UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par :Sekhri Houria

Thème

Algèbre et analyse tensorielles et leurs applications pour l'étude des milieux continus

Soutenu publiquement le : 25/05/2017

Devant le jury composé de :

M. **Bencheik Abdelkrim**	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
M. **Tellab Brahim**	M. A. université de KASDI Merbah -Ouargla	Rapporteur
M. **Abassi Hocine**	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
M. **Badidja Salim**	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur

Année universitaire 2016/2017

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère "Rahma" ,
A mon cher père "Hamza" rahimaho elahe
Qui m'ont aidé à affronter les difficultés,
A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.
A mes très chères sœurs et mes frères.
A toute ma famille.
A tous les amis.
Pour chacun qui mentionné mon cœur et oublié mon stylo .
A tous.

Remerciement

En premier lieu, je remercie Dieu le tout puissant, qui m'a accordé santé, force et courage pour la rédaction de ce modeste travail.⋆
Je remercie vivement Monsieur **Tellab Brahim**, mon encadreur, d'avoir accepté de diriger mon travail avec patience et dévouement.⋆
Je dis ma gratitude particulière aux membres du jury, M. **Bencheikh Abdelkrim** (président) M. **Abassi Hocine** et M. **Badidja Salim** (examinateurs)qui me font l'honneur de critique et d'améliorer ce travail.⋆
Mes remerciements à le comité pédagogique de la formation Master de mathématiques option : Modélisation et analyse numérique.⋆
Toute ma famille, et mes amis qui m'ont été d'un soutien moral tout au long de ma formation.⋆
A tous ceux qui m'ont soutenue d'une manière ou d'une autre je vous dis merci du fond de mon cœur.⋆

Table des matières

Notations

Notation	Signification
δ^i_j	symbole de Kronecker
$\overline{\overline{I}}$	tenseur identité
$\overline{\overline{A}} = A_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	tenseur d'ordre 2
$\otimes$	produit tensoriel
$\wedge$	produit vectoriel
$\mathbb{V}^{\otimes 2}_{sym}$	sous espace vectoriel des tenseur symétrique d'ordre 2
$\mathbb{V}^{\otimes 2}_{asy}$	sous espace vectoriel des tenseur antisymétrique d'ordre 2
tr	trace
$:$	produit doublement contracté
∇	gradient
div	divergence
Δ	laplacien
P	matrice de passage
rot	rotation

Introduction

La mécanique du point matériel permet d'imaginer le mouvement d'un point soumis à une ensemble de forces. On distingue dans cette théorie la description de la cinématique : position, vitesse et accélération du point. Cette théorie permet par exemple de calcule le trajet d'électrons dans un champ magnétique ou d'imaginer l'orbite d'une planète soumise aux forces gravitationnelles.
Avec la mécanique du point matériel, on ne peut pas décrire les rotations d'un corps sur lui même. Cette théorie n'est donc pas adaptée pour étudier le d'un satellite sur lui-même lors de son orbite. Pour cela, il faut la mécanique des solides indéformables qui intègre la notion de rotation, d'inertie et de moment. La somme des moment s'appliquant sur le corps égale à tout instant à son moment d'inertie multiplié par son accélération angulaire.
Il est important de constater que pour un point matériel, la notion de rotation n'a pas de sens (un point ne peut tourner sur lui-même). De même le moment des forces s'appliquant sur le point est toujours nul puisque le bras de levier est toujours nul(moment calculé par rapport à la position du point). La dynamique d'un point matériel s'écrit donc simplement en terme de force et d'accélération. Pour décrire la dynamique d'un corps indéformable, on ajoute les notions de rotation, moment et inertie.
La mécanique des solides indéformables permet de résoudre des problèmes importants de l'ingénieur. En revanche, cette mécanique ne peut pas traiter par exemple les problèmes suivants :
Déterminer la force nécessaire pour emboutir une canette à partir d'un tôle mince :Calculer l'écoulement de l'eau sous un pneu en conduit sur route mouillée afin d'optimiser le dessin de ce pneu ;
Calculer la pression nécessaire pour souffler les bouteilles plastiques.
La mécanique des milieux continus est un cadre physique et mathématique permettant

de modéliser un problème concret. Un fois le modèle mathématique établi, il pourra être résolu par une méthode analytique ou numérique. La modélisation suivie de la résolution du modèle forment ce que l'on appelle la simulation du problème concret. Cette simulation devra être validée par des expérimentations lorsque celles-ci sont disponibles.

On dit qu'un domaine contient un milieu matériel continu si à chaque instant et en chaque point de ce domaine on peut définir des grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel . La grandeur physique peut être représentée mathématiquement par :

- Un scalaire(masse volumique, température, concentration d'un polluant,...) ;
- Un vecteur(vitesse, accélération, forces volumiques, couples volumiques,...) ;
- Un tenseur d'ordre 2 (déformations, contraintes,...) ;
- Un tenseur d'ordre supérieur à 2 comme par exemple le tenseur d'élasticité qui est d'ordre 4. La grandeur physique donnée à chaque instant et en chaque point forme ce que l'on appelle un champ. On parlera par exemple du champ de température dans une pièce automobile à un instant donné ou bien de l'évolution du champ de contrainte dans une tôle lors de son écrasement par une presse.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivant :

Premier chapitre : Dans ce châpitre, nous rappelons quelques notions et définitions des tenseurs et leurs opérations algébriques.

Deuxième chapitre :Dans ce châpitre, nous décrivons et nous traitons la cinématique des milieux continus oú nous donnons le concept de milieu continu.

Troisième chapitre : Ce châpitre est consacré à l'étude des notions de déformations des milieux continus.

Chapitre 1

Éléments de calcul tensoriel

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on définit les tenseurs et leurs opérations algébriques. Avant d'en donner la définition, on commence par introduire une convention de notation inventée par Albert EINSTEIN pour ses calculs en mécanique relativiste, et couramment utilisée aujourd'hui dans toutes les spécialités qui utilisent des calculs vectoriels, matriciels et tensoriels.

1.2 Convention de sommation d'Einstein

Dans les calcules sur les composantes de tenseurs on aura souvent à manipuler des expressions de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^i_{jk} b_i c^k$$

(Les indices en haut ne sont pas des puissances mais des numéros). En outre, les sommations auront toujours les mêmes bornes 1 et n (en mécanique des milieux continus classique on prend souvent $n = 3$).

Remarque 1 *[1] :* [1] *La convention d'Einstein consiste à omettre les signes $\sum$. On écrira donc :*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^i_{jk} b_i c^k = a^i_{jk} b_i c^k$$

il s'agit d'une sommation sur l'indice i car il apparaît deux fois, une fois en haut et une fois en bas, dans le monôme $a^i_{jk} b_i c^k$. Il en est de même pour l'indice k. Dans l'exemple *ci-dessus, on est donc en présence d'une double sommation, l'une sur l'indice i, l'autre sur l'indice k. pour $n = 3$, le monôme $a^i_{jk} b_i c^k$ représente donc la somme de 9 produits de 3 termes :*

$$a^1_{j1} b_1 c^1 + a^1_{j2} b_1 c^2 + a^1_{j3} b_1 c^3 + \\ a^2_{j1} b_2 c^1 + a^2_{j2} b_2 c^2 + a^2_{j3} b_2 c^3 + \\ a^3_{j1} b_3 c^1 + a^3_{j2} b_3 c^2 + a^3_{j3} b_3 c^3$$

Les indices de sommation sont appelés indices muets car on peut les changer sans changer la valeur du résultat. En effet :

$$\begin{aligned} a^i_{jk} b_i c^k &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a^i_{jk} b_i c^k \\ &= \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a^p_{jq} b_p c^q \\ &= a^p_{jq} b_p c^q \end{aligned}$$

Les autres indices, qui n'apparaissent qu'une seule fois dans le monôme, sont appelés indices réels (libres). Cette convention de sommation n'est pas seulement utile dans l'algèbre tensorielle. On peut aussi l'utiliser en calcul vectoriel ou matriciel.

Exemple 1 *[1] : Soit un espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension n et l'une de ses base $\{\mathbf{e}_i\}$ Si on décide de numéroter ses composantes avec un indice en haut, un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ s'écrit :*

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}^i \mathbf{e}_i \\ &= \mathrm{v}^i \mathbf{e}_i \\ &= \mathrm{v}^m \mathbf{e}_m \end{aligned}$$

1.2.1 Règles de la convention d'Einstein

Les calculs précédentes suggèrent de poser les règles suivantes :

Règle 1 : l'indice muet

Dans un monôme, un indice muet figure exactement deux fois : une fois en haut et une fois en base.

Règle 2 :

le nom d'un indice muet peut se remplacer avec l'importe quel autre non.

Règle 3 : l'indice réel (libre)

ne peut apparaître qu'une seule fois dans le monôme.

Règle 4 :

Dans une relation les indices réels de chaque monôme doivent être les mêmes.

Exemple 2 *:*
1) $a_i + \alpha b_i = c_i$ *Correcte* i *est un indice réel(libre)*
2) $\alpha + b_i c_i$ *Correcte* i *est un indice muet*
3) $T_{ij} + a_i b_j$ *Correcte* i, j *sont des indices réels*
4) $T_{ii} + a_i$ *fausse*
5) $T_{ii} + \alpha$ *Correcte* i *est un indice muet*
6) $T_{jki} + a_i b_j c_k$ *Correcte* i, j, k *réels*
7) $T_{iii} + \alpha$ *fausse*
8) $T_{jji} + \alpha a_i$ *Correcte* i *réel,* j *muet*

1.2.2 symbole de Kronecker

Le symbole Kronecker est défini par :

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si i=j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'on range les δ^i_j dans une matrice $n \times n$, on obtient la matrices unité, par exemple :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{I}} &= \begin{pmatrix} \delta^1_1 & \delta^1_2 & \delta^1_3 \\ \delta^2_1 & \delta^2_2 & \delta^2_3 \\ \delta^3_1 & \delta^3_2 & \delta^3_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 3 *[1] :*

$$\begin{array}{l}(1)\;\; T^i_j\delta^k_i = T^k_j \\ (2)\;\; \mathbf{e}_j = \delta^i_j \mathbf{e}_i \\ (3)\;\; \delta^i_i = n\end{array}$$

exemple (3) *: puisque :*

$$\begin{aligned} \bullet\ \delta^i_i &= \sum_{i=1}^{n} \delta^i_i \\ &= \delta^1_1 + \delta^2_2 + \dots\dots\dots + \delta^n_n \\ &= \underbrace{1 + 1 + \dots\dots\dots + 1}_{n\text{fois}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4)\;\; \delta^i_j\delta^i_j &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta^i_j\delta^i_j \\ &= \delta_{11}\delta_{11} + \delta_{22}\delta_{22} + \delta_{33}\delta_{33} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5)\;\; \delta_{ij}\delta_{jk} &= \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\delta_{jk} \\ &= \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k} \end{aligned}$$

- *si :* $i = k$; $\delta_{ij}\delta_{jk} = 1$
- *si :* $i \neq k$; $\delta_{ij}\delta_{jk} = 0$

$$\begin{aligned} \delta_{ij}\delta_{jk} &= \begin{cases} 1 & si\ i{=}k \\ 0 & sinon \end{cases} \\ &= \delta_{ik} \end{aligned}$$

1.2.3 Symbole de permutation dit de Lévi-Civita

Soient i, j, k trois indices ayant des valeurs différentes. On dit qu'ils forment une permutation paire de $1, 2, 3$ si l'on peut les amener dans cet ordre par un nombre pair de permutations. On dit qu'ils forment une permutation impaire de $1, 2, 3$ si l'on peut les amener dans cet ordre par un nombre impair de permutation. Les permutation paires de $1, 2, 3$ sont donc :

$(1,2,3),(3,1,2)$ et $(2,3,1)$ et les permutation impaires : $(2,1,3),(1,3,2)$ et $(3,2,1)$. Le symbole de permutation est défini par :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux quelconques des indices sont égaux} \\ +1 & \text{si } i,j,k \text{ forment une permutation paire de 1,2,3} \\ -1 & \text{si } i,j,k \text{ forment une permutation impaire de 1,2,3} \end{cases}$$

Exemple 4

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} \\ &= \varepsilon_{321}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{312} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{132} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{123} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Proposition 1 *:*

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

Démonstration 1 *:*

posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

On a :

$$\Delta = \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k1} + \delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k2} - \delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k1} - \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k2} - \delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k3}$$

- Si $i = j$ ou $i = k$ ou $j = k$, on a $\Delta = 0$ et $\varepsilon_{ijk} = 0$ donc $\varepsilon_{ijk} = \Delta$.
- Si $(i,j,k) = (1,2,3)$ ou $(2,3,1)$ ou $(3,1,2)$, on a $\Delta = 1$ et $\varepsilon_{ijk} = 1$, donc $\varepsilon_{ijk} = \Delta$.
- Si $(i,j,k) = (3,2,1)$ ou $(1,3,2)$ ou $(2,1,3)$, on a :$\Delta = -1$ et $\varepsilon_{ijk} = -1$, donc $\varepsilon_{ijk} = \Delta$.

par conséquent, on a $\varepsilon_{ijk} = \Delta$, dans tous les cas.

1.3 Algèbre vectorielle

Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel de dimension n, soit $\{\mathbf{e}_i\}$ une base quelconque de $\mathbb{V}$, et soit $\mathbf{v}$ un vecteur de $\mathbb{V}$. pour respecter la convention d'Einstein, on numérote les composantes des vecteurs sur cette base avec des indices en haut. Un vecteur s'écrit donc :

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}^i \mathbf{e}_i$$

Définition 1 *[1] : Les nombres* v^i *sont appelés composantes contravariantes du vecteur* $\mathbf{v}$ *sur la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*. Les composantes contravariantes sont donc les composantes habituelles d'un vecteur sur une base.*

1.3.1 Changement de base de vecteurs

Soit $\{\mathbf{e'}_j\}$ une autre base de $\mathbb{V}$. La nouvelle base $\{\mathbf{e'}_j\}$ se définit naturellement par ses composantes (contravariantes) sur l'ancienne base $\{\mathbf{e}_i\}$ par les n relations :

$$\mathbf{e'}_j = A^i_j \mathbf{e}_i \tag{1.1}$$

où A^i_j est la $i^{\text{ème}}$ composante contravariante du vecteur $\mathbf{e'}_j$ sur la base $\{\mathbf{e}_i\}$. Inversement, l'ancienne base s'exprime sur la nouvelle base par

$$\mathbf{e}_i = \mathrm{B}^k_i \mathbf{e'}_k \tag{1.2}$$

Définition 2 *[1] : La matrice* $[\mathrm{A}^\bullet{}_\bullet]$ *est appelée matrice de passage de* $\{\mathbf{e}_i\}$ *à* $\{\mathbf{e'}_i\}$*. La matrice* $[\mathrm{B}^\bullet{}_\bullet]$ *est appelée matrice de passage de* $\{\mathbf{e'}_i\}$ *à* $\{\mathbf{e}_i\}$*. La* $j^{ème}$ *colonne de la matrice* $[\mathrm{A}^\bullet{}_\bullet]$ *contient les composantes contravariantes du vecteur* $\mathbf{e'}_j$ *dans la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*. de la relation* (1.1) *et* (1.2) *on obtient :*

$$\mathbf{e'}_j = \mathrm{B^k}_i \mathrm{A^i} j \mathbf{e'}_k$$

(double sommation sur i et k $\Rightarrow$ *somme de* n^2 *termes). Cette égalité ne peut être vraie que si* $j = k$*. On en déduit :*

$$\mathrm{B^k}_i \mathrm{A^i}_j = \delta^k_j \Leftrightarrow [\mathrm{B}^\bullet{}_\bullet][\mathrm{A}^\bullet{}_\bullet] = [I]$$

où $[I]$ *est la matrice unité. On en déduit la relation matricielle :* $[\mathrm{B}^\bullet{}_\bullet] = [\mathrm{A}^\bullet{}_\bullet]^{-1}$*. Les matrices* $[\mathrm{A}^\bullet{}_\bullet]$ *et* $[\mathrm{B}^\bullet{}_\bullet]$ *sont inverses.*

1.3.2 Base duale

Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel euclidien.

Définition 3 *[1] : On appelle base duale de la base* $\{\mathbf{e_i}\}$ *la base notée* $\{\mathbf{e^j}\}$ *dont les* n *vecteurs sont définis par :* $\mathbf{e}^j.\mathbf{e}_i = \delta_i^j$

Remarque 2 *[1] : On peut interpréter géométriquement cette définition : un vecteur* $\mathbf{e}^i$ *de la base duale est orthogonal à tous les vecteurs de la base initiale de numéro différent, et son produit scalaire avec le vecteur de même numéro vaut* 1. *Il est facile de vérifier que la base duale de* $\{\mathbf{e}^i\}$ *est la base initiale* $\{\mathbf{e}_i\}$.

1.3.3 Tenseurs isotropes

Définition 4 *[7] : Un tenseur* $\mathbf{T}$ *d'ordre* p *sur* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ *est isotrope lorsque ses composantes sont invariantes dans tout changement de repère orthonormé. Un tenseur isotrope est nécessairement d'ordre pair.Les composantes d'un tenseur isotrope de second ordre sur* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ *relativement à une base orthonormée sont de la forme :*

$$\mathbf{T}_{ij} = \alpha\delta_{ij} \quad (i, j) \in \{1, ..., n\}^2 \textit{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Les composantes d'un tenseur isotrope d'ordre 4 *sur* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ *relativement à une base orthonormée sont de la forme :*

$$\mathbf{T}_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}$$

1.4 Tenseurs euclidiens réels

Définition 5 *[1] : Soit* $\mathbb{V}$ *un espace vectoriel euclidien de dimension* n *Un tenseur* $\mathbf{T}$ *d'ordre* p *est une application* p*- linéaire de* $\mathbb{V}^p$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $\mathbf{T}$ *un tenseur d'ordre* p *. La p-linéarité signifie que l'application est linéaire par rapport à chacun de ses* p *arguments :*

$$\begin{array}{ll} : \mathbf{T}(..., \mathbf{x}_k + \mathbf{x'}_k, ...) = \mathbf{T}(..., \mathbf{x}_k, ...) + \mathbf{T}(..., \mathbf{x'}_k, ...) & \forall k \in [1, ..., p] \\ \mathbf{T}(..., \lambda\mathbf{x}_k, ...) = \lambda\mathbf{T}(..., \mathbf{x}_k, ...) & \forall k \in [1, ..., p] \end{array}$$

par exemple, soient $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *et* $\mathbf{z}$ *trois vecteurs quelconques de* $\mathbb{V}$. *Un tenseur du troisième ordre* $\mathbf{T}$ *est une application trilinéaire telle que :*

$$\mathbf{T} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{V}^3 \longrightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}$$

Exemple 5 *[1] : L'application* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{V}^3 \longrightarrow 3\mathbf{x}.(2\mathbf{z} \wedge \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ *est un tenseur d'ordre* 3 *(on vérifie aisément qu'elle est trilinéaire).En revanche l'application* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{V}^3 \longrightarrow 3\mathbf{x}.(2\mathbf{z} + \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ *n'est pas un tenseur d'ordre* 3 *(elle n'est pas linéaire sur son second ni sur son troisième argument).*

1.4.1 Composantes d'un tenseur :

Pour simplifier les calculs. On prend le cas d'un tenseur d'ordre 3. Si on se donne les vecteurs $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ par leurs composantes contravariants sur une base $\{\mathbf{e}_i\}$ de $\mathbb{V}$:

$$\mathbf{x} = \mathrm{x}^i \mathbf{e}_i \qquad \mathbf{y} = \mathrm{y}^j \mathbf{e}_j \qquad \mathbf{z} = \mathrm{z}^k \mathbf{e}_k$$

La trilinéairité de l'opérateur $\mathbf{T}$ entraîne :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \mathbf{T}(\mathrm{x}^i \mathbf{e}_i, \mathrm{y}^j \mathbf{e}_j, \mathrm{z}^k \mathbf{e}_k) \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)\mathrm{x}^i \mathrm{y}^j \mathrm{z}^k \end{aligned}$$

On définit les n^3 nombres :

$$\mathrm{T}_{ijk} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$$

L'application (trilinéaire) du tenseur du troisième ordre $\mathbf{T}$ aux trois vecteurs $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$,et $\mathbf{z}$ s'écrit donc :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathrm{T}_{ijk} \mathrm{x}^i \mathrm{y}^j \mathrm{z}^k$$

Les n^3 nombres T_{ijk} sont appelés composantes 1-covariantes 23-contravariantes de $\mathbf{T}$. Ces n^3 nombres déterminent complètement l'opérateur trilinéaire $\mathbf{T}$. Si on les connaît, on sait calculer le réel $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ pour tout triplet de vecteurs avec la formule ci-dessus. On peut aussi choisir de donner certains ou tous les vecteurs par leurs composantes covariantes.

Exemple 6 *[1] :*

$$\mathbf{x} = \mathrm{x}_i \mathbf{e}_i \qquad \mathbf{y} = \mathrm{y}_j \mathbf{e}_j \qquad \mathbf{z} = \mathrm{z}_k \mathbf{e}_k$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)\mathrm{x}_i \mathrm{y}_j \mathrm{z}_k \\ &= \mathrm{T}_{ijk} \mathrm{x}_i \mathrm{y}_j \mathrm{z}_k \end{aligned}$$

Les n^3 nombres $\mathrm{T}_{ijk} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ son appelés composantes 1-covariantes 23-contravariants du tenseur du troisième ordre $\mathbf{T}$. Toutes les combinaisons sont possibles. Il existe donc différentes sortes de composantes du tenseur T, repérées par des hauteurs d'indices différentes. Le nombre d'indices est égal à l'ordre du tenseur. La généralisation aux tenseur d'ordre p est immédiate : les tenseurs d'ordres p ont n^p composantes, chaque composante étant désignée avec p indices, inférieurs ou supérieurs.

1.4.2 L'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p :

Les opérations dans l'ensemble des tenseurs d'ordre p sont définis de la manière suivante :

Addition de deux tenseurs du même ordre

Définition 6 *[1] : soient $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}_2$ deux tenseurs d'ordre p. On appelle somme de $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}_2$ le tenseur d'ordre p, noté $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}2$, défini par :*

$$(\mathbf{T}1 + \mathbf{T}2)(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{x}_p) = \mathbf{T}_1(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) + \mathbf{T}_2(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) \quad \forall \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p \in \mathbb{V}^p$$

On vérifie aisément que l'opérateur $(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) : \mathbb{V}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien p-linéaire si $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}_2$ sont des tenseurs d'ordre p. L'addition de deux tenseur d'ordres différents n'a aucun sens.

Multiplication d'un tenseur par un scalaire

Définition 7 *[1] : Soit λ un scalaire et T un tenseur d'ordre p. On appelle produit de $\mathbf{T}$ par λ le tenseur d'ordre p défini par :*

$$(\lambda \mathbf{T})(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) = \lambda \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) \qquad \forall \ \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p\} \in \mathbb{V}^p$$

On vérifie aisément que l'opérateur $(\lambda \mathbf{T}) : \mathbb{V}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien p-linéaire si $\mathbf{T}$ est p-linéaire.

Théorème 1 *[1] : L'ensemble des tenseurs d'ordre p est un espace vectoriel.*

Démonstration 2 *[1] : Muni de ces deux opérations,l'ensemble des tenseurs d'ordre p est un espace vectoriel;l'élément neutre de l'addition est le tenseur nul, noté $\mathbf{0}$, qui est défini par : $\mathbf{0}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) = 0 \qquad \forall \ \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p\}$ et l'élément neutre de la multiplication par un scalaire est le scalaire 1.*

1.4.3 Tenseurs d'ordre zéro :

Définition 8 *[1] :* ***Scalaire,invariant*** *: Les tenseurs d'ordre zéro sont appelés scalaires ou encore invariants. Ce sont des nombres réels dont la définition est elle que leur valeur est invariante par changement de base.*

Remarque 3 *[1] : Tous les nombres réels ne sont pas des scalaires. par exemple, le réel défini comme la première composante d'un vecteur n'est pas un scalaire car il change avec la base. Il en est de même pour la somme des composantes d'un vecteur.*

1.4.4 Tenseurs d'ordre 1 :

Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et soit $\mathbf{v}$ un vecteur donné de $\mathbb{V}$. on définit le tenseur d'ordre 1 noté $\mathbf{V}$ par :
$\mathbf{V} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}.\mathbf{x} \\
&= (\mathrm{v}_i\mathbf{e}^i).(\mathrm{x}^j\mathbf{e}_j) \\
&= \mathrm{v}_i\mathrm{x}^j(\mathbf{e}^i.\mathbf{e}_j) \\
&= \mathrm{v}_i\mathrm{x}^j\delta^i_j \\
&= \mathrm{v}_i\mathrm{x}^i
\end{aligned}$$

Les composantes covariantes V_i du tenseur du premier ordre $\mathbf{V}$ sont égales aux composantes covariantes v_i du vecteur $\mathbf{v}$.donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathbf{x}) &= \mathrm{V}_i\mathrm{x}^i \\
&= \mathbf{v}.\mathbf{x} \\
&= \mathrm{v}_i\mathrm{x}^i. \quad \forall\, \mathbf{x}
\end{aligned}$$

À tout vecteur $\mathbf{v}$ on associe le tenseur $\mathbf{V}$ d'ordre 1 tel que : $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}.\mathbf{x}$ (sur une base : $\mathrm{V}_i = \mathrm{v}_i$ et $\mathrm{V}^i = \mathrm{v}^i$).

Théorème 2 *[1] Les tenseurs d'ordre* 1 *sont isomorphes aux vecteurs.*

Désormais, on les confond et on écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{V}(\mathbf{x})\\ &= \mathrm{V}_i\mathrm{x}^i\\ &= \mathrm{v}_i\mathrm{x}^i\\ &= \mathrm{v}^i\mathrm{x}_i\\ &= \mathbf{v}.\mathbf{x}\end{aligned}$$

1.5 Multiplication de tenseurs

1.5.1 Tenseur d'ordre 2 :

Un tenseur d'ordre 2 s'exprime par :

$$\overline{\overline{A}} = \mathrm{A}_{ij}\overrightarrow{e}_i \otimes \overrightarrow{e}_j$$

1.5.2 Études des tenseurs d'ordre 2 :

Nous étudions ici en détail les tenseurs d'ordre 2 compte tenu de leur importance en mécanique des milieux continus.

Tenseur identité

Le tenseur identité noté $\overline{\overline{I}}$ est un tenseur particulier car ses composantes sont les mêmes dans toute base orthonormée et donnent la matrice identité :

$$[\overline{\overline{I}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

autrement dit $I_{ij} = \delta_{ij}$

Tenseur symétrique et antisymétrique

Définition 9 *[1] : On dit qu'un tenseur du second ordre est symétrique s'il est égal à son transposé :*

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{\top} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{s}(\mathbf{y},\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{V}^2$$

Les composantes d'un tenseur d'un second ordre symétrique S dans une base quelconque ont donc les propriétés suivantes :

$$\mathrm{S}_{ij} = \mathrm{S}_{ji} \Leftrightarrow [\mathrm{S}_{\bullet\bullet}] = [\mathrm{S}_{\bullet\bullet}]^\top \quad ; \quad \mathrm{S}^{ij} = \mathrm{S}^{ji} \Leftrightarrow [\mathrm{S}^{\bullet\bullet}] = [\mathrm{S}^{\bullet\bullet}]^\top$$

$$\mathrm{S}^{\mathrm{i}}{}_{j} = \mathrm{S}_{\mathrm{j}}{}^{i} \Leftrightarrow [\mathrm{S}^{\bullet}{}_{\bullet}] = [\mathrm{S}_{\bullet}{}^{\bullet}]^\top \;\; ; \;\; \mathrm{S}_{\mathrm{i}}{}^{j} = \mathrm{S}^{\mathrm{j}}{}_{i} \Leftrightarrow [\mathrm{S}_{\bullet}{}^{\bullet}] = [\mathrm{S}^{\bullet}{}_{\bullet}]^\top$$

Remarque 4 *[1] : L'ensemble des tenseurs du second ordre symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ car l'addition et la multiplication par un scalaire conservent la symétrie. La dimension de ce sous espace est $d = n(n+1)/2$ (si $n = 3$ alors $d = 6$). On le notera $\mathbb{V}^{\otimes 2}_{sym}$.*

Définition 10 *[1] : On dit qu'un tenseur du second ordre est antisymétrique s'il est opposé à son transposé :*

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top \Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}^2$$

Les composantes d'un tenseur du second ordre antisymétrique $\mathbf{A}$ dans une base quelconque ont donc les propriétés suivantes :

$$\mathrm{A}_{ij} = -\mathrm{A}_{ji} \Leftrightarrow [\mathrm{A}_{\bullet\bullet}] = -[\mathrm{A}_{\bullet\bullet}]^\top \;\; ; \;\; \mathrm{A}^{ij} = -\mathrm{A}^{ji} \Leftrightarrow [\mathrm{A}^{\bullet\bullet}] = -[\mathrm{A}^{\bullet\bullet}]^\top$$

$$\mathrm{A}^{\mathrm{i}}{}_{j} = -\mathrm{A}_{\mathrm{j}}{}^{i} \Leftrightarrow [\mathrm{A}^{\bullet}{}_{\bullet}] = -[\mathrm{A}_{\bullet}{}^{\bullet}]^\top \;\; ; \;\; \mathrm{A}_{\mathrm{i}}{}^{j} = -\mathrm{A}^{\mathrm{j}}{}_{i} \Leftrightarrow [\mathrm{A}_{\bullet}{}^{\bullet}] = -[\mathrm{A}^{\bullet}{}_{\bullet}]^\top$$

Remarque 5 *[1] : L'ensemble des tenseurs du second ordre antisymétrique est un sous espace vectoriel de $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ car l'addition et la multiplication par un scalaire conservent l'anti-symétrique. La dimension de ce sous espace est $d = n(n-1)/2$ (si $n = 3$ alors $d = 3$). On le notera $\mathbb{V}^{\otimes 2}_{asy}$.*

Proposition 2 *[1] :*
les sous espace $\mathbb{V}^{\otimes 2}_{sym}$ et $\mathbb{V}^{\otimes 2}_{asy}$ sont orthogonaux.
Si $\mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes 2}$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{sym} + \mathbf{T}_{asy}$ cette décomposition est unique

$$\mathbf{T}_{sym} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^\top) \quad ; \quad \mathbf{T}_{asy} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^\top)$$

Trace d'un tenseur

Définition 11 *: La trace d'un tenseur d'ordre 2 est la somme de ses termes diagonaux.i.e*

$$\mathrm{Tr}\overline{\overline{A}} = \mathrm{A}_{ii}$$

produit contracté

Soient A^n et B^m deux tenseurs d'ordre $n \geq 1$ et $m \geq 1$ respectivement. Leur produit contracté est le tenseur $\mathrm{T}^p = \mathrm{A}^n.\mathrm{B}^m$ d'ordre $n+m-2$

produit contracté de deux vecteurs

Le produit contracté de deux vecteurs $\overline{\mathrm{a}}$ et $\overline{\mathrm{b}}$ est le produit scalaire classique $\overline{\mathrm{a}}.\overline{\mathrm{b}}$ tel que $\overline{\mathrm{a}}.\overline{\mathrm{b}} = \mathrm{a}_i\mathrm{b}_i$

Produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 et un vecteur

Soit $\{\mathbf{e}_i\}$ une base choisie. On définit le produit contracté du tenseur d'ordre 2, $\overline{\overline{\mathrm{L}}}$ et du vecteur $\overline{\mathrm{b}}$ par

$$\overline{\overline{\mathrm{L}}}.\overline{\mathrm{b}} = \mathrm{L}_{ij}\mathrm{b}_j\mathbf{e}_i$$

Produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2

Une fois une base $\{\mathbf{e}_i\}$ est choisie, on a

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}}.\overline{\overline{\mathrm{B}}} = \mathrm{A}_{ik}\mathrm{B}_{kj}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

en terme de matrice ;

$$Mat\left(\overline{\overline{\mathrm{A}}}.\overline{\overline{\mathrm{B}}}, \{\mathbf{e}_i\}\right) = Mat\left(\overline{\overline{\mathrm{A}}}, \{\mathbf{e}_i\}\right).Mat\left(\overline{\overline{\mathrm{B}}}, \{\mathbf{e}_i\}\right)$$

Produit doublement contracté

Soient A^n et B^m deux teneurs d'ordre $n \geq 2$ et $m \geq 2$. Leur produit doublement contracté est le tenseur $\mathrm{T}^p = \mathrm{A}^n : \mathrm{B}^m$ d'ordre $n+m-4$. Dans le cas où $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ et $\overline{\overline{\mathrm{B}}}$ sont deux tenseurs d'ordre 2, leur produit doublement contracté est le scalaire

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\mathrm{A}}} : \overline{\overline{\mathrm{B}}} &= \overline{\overline{\mathrm{A}}}\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right)\overline{\overline{\mathrm{B}}}\left(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i\right) \\ &= \mathrm{A}_{ij}\mathrm{B}_{ji}\end{aligned}$$

Produit tensoriel

Produit tensoriel de deux vecteurs : On appelle produit tensoriel de deux vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$, le tenseur du second ordre noté $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ défini par :

$$\forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathbb{V}^2 \xrightarrow{\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{v}.\mathbf{x})(\mathbf{w}.\mathbf{y}) \in \mathbb{R}$$

On vérifie aisément que le produit tensoriel $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ est bien une application bilinéaire, c'est-à-dire un tenseur du second ordre. En exprimant les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sur la base $\{\mathbf{e_i}\}$, on obtient les composantes covariantes du tenseur du second ordre $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{v}.(x^i \mathbf{e}_i))(\mathbf{w}.(y^j \mathbf{e}_j)) \\ &= (\mathbf{v}.\mathbf{e}_i)(\mathbf{w}.\mathbf{e}_j) x^i y^j)\end{aligned}$$

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{ij} x^i y^j = \mathrm{v}_i \mathrm{w}_j x^i y^j \quad \forall x^i y^j$$

donc $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{ij} = \mathrm{v}_i \mathrm{w}_j$

Remarque 6 *[1] : Le produit tensoriel de deux vecteur n'est pas commutatif : on vérifie aisément que les tenseurs $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ et $\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ sont des applications bilinéaires différentes :*

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Définition 12 *[1]*

:

produit tensoriel de m ***vecteurs*** *: On appelle produit tensoriel de m vecteurs le tenseur d'ordre m défini par :*

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_1 \otimes ... \otimes \mathbf{v}_m)(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m) &= \prod_{i=1}^{m} \mathbf{v}_i.\mathbf{x}_i \\ &= (\mathbf{v}_1.\mathbf{x}_1)...(\mathbf{v}_m.\mathbf{x}_m)\end{aligned}$$

On vérifie aisément que ce produit tensoriel est bien m -linéaire.

Exemple 7 *[1] : Le produit tensoriel des vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ est le tenseur d'ordre quatre défini par :*

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = (\mathbf{a}.\mathbf{x})(\mathbf{b}.\mathbf{y})(\mathbf{c}.\mathbf{z})(\mathbf{d}.\mathbf{t})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})^{ij}_{kl} = \mathrm{a}^i \mathrm{b}^j \mathrm{c}_k \mathrm{d}_l$$

Produit vectoriel

Une application importante du déterminant est qu'il détermine le produit vectoriel autre deux vecteurs, pour cela nous introduit sons les vecteurs de base :

$$\overline{e}_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{e}_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{e}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en suit si v et $w$deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, nous définissons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} \overline{e}_x & \overline{e}_y & \overline{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \\ &= (v_y w_z - v_z w_y)\overline{e}_x - (v_x w_z - v_z w_x)\overline{e}_y + (v_x w_y - v_y w_x)\overline{e}_z \end{aligned}$$

Ce produit vectoriel peut aussi être écrit pous la forme :

$$\begin{aligned} v \times w &= \varepsilon_{ijk} v_i w_j \overline{e}_k \\ &= (v \times w)_i \end{aligned}$$

Propriété 1 *:*

(1) *Le vecteur $v \times w$ est perpendiculaire à v et à w*

(2) *Le produit vectoriel est une opération antisymétrique*

$$v \times w = -w \times v$$

en particulier

$$v \times v = 0 \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^3$$

(3) *Le produit vectoriel est linéaire : pour tout $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ et pour tout nombre α, β nous avons :*

- $\overline{a} \times (\alpha\overline{b} + \beta\overline{c}) = \alpha(\overline{a} \times \overline{b}) + \beta(\overline{a} \times \overline{c})$
- $(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) \times \overline{c} = \alpha(\overline{a} \times \overline{c}) + \beta(\overline{b} \times \overline{c})$

Exemple 8 *[3] :*

$$\overline{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\overline{v} = 3\overline{e}_x - \overline{e}_y + \overline{e}_z \quad , \quad \overline{w} = \overline{e}_x + 2\overline{e}_y - \overline{e}_z$$

avec :

- $\overline{e}_x \times \overline{e}_y = \overline{e}_z$
- $\overline{e}_y \times \overline{e}_z = \overline{e}_x$
- $\overline{e}_z \times \overline{e}_x = \overline{e}_y$

donc :

$$\begin{aligned}
\overline{v} \times \overline{w} &= (3\overline{e}_x - \overline{e}_y + \overline{e}_z) \times (\overline{e}_x + 2\overline{e}_y - \overline{e}_z) \\
&= 6\overline{e}_x \times \overline{e}_y - 3\overline{e}_x \times \overline{e}_z - \overline{e}_y \times \overline{e}_x + \overline{e}_y \times \overline{e}_z + \overline{e}_z \times \overline{e}_x + 2\overline{e}_z \times \overline{e}_y \\
&= 7\overline{e}_x \times \overline{e}_y + 4\overline{e}_z \times \overline{e}_x - \overline{e}_y \times \overline{e}_z \\
&= -\overline{e}_x + 4\overline{e}_y + 7\overline{e}_z
\end{aligned}$$

donc :

$$\overline{v} \times \overline{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Produit mixte

Soit $\overline{a}.\overline{b}$ et $\overline{c}$ trois vecteurs leur produit mixte est nombre $\overline{a}.(\overline{b} \times \overline{c})$. On soit que :

$$\overline{a} = a_1\overline{e}_x + a_2\overline{e}_y + a_3\overline{e}_z$$

$$\overline{b} = b_1\overline{e}_x + b_2\overline{e}_y + b_3\overline{e}_z$$

$$\overline{c} = c_1\overline{e}_x + c_2\overline{e}_y + c_3\overline{e}_z$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\overline{a}.(\overline{b} \times \overline{c}) &= (a_1\overline{e}_x + a_2\overline{e}_y + a_3\overline{e}_z).\left(\overline{e}_x \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \overline{e}_y \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \overline{e}_z \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Le produit mixte s écrit donc sous forme d'une déterminant

$$\overline{a}.(\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

1.6 Tenseur gradient et divergence

1.6.1 Tenseur gradient

Définition 13 *[7] : Soit à présent* $\mathbf{t}$ *une fonction tensorielle d'ordre p,* $p \in \mathbb{N}^*$ *, définie sur* Ω*. Les composantes* $t_{ij...kl}(\vec{x}), (i, j, ..., k, l) \in \{1, ...n\}^p$ *de* $\mathbf{t}$ *relativement à la base* $\mathcal{B}$ *sont des fonctions des variables* x_i*,* $i \in \{1, ..., n\}$*. Si* $\mathbf{t}$ *est différentiable au point* $\vec{x}$ *et si* $m \in \{1, ..., n\}$ *est un indice quelconque mais fixé, on désigne par* $\partial_m \mathbf{t}(\vec{x})$ *la dérivée partielle de* $\mathbf{t}$ *par rapport à la variable* x_m *au point* $\vec{x}$*. Cette dérivée est le tenseur d'ordre p dont les composantes relativement à la base* $\mathcal{B}$ *sont :*

$$\partial_m t_{ij...kl}(\vec{x}) = \frac{\partial t_{ij...kl}}{\partial x_m}(\vec{x}) \qquad (i, j, ..., k, l) \in \{1, ..., n\}^p$$

. Le gradient de $\mathbf{t}$ *au point* $\vec{x}$ *est alors le tenseur d'ordre* $p+1$*,* $\mathbf{g} = \mathbf{grad\ t}$ *de composantes* $g_{ij...klm} = \partial_m t_{ij...kl}(\vec{x}), (i, j, ..., k, l, m) \in \{1, ..., n\}^{p+1}$ *relativement à la base* $\mathcal{B}$*. On a donc :*

$$dt_{ij...kl}(\vec{x}) = \partial_m t_{ij...kl}(\vec{x}) dx_m$$

Exemple 9 *[7] : Soit* $\mathbf{u}$ *la fonction tensorielle d'ordre 1 définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par ;*

$$\begin{cases} u_1 & = x_1 + x_2 + x_3 \\ u_2 & = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ u_3 & = x_1x_2x_3 \end{cases}$$

$$[\mathbf{grad\ u}(\vec{x})] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_3 & x_1 + x_3 & x_1 + x_2 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{bmatrix}$$

1.6.2 Tenseur divergence

Définition 14 *[7] : Soit à présent* $\mathbf{t}$ *une fonction tensorielle d'ordre p,* $p \in \mathbb{N}^*$*, définie sur* Ω*, de composantes* $t_{ij...kl}(\vec{x})$*,* $(i, j, ...k, l) \in \{1, ..., n\}^p$*, relativement à la base* $\mathcal{B}$*, fonctions* *des variables x_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Si $\mathbf{t}$ est différentiable au point $\vec{x}$, on peut alors définir p tenseurs d'ordre $p-1$ appelés divergences de $\mathbf{t}$ au point $\vec{x}$ et notés $\mathbf{div}^{(q)}\mathbf{t}(\vec{x})$, $q \in \{1, ..., p\}$. Les composantes de $\mathbf{div}^{(q)}\mathbf{t}(\vec{x})$ relativement à la base $\mathcal{B}$ sont données par :*

$$\left(\mathbf{div}^{(q)}\mathbf{t}(\vec{x})\right)_{ij...rt...kl} = \partial_s t_{ij...rst...kl}(\vec{x})$$

$(i, j, ..., r, t, ..., k, l) \in \{1, ..., n\}^{p-1}$, q désignant ici le range de l'indice s sur lequel porte la sommation. Si par exemple $p = 2$, on obtiendra deux tenseurs du premier ordre $\mathbf{div}^{(1)}\mathbf{t}(\vec{x})$ et $\mathbf{div}^{(2)}\mathbf{t}(\vec{x})$ de composantes respectifs $\partial_i t_{ij}(\vec{x})$ et $\partial_j t_{ij}(\vec{x})$. Si le tenseur $\mathbf{t}(\vec{x})$ est symétrique $\forall\ \vec{x} \in \Omega$, alors :

$$\mathbf{div}^{(1)}\mathbf{t}(\vec{x}) = \mathbf{div}^{(2)}\mathbf{t}(\vec{x}) = \mathbf{div}\ \mathbf{t}(\vec{x})$$

.

Exemple 10 *[7] : Soit $\mathbf{t}(\vec{x})$ le tenseur du second ordre sur $\mathbb{R}^3$ s'identifiant à la matrice suivante :*

$$[\mathbf{t}(\vec{x})] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2x_3 & x_1x_2x_3 \\ x_2 & x_1x_3 & x_1x_2x_3 \\ x_3 & x_1x_2 & x_1x_2x_3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{div}^{(1)}\mathbf{t}(\vec{x})] = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad [\mathbf{div}^{(2)}\mathbf{t}(\vec{x})] = \begin{bmatrix} 1 + x_3 + x_1x_2 \\ x_1x_2 \\ x_1 + x_1x_2 \end{bmatrix}$$

1.7 Champ tensoriels

En mécanique des milieux continus, certaines grandeurs physiques, comme par exemple les efforts intérieurs, les déformations et les vitesses de déformation, sont mathématiquement représentées par des tenseurs du second ordre. D'autres grandeurs sont représentées par des tenseurs d'ordre inférieurs(vecteur ou scalaires).Quelque soit leur ordre, ces tenseurs ont en général une valeur différente en chaque point $\mathbf{M}$ d'un domaine $\mathfrak{D}$ de l'espace occupé par un milieu continu. Les grandeurs physiques sont donc décrites par des champs de tenseurs :$\forall\ \mathbf{M} \in \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbf{T}(\mathbf{M}) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$

1.7.1 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

Soit a une fonction scalaire. En coordonnées cartésiennes les composantes d'un vecteur sont notées :

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

et celles d'un tenseur d'ordre deux : $\overline{\overline{A}}$:

$$[\bar{\bar{A}}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} gr\vec{a}d(\vec{a}) &= \frac{\partial a}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3}\vec{e}_3 \\ &= a_{,i}\vec{e}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} \\ &= a_{,ii} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} div\vec{a} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \\ &= a_{i,i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r\vec{o}t\vec{a} &= (\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3})\vec{e}_1 + (\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{a_3}{\partial x_1})\vec{e}_2 + (\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2})\vec{e}_3 \\ &= \varepsilon_{ijk}a_{k,j}\vec{e}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{i}v\bar{\bar{A}} &= (\frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_3})\vec{e}_1 + (\frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3})\vec{e}_2 + (\frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3})\vec{e}_3 \\ &= A_{ij,j}\vec{e}_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{grad}}\vec{a} = & \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 + \\
& \frac{a_2}{\partial x_1}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \\
& \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \\
& = a_{i,j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\Delta}\vec{a} = & (\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial_2^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2})\vec{e}_1 + \\
& (\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_3^2})\vec{e}_2 + \\
& (\frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_3^2})\vec{e}_3 \\
& = a_{i,jj}\vec{e}_i
\end{aligned}
$$

Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= rcos\theta \\
x_2 &= rsin\theta \\
x_3 &= z
\end{aligned}
$$

La base locale en chaque point est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_r &= cos\theta\vec{e}_2 \\
\vec{e}_\theta &= -sin\theta\vec{e}_2 \\
\vec{e}_z &= \vec{e}_3
\end{aligned}
$$

La matrice de passage de la base cartésienne à la base cylindrique est donc :

$$
P = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

En coordonnées cylindriques les composant d'un vecteur sont notées :

$$
[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{bmatrix}
$$

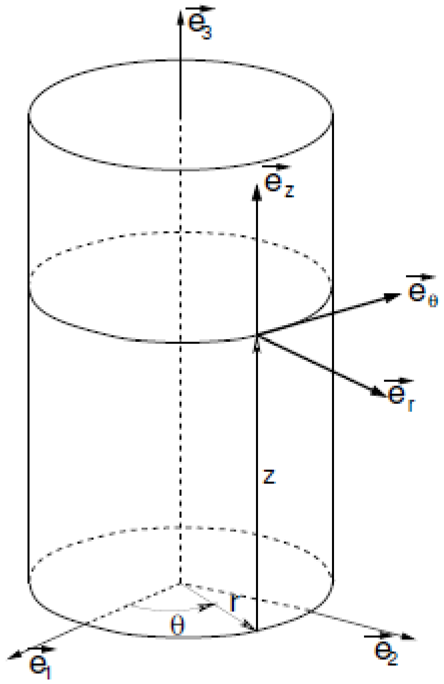

FIGURE 1.1 – coordonnées cylindriques

et d'un tenseur d'ordre deux :

$$[\overline{\overline{A}}] = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\theta} & A_{rz} \\ A_{\theta r} & A_{\theta\theta} & A_{\theta z} \\ A_{zr} & A_{z\theta} & A_{zz} \end{bmatrix}$$

$$gr\vec{a}da = \frac{\partial a}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\Delta a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial a}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$$

$$div\vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$r\vec{o}t\vec{a} = (\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z})\vec{e}_r + (\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r})\vec{e}_\theta + (\frac{\partial a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r})\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} d\vec{iv}\overline{\overline{A}} = (&\frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(A_{rr} - A_{\theta\theta}) + \frac{\partial A_{rz}}{\partial z})\vec{e}_r + \\ &(\frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}A_{\theta r} + \frac{\partial A_{\theta z}}{\partial z})\vec{e}_\theta + \\ &(\frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z})\vec{e}_z \end{aligned}$$

$$[\overline{\overline{grad}}\vec{a}]_{(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r} & \frac{\partial a_r}{\partial z} \\ \frac{\partial a_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_r}{r} & \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} x_1 &= rsin\theta sin\phi \\ x_2 &= rsin\theta cos\phi \\ x_3 &= rcos\theta \end{aligned}$$

La base locale en chaque point est donnée par :

$$\vec{e}_r = sin\theta sin\phi\vec{e}_1 + sin\theta cos\phi\vec{e}_2 + cos\theta\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_\phi = cos\phi\vec{e}_1 - sin\phi\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_\theta = cos\theta sin\phi\vec{e}_1 + cos\theta cos\phi\vec{e}_2 - sin\theta\vec{e}_3$$

La matrice de passage de la base cartésienne à la base sphérique est donc :

$$P = \begin{bmatrix} sin\theta sin\phi & cos\phi & cos\theta sin\phi \\ sin\theta cos\phi & -sin\phi & cos\theta cos\phi \\ cos\theta & 0 & -sin\theta \end{bmatrix}$$

En coordonnées sphériques les composantes d'un vecteur sont notées

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\phi \\ a_\theta \end{bmatrix}$$

et d'un tenseur d'ordre deux :

$$[\overline{\overline{A}}] = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\phi} & A_{r\theta} \\ A_{\phi r} & A_{\phi\phi} & A_{\phi\theta} \\ A_{\theta r} & A_{\theta\phi} & A_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$gr\vec{a}da = \frac{\partial a}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial a}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Delta a = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial a}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}sin^2\theta\frac{\partial^2 a}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(sin\theta\frac{\partial a}{\partial \theta})$$

$$div\vec{a} = \frac{1}{r^2 sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 sin\theta a_r) + \frac{\partial}{\partial \phi}(ra_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(rsin\theta a_\theta)\right]$$

$$\begin{aligned} r\vec{o}t\vec{a} = & \frac{1}{r^2 sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \phi}(ra_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(rsin\theta a_\phi)\right]\vec{e}_r + \\ & \frac{1}{r}\left[\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)\right]\vec{e}_\phi + \\ & \frac{1}{rsin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rsin\theta a_\phi) - \frac{\partial a_r}{\partial \phi}\right]\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{i}v\overline{\overline{A}} = & (\frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(2A_{rr} - A_{\phi\phi} - A_{\theta\theta} + A_{\theta r}cotg\theta))\vec{e}_r + \\ & (\frac{\partial A_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(3A_{\phi r} + 2A_{\phi\theta}cotg\theta))\vec{e}_\phi + \\ & (\frac{\partial A_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(A_{\theta\theta}cotg\theta - A_{\phi\phi}cotg\theta + 3A_{\theta r}))\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$[\overline{\overline{grad\vec{a}}}]_{(\vec{e}_r,\vec{e}_\phi,\vec{e}_\theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_r}{\partial r} & \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{a_\phi}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r} \\ \frac{\partial a_\phi}{\partial r} & \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{a_r}{r} + \frac{a_\theta}{r}cotg\theta & \frac{1}{r}\frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial a_\theta}{\partial r} & \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - \frac{a_\phi}{r}cotg\theta & \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_r}{r} \end{bmatrix}$$

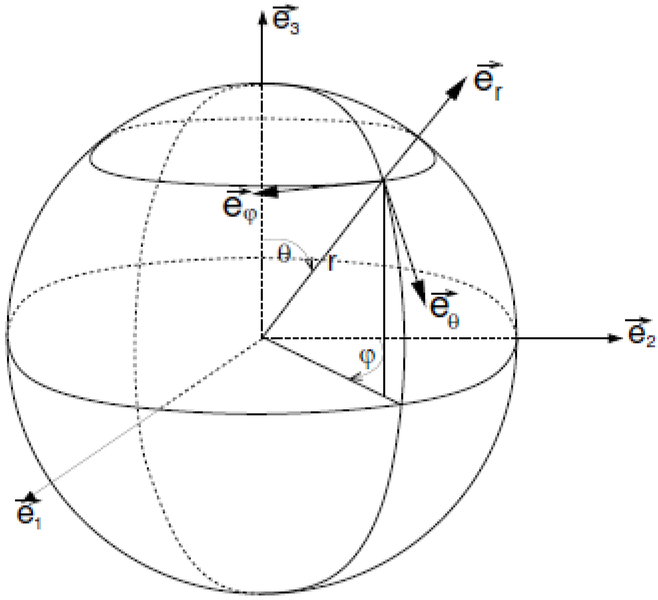

FIGURE 1.2 – coordonnées sphériques

Formules utiles

Soient f et g deux fonctions scalaire et $\overline{a}$ et $\overline{b}$ deux vecteurs :

- $div(f\vec{a}) = fdiv\ \vec{a} + \vec{a}.grad\ f$.
- $div(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}.rot\ \vec{a} - \vec{a}.rot\ \vec{b}$.
- $div(rot\ \vec{a}) = 0$
- $rot(grad\ f) = 0$
- $grad(fg) = fgrad\ g + grad\ f \wedge \vec{a}$
- $div(grad\ f) = \Delta f$
- $rot(rot\ \vec{a})grad(div\ \vec{a}) - \Delta\ \vec{a}$

Chapitre 2

Cinématique des milieux continus

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, avant d'aborder les chapitre traitant de la cinématique des milieux continus proprement dite, on définit le concept de milieu continu. On précise ensuite un certain nombre de concepts fondamentaux sur lesquels s'appuie la cinématique en général.

2.2 Descriptions de la mécanique des milieux continus

2.2.1 Domaines d'étude

• Fluide : Se dit des corps(gazes et liquides) qui n'ayant pas de forme propre, sont déformables sans effort.
∗ Gaz : Tout fluide aériforme (qui a les propriétés physiques de l'air(fluide gazeux qui forme l'atmosphère)). Un des trois états de la matière, caractérisé par la compressibilité et l'expansibilité.
∗ Liquide : Qui coule ou qui tend à couler. Se dit d'un état de la matière présenté par les corps n'ayant pas de forme propre, mais dont le volume est invariable.
• Solide : Qui a une forme propre.
D'un point de vue mécanique, un solide se caractérise essentiellement par un champs de déplacement

$$u = x - \mathbf{X} \tag{2.1}$$

alors qu'un fluide se décrit plutôt par un écoulement

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.2}$$

Il s'agit là d'une notion intuitive et incomplète (eau dans un verre,dentifrice).pour un fluide, la variable d'Euler est souvent la plus appropriée. Pour un solide, où les déplacements sont petits, les variables de Lagrange sont souvent utilisée ; néanmoins, pour les très petites déformations d'un solide (élasticité linéaire), les deux descriptions sont indistingables en première approximation.Pour visualiser un écoulement fluide, on a recours aux lignes de courant. Il s'agit des courbes qui, à un instant donné, sont parallèles en tout point au vecteur vitesse. Chacune de ces courbes peut être paramétrée par $x = (x(s), y(s), z(s))$, où

$$\frac{dx}{ds} = v_x, \quad \frac{dy}{ds} = v_y, \quad \frac{dz}{ds} = v_z. \tag{2.3}$$

Pour un écoulement stationnaire, les lignes de courant décrivent la trajectoire d'un paquet fluide.

2.2.2 Définition des milieux continus

On suppose que l'espace dans lequel ont lieu les mouvements de milieux matériels,est mathématiquement représentable par un espace affine de points,de dimension 3 et muni d'une distance. On le note $\mathbf{E}_3$.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine volumique de $\mathbf{E}_3$. On dit que le domaine $\mathcal{D}$ est rempli d'un milieu matériel continu si, à tout instant t et en chaque point $\mathcal{M}$ du domaine, on peut définir des grandeurs physiques relatives à ce milieu matériel. Les grandeurs physiques d'un milieux continue sont donc décrites par des champs (distribution spatiale) variables avec le temps. En mécanique des milieux continus, les grandeurs physiques peuvent être mathématiquement représentées par :

- des champs scalaires (masse volumique, température pression, etc) ;
- des champs vectoriels (vitesse, accélération,forces volumiques, couples volumique, etc) ;
- des champs tensoriels "d'ordre deux" : (déformation, contraintes, etc) ;
- des champs tensoriels "d'ordre supérieur à deux " : le tenseur d'élasticité qui est d'ordre quatre.

Remarque 7 *: Les lecteurs qui connaissent la mécanique des solides indéformables ont déjà pratiqué la mécanique sur des milieux continus : ils ont considéré des champs scalaires(masse volumique, énergie cinétique massique) et des champs vectoriels(vitesses, accélérations) définis en tout point du domaine $\mathcal{D}$ occupé par le solide. Les solides indéformables sont des cas particuliers de milieux continus.*

2.2.3 Hypothèse de continuité

Soit **M** un corps matériel continu ou milieu continu. L'ensemble des particules de **M** occupe,à chaque instant **t** un domaine $\mathbf{\Omega_t}$ ouvert et connexe de l'espace physique. **A** tout point de $\mathbf{\Omega_t}$ correspond une et un seule particule.

2.3 Description d'une transformation

2.3.1 Configuration

L'espace physique est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. L'ensemble des particules ou points matériels constituant le milieux continu étudié, occupe à chaque instant t, un ensemble de positions dans l'espace : c'est la configuration du système à l'instant t, noté $\overline{\Omega}(t)$ (d'intérieur $\Omega(t)$ et frontière $\partial\Omega(t)$). On introduit aussi la notion de configuration des référence : c'est la configuration particulière du système à un instant t_0 fixé. Souvent on prendra $\overline{\Omega}_0 = \overline{\Omega}(0)$, et on parlera alors de configuration initiale. Toute particule M_0 de $\overline{\Omega}_0$ est repérée par son vecteur position $\vec{X}(t)$ dans la configuration de référence. Toute particule M de $\overline{\Omega}(t)$ est repérée par son vecteur position $\vec{x}(t)$ dans la configuration actuelle (à l'instant t). (voir Figure2.1) La position de chaque particule M sera donc déterminée si on connaît sa position dans la configuration de référence et une fonction Φ telle que :

$$\vec{x}(t) = \Phi(\vec{X}, t)$$

Φ définit le mouvement par rapport à $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On devra donc déterminer trois fonction scalaires que :

$$\begin{cases} x_1 &= \Phi_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 &= \Phi_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 &= \Phi_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases}$$

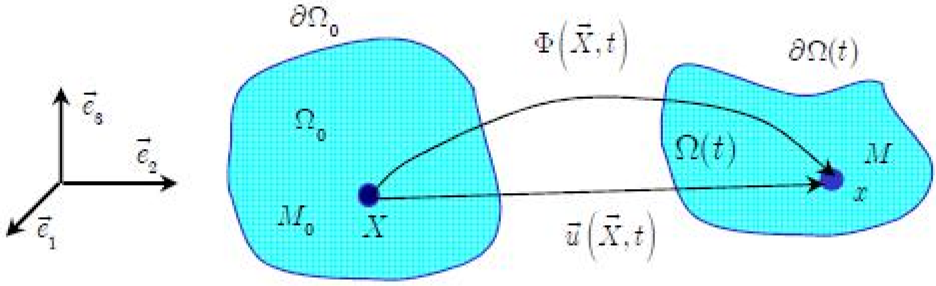

FIGURE 2.1 – Configurations de référence et actuelle

Dire que le milieux est continu, c'est dire que Φ est une fonction continu et biunivoque de X. On supposera que Φ est différentiable. Le déplacement par rapport à la configuration $\overline{\Omega}_0$, à l'instant t, de la particule M_0 est le vecteur

$$\vec{u}(X,t) = \vec{x}(X,t) - \vec{X}$$

Rappel : Une correspondance biunivoque entre deux ensembles E et F de choses quelconques est une correspondance qui à chaque objet E fait correspondre un objet de F, et telle que chaque objet de F est le correspondant d'un et un seul objet de E

2.3.2 gradient de la transformation

Une quantité clef dans la description de la déformation d'un corps est le gradient de la transformation noté $\overline{\overline{F}}$. Ce tenseur d'ordre deux permet de relier la position relative de deux particules voisines avant et après déformation. C'est donc l'ingrédient de base pour définir la déformation d'un corps. Considérons deux points matériels Q_1 et Q_2 situés dans le voisinage d'un point matériel P à l'image de la figure 2.2. Les positions relatives de Q_1 et Q_2 par rapport à P sont données par les vecteurs élémentaires $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$:

$$d\vec{X}_1 = \vec{X}_{Q_1} - \vec{X}_p \quad ; \quad d\vec{X}_2 = \vec{X}_{Q_2} - \vec{X}_p \tag{2.4}$$

Après déformation, les positions P, Q_1 et Q_2 sont données par la transformation $\vec{\phi}$:

$$\vec{x}_p = \vec{\phi}(\vec{X}_p, t) \;\; ; \;\; \vec{x}_{q_1} = \vec{\phi}(\vec{X}_{Q_1}, t) \;\; ; \;\; \vec{x}_{q_2} = \vec{\phi}(\vec{X}_{Q_2}, t) \tag{2.5}$$

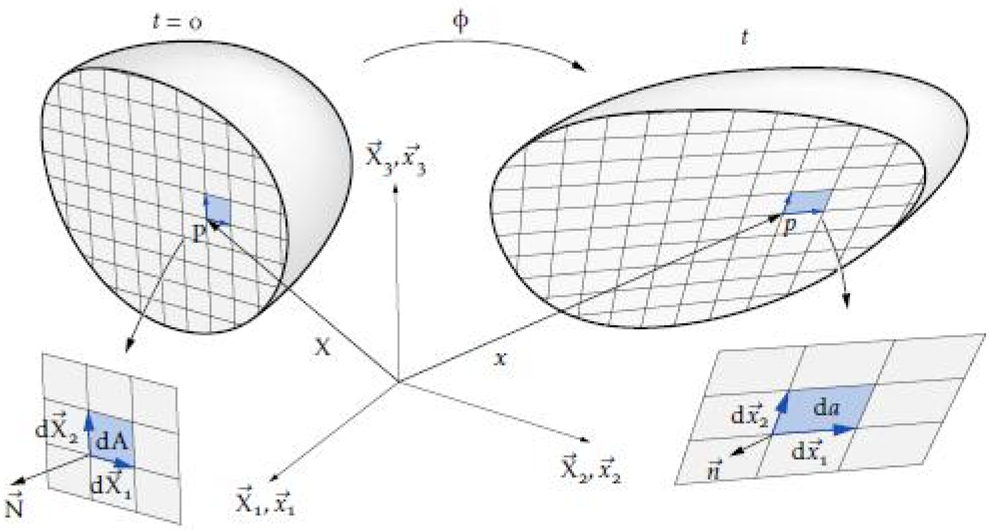

FIGURE 2.2 – Gradient de la transformation

Les vecteurs élémentaires $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$ deviennent donc :

$$d\vec{x}_1 = \vec{x}_{q_1} - \vec{x}_p = \vec{\phi}(\vec{X}_p + d\vec{X}_1, t) - \vec{\phi}(\vec{X}_p, t) \tag{2.6}$$

$$d\vec{x}_2 = \vec{x}_{q_2} - \vec{x}_p = \vec{\phi}(\vec{X}_p + d\vec{X}_2, t) - \vec{\phi}(\vec{X}_p, t) \tag{2.7}$$

Nous définissons le tenseur gradient de la transformation par :

$$\overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{\phi}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} = \overline{\overline{grad_0}}\vec{\phi} \tag{2.8}$$

Il est parfois également appelé matrice jacobienne car c'est la matrice du changement des variables $\vec{X}$ en $\vec{x}$. En effet, le tenseur $\overline{\overline{F}}$ s'écrit aussi :

$$\overline{\overline{F}} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} \tag{2.9}$$

et est non symétrique en général. Le jacobien de la transformation est le déterminant de cette matrice. En tenant compte du caractère infinitésimal des vecteurs $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$, on peut écrire le développement de Taylor du premier ordre de (2.3) et (2.4) :

$$\begin{aligned} d\vec{x}_1 &= \overline{\overline{F}}(\vec{X}_p, t).d\vec{X}_1 \\ d\vec{x}_2 &= \overline{\overline{F}}(\vec{X}_p, t).d\vec{X}_2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

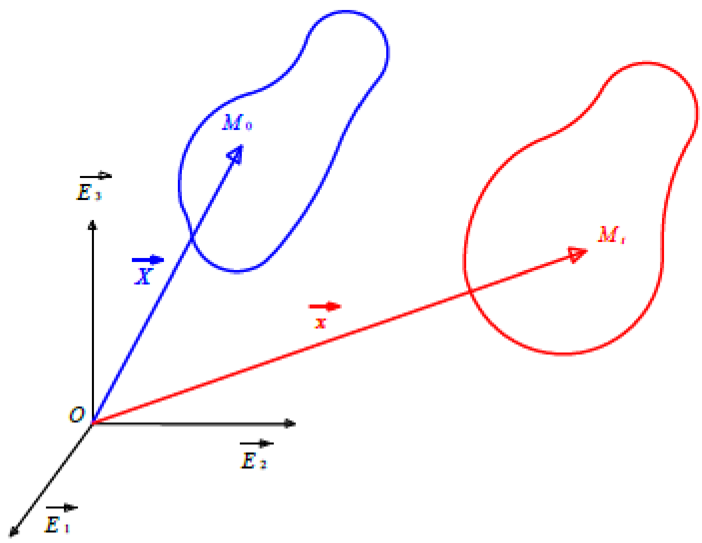

FIGURE 2.3 – Description lagrangienne de mouvement

2.3.3 Description Lagrangienne du mouvement

Considérons un repère orthonormé $\mathbf{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ associé à un référentiel $\mathfrak{R}$ La cinématique classique d'un milieux continu est construite à partir des notions :

$*$ de temps, pouvant être représentée par une variable réelle t déterminée par deux valeur extrêmes.

$*$ d'espace physique,pouvant être représenté par un espace affine de dimension 3. Les points de cet espace sont appelés "points matériels". Dans le repère $\mathbf{R}$, à un instant $t = 0$, le point M_0 a des coordonnées X_1, X_2, X_3 qui définissent la position du point matériel M. On appelle aussi ce système de coordonnées le système de cordonnées matérielles dans la configuration de référence C_0. Nous pourrons ainsi écrire :

$$O\vec{M}_0 = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3 = X_i\vec{e}_i = \vec{X}$$

Pour décrire le mouvement du domaine, il convient donc de se donner la loi d'évolution au cours du temps des position de l'ensemble des particules matérielles constituant le domaine. On obtient donc la configuration actuelle C_t. Ainsi il est nécessaire de définir les coordonnées x_1, x_2, x_3 du point M_t qui à l'instant t représente la position du point matériel M.

$$O\vec{M}_t = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_i\vec{e}_i = \vec{x}$$

Ce qui revient à dire qu'il faut se donner les fonctions scalaires suivantes :

$$x_i = \phi_i(X_j, t)$$

Dans cette description, les variables indépendantes X_1, X_2, X_3 et t sont dites "variables ou coordonnées de Lagrange". Les fonctions ϕ_i représentes la description lagrangienne du mouvement de notre domaine par rapport au référentiel $\mathfrak{R}$. Connaissant la position à chaque instant du point matériel M il est possible de définir alors sa vitesse et son accélération vis à vis du référentiel $\mathfrak{R}$.

vecteur vitesse

$$\overrightarrow{V(M,t)} = \frac{dO\vec{M}_t}{dt}$$

Dans une base cartésienne orthonormée, ses composantes sont

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{d\phi_i}{dt}(X_j, t) \\ &= \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(X_j, t) \end{aligned}$$

Dans cette dernière formule, le symbole $\frac{\partial}{\partial t}$ représente la dérivation partielle par rapport au temps, c'est à dire la dérivation en considérant les variables de position X_j indépendantes du temps.

vecteur accélération

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\gamma(M,t)} &= \frac{d\overrightarrow{V(M,t)}}{dt} \\ &= \frac{d^2O\vec{M}_t}{dt^2} \end{aligned}$$

Dans une base cartésienne orthonormée, ses composantes sont

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{d^2\phi_i}{dt^2}(X_j, t) \\ &= \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2}(X_j, t) \end{aligned}$$

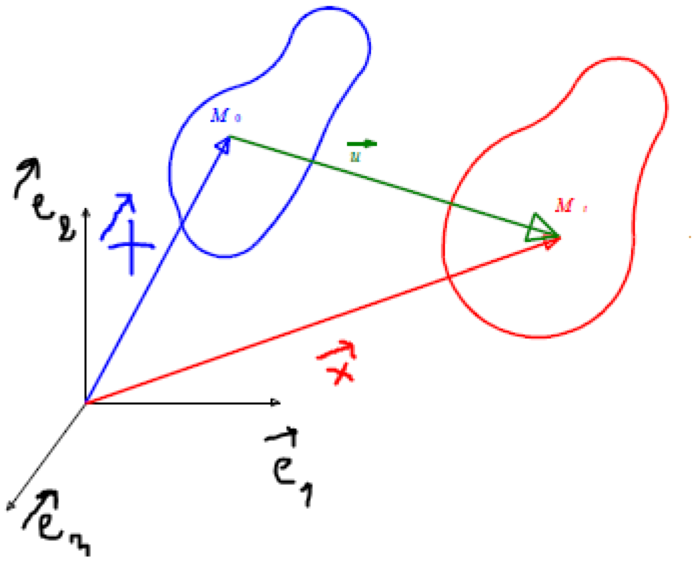

FIGURE 2.4 – vecteur déplacement

vecteur déplacement

Souvent on préfère employer le vecteur déplacement au lieu du vecteur position

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u(X_j,t)} &= O\vec{M}_t - O\vec{M}_0 \\ &= \vec{x} - \vec{X}\end{aligned}$$

On peut alors remarquer l'égalité

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(M,t)} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(X_j,t) \\ &= \frac{d\vec{u}}{dt}(X_j,t) \\ \overrightarrow{\gamma(M,t)} &= \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(X_j,t) \\ &= \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}(X_j,t)\end{aligned}$$

2.3.4 Description Eulérienne du mouvement

Les hypothèses de continuité (milieu et transformation) imposent que les fonctions Φ_i soient des bijections de la configuration des référence C_0 sur la configuration actuelle C_t. Cette bijectivité impose l'existence d'une relation inverse entre les variables de position des référence et les variables de positions actuelles. On a donc :

$$X_I = \psi_I(x_j, t)$$

On constante donc qu'il est possible de changer des variables spatiales. La description dite eulérienne consiste à considérer les variables x_1, x_2, x_3 et t comme indépendantes et à les utiliser sous forme de "variables ou coordonnées d'Euler". Dans la description eulérienne, on ne se préoccupe pas de savoir ce qu'il advient de chaque particule.En fait on étudie ce qui se passe, à chaque instant, en chaque point de l'espace. On peut exprimer la vitesse et l'accélération en fonction des variables d'Euler :

vecteur vitesse

$$\overrightarrow{V(M,t)} = \frac{dO\vec{M}_t}{dt}$$

avec

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(X_j, t) \\ &= \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(\psi_j(x_k, t), t) \end{aligned}$$

vecteur accélération

$$\overrightarrow{\gamma(M,t)} = \frac{d^2O\vec{M}_t}{dt^2}$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{\partial_i^2}{\partial t^2}(X_j, t) \\ &= \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2}(\psi_j(x_k, t), t) \end{aligned}$$

pratiquement, on peut dire qu'en description lagrangienne, on suit le domaine dans son mouvement, alors qu'en description eulérienne, on observe l'évolution du système en un point géométrique fixe pour l'observateur.

2.4 Trajectoire d'une particule et dérivées temporelles

2.4.1 Trajectoire d'une particule

On appelle trajectoire d'une particule, la courbe géométrique lieu des positions occupées par cette particule au cours du temps. $\vec{x}(t) = \varphi(\vec{X}, t)$ est une représentation paramétrée en temps de la trajectoire. Par définition de la vitesse ;

$$\begin{aligned}\vec{V}(\vec{x}, t) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ &= \frac{dx_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dx_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dx_3}{dt}\vec{e}_3\end{aligned}$$

les trajectoires peuvent être obtenues par la résolution des trois équations

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{V_1(x_1, x_2, x_3, t)} &= \frac{dx_2}{V_2(x_1, x_2, x_3, t)} \\ &= \frac{dx_3}{V_3(x_1, x_2, x_3, t)} \\ &= dt\end{aligned}$$

2.4.2 Lignes de courant

A un instant donné, on appelle lignes de courant du mouvement, les lignes qui sont en tout point tangentes au vecteur vitesse de la particule située en ce point. Soit pour t fixé, deux équations :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{V_1(x_1, x_2, x_3, t)} &= \frac{dx_2}{V_2(x_1, x_2, x_3, t)} \\ &= \frac{dx_3}{V_3(x_1, x_2, x_3, t)}\end{aligned}$$

Remarque 8 *[3] : Pour un mouvement stationnaire (ou permanent) $\vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{V}(\vec{x})$. Les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.*

2.4.3 Dérivées temporelles

Souvent nous aurons à considérer les variations d'une grandeur physique, que nous noterons **A**, au cours du temps. Cette grandeur peut être une fonction scalaire, vectorielle ou

tensorielle. Nous avons donc :
$\mathbf{A} = \mathbf{a}(x_i, t)$: pour une détermination vis à vis des variables eulériennes.
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(X_i, t)$: pour une détermination vis à vis des variables lagrangiennes. On peut au niveau de cette grandeur, s'intéresser à deux types de variation. Ainsi, si nous considérons un point géométrique de l'espace, la grandeur $\mathbf{A}$ étant définie en ce point, nous pourrons exprimer les variations en utilisant la dérivée partielle par rapport au temps. On appelle parfois cette dérivée "dérivée locale". En variables eulériennes nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(x_i, t)$$

Cependant, les grandeurs utilisées sont souvent attachées à un domaine matériel(température, masse volumique, vitesse...). Il convient de considérer aussi la variation de ce domaine matériel au cours du temps. pour ce fait on utilise la dérivée totale par rapport au temps, appelée "dérivée particulière" (du fait que c'est une particule que l'on suit dans son mouvement). En représentation lagrangienne, puisque les grandeurs physiques sont repérées vis à vis de l'élément de matière, il y a identification entre la dérivée particulière et la dérivée locale :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{d\mathbf{A}}{dt}(X_I, t)\\ &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(X_I, t)\\ &= \mathring{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

par contre, pour la représentation eulérienne, le calcul de la dérivée particulier nécessite de prendre en compte la variation du domaine délimité par des variables x_i qui sont fonctions du temps :

$$\begin{aligned}\mathring{\mathbf{A}} &= \frac{d\mathbf{A}}{dt}\\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt}(x_i, t)\\ &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(x_i, t) + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_i}{\partial t}\end{aligned}$$

Dans cette formule on remarque la présence de $\frac{\partial \phi_i}{\partial t}$ qui est la i^{me} composante du vecteur vitesse. D'autre part le terme $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i}$ peut aussi être interprété comme la composante de l'opérateur gradient appliqué à la grandeur **A**. On peut donc écrire, sous une forme générale :

$$\mathring{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(x_i, t) + \mathbf{grad\ a}\ (x_i, t).\vec{V}(x_i, t)$$

2.5 Dérivée matérielle

Soit une fonction $f(x, t)$. D'une part, on peut, considérer la variation de f dans le temps en un point x fixé (ex : sous le pont), auquel cas, on calcule simplement

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \tag{2.11}$$

D'autre part, on peut s'intéresser à la variation de cette grandeur à **X** fixé c'est à dire. en suivant un point matériel ou un "paquet fluide". Dans ce cas, on est amené à calculer l'évolution de $f(x(t), t)$, c'est à dire.

$$\lim_{\delta t \longrightarrow 0} \frac{f(x(t+\delta t), t+\delta t) - f(x(t), t)}{\delta t} = (v.\nabla)f + \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{2.12}$$

où

$$(v.\nabla) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = v_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.13}$$

Nous définissons ainsi la dérivée matérielle par

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (v.\nabla)f. \tag{2.14}$$

Le premier terme de cette dérivée donne la variation de f à x fixé. D'autre part, si l'on dénote par $s = v/|v|$ la direction de la vitesse, le second terme n'est autre que la dérivée directionnelle, $|v|\partial/\partial s$ dans le sens de l'écoulement. Autrement dit, c'est un terme dû au déplacement du fluide ou d'advection. Lorsque nous transposerons la loi de Newton à un milieux continue, nous devrons calculer l'accélération d'un paquet fluide. Celle-ci sera donnée, en coordonnées d'Euler, par la dérivée matérielle de la vitesse.

2.6 Loi de comportement

En mécanique des fluides, nous travaillerons toujours en variables d'Euler comme pour les matériaux solides (qui sont des fluides qui s'ignorent...) les lois de comportement fluide sont élaborées à partir de l'expérience.

2.6.1 Fluide Newtonien

pour un fluide Newtonien, les contraintes sont une fonction affine des vitesses de déformation. Soit :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \lambda Tr(\overline{\overline{D}})\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}} \tag{2.15}$$

où

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{grad}\vec{v} + \overrightarrow{grad}^T\vec{v}) \tag{2.16}$$

soit, en notation indicielle

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

μ : est la viscosité dynamique(dimension poiseuille$\equiv \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{LT}}$)

λ : est le second coefficient de viscosité, On introduit également la viscosité cinématique $v = \frac{\mu}{\rho}$(dimension Stokes $\equiv \frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{T}}$)

Chapitre 3

Notion de déformations

3.1 Introduction

Un solide, tel qu'il est défini en mécanique générale, est un milieu continu indéformable : la distance entre tout couple de particules est constante dans le temps. Pour analyser la déformation à un instant t dans un mouvement de milieu continu déformable, il faudrait a priori comparer la longueur actuelle et la longueur à un instant de référence t_0, arbitrairement choisi de toutes les biparticules du milieu continu. l'instant de référence t_0, le milieu continu est déclaré comme non déformé.

3.2 Tenseur gradient

On fait que la position d'une particule M est déterminée si on connaît sa position dans la configuration de référence et une fonction ϕ telle que

$$\vec{x}(t) = \phi(\vec{X}, t) \tag{3.1}$$

On dira qu'un milieux continus en mouvement subit des déformations si les distances relatives des points matériels varient au cours du temps. En différenciant (3.1), on obtient :

$$d\vec{x} = \nabla\phi \, d\vec{X} \qquad dx_i\vec{e}_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j} dX_j \vec{e}_i$$

On note $\overline{\overline{F}}$ l'application linéaire qui fait passer de l'espace vectoriel dans lequel peut varier $d\vec{X}$ dans l'espace vectoriel où varie a priori $d\vec{x}$. Cette application linéaire, appelée **tenseur**

gradient ou **application linéaire tangante**, permet donc le passage de la configuration $\overline{\Omega}_0$ à la configuration $\overline{\Omega}(t)$. On considère la transformation suivante :

$$d\vec{X} \longrightarrow d\vec{x}$$

Soit $\overline{\overline{F}}$ l'application linéaire qui nous permet de passer de l'espace vectoriel dans lequel peut varie $d\vec{X}$ vers l'espace vectoriel oú varie $d\vec{x}$. Cette application linéaire est appelée tenseur gradient ou application linéaire tangent, nous permet donc de passer de $\overline{\Omega}_0$ à $\overline{\Omega}(t)$.(voir figure 3.2) En utilisant les notations indicielles, on peut écrire :

$$dx_i = F_{ij} dX_j$$

avec

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \\ &= \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j} \end{aligned}$$

soit

$$\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X}$$

Ce qui implique :

$$d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} d\vec{x}$$

3.3 Tenseur de déformations

3.3.1 Définition :

[3] le tenseur gradient décrit la transformation locale au voisinage d'une particule donnée. Afin de rendre compte des déformations, c'est à dire des changements de forme autour de cette particule, on s'intéresse à l'évolution du produit scalaire de deux vecteurs matériels pris

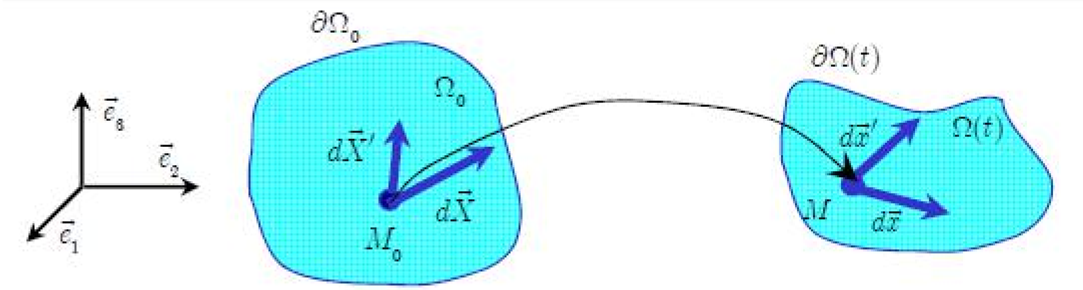

FIGURE 3.1 – Notion de déformation

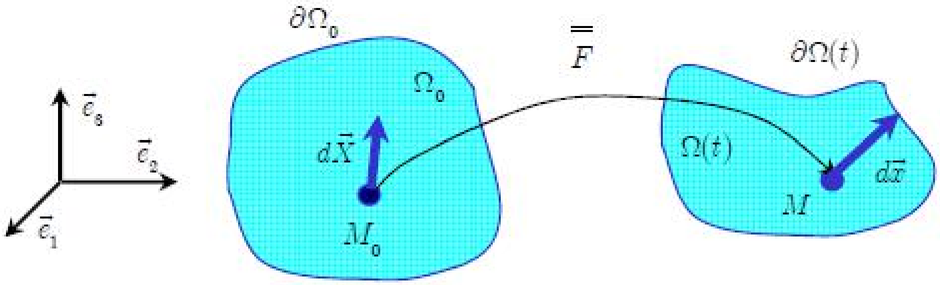

FIGURE 3.2 – Application linéaire tangente

respectivement dans les deux configurations $\overline{\Omega}_0$ et $\overline{\Omega}(t)$. Soient les particules $\vec{X}, \vec{X}+d\vec{X}, \vec{X}+d\vec{X}'$. Après déformations, elles occupent dans $\overline{\Omega}(t)$ les positions respectives $\vec{x}, \vec{x}+d\vec{x}, \vec{x}+d\vec{x}'$.

$$\begin{aligned} d\vec{x}.d\vec{x}' &= \left(\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)d\vec{X}\right).\left(\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)d\vec{X}'\right) \\ &= \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}dX_i\right).\left(\frac{\partial x'_k}{\partial X'_j}dX'_j\right) \end{aligned}$$

d'où sa variation autour de la transformation

$$\begin{aligned} d\vec{x}.d\vec{x}' - d\vec{X}.d\vec{X}' &= \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x'_k}{\partial X'_j} - \delta_{ij}\right) dX_i dX'_j \\ &= \left(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}\right) dX_i dX'_j \end{aligned}$$

soit

$$d\vec{x}.\vec{x}' - d\vec{X}.d\vec{X}' = 2d\vec{X}\overline{\overline{\varepsilon}}d\vec{X}'$$

en posant
$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{F}}^T(X,t)\overline{\overline{F}}(X,t) - \overline{\overline{1}}\right)$$
L'application linéaire $\overline{\overline{\varepsilon}}$ est appelée tenseur des déformations. Cette application est symétrique mais dépend de la base $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ initialement choisie.

Remarque 9 *:[3]*
* *S'il n'y a pas de déformations, alors $\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{0}}$ (et inversement).*
* *$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T\overline{\overline{F}}$ est appelé le tenseur des dilatations. Ce tenseur est symétrique.*

Théorème 3 *:[3]*
- *Les valeurs propres de $\overline{\overline{C}}$ sont strictement positives.*
- *Det $\left(\overline{\overline{F}}\right) > 0 \quad \forall\, t$.*
- *Le tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ admet les mêmes valeurs propres que $\overline{\overline{C}}$.*

3.4 Tenseur de déformation lagrangien

3.4.1 Tenseur de Green-Lagrange

étudions la variation du produit scalaire :
$$\begin{aligned} d\vec{x}^1.d\vec{x}^2 - d\vec{X}^1.d\vec{X}^2 &= C_{kl}dX_k^1 dX_l^2 - dX_k^1\delta_{kl}dX_l^2 \\ &= (C_{kl} - \delta_{kl})dX_k^1 dX_l^2 \\ &= d\vec{X}^1.(\mathbf{C} - \delta).d\vec{X}^2 \end{aligned}$$
avec δ le tenseur de Kronecker. On pose :
$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \delta)$; $L_{kl} = \frac{1}{2}(C_{kl} - \delta_{kl})$, $\mathbf{L}$ est le tenseur de déformation de Green Lagrange.
$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \delta)$$

Propriété 2 *:*
$\mathbf{L}$ *: est un tenseur du deuxième ordre, symétrique et lagrangien par construction. On montrera par la suite que* $\mathbf{L}$ *contient toutes les informations pour décrire les déformations autour de p_t au temps t.*

3.4.2 Tenseur de Cauchy à droite

$$\begin{aligned} d\vec{x}^1.d\vec{x}^2 &= dx_i^1 dx_i^2 \\ &= F_{ik} dX_k^1 F_{il} dX_l^2 \\ &= F_{ik} F_{il} dX_k^1 dX_l^2 \end{aligned}$$

posons :

$$\begin{aligned} C_{kl} &= F_{ik} F_{il} \\ &= F_{ki}^t F_{il} \end{aligned}$$

ce qui équivaut à introduire le tenseur du second ordre tel que :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^t.\mathbf{F}$$

$\mathbf{C}$: est un tenseur lagrangien car est fonction des variables de Lagrange :

$$\mathbf{C}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}^t(\vec{X}, t).\mathbf{F}(\vec{X}, t)$$

. On a donc :

$$d\vec{x}^1.d\vec{x}^2 = C_{kl} dX_k^1 dX_l^2$$

d'où :

$$d\vec{x}^1.d\vec{x}^2 = d\vec{X}^1.\mathbf{C}.d\vec{X}^2$$

$\mathbf{C}$: est appelé tenseur de Cauchy à droite :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^t.\mathbf{F}$$

Propriété 3 *:*
$\mathbf{C}$ *: est un tenseur d'ordre* 2*, lagrangien et symétrique(par construction), défini positif. En effet,* $d\vec{X}.\mathbf{C}.d\vec{X} = \|d\vec{x}\|^2 \geq 0$ *, donc* $\mathbf{C}$ *: est positif*
Si $d\vec{X}.\mathbf{C}.d\vec{X} = 0$*, alors* $d\vec{x} = \vec{0}$ *et donc* $d\vec{X} = \vec{0}$*.*
Comme $\mathbf{F}$ *est inversible,* $\mathbf{C}$ *: est inversible et on a* $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}.(\mathbf{F}^{-1})^t$*.*

3.5 Déformations avec petites perturbations

3.5.1 hypothèse des petites perturbation

L'hypothèse des petites perturbations est la combinaison de deux hypothèse fortes :

- petites déformations.
- petites déplacements.

L'hypothèse des petites déformations signifie que les déformations relatives de la structure vis à vis de ses dimensions sont très petites. Dans la pratique, il est considéré que l'hypothèse des petites déformations est vérifiée si ces dernières restent inférieures à 0.2. Le tenseur de déformations de Green-Lagrange peut alors être approximé par sa forme linéarisée (3.1) Cette forme permet généralement de simplifier très fortement les relations entre le champ des déformations et le champ des déplacements.

$$\mathbf{E}_{GL} = \frac{1}{2}\left(\nabla U + \nabla U^T + \nabla U^T.\nabla U\right) \text{ ce qui donne } \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla U + \nabla U^T\right) \tag{3.2}$$

où **U** est le vecteur déplacement en un point de la structure.
L'hypothèse des petits déplacements permet de supposer que la structure reste immobile au cours de la transformation.

3.5.2 Conditions de compatibilité des déformations

La relation déformation-déplacement s'écrit en H.P.P :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}}\right)^T\right) \tag{3.3}$$

En notation indicielle,cela s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{3.4}$$

À tout champ de déplacement, on peut faire correspondre un champ de déformation H.P.P par la relation (3.4). par contre, existe-t-il pour un champ de déformation quelconque, un champ de déplacement associé par (3.3). La réponse est non en général. pour que la réponse soit positive, il faut que les déformations vérifient des équations dites de compatibilité, au nombre de six, en comptant les permutations :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} = 0 \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,jk} + \varepsilon_{jk,ik} = 0 \tag{3.6}$$

3.6 Vitesse de déformation

3.6.1 Taux de déformation lagrangien

Entre les instants t et $t+dt$, un vecteur "matériel" infinitésimal $d\vec{x}^t$ se transforme en $d\vec{x}^{t+dt}$. De la même manière que, pour les déformations, nous nous sommes intéressés à la variation du produit scalaire,nous allons cette fois considérer sa vitesse de variation. La vitesse de variation du produit scalaire de deux vecteurs matériels est alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x'}\right) &= \frac{d}{dt}\left((\mathbf{F}d\vec{X}).(\mathbf{F}d\vec{X'})\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(d\vec{X}.\mathbf{C}d\vec{X'}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(d\vec{X}.d\vec{X'} + 2d\vec{X}.\mathbf{E}d\vec{X'}\right)\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x'}\right) \\
&= 2d\vec{X}.\frac{d\mathbf{E}}{dt}d\vec{X'}
\end{aligned}$$

Remarque 10 *[5] Le tenseur*

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{E}}{dt}(\vec{X},t) &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\vec{X},t) \\
&= \dot{\mathbf{E}}(\vec{X},t)
\end{aligned}$$

*est appelé **taux de déformation Lagrangien***
Il est obtenu en dérivant par rapport au temps le tenseur des déformations de Green-Lagrange. C'est donc la vitesse d'évolution de la déformation lorsque celle-ci est mesurée à partir d'un état de référence initial.

3.6.2 Taux de déformation eulérien

étudions à présent la même variation du produit scalaire mais en variables eulériennes. On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(d\vec{x}.d\vec{x'}\right) &= \frac{d}{dt}\left((\mathbf{F}d\vec{X}).(\mathbf{F}d\vec{X'})\right) \\
&= \frac{d(\mathbf{F}d\vec{X})}{dt}(\mathbf{F}d\vec{X'}) + (\mathbf{F}d\vec{X}).\frac{d(\mathbf{F}d\vec{X'})}{dt}
\end{aligned}$$

En utilisant la relation :

$$\begin{aligned}\frac{d(d\vec{x})}{dt} &= \frac{d(\mathbf{F}d\vec{X})}{dt} \\ &= \dot{\mathbf{F}}d\vec{X} \\ &= \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}d\vec{x}\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x'}) &= \frac{d(\mathbf{F}d\vec{X})}{dt}.d\vec{x'} + d\vec{x}.\frac{d(\mathbf{F}d\vec{X'})}{dt} \\ &= \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}d\vec{x}.d\vec{x'} + d\vec{x}.\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}d\vec{x'} \\ \frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x'}) &= d\vec{x}\left((\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})^T + \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\right)d\vec{x'} \\ \frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x'}) &= d\vec{x}.(2\mathbf{D})d\vec{x'}\end{aligned}$$

Cette dernière relation nous permet de faire apparître le **tenseur taux de déformation eulérien D**.
Il peut être déterminé à partir du tenseur gradient des vitesses. Nous avons en effet la relation :

$$\begin{aligned}\dot{F}_{ik}F^{-1}_{kj} &= \frac{\partial V_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \\ &= L_{ij}\end{aligned}$$

Ainsi le produit $\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ défini un tenseur $\mathbf{L}$ qui n'est autre que le tenseur gradient des vitesses :

$$\mathbf{L} = \mathbf{Grad}\ \vec{V}$$

Le tenseur **D** représente la partie symétrique du tenseur gradient des vitesses. On peut aussi faire apparaître le tenseur **W** qui représente la partie antisymétrique. Les relations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\vec{x},t) &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\,\vec{V} + (\mathbf{Grad}\,\vec{V})^T\right]\\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{L}+\mathbf{L}^T)\\
\mathbf{W}(\vec{x},t) &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\,\vec{V} - (\mathbf{Grad}\,\vec{V})^T\right]\\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{L}-\mathbf{L}^T)\\
\mathbf{Grad}\,\vec{V} &= \mathbf{D}+\mathbf{W}\\
&= \mathbf{L}(\vec{x},t)\\
(\mathbf{Grad}\,\vec{V})^T &= \mathbf{D}-\mathbf{W}\\
&= [\mathbf{L}(\vec{x},t)]^T
\end{aligned}$$

3.6.3 Interprétation du tenseur taux de déformation

Cette interprétation est tout à fait similaire à cette des tenseurs de Cauchy-Green droit C et des déformations de Green-Lagrange $\mathbf{E}$.

Taux de dilatation linéaire

En considérant par exemple les deux vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x'}$ confondus, de longueur dl et dans la direction $\vec{E}_1(d\vec{x} = d\vec{x'} = dl\vec{E}_1)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x'}) &= \frac{d(dl)^2}{dt}\\
&= d\vec{x}.(2\mathbf{D})d\vec{x'}\\
&= 2D_{11}(dl)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, D_{11} est le **taux de dilatation linéaire** (ou encore taux d'allongement ou vitesse d'extension) dans la direction $\vec{E}_1$.

Taux de glissement

Nous devons cette fois prendre les deux vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x'}$ dans deux directions orthogonales. En les supposant normés ($d\vec{x} = \vec{E}_1, d\vec{x'} = \vec{E}_2$), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x'}) &= d\vec{x}.(2\mathbf{D})d\vec{x'} \\ &= 2D_{12} \end{aligned}$$

Conclusion

L'algèbre et l'analyse tensorielle sont nécessaires pour la description et la manipulation des grandeurs physiques qui sont introduites en mécanique des milieux continus. Ce cours n'a présenté que les concepts qui sont strictement nécessaires à la mécanique des milieux continus. Il ne peut en aucun cas être considéré comme un cours complet sur les tenseurs. En particulier, bon nombre de résultats (soigneusement signalés)ne sont valables que pour les tenseurs agissant sur des vecteurs de $\mathbb{V}_3$. Ces développements permettent de simplifier la présentation de la mécanique des milieux continus. En effet, les équations de la mécanique peuvent s'écrire uniquement avec des opérations tensorielles algébriques et des opérateurs différentiels tensoriels (gradient, divergence,rotation et laplacien).Sous cette forme condensée, on peut alors se concentrer sur l'essentiel : les concepts de la mécanique, sans s'encombrer des choix (accessoires car non physiques) d'un quelconque système de coordonnées ou d'une quelconque base pour donner des composantes aux tenseurs. Les équations tensorielles sont par essence valables quels que soient ces choix. Il n'en reste pas moins que pour résoudre effectivement un problème particulier, il faut choisir un système de coordonnées pour repérer les points du domaine étudié et il faut choisir une ou plusieurs bases pour exprimer les composantes des tenseurs d'ordre $p \geqslant 1$. Les équations tensorielles (algébriques ou différentielles) qui seront écrites en mécanique des milieux continus se traduisent alors par des équations ordinaires (algébriques ou différentielles) portant sur des composantes et qu'il faut résoudre soit analytiquement (quand on peut) par les méthodes mathématiques standard (éventuellement à l'aide d'un logiciel de calcul formel), soit numériquement par des méthodes numériques approchées (généralement à l'aide d'un ordinateur). C'est pour expliquer clairement le passage des équations tensorielles aux ordinaires que les chapitres précédents ont été soigneusement détaillés.

Bibliographie

[1] J. Garrigues, Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus, version(4 janvier 2016).

[2] J. Garrigues, Cinématique des milieux continus, (2012).

[3] G. Frédéric, Mécanique des milieux continus(M.M.C).

[4] G. Kozyreff, Math-F-426, (24 Mars 2014). milieux.

[5] M. Maya, Cours de mécaniques des continues, (Année scolaires 2010-2011).

[6] M. Maya, Mécanique des milieux continus, (06 Nov 2010).

[7] M. Neifar, Cour de mécanique des milieux continus,(janvier 2009).

[8] N. Moës, Mécanique des milieux continus.

[9] N. Moës, Mécanique des milieux continus et discret, (28 Juil 2011).