



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : SOLTANI Achouak

Thème

Méthode des éléments finis stabilisée pour les équations de Darcy

Soutenu publiquement le : 01/06/2017

Devant le jury composé de :

Chacha Djamel Ahmed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.C.A Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Ghezal Abderrazek	M.C.B Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Merabet Ismail	M.C.A Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur MERABET Ismail de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciement	i
Notations et Préliminaires	iv
Introduction	v
1 Rappels sur l'estimation d'erreur par la méthode des éléments finis	1
1.0.1 Théorème de Lax-Miligram	2
1.0.2 Le théorème de Babuska-Brezzi	2
1.1 ANALYSE D'ERRER	3
1.1.1 Estimation d'erreur a priori	3
1.1.2 Estimation d'erreur a posteriori	4
1.2 APPLICATION SUR UN EXEMPLE MODÈLE	5
1.2.1 Estimation d'erreur a priori	6
1.2.2 Estimation d'erreur a posteriori	7
2 Eléments finis pour les équations de Darcy	8
2.1 Introduction	8
2.2 Formulation Variationnelle.	9

2.2.1	Première formulation variationnelle	9
2.2.2	L'existence et l'unicité	9
2.2.3	Deuxième formulation variatiinnelle	12
2.3	Le problème discret	12
2.3.1	Le problème discret pour la première formulation variationnelle . . .	13
2.3.2	Le problème discret pour deuxième formulation variationnelle . . .	13
2.3.3	Critère de Fortin	13
2.4	L'élément finis de Raviart-Thomas	14
2.4.1	Application sur Raviart-Thomas/Darcy	16
2.5	Discrétisation par éléments finis pour Darcy	19
2.6	Estimation d'erreur	27
2.6.1	Estimation d'erreur a priori	27
3	Méthode des éléments finis stabilisée pour les équations de Darcy	29
3.1	formulation mixte	29
3.1.1	La formulation classique	29
3.1.2	La formulation faible stabilisée	30
3.1.3	La discrétisation	31
3.1.4	Analyse d'erreur	33
3.1.5	Estimation de l'erreur d'interpolation	34
3.1.6	Formulation mixte avec la vitesse continue et la pression discontinue	36
4	Simulations numériques sous FreeFem++	38
4.1	Exemples	38
4.1.1	Premier exemple	38
4.1.2	Deuxième exemple	42
5	Conclusion	45
	Bibliographie	47

NOTATIONS

- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v .
- $D^2 v = \nabla^2 v = \begin{pmatrix} \partial_x^2 v & \partial_{yx} v \\ \partial_{xy} v & \partial_y^2 v \end{pmatrix}$: La matrice Hessienne
- $D^2 w : D^2 v = \sum_{i,j=1}^2 w_{x_i x_j} v_{x_i x_j}$: Le produit scalaire dans \mathbb{R}^4 .
- $|v|_{2, \omega} = \left(\sum_{\alpha=2} \|D^\alpha v\|_{0, \omega} \right)^{1/2}$.
- $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- $\llbracket v \rrbracket = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+$.
- $\{v\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}$.
- $\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = n \cdot (\nabla^2 v) n$.
- $\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot n$.
- $Osc_2(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - f_T\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

INTRODUCTION

La mécanique des fluides s'intéresse à l'étude du comportement (liquides et gaz) qui perdent leur forme au cours du temps, par opposition aux solides qui la gardent.

L'étude d'un fluide remonte à la Grèce antique, avec :

- **Archimède** (287-212 BC) Géomètre, Ingénieur, Physicien.
- **Héron d'Alexandrie** (10-70) qui a étudié la pression des gaz. Il construit des machines à vapeur.
- **Leonardo da Vinci** (1452-1519) Il propose de nombreuses descriptions de types des fluide (jets, tourbillons, ondes de surface). Il formule le principe de conservation de la masse.
- En 1738, **Daniel Bernoulli** étudie les fluides non visqueux, fondant son analyse sur la conservation de l'énergie.

Il existe plusieurs équations qui modélisent le mouvement des fluides par exemple :

- Les équations de Navier-Stokes ¹ :

$$\begin{cases} \rho_0(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u = \rho_0 g - \nabla p & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

¹Mathématiciens français et irlandais, établissent ces équations pour un fluide visqueux en 1820-1845

► Les équations de Darcy ² définies comme suite :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u + \frac{k}{\mu} \nabla p = -\frac{k}{\mu} g & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = \varphi & \text{dans } \Omega \\ u \cdot n = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2)$$

Dans ce travail est une contribution d'étudier la méthode des éléments finis stabilisées mixtes pour les équations de Darcy.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres

Dans le premier chapitre, nous avons posé quelques notations et définitions sur l'estimation d'erreur par éléments fins et quelque exemples.

Ensuite dans le deuxième chapitre, nous déterminons la formulation variationnelle. Après on propose une formulation mixte, et on étudie l'existence et l'unicité de cette formulation.

Nous discrétisons le problème de Darcy par la méthode élément finis de Raviart-Thomas et puis nous montrons quelques théorèmes sur l'estimation des erreurs.

Dans le chapitre suivant, on a étudié la formulation stabilisée pour le problème de Darcy, et on étudie l'existence et l'unicité de cette formulation. et puis nous montrons théorème sur l'estimation des erreurs.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous présentons quelques tests numériques programmés sous le logiciel Freefem++.

²Henry Darcy 1856

RAPPELS SUR L'ESTIMATION D'ERREUR PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Considérons un problème variationnel sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (1.1)$$

Définition 1.0.1 *On dit que le problème (1.1) est bien posé s'il admet une solution unique dépend continument aux données. Dans cette section nous rappelons quelques théorèmes qui assurent le caractère bien posé d'un problèmes de la forme (1.1).*

1.0.1 Théorème de Lax-Miligram

Théorème 1.0.2 [7] (*Lax-Miligram*). Soit V un espace de Hilbert équipé de la norme $\| \cdot \|_V$ on suppose que :

(i) la forme linéaire $F(v)$ est continue,

$$\exists \gamma < +\infty, \forall v \in V, |F(v)| \leq \gamma \|v\|_V$$

(ii) la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue,

$$\exists \beta < +\infty, \forall (u, v) \in V \times V, |a(u, v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V$$

(iii) la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive (on dit également V - elliptique)

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in V, a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$

Alors, le problème admet une et une seule solution. De plus, son unique solution satisfait l'estimation a priori

$$\|u\|_V \leq \frac{\|F\|_{V'}}{\alpha}.$$

1.0.2 Le théorème de Babuska-Brezzi

Un autre théorème qui donne des conditions nécessaires et suffisantes est le théorème suivant :

Théorème 1.0.3 (*Babuska-Brezzi*[7]) Soient V et W deux espaces de Hilbert, $a \in \mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$, et soit l'opérateur A est défini par :

$$(Av, w)_W = a(v, w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Alors la forme bilinéaire a satisfait :

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{tel que, } \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|w\|_W} \geq \alpha \|v\|_V, \forall v \in V$$

et

$$\text{pour tout } w \in W \setminus \{0\} \quad \exists v \in V \mid a(v, w) \neq 0$$

si et seulement si A est un isomorphisme de V dans W et nous avons :

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V, W)} \leq \alpha^{-1}$$

1.1 ANALYSE D'ERRER

1.1.1 Estimation d'erreur a priori

L'approximation par éléments finis conformes d'un problème de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in X & \text{tel que} \\ a(u, v) = F(v) & \forall v \in X \end{cases} \quad (1.2)$$

consiste à considérer un problème approché de (1.1) de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in X_h & \text{tel que} \\ a(u_h, v_h) = F(v_h) & \forall v_h \in X_h \end{cases} \quad (1.3)$$

où X_h est un espace de dimension finie inclus dans X . Alors, il est possible d'obtenir des estimations de la forme :

$$\|u - u_h\|_X \leq F(h, u) + H(h, f). \quad (1.4)$$

Des estimations de la forme 1.4 sont appelées des estimations a priori. Pour obtenir des estimations d'erreur a priori nous avons d'abord à ce lemme :

Lemme 1.1.1 (Céa). *On a l'estimation d'erreur*

Si les conditions de Lax-Milgram sont vérifiées et l'espace V_h inclus dans X . Alors on a

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\beta}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (1.5)$$

Ce dernier lemme donne une estimation d'erreur abstraite. Pour avoir des estimations d'erreur concrètes nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 1.1.2 (Bramble-Hilbert). *Soit Ω un ensemble convexe et soit $v \in H^k(\Omega)$. Alors il existe un polynôme de degré $\leq m - 1$ noté $Q^m v$ tel que :*

$$|v - Q^m v|_{H^k(\Omega)} \leq C d^{m-k} |v|_{H^m(\Omega)}, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (1.6)$$

$d = \text{diam}(\Omega)$

Pour terminer, nous avons besoin à ce théorème :

Théorème 1.1.3 (*L'interpolation [1]*). Soit $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ un élément fini satisfait :

1. $\mathbb{P}^k \subset \mathcal{P}$
2. $\mathcal{N} \subset (C^0)'$ Soit l tel que $0 \leq l \leq k$. Alors il existe une constant c telle que

$$\forall T, \forall v \in H^{l+1}(T) \quad |v - (T)_h^k(v)|_{H^m(T)} \leq ch_T^{l+1-m} |v|_{H^{l+1}(T)}, \quad 0 \leq m \leq l+1 \quad (1.7)$$

Donc dans les estimations a priori, la quantité $F(h; u)$ est en général une puissance de h multipliée par une certaine norme deu, elle fait donc appel à la régularité de u (la plupart du temps inconnue).

1.1.2 Estimation d'erreur a posteriori

Soit X un espace de Banach, et A un application continue de X dans X . Pour un élément f de X , on l'intéresse à la discrétisation de l'équation :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } X \text{ tel que} \\ A(u) = f. \end{cases}$$

par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \text{ dans } X_h \text{ tel que} \\ A_h(u_h) = f_h. \end{cases}$$

Où X_h est un sous-espace de dimension finie de X , A_h une approximation de A et f_h une approximation de f dans X_h .

Définition 1.1.4 Une estimation de la forme :

$$\|u - u_h\|_X \leq G(h, f_h, u_h) + K(h, f)$$

Est appelée estimation a posteriori.

La quantité $G(h; f_h; u_h)$ peut se calculer explicitement une fois la solution discrète u_h calculée.

1.2 APPLICATION SUR UN EXEMPLE MODÈLE

Le problème modèle que l'on considère ici est l'équation de Laplace.

Ω : polygone ou polyèdre à frontière lipschitzienne.

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

L'espace V est appelé "cadre fonctionnel"

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0.\}$$

en multipliant la première équation de (1.8) par $v \in V$ (v une fonction test) et intégré sur Ω on obtient :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x) \cdot v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx$$

en utilisant la formule de Green on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial n} \cdot v(x) ds = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx$$

avec

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial n} \cdot v(x) ds &= 0 \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx \end{aligned}$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \end{cases}$$

où la forme $a(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \end{cases}$$

Remarque 1.2.1 *Le théorème de Lax-Milgram entraîne que Le problème variationnel admet une solution unique u dans $H_0^1(\Omega)$. En outre, cette solution vérifie*

Où c est la constante de Poincaré- Friedrichs, donc ne dépend que de la géométrie de Ω .
 $(\mathcal{T}_h)_h$: famille régulière de triangulations de Ω par des triangles ou des tétraèdres, au sens usuel que

- Pour tout h , $\bar{\Omega}$ est l'union des éléments de \mathcal{T}_h .
- Pour tout h , l'intersection deux éléments distincts de \mathcal{T}_h est soit vide soit un sommet soit un côté entier soit une face entière de ces deux éléments.
- Le quotient h_T/ρ_T du diamètre h_T d'un élément T de \mathcal{T}_h par le diamètre ρ_T de son cercle inscrit ou de sa sphère inscrite est inférieur ou égal à une constante σ qui ne dépend ni de T ni de h .

h : plus grand diamètre des éléments T de \mathcal{T}_h

$$X_h^0 = \{v_h \in H_0^1(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in \mathcal{P}^l(T)\}.$$

Le problème discret est construit par la méthode de Galerkin.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \text{ dans } X_h^0 \text{ tel que} \\ \forall v_h \in X_h^0, \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(x)v_h(x)dx, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Proposition 1.2.2 *Le problème (1.9) admet une solution unique.*

Preuve. En applique le théorème de Lax-Milgram. ■

1.2.1 Estimation d'erreur a priori

Si la solution u appartient à $H^{s+1}(\Omega)$, $0 \leq s \leq l$

Théorème 1.2.3

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq ch^s |u|_{H^{s+1}(\Omega)}. \quad (1.10)$$

Preuve. IL suffit d'appliquer le lemme de Céa suivi par le théorème d'interpolation. ■

1.2.2 Estimation d'erreur a posteriori

Théorème 1.2.4 [1] *L'estimation suivante est vérifiée pour chaque indicateur η_k , $T \in \mathcal{T}_h$, et pour une constante c indépendante de T et de h : où w_T désigne l'union soit des triangles partageant au moins un côté avec T ($d = 2$), soit des tétraèdres partageant au moins une face avec T ($d = 3$).*

Théorème 1.2.5 [1] *Il existe une constante c indépendante de h telle qu'on ait la majoration d'erreur a posteriori suivante*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\eta_k^2 + h_T^2 \|f - f_h\|_{L^2(T)}^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ELÉMENTS FINIS POUR LES ÉQUATIONS DE DARCY

2.1 INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ($d = 2$ ou 3). Nous intéressons au modèle de Darcy qui modélisent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un milieu poreux occupant le domaine Ω . Ici, les inconnues sont le champ de vecteurs u à valeurs dans \mathbb{R} qui représente la vitesse du fluide, et la fonction scalaire p qui représente sa pression. Le paramètre μ est égal au quotient de la viscosité du fluide par la perméabilité du milieu, et la quantité μ^{-1} s'appelle aussi coefficient de porosité.

On considère le problème de Darcy :

$$\left\{ \begin{array}{l} u + \frac{k}{\mu} \nabla p = -\frac{\rho}{g_c} g, \quad x \in \Omega \\ \operatorname{div} u = \varphi, \quad x \in \Omega \\ u \cdot n = \psi, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

On s'intéresse ici au cas d'un milieu homogène : la fonction μ, k, g_c et ρ sont alors sup-

posée égale à 1, φ et ψ sont nulles. Donc le problème de Darcy écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mu u + \nabla p = f, & x \in \Omega \\ \operatorname{div} u = 0, & x \in \Omega \\ u \cdot n = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Cette formule est très intéressante dans mon travail.

2.2 FORMULATION VARIATIONNELLE.

On observe que le problème (2.1) admet plusieurs formulations variationnelles équivalentes. Nous commençons par écrire et analyser deux de ces formulations variationnelles.

2.2.1 Première formulation variationnelle

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{v \in (L^2(\Omega))^2, \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\}$$

$$H_0(\operatorname{div}, \Omega) = \{v \in H(\operatorname{div}, \Omega), v \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0\}$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \text{ dans } H_0(\operatorname{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) \, dx - \int_{\Omega} p(x) (\operatorname{div} v)(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_0(\operatorname{div}, \Omega) \\ - \int_{\Omega} q(x) (\operatorname{div} u)(x) \, dx = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.2)$$

On pose par la suite :

$$V = H_0(\operatorname{div}, \Omega) \quad \text{et} \quad M = L_0^2(\Omega)$$

2.2.2 L'existence et l'unicité

L'existence et l'unicité de la solution sont basées sur le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 (Babushka-Brezzi) Soient V et M sont deux espaces de Hilbert. On suppose que :

1. Les formes a et b sont des formes bilinéaires continues

$$\exists \beta_1 < +\infty, \quad \forall (u, v) \in V \times V \quad \text{tel que} \quad |a(u, v)| \leq \beta_1 \|u\|_V \cdot \|v\|_V.$$

$$\exists \beta_2 < +\infty, \quad \forall (u, p) \in V \times M \quad \text{tel que} \quad |b(u, p)| \leq \beta_2 \|u\|_V \cdot \|p\|_M$$

2. La forme bilinéaire a est coercive sur Z défini par :

$$Z = \{v \in V \mid b(v, q) = 0, \quad \forall q \in M\}$$

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in Z \quad \text{tel que} \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

3. La forme b satisfait la condition "inf-sup"

$$\exists \beta > 0 \quad \text{tel que} \quad \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_M \quad \forall q \in M.$$

4.

$$f \in V'$$

Maintenant nous démontrons que la première formulation variationnelle du problème de Darcy satisfait le condition requises dans le théorème (2.2.1).

On déjà vu que les espaces $V = H_0(\text{div}, \Omega)$ et $M = L_0^2(\Omega)$ sont Hilbert.

La forme $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire continue (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} u \cdot v \, ds \right| \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_V \cdot \|v\|_V \end{aligned}$$

Et coercive sur Z_1 (par l'inégalité de Poincaré)

$$Z_1 = \{v \in H_0(\text{div}, \Omega), \quad b(v, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega)\}$$

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} v^2 \, dx = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \|v\|_V^2 \end{aligned}$$

On à

$$\|v\|_V = \|v\|_{L^2} + \|\operatorname{div}v\|_{L^2}$$

Remarque 2.2.2 Si $v \in Z_1$ on a $b(v, q) = 0$ donc $\operatorname{div}v = 0 \quad \forall q \in M$ donc $\|\operatorname{div}v\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Donc $\|v\|_V = \|v\|_{L^2}$

La forme $b : V \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire continue (par l'inégalité de Cauchy-schwarz)

$$\begin{aligned} |b(v, q)| &= \left| \int_{\Omega} q \operatorname{div}v dx \right| \\ &\leq \|q\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\operatorname{div}v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|q\|_M \cdot \|\operatorname{div}v\|_V \end{aligned}$$

Lemme 2.2.3 (surjectivité de l'opérateur div [5]) Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $p \in L^2(\Omega)$. Il existe $v \in [H^1]^N(\Omega)$ tel que

$$\operatorname{div}v = p \quad \text{et} \quad \|v\|_{[H^1(\Omega)]^N} \leq c \|p\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.3)$$

De plus, Si $p \in L^2(\Omega)$ vérifie $\int_{\Omega} p dx = 0$. Alors, $v \in [H_0^1(\Omega)]^N$.

Remarque 2.2.4 Le théorème de Banach de l'application inverse affirme que l'inverse d'une application linéaire continue surjective et continu.

D'après la remarque (2.2.4) le lemme (2.2.3) on a

$$\operatorname{div} : V \longrightarrow M \quad (\text{surjective})$$

et

$$\exists c > 0 \quad \text{tel que} \quad \|\operatorname{div}v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|v\|_V \quad (\text{linéaire continue})$$

donc

$$\exists \tilde{c} > 0 \quad \text{tel que}$$

$$\|v\|_V \leq \tilde{c} \|\operatorname{div}v\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{\|v\|_V} \geq \frac{1}{\tilde{c} \|\operatorname{div}v\|_{L^2(\Omega)}} \quad (2.5)$$

en multiplie (2.5.1) par $|b(v, q)|$ et on pose que $\beta = \frac{1}{\tilde{c}}$

$$\frac{|b(v, q)|}{\|v\|_V} \geq \beta \frac{|b(v, q)|}{\|\operatorname{div} v\|_{L^2(\Omega)}} \quad (2.6)$$

D'autre part

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} v dx$$

en prend $-q = \operatorname{div} v$ en obtient

$$b(v, q) = \int_{\Omega} \operatorname{div} v^2 dx = \|\operatorname{div} v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|q\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\Rightarrow \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.7)$$

donc la condition "inf-sup" est satisfait.

2.2.3 Deuxième formulation variatinnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \text{ dans } L^2(\Omega)^2 \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx + \int_{\Omega} v(x) \cdot \nabla p(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega)^2 \\ \int_{\Omega} u(x) \cdot \nabla q(x) dx = 0, \quad \forall q \in (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

2.3 LE PROBLÈME DISCRET

Soit \mathcal{T}_h une triangulation régulière de Ω . On définit l'espace des éléments finis

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_{h/T} \in \mathbb{P}^k(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \subset H_0^1(\Omega)$$

$$Q_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h/T} \in \mathbb{P}^0(T)\}$$

2.3.1 Le problème discret pour la première formulation variationnelle

$$V_h \subset H_0(\text{div}, \Omega), \quad Q_h \subset L_0^2(\Omega)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, p_h) \text{ dans } V_h \times Q_h \\ \int_{\Omega} u_h(x) \cdot v_h(x) dx - \int_{\Omega} p_h(x) \text{div } v_h(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v_h(x) dx, \quad \forall v_h \in V_h \\ - \int_{\Omega} q_h(x) (\text{div } u_h)(x) dx = 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

2.3.2 Le problème discret pour deuxième formulation variationnelle

$$V_h \subset H_0(\text{div}, \Omega), \quad Q_h \subset H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (u_h, p_h) \text{ dans } V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} u_h(x) \cdot v_h(x) dx + \int_{\Omega} v_h(x) \cdot \nabla p_h(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v_h(x) dx, \quad \forall v_h \in V_h, \\ \int_{\Omega} u_h(x) \cdot \nabla q_h(x) dx = 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Remarque 2.3.1 *Contrairement au cas où l'existence et l'unicité est démontrée par le théorème de Lax-Milgram. Pour les problèmes de type point-selle, le fait que $V_h \subset V$ et $M_h \subset M$ n'implique pas forcément l'existence et l'unicité de la solution du problème discret.*

Un outil très puissant pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème approché est le critère de Fortin.

2.3.3 Critère de Fortin

Lemme 2.3.2 ([5]) *Soient H est un espace de Hilbert, $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue, et il existe $\beta > 0$ telle que*

$$\sup_{\tau \in H, \tau \neq 0} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_H} \geq \beta \|v\|_Q; \quad \forall v \in Q$$

$\{H_h\}_{h \in I}$ et $\{Q_h\}_{h \in I}$ sont des sous-espaces de H et de Q respectivement, et supposer que l'existent $\{\Pi_h\}_{h \in I} \subseteq \mathcal{L}(H, H_h)$ et $\tilde{c} > 0$ telle que

$$\|\Pi_h\| \leq \tilde{c}, \quad \forall h \in I$$

et

$$b(\tau - \Pi_h(\tau), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in Q_h, \quad \forall h \in I,$$

Alors, il existe $\tilde{\beta} > 0$; indépendant de h telle que

$$\sup_{\tau_h \in H_h, \tau_h \neq 0} \frac{b(\tau_h, v_h)}{\|\tau_h\|_H} \geq \tilde{\beta} \|v_h\|_Q; \quad \forall v_h \in Q; \quad \forall h \in I$$

Preuve. La continuité et la condition inf-sup sont vérifiées pour b et donc pour $v_h \in Q_h$ on a :

$$\begin{aligned} \beta \|v_h\|_Q &\leq \sup_{\tau \in H, \tau \neq 0} \frac{|b(\tau, v_h)|}{\|\tau\|_H} = \sup_{\tau \in H, \tau \neq 0} \frac{b(\Pi_h(\tau), v_h)}{\|\tau\|_H} \\ &\leq \tilde{c} \sup_{\tau \in H, \Pi_h(\tau) \neq 0} \frac{|b(\Pi_h(\tau), v_h)|}{\|\Pi_h(\tau)\|_H} \\ &\leq \tilde{c} \sup_{\tau_h \in H_h, \tau_h \neq 0} \frac{b(\tau_h, v_h)}{\|\tau_h\|_H} \end{aligned}$$

■

2.4 L'ÉLEMENT FINIS DE RAVIART-THOMAS

Définition 2.4.1 \mathbb{RT}_0 l'espace des fonctions vectorielles de Raviart-Thomas défini par :

$$\mathbb{RT}_0 = [\mathbb{P}_0]^d \oplus x\mathbb{P}_0$$

$$\mathbb{RT}_0 = \left\{ \mathbf{v}; \mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{N}_{RT} = \left\{ \mathcal{N}_i, \quad \mathcal{N}_i(\mathbf{v}) = \int_{e_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i \quad i = 1, 2, 3 \right\}$$

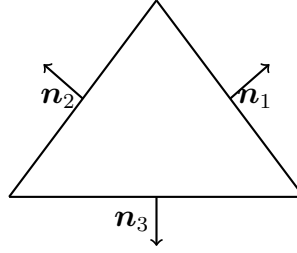


FIGURE 2.1 – Élément de Raviart-Thomas.

les fonctions vectorielles θ_i définies par :

$$\theta_i(x, y) = \frac{\begin{pmatrix} x - x_{a_i} \\ y - y_{a_i} \end{pmatrix}}{2|T|}, \quad i = 1, 2, 3, \quad a_i \text{ les sommets de } T$$

$$\mathcal{N}_i(\theta_j) = \delta_{ij}$$

On considère l'espace des éléments finis continus de Raviart-Thomas :

$$V_h = \{\phi \in H(\text{div}, \Omega) : \phi|_T = (a_1 + bx, a_2 + by) \quad a_1, a_2 \text{ et } b \in \mathbb{R}\} \subset H(\text{div}, \Omega)$$

$$Q_h = \{\tau; \tau \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}_h) \text{ l'espace des fonctions constantes par morceaux}\} \subset L^2(\Omega)$$

Aussi on mis : $\{\Lambda \subset L^2(\Omega), \mu^h \geq 0, \text{ pp sur } \Omega\}$ $\Lambda^h = \Lambda \cap Q^h$

$$\Lambda^h = \mathbb{P}_0(\mathcal{T}) = \{\mu^h \in L^2(\Omega) : T \in \mathcal{T}, \mu^h|_T \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}), \mu^h \geq 0\}$$

alors il est claire que : $V^h \subset H(\text{div}, \Omega)$ et $\Lambda^h \subset L^2(\Omega)$

L'opérateur d'interpolation $\mathcal{I}_K^{\text{RT}}$ est tel que

$$\forall v \in V^{\text{RT}}(K) \quad ; \quad \Pi_K^0(\text{div}v) = \text{div}\mathcal{I}_K^{\text{RT}}(v)$$

Π_K^0 désigne le projection orthogonal de $L^2(K)$ dans \mathbb{P}_0

(pour tout $w \in L^2(K), \Pi_K^0 w = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_{\Omega} w$). En d'autre termes les diagrammes suivant sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
(H^1(T))^2 & \xrightarrow{\text{div}} & L^2(T) \\
\mathcal{I}_h^{RT} \downarrow & & \downarrow \Pi_h^0 \\
\mathbb{RT}_0 & \xrightarrow{\text{div}} & \mathbb{P}_0
\end{array}$$

2.4.1 Application sur Raviart-Thomas/Darcy

Dans cette section nous analysons une approximation de Galerkin pour le problème de Darcy, nous rappelons d'abord ce la $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = \{2 \text{ ou } 3\}$ est un domaine borné régulier avec Γ est la frontière de Ω , et $f \in V'$ est donnée; la formulation variationnelle est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \text{ dans } V \times Q \text{ tel que} \\ a(u, v) + b(v, p) = f(v) \quad \forall v \in V, \\ b(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q, . \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$$V = H_0(\text{div}, \Omega) \quad , \quad Q = L_0^2(\Omega)$$

Les formes bilinéaires a et b de première formulation variationnelle sont :

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_{\Omega} u \cdot v \, dx \quad \forall (u, v) \in V \times V \\
b(v, q) &= \int_{\Omega} q \cdot \text{div } v \, dx \quad \forall (v, q) \in V \times Q.
\end{aligned}$$

Puis, si $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ est une famille de triangulations de $\tilde{\Omega}$ nous considérons les espaces d'éléments finis suivant

$$V_h = \{v_h \in H(\text{div}, \Omega), v_{h|K} \in \mathbb{RT}_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$Q_h = \{q_h \in L^2(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h|K} \in \mathbb{P}_0(K)\}$$

de sorte que l'approximation de Galerkin soit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, p_h) \text{ dans } V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h, . \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Pour démontrer l'existence, l'unicité et la stabilité de 2.12. Nous observons d'abord que :

$$\begin{aligned} Z_h &= \{v_h \in V_h, b(v_h, q_h) = \int_{\Omega} q_h \cdot \operatorname{div} v_h dx = 0, \forall q_h \in Q_h\} \\ &= \{v_h \in V_h; \mathcal{I}_h^0(\operatorname{div} v_h) = 0\} \end{aligned}$$

De quel, notant avec précision cela $\operatorname{div} v_h \in Q_h \quad \forall v_h \in V_h$, nous déduisons cela .

$$Z_h = \{v_h \in V_h, \operatorname{div} v_h = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

Il s'ensuit que pour chaque $v_h \in V_h$ on obtient

$$a(v_h, v_h) = \|v_h\|_{0,\Omega}^2 = \|v_h\|_{\operatorname{div},\Omega}^2.$$

Ce qui prouve la coercivité de a avec la constante $\tilde{\alpha} = 1$ et par conséquent l'hypothèse $\Pi_h A_h : H_h \rightarrow H_h$ et injective est satisfaite.

D'autre part, pour établir la condition inf-sup pour b , nous avons besoin du résultat suivant

Lemme 2.4.2 ([5]) $\Pi_h : H(\operatorname{div}, \Omega) \cap Z \rightarrow V_h$ est l'opérateur de l'interpolation du Raviart-Thomas , alors il existe $c > 0$ indépendant de h tel que

$$\|\Pi_h(v)\|_{\operatorname{div},\Omega} \leq c \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in [H^1(\Omega)]^n, \quad v \in [H^1(\Omega)]^n$$

Preuve. $v \in [H^1(\Omega)]^n$, puis appliquant la limite supérieure pour l'erreur d'interpolation locale erreur

$$\|v - \Pi_h(v)\|_{0,K} \leq c \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{1,K} \leq \tilde{c} h_K |v|_{1,K}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

et puis

$$\begin{aligned} \|\Pi_h(v)\|_{0,\Omega} &\leq \|v - \Pi_h\|_{0,\Omega} + \|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq \tilde{c} h |v|_{1,\Omega} + \|v\|_{0,\Omega} \leq \bar{c} \|v\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

après de puis $\operatorname{div}(\Pi_h(v)) = \mathcal{I}_h(\operatorname{div} v)$

$$\|\operatorname{div} \Pi_h(v)\|_{0,\Omega} = \|\mathcal{I}_h(\operatorname{div} v)\|_{0,\Omega} \leq \|\operatorname{div} v\|_{0,\Omega}$$

■

Afin de démontrer la condition inf-sup pour b pour le problème discret nous utilisant le critère de Fortin. Précisément nous devons définir une famille d'opérateurs uniformément bornée $\{\Pi\}_{h>0} \subseteq \mathcal{L}(V, V_h)$ tel que :

$$b(v - \Pi_h(v), q_h) = 0 \quad \forall v \in V, \forall q_h \in Q_h, \forall h > 0$$

Etant donné $v \in V = H(\text{div}, \Omega)$ on pose

$$fv = \begin{cases} \text{div}v & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } B \setminus \Omega \end{cases} \quad (2.13)$$

où B est une boule ouvert continue de $\tilde{\Omega}$, de puis $fv \in L^2(B)$ et B est corps convexe, le problème de valeur

$$-\Delta z = fv \quad \text{sur } B, z = 0 \quad \text{sur } \partial B$$

a une solution unique $z \in H_0^1(B) \cap H^2(B)$ cela satisfait

$$\|z\|_{2,B} \leq c \|fv\|_{0,B} = c \|\text{div}v\|_{0,\Omega}$$

alors nous a vous laissée $\tilde{v} = -\nabla z|_{\Omega}$ et note cela $\tilde{v} \in [H^1(\Omega)]^n$, $\text{div}\tilde{v} = \text{div}v$ dans Ω , et

$$\|\tilde{v}\|_{1,\Omega} \leq \|z\|_{2,\Omega} \leq \|z\|_{2,B} \leq c \|\text{div}v\|_{0,\Omega}$$

L'analyse antérieur suggéré défini l'opérateur de Fortin

$$\Pi_h(v) = \Pi_h^K(\tilde{v}) \quad \forall v \in H(\text{div}, \Omega).$$

Il est important de remarquer ici que la nécessité de régulariser précédemment v au moyen de la fonction auxiliaire \tilde{v} est implique par le fait que l'opérateur d'interpolation de Raviart-Thomas est défini par de dans $H(\text{div}, \Omega)$ mais de dans $H(\text{div}, \Omega) \cap z$ ce qui contient l'espace $[H^1(\Omega)]^n$

$$\|\Pi_h(v)\|_{\text{div},\Omega} = \|\Pi_h^K(\tilde{v})\|_{\text{div},\Omega} \leq c \|\tilde{v}\|_{1,\Omega} \leq c_1 \|\text{div}v\|_{0,\Omega}$$

et puis

$$\|\Pi_h(v)\|_{\text{div},\Omega} \leq c_1 \|v\|_{\text{div},\Omega} \quad \forall v \in V = H(\text{div}, \Omega),$$

après (2.4.1) et \mathcal{I}_h est la projection orthogonal de $L^2(\Omega)$ dans Q_h nous déduisons cela pour chacun $v \in V$ et pour chacun $q_h \in Q_h$

$$\begin{aligned} b(v - \Pi_h(v), q_h) &= \int_{\Omega} q_h(\operatorname{div}v - \operatorname{div}\Pi_h(v)) \\ &= \int_{\Omega} q_h(\operatorname{div}v - \operatorname{div}\Pi_h(\tilde{v})) \\ &= \int_{\Omega} q_h(\operatorname{div}v - \mathcal{I}_h(\operatorname{div}\tilde{v})) \\ &= \int_{\Omega} q_h(\operatorname{div}v - \mathcal{I}_h(\operatorname{div}v)) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent le critère de Fortin 2.3.2 garantit que b satisfait la condition inf-sup discret sur $V_h \times Q_h$ avec $\beta > 0$ une constante indépendant de h .

2.5 DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS POUR DARCY

On s'inttresse à la discrétisation par éléments finis du problème (2.1). L'ouvert Ω est un polygone ($d = 2$) ou un polyèdre ($d = 3$) et qu'il est muni famille régulière de triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$ par des triangles ou des tétraédres.

La discrétisation repose ici sur l'élément de Raviart-Thomas et utilise donc sur chaque élément K l'espace P_k . Si \mathcal{E}_h désigne l'ensemble des côtés ($d = 2$) ou faces ($d = 3$) d'élément de \mathcal{E}_h , il existe une unique famille de fonctions $\varphi_e, e \in \mathcal{E}_h$, telles que la restriction de chaque φ_e à chaque élément K de \mathcal{E}_h appartienne à P_k et qui vérifient

$$\forall e' \in \mathcal{E}_h, \int_{e'} \varphi_e(x) \cdot n_{e'} d\tau = h_{ee'}, \quad (2.14)$$

où $h_{e'}$ désigne le symbole de Kronecker et $n_{e'}$ n'importe lequel des deux vecteurs unitaires normaux à e' . Le lemme suivant, qui justifie le choix de l'élément fini de Raviart-Thomas, fait appel au sous-espace \mathcal{E}_h^0 des éléments de \mathcal{E}_h qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$,

Lemme 2.5.1 *Les fonction $\varphi_e, e \in \mathcal{E}_h$ appartiennent à $H(\operatorname{div}, \Omega)$. Les fonctions $\varphi_e, e \in \mathcal{E}_h^0$, appartiennent à $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$*

Démonstration : Pour tout e dans \mathcal{E}_h et tout élément K de \mathcal{T}_h contenant e , la restriction de la fonction φ_e à K . Si n_k désigne le vecteur unitaire normal à ∂K et extérieur à K on en

déduit

$$\varphi_{e|k} \cdot n_k = \frac{l_e}{d \operatorname{mes}(k)} \text{ sur } e \text{ et } \varphi_{e|k} \cdot n_k = 0 \text{ sur } \partial K \setminus e. \quad (2.15)$$

où l_e désigne la longueur de la hauteur de K perpendiculaire à e . De la formule

$$\operatorname{mes}(K) = \frac{\operatorname{mes}(e)l_e}{d},$$

on déduit que, si e' est commun à deux éléments K et K' , les quantités $\varphi_{e|k} \cdot n_k$ et $\varphi_{e|k'} \cdot n_{k'}$ sont égales sur e' . Une des conséquences de la définition de l'opérateur de divergence au sens des distributions étant qu'une fonction appartient à $H(\operatorname{div}, \Omega)$ si et seulement si sa restriction à tout élément K de \mathcal{T}_h appartient à $H(\operatorname{div}, K)$ et le saut de sa trace normale à travers chaque e de \mathcal{E}_h^0 est nul, on en déduit la première partie du lemme. La seconde est alors une conséquence évidente de (2.15) et de la définition de $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$.

Le Lemme(2.14) énonce la propriété de $H(\operatorname{div})$ -conformité de élément fini de Raviart-Thomas, en un sens généralisant celui de H^1 -conformité. Plus précisément, l'espace discret X_h^0 que l'on utilise l'espace engendré par les φ_e , $e \in \mathcal{E}_h^0$, et vérifie la propriété

$$X_h^0 = \{v_h \in H_0(\operatorname{div}, \Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{h|k} \in P_k\}. \quad (2.16)$$

On introduit également l'espace

$$M_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h|k} \in P_0(k)\}. \quad (2.17)$$

On note que les espaces X_h^0 et M_h fournissent une discrétisation conforme du problème(2.2), puisque le produit $X_h^0 \times M_h$ est inclus dans $H_0(\operatorname{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ mais que ceci n'est plus vrai pour le problème (2.10) car M_h n'est pas inclus dans $H^1(\Omega)$. Pour toute fonction f de $L^2(\Omega)^d$, on considère le problème discret

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, p_h) \text{ dans } X_h^0 \times M_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in X_h^0, a(u_h, v_h) + b(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(x) \cdot v_h(x) dx, \\ \forall q \in M_h, b(u_h, q_h) = 0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

La continuité de la forme $a(\cdot, \cdot)$, mais son ellipticité avec une constante indépendante de h nécessite la caractérisation du noyau discret

$$V_h = \{v_h \in X_h^0; \forall q_h \in M_h, b_h(v_h, q_h) = 0\} \quad (2.19)$$

effectuée dans le lemme suivant.

Lemme 2.5.2 *L'espace V_h vérifie*

$$V_h = \{v_h \in X_h^0; \operatorname{div} v_h = 0 \text{ dans } \Omega\}. \quad (2.20)$$

Démonstration : On note que, dans la définition (2.19) de V_h , on peut remplacer M_h par l'espace des fonction q_h de $L^2(\Omega)$ qui sont constantes sur tous les éléments de \mathcal{T}_h (en effet, par intégration par parties, la propriété de nullité dans (2.19) est encore vraie pour la fonction q_h constante sur Ω). Soit v_h n'importe quelle fonction de V_h . Comme la restriction d'une fonction de X_h^0 à tout élément K de \mathcal{T}_h appartient à P_k , donc à P_1^d , sa divergence appartient à $P_0(k)$, et en choisissant q_h dans (2.19) égal à la fonction caractéristique de K on a

$$-\int_k \operatorname{div} v_h dx = -(\operatorname{div} v_h)|_k \operatorname{mes}(k) + 0,$$

d'où l'on déduit que $(\operatorname{div} v_h)|_k$ est nul. Comme en outre v_h appartient à $H(\operatorname{div}, \Omega)$, sa divergence est nul sur Ω .

Remarque 2.5.3 *Le Lemme(2.5.2), combiné avec la définition des des espaces P_k , entraîne la propriété supplémentaire suivante : une fonction v_h de V_h est constante sur chaque élément K de \mathcal{T}_h . Cette propriété est utilisée pour la construction d'une base de V_h .*

La continuité de la forme $b(., .)$. Nous prouvons donc un premier résultat concerant la condition inf-sup pour cette forme.

Lemme 2.5.4 *La forme $b(., .)$ satisfait la condition inf-sup : il existe une constante $\beta_{0h} > 0$ dépendant éventuellement de h telle que*

$$\forall q_h \in M_h, \sup_{v_h \in X_h^0} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} > \beta_{0h} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.21)$$

Démonstration : Dans un premier temps, on va vérifier que l'espace M_h ne contient pas de modes parasites. Soit q_h un élément de M_h tel que

$$\forall v_h \in X_h^0, b(v_h, q_h) = 0.$$

On a

$$b(v_h, q_h) = - \sum_{k \in \mathcal{T}_h} q_{h|k} \int_k \operatorname{div} v_h dx = \sum_{k \in \mathcal{T}_h} q_{h|k} \int_{\partial k} v_h \cdot n d\tau.$$

Pour tout élément e de \mathcal{E}_h^0 , on note K_e et K'_e les deux éléments de \mathcal{T}_h qui contiennent e et n_e le vecteur unitaire normal à e dirigé de K_e vers K'_e . La formule précédente s'écrit de façon équivalente

$$b(v_h, q_h) = - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} (q_{h|k} - q_{h|k'_e}) \int_e v_h \cdot n_e d\tau.$$

Par définition des éléments finis de Raviart-Thomas, il existe une unique fonction v_h de X_h^0 telle que

$$\forall e \in \mathcal{E}_h^0, \int_e v_h \cdot n_e d\tau = -(q_{h|k} - q_{h|k'_e}). \quad (2.22)$$

On obtient alors

$$b(v_h, q_h) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} (q_{h|k} - q_{h|k'_e})^2 = 0$$

ce qui prouve que tous les $h|k$, $K \in \mathcal{T}_h$, sont égaux. Comme d'autre part M_h est inclus dans $L_2^0(\Omega)$, on a

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_h} q_{h|k} \text{mes}(K) = 0.$$

et en combinant ces deux propriétés on obtient que q_h est égal à zéro. Finalement, on déduit de la continuité de $b(., .)$ que la fonction

$$q_h \rightarrow \sup_{v_h \in X_h^0} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{H(\text{div}, \Omega)}}.$$

qui est bien sur à valeur positives ou nulles, est continue sur M_h . Comme M_h est de dimension finie, sa sphère unité S_h est compacte et donc la fonction précédent y atteint ses bornes. On déduit alors des résultats qui précèdent que la constante β_{0h} définie par

$$\beta_{0h} = \inf_{q_h \in S_h^0} \sup_{v_h \in X_h^0} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{H(\text{div}, \Omega)}}.$$

est positive, ce qui termine la démonstration.

Théorème 2.5.5 *Pour toute fonction f dans $L^2(\Omega)^d$, le problème (2.18) admet une solution unique.*

Démonstration : Le résultat d'existence est établi en deux étapes.

- 1) On déduit de la propriété d'ellipticité ($\forall v \in V, a(v, v) = \mu \|v\|_{L^2(\Omega)^d}^2 = \mu \|v\|_{H(\text{div}, \Omega)}^2$) et du fait que V_h soit inclus dans V , combinés avec le Lemme de Lax-Milgram, qu'il existe un unique u_h dans V_h tel que

$$\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(x) \cdot v_h(x) dx. \quad (2.23)$$

- 2) La forme linéaire : $v_h(x) \mapsto \int_{\Omega} f(x) \cdot v_h(x) dx - a(u_h, v_h)$ s'annule sur tous les éléments v_h de V_h . En combinant la condition inf-sup (2.21) on obtient l'existence d'un p_h dans M_h tel que la première ligne du problème (2.18) soit vérifiée.

Le couple (u_h, p_h) est alors solution du problème (2.18). En outre, comme ce problème équivaut à un système linéaire carré, l'existence d'une solution entrne son unicité.

Remarque 2.5.6 *Les lignes qui précèdent permettent de prouver à ce stade la propriété de stabilité de la solution u_h du problème (2.23)*

$$\|u_h\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (2.24)$$

L'obtention d'une majoration de $\|p_h\|_{L^2(\Omega)}$ pour la pression p_h du problème (2.18) requiert une évaluation de la dépendance de la constante β_{0h} par rapport à h , que l'on établit ultérieurement.

Pour obtenir des estimations d'erreur, on constate tout d'abord à partir du Lemme 2.5.2 que le problème (2.23) constitue une discrétisation conforme du problème $\forall v \in V, a(u, v) = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx$. On déduit alors de l'estimation et en notant que la norme $\|\cdot\|_{H(\text{div}, \Omega)}$ est égale à $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^2}^d$ sur V ,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{L^2(\Omega)^d} \quad (2.25)$$

La distance de u à V_h s'évalue au moyen de l'opérateur \mathcal{I}_h associé à l'élément fini de Raviart-Thomas et défini de la façon suivante : pour toute fonction v de $H^1(\Omega)^d$, $\mathcal{I}_h v$ appartient à X_h^0 et vérifie

$$\forall e \in \varepsilon_h, \int_e \mathcal{I}_h v \cdot n_e d\tau. \quad (2.26)$$

De façon équivalente, cet opérateur vérifie pour les fonctions φ_e définies en(2.14)

$$\mathcal{I}_h v = \sum_{e \in \varepsilon_h^0} \left(\int_e v \cdot n_e d\tau \right) \varphi_e. \quad (2.27)$$

Proposition 2.5.7 *L'opérateur \mathcal{I}_h vérifie, pour toute fonction v de $H_0(\text{div}, \Omega) \cap H^1(\Omega)^d$ et tout élément K de \mathcal{I}_h la propriété*

$$\int_k (\text{div} \mathcal{I}_h v) dx = \int_k (\text{div} v) dx, \quad (2.28)$$

ainsi que l'estimation

$$\|v - \mathcal{I}_h v\|_{L^2(k)^d} \leq ch_k |v|_{H^1(k)^d}. \quad (2.29)$$

Démonstration : La propriété (2.28) se déduit facilement de(2.26) puisque , si ε_h^0 désigne l'ensemble des côtés ou faces de K non contenues dans $\partial\Omega$ et n_k le vecteur unitaire normal extérieur à K ,

$$\int_k (\text{div} \mathcal{I}_h v) dx = \sum_{e \in \varepsilon_k^0} \int_e \mathcal{I}_h v \cdot n_k d\tau = \sum_{e \in \varepsilon_k^0} \int_e v \cdot n_k d\tau = \int_k (\text{div} v) dx$$

Pour prouver (2.5.7), on note, pour toute constante w_k , l'égalité $\mathcal{I}_h w_h = w_h$, d'ou l'on déduit

$$\|v - \mathcal{I}_h v\|_{L^2(k)^d} \leq \|v - w_k\|_{L^2(k)^d} + \|\mathcal{I}_h(v - w_h)\|_{L^2(k)^d}$$

En notant que, pour tout e dans ε_k^0 , la norme $\|\varphi_e\|_{L^2(k)^d}$ est $\leq ch_k^{1-\frac{d}{2}}$. On obtient à partir de(2.5)et par passage à l'élément de référence \hat{K} que pour toute fonction w de $H^1(k)^d$

$$\|\mathcal{I}_h w\|_{L^2(k)^d} \leq ch_k^{1-\frac{d}{2}} h_k^{d-1} \int_{\partial\hat{K}} |w(\tau)| d\tau,$$

d'où d'après le Théorème de traces

$$\|\mathcal{I}_h w\|_{L^2(k)^d} \leq ch_k^{\frac{d}{2}} \|\hat{w}\|_{H^1(\hat{k})^d}.$$

En appliquant cette inégalité avec $w = v - w_k$ on déduit

$$\|\mathcal{I}_h(v - w_k)\|_{L^2(k)^d} \leq ch_k^{\frac{d}{2}} \|\hat{v} - w_k\|_{H^1(\hat{k})^d}.$$

La même estimation étant vérifiée pour $\|v - w_k\|_{L^2(k)^d}$, on obtient

$$\|v - \mathcal{I}_h v\|_{L^2(k)^d} \leq ch_k^{\frac{d}{2}} \|\hat{v} - w_k\|_{H^1(\hat{k})^d}.$$

Puis on applique le Lemme de Bramble-Hilbert

$$\|v - \mathcal{I}_h v\|_{L^2(k)^d} \leq ch_k^{\frac{d}{2}} \|\hat{v}\|_{H^1(\hat{k})^d}.$$

et on obtient le résultat cherché par retour à l'élément K

Comme les fonctions de X_h^0 sont à divergence constante sur chaque K . Une des conséquences de (2.28) est que l'opérateur \mathcal{I}_h envoie $v \cap H^1(\Omega)^d$ sur V_h . On obtient donc la première estimation d'erreur en combinant (2.25) et (2.5.7).

Théorème 2.5.8 *On suppose que la vitesse u du problème (2.1) dans $H^1(\Omega)^d$. Alors pour le problème discret (2.18), on a la majoration d'erreur*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c \|h\|_{H^1(\Omega)^d}. \quad (2.30)$$

La Proposition (2.5.2) permet aussi d'estimer la (meilleure) constante β_{0h} apparaissant en (2.21)

Proposition 2.5.9 *La forme $b(\cdot, \cdot)$ satisfait la condition inf-sup : il existe une constante $\beta_0 > 0$ indépendant de h telle que*

$$\forall q_h \in M_h, \sup_{v_h \in X_h^0} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{H(\text{div}, \Omega)}} > \beta_0 \|q_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.31)$$

Démonstration : D'après la condition inf-sup pour tout q_h dans M_h , il existe une fonction v de $H_0(\text{div}, \Omega) \cap H^1(\Omega)^d$ telle que $-\text{div} v = q_h$ et $\|v\|_{H^1(\Omega)^d} \leq \beta^{-1} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}$.

Comme q_h est constant sur chaque élément K de \mathcal{T}_h , on déduit de (2.28) que

$$b(\mathcal{I}_h v, q_h) = b(v, q_h) = \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

D'autre part, comme $\text{div} \mathcal{I}_h v$ est également constant sur chaque élément K de \mathcal{T}_h une nouvelle application de (2.28) donne

$$\| \text{div} \mathcal{I}_h v \|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k \in \tau_h} (\text{div} \mathcal{I}_h v)|_k \int_k (\text{div} \mathcal{I}_h v) dx = \sum_{k \in \tau_h} (\text{div} \mathcal{I}_h v)|_k \int_k (\text{div} v) dx = \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \int_k (\text{div} \mathcal{I}_h v) (\text{div} v) dx,$$

d'où, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|div\mathcal{I}_h v\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \|div v\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

On obtient également en utilisant(2.5.7) et une inégalité triangulaire l'estimation

$$\|\mathcal{I}_h v\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)^d} + ch \|v\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Ces deux estimations, combinées avec la majoration de $\|v\|_{H^1(\Omega)^d}$, entraînent

$$\|\mathcal{I}_h v\|_{H(div,\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c\beta^{-1}\|q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

d'où le résultat cherché .

Cette condition inf-sup permet d'établir la majoration d'erreur sur la pression. En effet, on en déduit que, pour tout q_h dans M_h

$$\beta_0 \|p_h - q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{v_h \in X_h^0} \frac{b(v_h, p_h - q_h)}{\|v_h\|_{H_0(div,\Omega)^d}}$$

On voit en comparant le problème (2.18) que

$$b(v_h, p_h - q_h) = b(v_h, p - q_h) + a(u - u_h, v_h),$$

d'où l'on déduit

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{H^1(\Omega)}). \quad (2.32)$$

On conclut en faisant appel à l'estimation (4.17) pour le premier terme, puis en choisissant q_h égal à l'image de p par l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur les fonctions constantes par éléments (qui envoie $L_0^2(\Omega)$ sur M_h)

Théorème 2.5.10 *On suppose la solution (u, p) du problème (2.1) dans $H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$. Alors, pour le problème discret (2.18), on a la majoration d'erreur*

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch(\|u\|_{H^m(\Omega)^d} + \|p\|_{H^m(\Omega)}). \quad (2.33)$$

La méthode considérée ici est d'ordre 1, mais possède des propriétés analogues à la discrétisation : les estimations sont optimales, même si elles n'utilisent pas toute la régularité de la solution ; et la vitesse discrète u_h est à divergence exactement nulle

2.6 ESTIMATION D'ERREUR

2.6.1 Estimation d'erreur a priori

Théorème 2.6.1 *si la solution (u, p) appartient á $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$ $0 < s \leq 1$; on a la majoration d'erreur a priori suivante*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c(u, p)h^s.$$

Preuve. (Estimation d'erreur)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \text{ dans } H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx + \int_{\Omega} p \cdot \text{div} v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \\ \forall q \in H^2(\Omega), - \int_{\Omega} q \cdot \text{div} u(x) dx = 0. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, p_h) \text{ dans } V_h \times M_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_h, \int_{\Omega} u_h(x) \cdot v_h(x) dx - \int_{\Omega} \text{div} v_h(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v_h(x) dx, \\ \forall q_h \in M_h, \int_{\Omega} q_h \cdot \text{div} u_h(x) dx = 0. \end{array} \right. \quad (2.35)$$

en définie $\mathcal{A}_1(U, V)$ tel que $U = (u, p)$ et $V = (v, q)$ comme suit

$$\mathcal{A}_1 = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx - \int_{\Omega} p \cdot \text{div} v(x) dx - \int_{\Omega} q \cdot \text{div} u(x) dx$$

et défini $\mathcal{A}_2(U_h, V_h)$ tel que $U = (u_h, p_h)$ et $V = (v_h, q_h)$ comme suit

$$\mathcal{A}_2 = \int_{\Omega} u_h(x) \cdot v_h(x) dx - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{div} v_h(x) dx - \int_{\Omega} q_h \cdot \text{div} u_h(x) dx$$

et

$$\mathcal{A}(U - U_h, V_h) = \mathcal{A}_1(U, V) - \mathcal{A}_2(U_h, V_h)$$

pour la condition inf-sup est satisfait donc la coercivité elle est vérifier signifier

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \|p - p_h\|_{H^2(\Omega)} \leq \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ \|v_h\|_{V_h} \|q_h\|_{M_h}}} \frac{\mathcal{A}(U - U_h, V_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|q_h\|_{M_h}}$$

donc

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} + \| p - p_h \|_{H^2(\Omega)} \leq \inf_{v_h \in V_h} \| u - v_h \|_V + \inf_{q_h \in M_h} \| p - q_h \|_M \quad (2.36)$$

en utilise les hypothèse suivant :

(1) Hypothèse 1 : Il existe

$\Pi_h \in \mathcal{L}([H^2(\Omega)], w_h) \cap \mathcal{L}([H^2(\Omega)] \cap [H^1(\Omega)], V_h)$ tel que

$$\| v - \Pi_h v \|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq c_1 h \| v \|_{[H^2(\Omega)]^2} \quad \forall v \in [H^2(\Omega)]^2$$

$c_1 > 0$ est une constante indépendante de h .

2) Hypothèse 2 : Il existe

$\mathcal{S}_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), M_h)$ tel que $\| q - \mathcal{S}_h q \|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 h \| q \|_{H^1(\Omega)} \quad \forall q \in H^1(\Omega)$

$c_2 > 0$ est une constante indépendante de h .

On a la condition inf-sup discret est vérifiée , et d'après les hypothèses (2.6.1) et (2.6.1) on obtient

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} + \| p - p_h \|_{H^2(\Omega)} \leq \max(c_1, c_2) h (\| u \|_{H^2(\Omega)} + \| p \|_{H^1(\Omega)}) \quad (2.37)$$

$$\leq \tilde{c} h (\| u \|_{H^2(\Omega)} + \| p \|_{H^1(\Omega)}) \quad (2.38)$$

■

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS
STABILISÉE POUR LES ÉQUATIONS DE
DARCY

3.1 FORMULATION MIXTE

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$, ($n_{sd} = 2$ ou 3) est un ouvert borné avec Γ la frontière de Ω . Le problème de Darcy pour l'écoulement d'un fluide visqueux dans un milieu perméable, et la conservation de la masse sont écrites comme suit :

$$u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.2)$$

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.3)$$

3.1.1 La formulation classique

$$\mathcal{V} = H(\operatorname{div}, \Omega) = \{v \mid v \in (L_2(\Omega))^{n_{sd}}, \operatorname{div} v \in L_2(\Omega), \operatorname{trace}(v \cdot n) = 0\}$$

$$M = L_0^2(\Omega) = \{q | q \in L_2(\Omega); \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0\}$$

La formulation faible classique de (3.1)-(3.3) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in \mathcal{V} \times M \text{ tel que} \\ (u, v) - (\operatorname{div}v, p) + (q, \operatorname{div}u) = (v, f) \quad \forall v \in \mathcal{V} \text{ et } \forall q \in M \end{cases} \quad (3.4)$$

où $(., .)$ produit scalaire de $L^2(\Omega)$, il est commode de réécrire (3.4) comme suit :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{V} \times M, \quad U = (u, p) \text{ et } V = (v, q)$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathcal{Y} \text{ tel que} \\ B(U, V) = L(V) \quad \forall V \in \mathcal{Y} \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$B(U, V) = (u, v) - (\operatorname{div}v, p) + (q, \operatorname{div}u) \quad (3.6)$$

$$L(V) = (v, f). \quad (3.7)$$

Remarque 3.1.1 *Cette formulation a servi de base de la méthode d'élément fini de Galerkin. Pour le problème de Darcy seulement quelques (très peu) des éléments finis qui sont stable c'est-à-dire satisfont la condition inf-sup. Dans la suite nous formulons une formulation faible qui est en soi plus stable, et adaptons à une plus grande variété d'interpolations stables telle que des combinaisons arbitraire des interpolations continues, dont beaucoup sont connues pour être instable dans la formulation classique.*

3.1.2 La formulation faible stabilisée

$$Q = H^1(\Omega) \setminus \mathcal{R} = \{q | q \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0\} \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{V} \times Q \quad (3.9)$$

la formulation faible stabilisée est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathcal{L} \text{ tel que} \\ B_{stab}(U, V) = L_{stab}(V) \quad \forall V \in \mathcal{L} \end{cases} \quad (3.10)$$

où

$$B_{stab}(U, V) = B(U, V) + \frac{1}{2}((-v + \nabla q), (u + \nabla p)) \quad (3.11)$$

$$L_{stab}(U) = L(V) + \frac{1}{2}((-v + \nabla q), f) \quad (3.12)$$

et $B(U, V)$ et $L(V)$ sont donnés par (3.6) et (3.7) respectivement

3.1.3 La discrétisation

Considérer une décomposition de Ω ;

$$\bar{\Omega} = \cup_{e=1}^{n_{el}} \bar{\Omega}^e \quad (3.13)$$

$$\mathcal{V}^h = \{v^h | v^h \in \mathcal{V}, v^h \in (C^0(\bar{\Omega}))^{n_{sd}}, v^h|_{\Omega^e} \in (\mathcal{P}^k(\Omega^e))^{n_{sd}}, e = 1, 2, \dots, n_{el}\} \quad (3.14)$$

$$Q^h = \{q^h | q^h \in Q, q^h \in C^0(\bar{\Omega}), q^h|_{\Omega^e} \in \mathcal{P}^1(\Omega^e), e = 1, 2, \dots, n_{el}\} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{L}^h = \mathcal{V}^h \times Q^h \quad (3.16)$$

Noter cela \mathcal{L}^h est un sous espace linéaire fermé de \mathcal{L} . L'approximation discrète est alors énoncée comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U^h = \{u^h, p^h\} \in \mathcal{L}^h \text{ tel que} \\ B_{stab}(U^h, V^h) = L_{stab}(V^h) \quad \forall V^h(v^h, q^h) \in \mathcal{L}^h \end{cases} \quad (3.17)$$

Nous examinons maintenant les propriétés de convergence de cette méthode

Théorème 3.1.2 *Le problème discret stabilisé est bien posé.*

Il suffit de vérifier les conditions suivantes :

1. V_h et M_h sont deux espaces de Hilbert.
2. B_{stab} est une forme bilinéaire continue :

$$\exists c > 0 \text{ tel que } B_{stab}(U^h, V^h) \leq c \|U^h\|_{H(\text{div}, \Omega)} \|V^h\|_{H(\text{div}, \Omega)}$$

3. B_{stab} est coercive :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } B_{stab}(V^h, V^h) \geq \alpha \|V^h\|_{H(\text{div}, \Omega)}^2$$

CHAPITRE 3. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS STABILISÉE POUR LES
3.1. FORMULATION MIXTE ÉQUATIONS DE DARCY

4. L_{stab} est une forme linéaire continue :

$$\exists c' > 0 \quad | L_{stab}(V^h) | \leq c' \| V^h \|_{H(\text{div}, \Omega)}$$

Preuve.

V_h et M_h sont deux espaces de dimension fini donc V_h et M_h sont deux espaces de Hilbert.

La forme $B_{stab} : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire continue (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned} | B_{stab}(U^h, V^h) | &= \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^h \cdot v^h dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} p^h \cdot \text{div} v^h dx + \int_{\Omega} q^h \cdot \text{div} u^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla p^h \cdot \nabla q^h dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \| u^h \|_{L^2(\Omega)} \| v^h \|_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \| p^h \|_{L^2(\Omega)} \| \text{div} v^h \|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \| q^h \|_{L^2(\Omega)} \| \text{div} u^h \|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \| \nabla p^h \cdot \nabla q^h \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} (\| u^h \|_{L^2(\Omega)} + \| \text{div} u^h \|_{L^2(\Omega)}) (\| v^h \|_{L^2(\Omega)} + \| \text{div} v^h \|_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \| p^h \|_{L^2(\Omega)} (\| v^h \|_{L^2(\Omega)} + \| \text{div} v^h \|_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \| q^h \|_{L^2(\Omega)} (\| u^h \|_{L^2(\Omega)} + \| \text{div} u^h \|_{L^2(\Omega)}) + \frac{1}{2} \| \nabla p^h \cdot \nabla q^h \|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité wirtinger on a

$$\| p - \bar{p} \|_{L^2(\Omega)} \leq \| \nabla p \|_{L^2(\Omega)}$$

et puis que $\bar{p} = 0$ dans M (\bar{p} est la moyenne de p) donc

$$\| p \|_{L^2(\Omega)} \leq \| \nabla p \|_{L^2(\Omega)}$$

alors

$$\begin{aligned}
 |B_{stab}(U^h, V^h)| &\leq \left(\frac{1}{2}(\|u^h\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}u^h\|_{L^2(\Omega)})\right)(\|v^h\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}v^h\|_{L^2(\Omega)}) \\
 &\quad - \frac{1}{2}\|\nabla p^h\|_{L^2(\Omega)}(\|v^h\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}v^h\|_{L^2(\Omega)}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\|\nabla q^h\|_{L^2(\Omega)}(\|u^h\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}u^h\|_{L^2(\Omega)}) + \frac{1}{2}\|\nabla p^h \cdot \nabla q^h\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq (\|u^h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} + \|\nabla p^h\|_{L^2(\Omega)})(\|v^h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} + \|\nabla q^h\|_{L^2(\Omega)}) \\
 &\leq \|U^h\|_{\mathcal{V}} \|V^h\|_{\mathcal{V}}.
 \end{aligned}$$

La forme B_{stab} est coercive :

$$\begin{aligned}
 B(V^h, V^h) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v^h)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla(q^h)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} (\|v^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla q^h\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
 &= \|V^h\|_{stab}^2.
 \end{aligned}$$

La forme $L_{stab} : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire continue (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned}
 |L_{stab}| &= \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} f \cdot v dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla q \cdot f dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)} (\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)}) \\
 &\leq c' \|V\|_{\mathcal{V}}
 \end{aligned}$$

donc le problème stabilisé est bien posé . ■

3.1.4 Analyse d'erreur

$\|\cdot\|$ dénoté la norme de $L^2(\Omega)$. Nous définissons le de norme de stabilité par

$$\|V\|_{stab} = \left\{ \frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|\nabla q\|^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall V \in \mathcal{L} \tag{3.18}$$

Lemme 3.1.3 (*Stabilité*) Pour tous $V \in \mathcal{L}$,

$$B_{stab}(V, V) = \|V\|_{stab}^2. \tag{3.19}$$

Preuve. La preuve suit immédiatement de la définition de $B_{stab}(\cdot, \cdot)$ ■

Lemme 3.1.4 (*Consistence*) Pour tous $V^h \in \mathcal{L}^h$

$$B_{stab}(V^h, E) = 0 \quad (3.20)$$

où $E = U^h - U$ est l'erreur

Preuve. Substitution $V^h \in \mathcal{L}^h$ par V dans (3.10) et par soustraction de (3.17) nous obtenons le résultat cherché. ■

3.1.5 Estimation de l'erreur d'interpolation

$\tilde{V}^h \in \mathcal{L}$ être une interpolation de $V \in \mathcal{L}$. Nous obtenons le résultat cherché décomposons l'erreur de la manière standard :

$$E = U^h - U = (U^h - \tilde{U}^h) + (\tilde{U}^h - U) \quad (3.21)$$

$$= E^h + H \quad (3.22)$$

où $E^h = \{e_u^h, e_p^h\} \in \mathcal{L}^h$ et $H = \{\eta_u, \eta_p\} \in \mathcal{L}$. Nous avons l'évaluation standard suivante pour l'erreur H d'interpolation :

$$\| H \|_{stab} \leq c_1 \left(\frac{h}{L}\right)^{k+1} |u|_{k+1} + c_2 \left(\frac{h}{L}\right)^l |p|_{l+1} \quad (3.23)$$

où h est le paramètre de maille, L est une dimension caractéristique de Ω et c_1 et c_2 sont des constantes indépendantes de h , et $|\cdot|_s$ est semi-norme de Sobolev défini comme suit

$$|\cdot|_s^2 = |\cdot|_{H^s(\Omega, L)}^2 = \int_{\Omega} (L^s \nabla \dots \nabla (\cdot))^2 d\Omega. \quad (3.24)$$

Théorème 3.1.5

$$\| E \|_{stab} \leq C \| H \|_{stab} \quad (3.25)$$

où C est une constante non dimensionnelle.

Corollaire 3.1.6

$$\| E \|_{stab} \leq C \left(c_1 \left(\frac{h}{L}\right)^{k+1} |u|_{k+1} + c_2 \left(\frac{h}{L}\right)^l |p|_{l+1} \right) \quad (3.26)$$

Preuve. (de corolaire) Le résultat est une conséquence de (3.22) et (3.23)

■ **Preuve.** (De théorème)

$$\| E \|_{stab}^2 = B_{stab}(E, E) \quad (\text{stabilité}) \quad (3.27)$$

$$= B_{stab}(E^h + H, E) \quad (\text{définition de } E) \quad (3.28)$$

$$= B_{stab}(E^h, E) + B_{stab}(H, E) \quad (\text{bilinéarité}) \quad (3.29)$$

$$= B_{stab}(H, E) \quad (\text{uniformité}). \quad (3.30)$$

Nous procédons maintenant à l'estimation $B_{stab}(H, E)$:

$$\begin{aligned} B_{stab}(H, E) &= B_{stab}(\eta_u, \eta_p; e_u, e_p) = (\eta_u, e_u) - (\text{div} \eta_u, e_p) + (\eta_p, \text{div} e_u) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\eta_u, e_u) - \frac{1}{2}(\eta_u, \nabla e_p) + \frac{1}{2}(\nabla \eta_p, e_u) + \frac{1}{2}(\nabla \eta_p, \nabla e_p) \\ &\leq \frac{1}{2} \{ \varepsilon_1 \| \eta_u \|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \| e_u \|^2 + \varepsilon_2 \| \eta_u \|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \| \nabla e_p \|^2 \\ &\quad + \varepsilon_3 \| \nabla \eta_p \|^2 + \frac{1}{\varepsilon_3} \| e_u \|^2 + \frac{\varepsilon_4}{2} \| \eta_u \|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4} \| e_u \|^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon_5}{2} \| \eta_u \|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_5} \| \nabla e_p \|^2 + \frac{\varepsilon_6}{2} \| \nabla \eta_p \|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_6} \| e_u \|^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon_7}{2} \| \nabla \eta_p \|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_7} \| \nabla e_p \|^2 \} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Nous choisissons

$$2\varepsilon_1 = 2\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_6 = 10 \quad , \quad 2\varepsilon_3 = \varepsilon_5 = \varepsilon_7 = 6 \quad (3.32)$$

Avec ces derniers (3.31) devient

$$B_{stab}(H, E) \leq \frac{1}{2} \{ \| E \|_{stab}^2 + 16 \| \eta_u \|^2 + 13 \| \nabla \eta_p \|^2 \} \leq \frac{1}{2} \{ \| E \|_{stab}^2 + 32 \| H \|_{stab}^2 \} \quad (3.33)$$

De ce qu'il suit cela

$$\| E \|_{stab}^2 \leq 32 \| H \|_{stab}^2 \quad (3.34)$$

et ainsi

$$\| E \|_{stab} \leq 4\sqrt{2} \| H \|_{stab} \quad (3.35)$$

■

3.1.6 Formulation mixte avec la vitesse continue et la pression discontinue

$\tilde{\Omega}$ dénoter l'union des intérieurs d'élément,

$$\tilde{\Omega} = \cup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e, \quad (3.36)$$

et

$$\tilde{Q} = H^1(\tilde{\Omega}) \setminus \mathbb{R} = \{q | q \in H^1(\Omega^e), e = 1, 2, \dots, n_{el}, \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0\} \quad (3.37)$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{V} \times \tilde{Q}. \quad (3.38)$$

Noter que les fonctions dans le \tilde{Q} peuvent être discontinue à travers des frontières d'élément. La formulation faible stabilisée est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \tilde{\mathcal{L}} \text{ tel que} \\ \tilde{B}_{stab}(U, V) = \tilde{L}_{stab}(U) \quad \forall V \in \tilde{\mathcal{L}} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

où

$$\tilde{B}_{stab}(U, V) = B(U, V) + \frac{1}{2}((-v + \nabla q), (u + \nabla p))_{\tilde{\Omega}} \quad (3.40)$$

$$\tilde{L}_{stab}(V) = L(V) - \frac{1}{2}((-v + \nabla q), f)_{\tilde{\Omega}} \quad (3.41)$$

Dans quel $(\cdot, \cdot)_{\tilde{\Omega}}$ est de $L^2(\tilde{\Omega})$ produit intérieur à savoir

$$(\cdot, \cdot)_{\tilde{\Omega}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} (\cdot, \cdot)_{\Omega^e} \quad (3.42)$$

et $B(U, V)$ et $L(V)$ sont donnés par (3.6) et (3.7) respectivement .

Les espaces des éléments finis sont

$$\tilde{Q}^h = \{q | q \in Q, q^h|_{\Omega^e} \in p^l(\Omega^{\Omega^e}), e = 1, 2, \dots, n_{el}\} \quad (3.43)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}^h = \mathcal{V}^h \times \tilde{Q}^h \quad (3.44)$$

Noter cela $\tilde{\mathcal{L}}^h \subset \tilde{\mathcal{L}}$

L'approximation discrète est alors énoncée comme suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } V^h = \{U^h, p^h\} \in \tilde{\mathcal{L}}^h \text{ tel que} \\ \tilde{B}_{stab}(U^h, V^h) = \tilde{L}_{stab}(V^h) \quad \forall V^h = \{v^h, q^h\} \in \tilde{\mathcal{L}}^h \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Cette fois la norme de stabilité est défini près

$$\| V \|_{stab} = \{ \tilde{B}_{stab}(V, V) \}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2} (\| v \|^2 + \| \nabla q \|_{\Omega}^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

SIMULATIONS NUMÉRIQUES SOUS FREEFEM++

Dans ce chapitre nous faisons quelques tests numériques, basés sur la méthode stabilisée sous le logiciel Freefem++.

4.1 EXEMPLES

4.1.1 Premier exemple

Nous considérons de problème Darcy suivante :

$$\begin{cases} u = -\nabla p & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = \varphi & \text{dans } \Omega \\ u \cdot n = \psi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

La première simulation numérique est une étude des taux de convergence. Le domaine à l'étude est la solution exacte et approché de la vitesse est donnée par :

$$p = \sin \pi x \sin \pi y$$

La solution exacte du problème de Darcy (u_1, u_2) est calculé par le problème de Darcy :

$$u_1 = (\pi \cos \pi x \sin \pi y) \tag{4.2}$$

$$u_2 = (\pi \sin \pi x \cos \pi y) \tag{4.3}$$

φ est calculé a partir (4.1) :

$$\varphi = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y \tag{4.4}$$

Et ψ est calculé a partir (4.1)

$$\psi_1 = \pi \sin \pi x \tag{4.5}$$

$$\psi_2 = \pi \sin \pi y \tag{4.6}$$

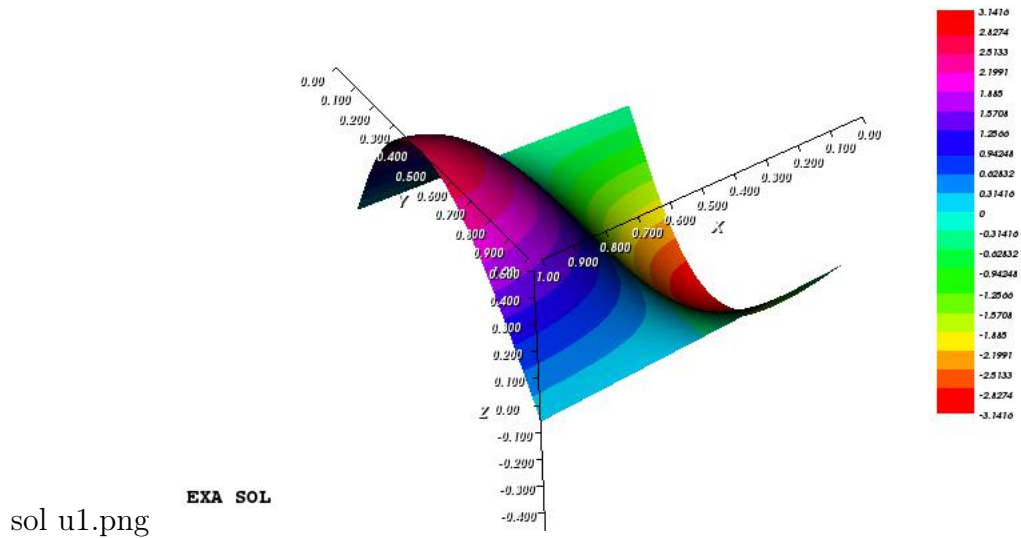


FIGURE 4.1 – exc sol u1

FIGURE 4.2 – App sol u1

exc sol u1

appsol u1

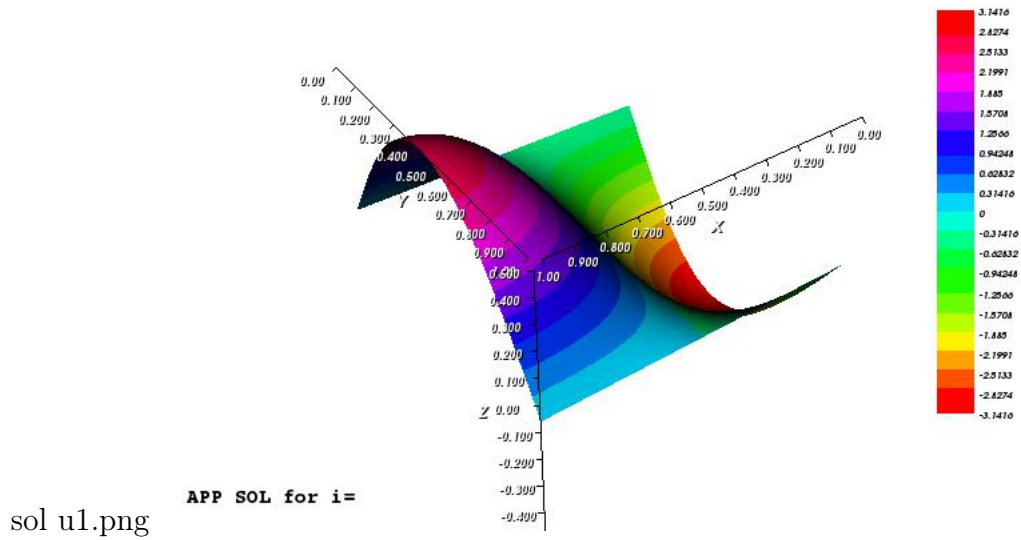
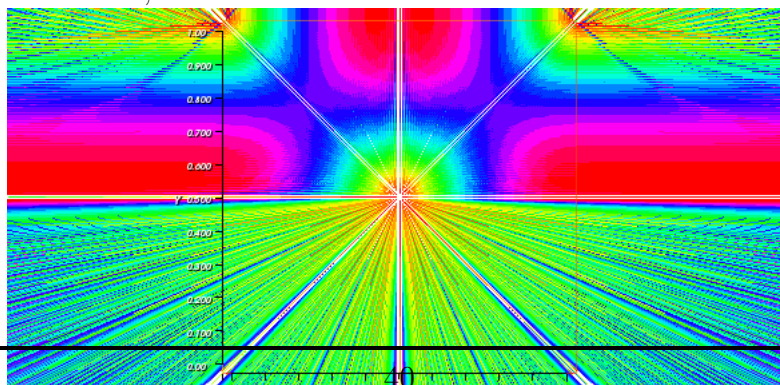


FIGURE 4.3 – u1,u2

u1,u2



itération i	erreur	nb des triangle
i=2	4.2529 e-7	32
i=3	2.6501 e-8	512

TABLE 4.1 – L'erreur en fonction de degrés de liberté

Dans la première exemple, on étudie la convergence de la solution approché u_h de cette méthode. On considère les éléments finis mixtes stabilisés, on trouve les résultats dans le tableau.

4.1.2 Deuxième exemple

Nous considérons de problème Darcy suivante :

$$\begin{cases} u = -\nabla p & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = \varphi & \text{dans } \Omega \\ u \cdot n = \psi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.7)$$

La première simulation numérique est une étude des taux de convergence. Le domaine à l'étude est la solution exacte et approché de la vitesse est donnée par :

$$p = \sin \pi x \sin \pi y$$

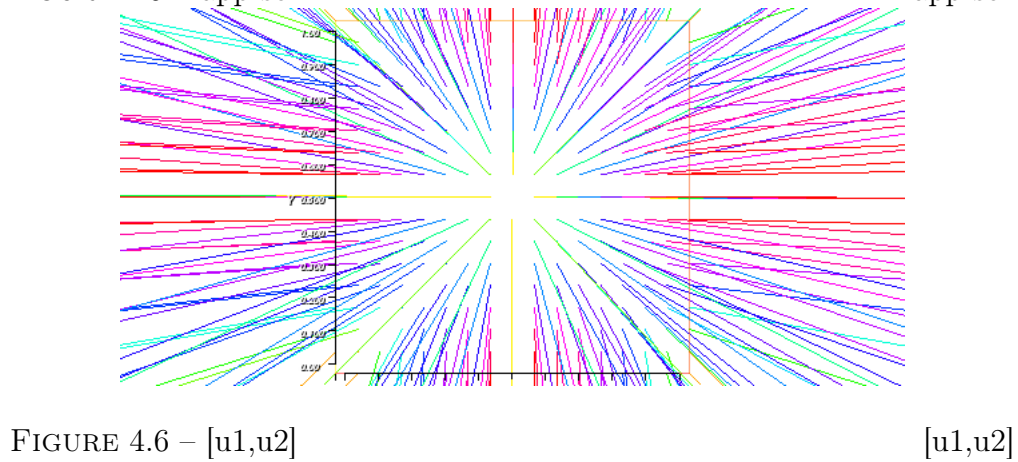
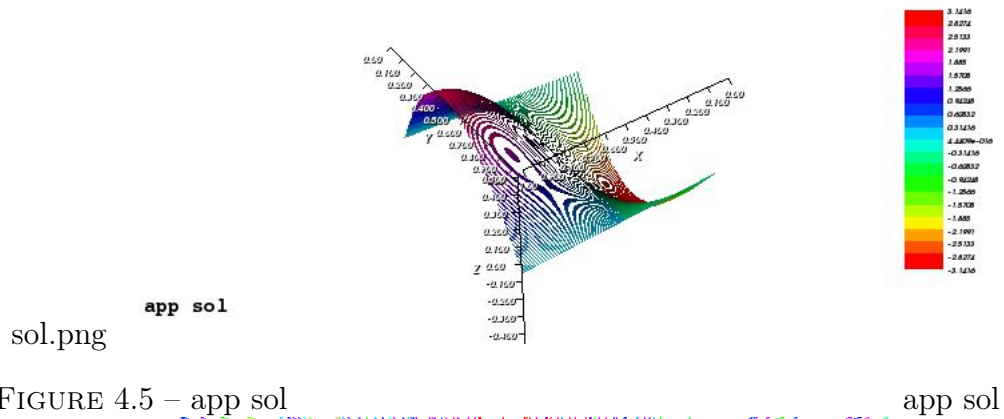
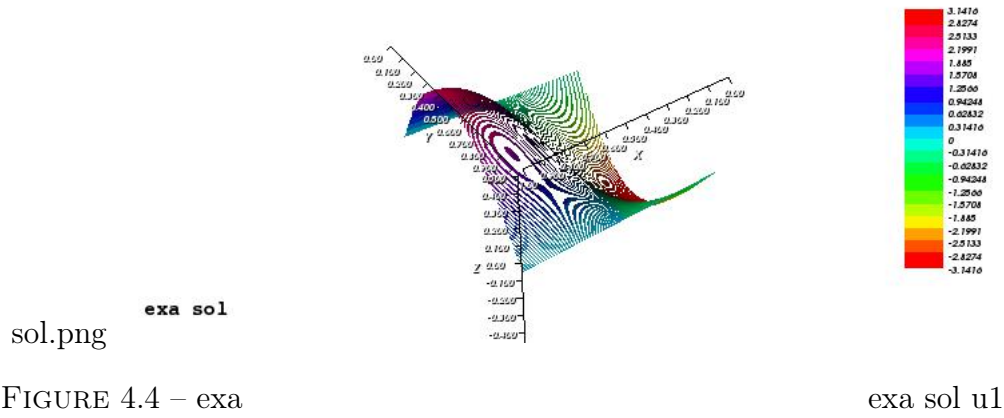
La solution exacte du problème de Darcy (u_1, u_2) est calculé par le problème de Darcy :

$$u_1 = (\pi \cos \pi x \sin \pi y) \quad (4.8)$$

$$u_2 = (\pi \sin \pi x \cos \pi y) \quad (4.9)$$

φ est calculé a partir (4.1) :

$$\varphi = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y \quad (4.10)$$



Dans la deuxième exemple, en étudie la convergence de la solution approché u_h de cette méthode. On considère les élément finis mixte de Ravaït-Thomas $\mathit{mathbb{RT}}_0$, on trouve les résultats dans tableau.

itération i	erreur	nb des triangle
i=2	0.0022736	32
i=4	9.82746 e-6	512

TABLE 4.2 – L'erreur

CONCLUSION

Le modèle de Darcy est l'un des modèles les plus utilisés pour étudier l'écoulement des fluides dans les milieux poreux. Afin d'éviter les difficultés rencontrées par la méthode de Galerkin standard pour les équations de Darcy nous avons étudié et programmé une méthode stabilisée-mixte proposée par : A. Masud et Thomas J.R. Hughes (l'article) :

A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. Comp. Meth Appl.

Contrairement aux méthodes de Galerkin classiques qui demandent des éléments finis très sophistiqués, très spéciaux et très spécifiques qui sont parfois construits spécialement pour un problème spéciale. Par exemple, pour le cas des équations de Darcy, la stabilité et la convergence des éléments finis mixte de Raviart-Thomas ont été démontré (voir C. Bernardi []). Mais ces éléments finis sophistiqués sont parfois très difficiles à programmer sur machine.

La méthode stabilisée proposée par Masud-Huges est stable et convergente pour une grande classe des éléments finis simples, comme ceux de Lagrange. Un autre avantage très remarquable pour cette méthode c'est sa simplicité conceptuelle, c-t-à-d elle est basée sur une idée très simple.

Durant ce mémoire nous avons pu effectué des tests numériques inspirés de l'article mentionné au dessus, en utilisant le logiciel libre Freefem++. A travers ces tests, nous avons pu démontrer l'efficacité de cette méthode.

Comme perspective de ce travail, il sera très intéressant de réaliser une analyse d'erreur *a posteriori* efficace et fiable, car dans ce mémoire (et même dans l'article mentionné!) seulement l'analyse *a priori* a été effectuée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alexandre Ern, Aide-mémoire Éléments finis, Dunod, Paris, 2005.
- [2] Alexandre Ern. Jean-Luc Guermond Theory and Practice of Finite Elements, Springer 2004
- [3] Brezzi.Fortin, Mixed and hybrid Finite Element Methods, Springer 2004
- [4] Djenno Ngomanda Malcom. Nouvelles approximations numériques pour les équations de Stokes et l'équation Level Set. HALL.7 jan 2010.
- [5] Gabriel N. Gatica A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method, Theory and Applications. Gabriel N. Gatica 2014
- [6] C. Bernardi, Y. Maday et F. Rapetti, Discrétisations variationnelles des problèmes elliptiques, Springer-SMAI (2004).
- [7] Susanne C. Brenne, L. Ridgway Scott, The mathematical Theory of Finite Element Methods, 2008 Springer
- [8] Thomas J.R et al ,(2002), a stabilized mixed finite element method for darcy flow , ELSEVIER, 191, 4341-4370

Résumé :

Ce travail est une contribution d'étudier une nouvelle méthode des éléments finis stabilisées mixtes par rapport au problème Darcy du mouvement des liquides , leur stabilité et l'évaluation d'erreur à priori. L'un des avantages les plus importants de cette méthode est la possibilité de l'utilisation d'un très grand nombre d'éléments finis contrairement à la méthode traditionnelle d'instabilité, où on ne peut utiliser que quelques-uns des éléments finis vérifiant la condition de stabilité. Dans les résultats finaux des tests numériques on a assuré que cette méthode est la meilleure.

Mots clés : Equation Darcy, élément fini continue, méthode mixte, stabilité, estimation d'erreur.

Abstract:

We develop new stabilized mixed finite element methods for Darcy flow. Stability and an a priori error estimate in the stability norm are established. A wide variety of convergent finite elements present themselves, unlike the classical Galerkin formulation which requires highly specialized elements. An interesting feature of the formulation is that there are no mesh-dependent parameters. Numerical tests confirm the theoretical results.

Keywords: Darcy equation, continuous finite element, mixed method, stabilized, error estimate.

المخلص:

في هذا العمل تطرقنا إلى دراسة نمط جديد للعناصر المنتهية المستقرة قصرًا المزدوجة بالنسبة إلى مسألة دارسي لحركة السوائل و استقرارها و تقدير الخطأ بشكل استباقي. ومن أهم إيجابيات هذه الطريقة هي إمكانية استخدام عدد كبير جدًا من العناصر المنتهية على عكس الطريقة التقليدية الغير مستقرة حيث لا يمكننا استخدام إلا عدد قليل من العناصر المنتهية التي تحقق شرط الاستقرار وفي الأخير نعرض نتائج الاختبارات العددية التي تؤكد أفضلية هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية : معادلات دارسي ، العناصر المنتهية المستمرة، الطريقة المزدوجة، الاستقرار، تقدير الخطأ

