe G_2

Le calcul de l'algèbre g_2 s'effectue par un procédé déjà connu.Tout dérivation $D \in g_2$ est définie par la formule :

$$D(a + be) = Da + Db.e + b.De(*)$$

ou désormais x_0 et y_0 sont des quaternions, D_0 une dérivation de l'algèbre $\mathbb{H}$,et F un opérateur linéaire $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ vérifiant d'identité $F(ax) = Fa.\bar{x} + Fx.a$.
En posant $Fx = Qx.j$,ou $x \in \mathbb{C}$ et P, Q sont des opérateurs linéaires $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,on a donc :

$$P(xy) = Px.\bar{y} + Py.x, Q(xy) = Qx.y + Qy.\bar{x}$$

Dont la solution générale est de la forme
$Px = a_0 Imx$, $Qx = b_0 Imy$,ou $a_0, b_0 \in \mathbb{C}$
Donc,on posant $Fj = z_0 + w_0 j$,où $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ on trouve que la solution générale de l'équation fonctionnelle $(*)$ sur $\mathbb{H}$ est :

$$F\xi = (a_0 Imx + b_0 Imy + z_0 y) + (b_0 Imx - a_0 Imy + w_0 \bar{y})j$$

$\xi = x + yj, oua_0, b_0, z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ La dérivation est définie par une matrice antisymétrique du troisième ordre ,et par suit,dépend de trois paramètres réels,le quaternion y_0,de trois aussi,et le quadruple a, bx_0, y_0,de huit .Donc,la dérivation D est définie par la donné de 14 paramètres réels indépendant .Donc, $dimg_2 = 14$. La matrice associée à la dérivation D dans la base $i, j, k, e, f = ie, g = je, h = kh$ peut être représentation sous la forme conventionnelle :

$$\begin{pmatrix} ... & ... & ... & -a_0 & -b_0 \\ ... & D_0 & ... & -z_0 & -w_0 \\ ... & ... & ... & -c_0 & d_0 \\ a_0 & z_0 & c_0 & 0 & -y_0 \\ b_0 & w_0 & -d_0 & y_0 & D_0 + y_0 \end{pmatrix}$$

où $c_0 = b_0 + z_0 i, d_0 = a_0 + w_0 i, et y_0$ désigne un opérateur de multiplication par y_0 défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou $b_1 i + b_2 j + b_3 k = y_0$. De là il s'ensuite que parmi les matrices antisymétrique (a_{ij}) d'ordre 7 les matrices de g_2 sont caractérisées par les conditions suivantes :

$$a_{32} + a_{45} + a_{76} = 0$$

$$a_{13} + a_{64} + a_{75} = 0$$

$$a_{14} + a_{36} + a_{27} = 0$$

$$a_{17} + a_{42} + a_{53} = 0$$

$$a_{21} + a_{65} + a_{47} = 0$$

$$a_{51} + a_{26} + a_{73} = 0$$

$$a_{61} + a_{52} + a_{34} = 0$$

Si $a_0 = b_0 = 0$ et $D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix}$

Considérons la base canonique de l'algèbre de Lie $sa(7)$,composée des matrices :

$$E_{[i,j]} = \frac{E_{ij} - E_{ji}}{2}$$

Où $i, j = 1, ..., 7$ et $i < j$ .Des conditions précédent il s'ensuit aussitôt que les matrices :

$$P_0 = E_{[3,2]} + E_{[6,7]}, Q_0 = E_{[4,5]} + E_{[6,7]}$$

$$P_1 = E_{[1,3]} + E_{[5,7]}, Q_1 = E_{[6,4]} + E_{[5,7]}$$

$$P_2 = E_{[2,1]} + E_{[7,4]}, Q_2 = E_{[6,5]} + E_{[7,4]}$$

$$P_3 = E_{[1,4]} + E_{[7,2]}, Q_3 = E_{[3,6]} + E_{[7,2]}$$

$$P_4 = E_{[5,1]} + E_{[7,2]}, Q_4 = E_{[2,6]} + E_{[3,7]}$$

$$P_5 = E_{[1,7]} + E_{[4,2]}, Q_5 = E_{[4,2]} + E_{[3,5]}$$

$$P_6 = E_{[6,1]} + E_{[4,3]}, Q_6 = E_{[5,2]} + E_{[4,3]}$$

appartiennent toutes à l'algèbre de Lie g_2 .Ces matrices visiblement linéairement indépendantes,elles forment une base (sur $\mathbb{R}$) de l'algèbre de Lie g_2. Appesantissons-nous sur les combinaisons linéaires

$$H = aP_0 + bQ_0 = aE_{[3,2]} + bE_{[4,5]} + cE_{[7,6]}(**)$$

des matrices $P_0 et Q_0, oua+b+c = 0$.On remarque $[H_1, H_2] = 0$ pour tout éléments H_1, H_2 de la forme $(**)$. Un calcule immédiat sur les matrices nous montre que

$$[H, P_1] = aP_2 + cQ_2, [H, Q_1] = (c - b)Q_2$$

$$[H, P_2] = -aP_1 - cQ_1, [H, Q_2] = (b - c)Q_1$$

$$[H, P_3] = bP_4 + cQ_4, [H, Q_3] = (c - a)Q_4$$

$$[H, P_4] = -bP_3 - cQ_3, [H, Q_4] = (a - c)Q_3$$

$$[H, P_5] = cP_6 + aQ_6, [H, Q_5] = (a - b)Q_6$$

$$[H, P_6] = -cP_5 - aQ_5, [H, Q_6] = (b - c)Q_5$$

Pour écrire ces relation sous une forme plus compendieuse,il vaut la peine d'introduire l'espace dual $h^\star$ Ã deux dimensions dual de l'espace h des éléments. Soient e_1, e_2 la base adjointe d'une base $P_0 et Q_0$ de h .Alors ,pour tout élément de h,on aura les formules

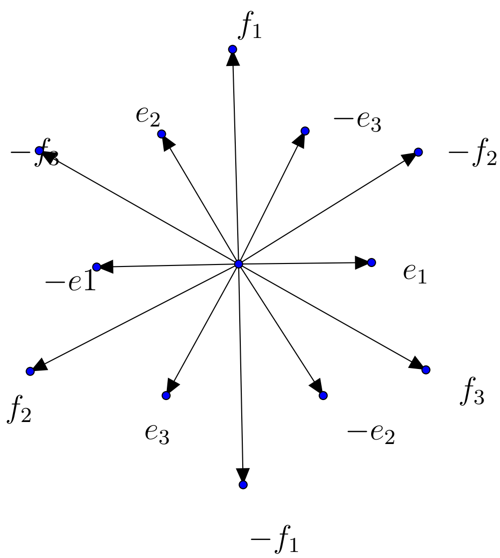
$$e_1(H) = a, e_2(H) = b, e_3(H) = c$$

ou $e_3 = -(e_2 + e_3$. Il est commode d'admettre que l'espace $h^\star$ est muni d'une structure euclidienne et est rapporté un système de coordonnées rectangulaires dans lequel les composantes des vecteurs e_1 et e_2 sont respectivement $(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$ et $(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.Alors les vecteurs

$\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$ et les vecteurs $\pm f_1, \pm f_2, \pm f_3$,ou

$$f_1 = e_2 - e_3, f_2 = e_3 - e_1, f_3 = e_1 - e_2$$

Sont les rayons vecteurs des sommes d'un dodécagone étoilé régulier .L'ensemble de ces douze vecteurs du plan sera appelé configuration G_2 .



Proposition 2.1.3. *Pour tous vecteurs $\alpha, \beta \in G_2$,on a :*

$$[X_\alpha, X_-\alpha] = iH_\alpha$$

$[X_\alpha, X_\beta] = 0$ *pour* $\beta \neq -\alpha$ *et* $\alpha + \beta \notin G_2$ $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$ *pour* $\alpha + \beta \in G_2$ *(donc* $\beta \neq -\alpha$*). Ici* $N_{\alpha,\beta}$ *sont des entiers dont les modules satisfont la relation*

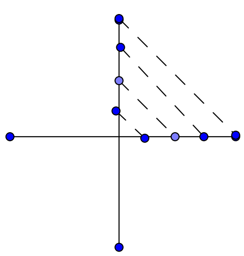
$$\mid N_{\alpha,\beta} \mid = p + 1$$

où p *est le plus grand des nombre entiers tels que le vecteur* $\beta - i\alpha$ *appartienne à la configuration* G_2 *pour tout* $j = 0, 1, ..., p$ *.*

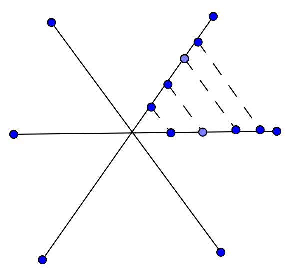
2.1.6 Chambres de Weyl

Définition 2.1.5. *Les chambres de Weyl sont les composantes connexes du complémentaire dans $\mathbb{E}$ de la réunion de ceux des hyperplans singuliers qui passent par l'origine.*

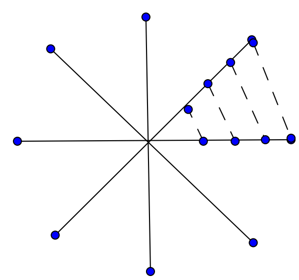
Exemples 2.1.4. *Les chambres de Weyl des algèbres de Lie réelles semi-simples :*$sl_2(\mathbb{R}) \times sl_2(\mathbb{R}), sl_3(\mathbb{R}), sp_4(\mathbb{R})$.



$sl_2(R) \times sl_2(R)$



$sl_3(R)$



$sp_4(R)$

2.1.7 Groupe de Weyl

Définition 2.1.6. *Le groupe de Weyl d'un système de racines est le groupe engendré par les réflexions par apport aux racines on le note* W .

Proposition 2.1.4. *Le groupe* W *est fini.*

démonstration

Le groupe W permute ϕ et si un élément de W fixe toute les racines alors fixe toute élément de $\mathbb{E}$ puisque ϕ engendre $\mathbb{E}$.

Donc W s'injecte dans le groupe fini des permutations de ϕ .

Théorème 2.1.4. *Soit Δ une base de ϕ.*

a) Si $\gamma \in \mathbb{E}, \gamma$ régulière ;il existe $\sigma \in W$ telle que : $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$.

b) Si $\Delta^{'}$ est une autre base de ϕ alors $\sigma(\Delta^{'}) = \Delta$ pour certain $\sigma \in \omega$.

c) Si α est racine alors il existe $\sigma \in W$ telle que $(\sigma(\alpha) \in \Delta)$.

d) W est généré par les $\sigma_\alpha(\alpha \in \Delta)$.

e) Si $\sigma(\Delta) = \Delta, \sigma \in \omega$ alors $(\sigma = 1)$.

Chapitre 3

Algèbres de Weyl

3.1 Algèbres de Weyl

On travail sur une corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle .

Définition 3.1.1. *Soit A une K- algèbre et M un A-module a gauche,une dérivation de A dans M est une application K-linéaire $\partial : A \to M$ vérifiant la règle de Leibniz, c'est -à -dire que pour tout a, b dans A ,on a :*

$$\partial(ab) = a\partial(b) + b\partial(a)$$

On note $Der(A, M)$ les dérivations de A dans M.

Définition 3.1.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$.La K- algèbre de Weyl $A_n(\mathbb{K})$ d'indice n sur $\mathbb{K}$ est l'algèbre associative unifère sur $\mathbb{K}$ définie par $2n$ générateurs $p_i, q_i, i = 1, ..., n$ et les relation :*

$$[p_i, q_i] = 1$$

$$[p_i, q_j] = [p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$$

pour $i \neq j$ où $i, j \in [1, ..., n]$.

Autrement dit,si on note R l'union des relations précédents

$$A_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\langle \{p_i : i \in [1, ..., n]\} \bigcup \{q_i : i \in [1, ..., n]\} \rangle / (R)$$

où (R) désigne l'idéal bilatère engendré par (R). En particulier,$A_0(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.Elle est canoniquement isomorphe à l'algèbre des opérateur différentiels à coefficients polynomiaux sur $\mathbb{K}^n$.

Tout élément de $A_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta$$

Avec $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}, \partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1}...\partial_{x_n}^{\beta_n}$ et $a_{\alpha,\beta} \in \mathbb{K}$.

3.2 Propriétés algébriques

Définition 3.2.1. *Soit R une K-algèbre,une filtration de R est une suite $\{F_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ croissante de sous-espaces :*

$$0 \subset F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset ...$$

tel que :

i $\cup_{i\in\mathbb{Z}_+} F_i = R$.

ii $F_p, F_q \subset F_{p+q}$ *pour tout* $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

iii $1 \in F_0$

Définition 3.2.2. *La filtration de Bernstein est une filtration sur $A_n(\mathbb{K})$*

$$B_p = \{P \in A_n(\mathbb{K}) : P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta : \mid \alpha \mid + \mid \beta \mid \leq p\}$$

On convient de plus que $B_{-1} = B_{-2} = 0$.

Proposition 3.2.1. *La filtration de Bernstein est une filtration de $A_n(\mathbb{K})$.Plus précisément,pour tout $p, q \in \mathbb{Z}_+$.*

i $\cup_{i\in\mathbb{Z}_+} B_i = A_n(\mathbb{K})$.

ii $B_p + B_q \subset B_{maxp+q}$ *pour tout* $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

iii $B_p, B_q \subset B_{p+q}$.

iV $[B_p, B_q] \subset B_{p+q-2}$.

Proposition 3.2.2. *L'algèbre* $A_n(\mathbb{K})$ *est simple c'est -à -dire que ses seuls idéaux bilatères sont* 0 *et* $A_n(\mathbb{K})$.

démonstration

Supposons que I est un idéal bilatère contenant un opérateur P non nul,dans ce cas :$[P, Q] \in I$ pour tout $Q \in A_n(\mathbb{K})$ si $P \in B_p$ avec $p > 0$. L'identité $[\partial_i, x_i^n] = nx^{n-1}$ou $[x_i, \partial_i^n] = -n\partial_i^{n-1}$ permet d'obtenir un élément P' de I tel que $P' \in B_{p-1}$. Par récurrence on conclut que I doit contenir un élément de $B_0 = K$,qu'est inversible ce que force $I = A_n(\mathbb{K})$

Proposition 3.2.3. *L'algèbre* $A_n(\mathbb{K})$ *est noethérienne,i.e.les idéaux (à gauche ou à droite) sont de type fini .*

démonstration

On note la filtration sur $A_n(\mathbb{K})$ par $F_p(A_n(\mathbb{K}))$ qu'est l'ensemble des opérateurs de la forme

$$\sum_{\alpha,\beta} \sum_{|\beta|\leq p} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta$$

C'est -à-dire le sous-espace des opérateurs d'ordre $\leq p$.On a $F_0 = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n], F_p \subset F_q$ pour $p \leq q, \cup_p F_p = A_n(\mathbb{K})$ et enfin

$$F_p F_q \subset F_{p+q}$$

ou le terme de gauche désigne l'ensemble des sommes de produits d'éléments de $F_p$et F_q.Ceci implique en particulier que F_p est un module sur F_0(à gauche et à droite)et on voit qu'il est libre de type fini.

Si P dans $A_n(\mathbb{K})$, on définit son ordre relativement à la filtration F comme le plus petite p tel que $P \in F_p$.Son symbole $\sigma(P)$ est alors la classe de P dans F_p/F_{p-1} .C'est un polynôme homogène de degré p en ξ,donc de la forme $\sum_{|\beta|=p} a_\beta(x)\xi^\beta$.

L'ensemble des symboles des éléments de I engendre un idéal $\sigma(I)$ de $\mathbb{K}[x,\xi]$ qui a la propriété suivante :un élément est dans $\sigma(P)$ si chacun des termes homogènes qui le composent est dans $\sigma(I)$.$\mathbb{K}[x,\xi]$ étant noethérien,on peut extraire du système de générateurs $(\sigma(P))_{p\in I}$une famille fini $(\sigma(P_i))_{i=1,\ldots,r}$ qui engendre $\sigma(I)$.On vérifie alors que I engendré par $P_1,...,P_r$: si $P\in I$ s'écrit $\sum_{i=1}^{r}Q_i(x,\xi)\sigma(P_i)$,ou $Q_i\in\mathbb{K}[y_1,...,y_2n]$ que l'on peut supposer homogène en ses n dernières variables de degré $d-q_i$, avec q_i le degré de $\sigma(P_i)$. Alors $P(x,\xi)-\sum_{i=1}^{r}Q_i(x,\partial_x)P_i(x,\partial_x)$ est un élément de I qui possède un symbole de degré strictement inférieur à celui de P,ce qui permet de conclure par récurrence .

CONCLUSION

D'après cette étude on conclus que l'algèbre de Weyl liée entre l'algèbre et la géométrie et aussi l'analyse.

Bibliographie

[1] Markus.Brodmann, *Notes on Weyl algebras and D-Modules*.zurich (07/01/2014).

[2] Frédéric.Paulin, *Groupes et géométries(cours de second année de mastère*.Université Paris sud (2013/2014).

[3] James.Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and representation Theory*.Springer (1972).

[4] Alexis. Tchond, *Introduction aux groupes algebriques*.Université Claude Bernard.Lyon1 (07/1/2013).

[5] Jean .François Dat, *Cours introductif de M2 Groupes et Algèbre de Lie*.Université Pierre et Marie Curie (2012/2013).

[6] David. Cock, *The Weyl Algebras*.The university of New South Wales November (2004).

[7] François.Digne, *Introduction aux groupes et algèbres de Lie cours de M2* (2010/2011).