



UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la
matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilité et Statistique

Par : Zaki Sakina

Thème

L'estimation non paramétrique de la régression pour les
variables fonctionnelles

Soutenu publiquement le : 01/06/2017

Devant le jury composé de :

Mr.Zibar Said	Pr. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.Maddi Fatima	M.A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
Mr. Agoune Rachid	M.B. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

DÉDICATION

Je dédie ce travail à :

Mes parents

-A mes frères

et mes sœurs,et toute la famille

- A mes chers amies

- Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.

-Et a tous mes professeurs

REMERCIEMENT

Je

remercions premièrement notre Dieu " ALLAH", qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Je

souhaitons très chaleureusement tous nos remercier ma encadreur vertueux prof :

Agoune Rachid

Avec un grand honneur, j'aimerais présenter mes remerciements et ma gratitude aux mon prof : **Maddi Fatima** et **Zibar Said** pour avoir accepter d'évaluer conseil ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques.

Je

tenons à remercier a nos enseignements de faculté des Mathématiques et sciences de la matière.

A la fin,

Nous tenons également à remercier toutes les personnes qui participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

- $B(\chi, h)$: boule ouverte de centre χ et de rayon h .
- $d(., .)$: semi-metrique sur un espace fonctionnel E .
- $O_{p.co.}$: taux de convergence presque complète.
- K : notation générique pour une fonction asymétrique du noyau.
- C : constantes positives réelles finies génériques.
- $v.a.f$: variable aléatoire fonctionnelle.
- $\phi_\chi(h)$: mesure de $B(\chi, h)$ par rapport à la loi de probabilité de χ .
- \mathcal{X} : variable aléatoire fonctionnelle.

- \mathcal{X}_i : échantillon de variable aléatoire fonctionnelle.
- χ : élément fonctionnel.
- χ_i : observations du variable aléatoire fonctionnelle à χ .
- h : notation générique pour le paramètre de lissage $h = h(n)$.
- H : notation générique pour une fonction de noyau intégrée.
- r : opérateur de régression non linéaire.

TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Préliminaires	iii
Introduction	vii
1 Préliminaires mathématiques	2
1.1 Rappels	2
1.1.1 Données fonctionnelles	2
1.1.2 Variable fonctionnelle	3
1.1.3 Ensembles de données fonctionnels	4
1.1.4 Modèle non paramétrique	4
1.1.5 Convergence presque sûre	4
1.1.6 Convergence presque complète	4
1.1.7 Vitesse de convergence presque complète	5
1.1.8 Méthode de noyau	5
1.1.9 L'estimateur de \hat{f}	6
1.1.10 Noyau de type 0	10
1.1.11 Noyau de type I	10
1.1.12 Noyau de type II	10

1.2	inégalités de type Bernstein	10
2	Etude asymptotique	12
2.1	Probabilité de petite boule	12
2.2	Estimation de la fonction de régression	14
2.2.1	Introduction	14
2.3	Présentation de l'estimateur :	14
2.4	Hypothèses	15
2.5	La convergence presque complète ponctuelle	16
3	Application et exploration des observations sur des données simulées	21
3.1	Introduction	21
3.2	générer les données fonctionnelles pour $n = 100$	22
3.2.1	Algorithme 1	22
3.2.2	Programme sous R :	22
3.2.3	Résultats	23
3.3	générer la régression	25
3.3.1	Algorithme 2	25
3.3.2	Programme dans R :	25
3.3.3	Résultats	26
3.4	générer l'estimateur de la régression	27
3.4.1	Algorithme 3	27
3.4.2	Programme sous R	27
3.4.3	Résultats	28
3.5	générer les données pour $n=1000$	29
3.5.1	résultats de simulé la régression pour $h=0.36$	29
3.5.2	résultats de simulé de l'estimateur de la régression	30
3.5.3	résultats de simulé de l'estimateur de la régression pour $h=0.30$	31
	Conclusion	32
	Bibliographie	34

INTRODUCTION

La statistique fonctionnelle occupe désormais une place importante dans la recherche en statistique. Il s'agit de la modélisation statistique des données qui sont des courbes supposées observées sur toutes leurs trajectoires. Ceci est pratiquement possible en raison de la précision des appareils de mesures modernes et de l'importante capacité de stockage qu'offrent les systèmes informatiques actuels. Il est facile d'obtenir une discrétisation très fine d'objet mathématiques tels que des courbes, surfaces,... Ce type de variables se retrouve dans de nombreux domaines, comme la météorologie, la chimie quantitative, la biométrie, l'économétrie ou l'imagerie médicale. Parmi les ouvrages de référence en la matière, on peut citer les monographies de Ramsay et Silverman (1997) pour les aspects appliqués, Bosq (2000) pour les aspects théorique, Ferraty et Vieu (2006) pour une étude non paramétrique et Ferraty et Romain (2011) pour des développements récents. Dans le même contexte, nous renvoyons à Manteiga et Vieu (2007) ainsi que Ferraty (2010).

Les résultats en statistique non paramétrique fonctionnelle ont été élaborés par Ferraty et Vieu (2000) et ils concernent l'estimation de la fonction de régression à variable explicative de dimension fractale. Ils ont établi la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de ce modèle non paramétrique dans le cas i.i.d. L'étude des modèles statistiques adaptés à ces types de données a reçu beaucoup d'attention dans la littérature récente (voir Ramsay et Silverman(2005)), Bosq (2000) et Ferraty et Vieu (2006), et Ferraty et Romain (2011) pour un manuel sur les statistiques dans les espaces dimension infinis. Depuis l'article précédent de Ferraty et Vieu (2002), la littérature sur la régression

non paramétrique (Ferraty et Vieu (2011)) commence à être plutôt importante lorsque la variable de réponse est scalaire, mais il y a très peu de progrès dans cette direction lorsque cette réponse est fonctionnelle (Bosq et Delecroix (1985) et Lecoute(1990)).

Dans le but de présenter les travaux que nous avons réalisés durant la réalisation de cet mémoire, celle-ci est organisé comme suit :

Dans le chapitre 1, on s'intéresse à la présentation des outils probabilistes nécessaires pour la réalisation dans notre thème.

Dans le chapitre 2, nous considérons une suite d'observation i.i.d. et nous construisons des estimateurs par la méthode du noyau pour la fonction de régression, nous étudions résultats asymptotiques c'est-à-dire la convergence ponctuelle presque complète de l'estimateur pour les variables aléatoires fonctionnelles.

Le chapitre 3, est consacré à la mise en application de ces résultats pour des données simulées.

PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES

1.1 RAPPELS

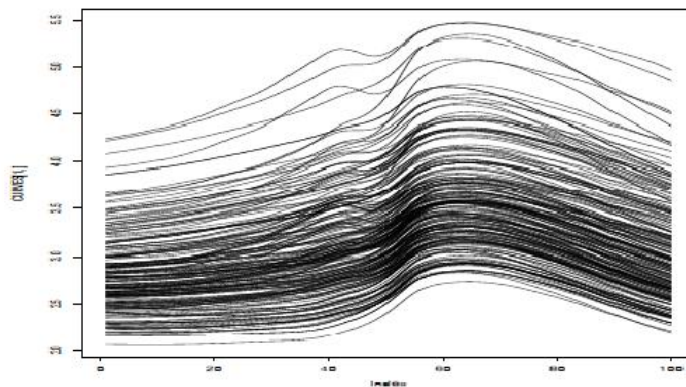
1.1.1 Données fonctionnelles

Au cours de ces dernières années, la branche de la statistique consacrée à l'analyse des données fonctionnelles a connu un réel essor tant en termes des développements théoriques et méthodologiques que de la diversification des domaines d'application. Ceci revient aux progrès qu'a connus l'outil informatique au niveau des capacités de stockage qui permettent d'enregistrer des données de plus en plus volumineuses. Ainsi, un très grand nombre de variables peuvent être observées pour l'étude d'un même phénomène.

Une fois la réalité des variables fonctionnelles est présentée, on s'intéresse aux aspects de modélisation les concernant. Dans ce but, nous donnons quelques définitions permettant de fixer un vocabulaire. Rappelons, tout d'abord, qu'une v.a.f. est tout simplement une v.a. à valeurs dans un espace de dimension infinie que nous noterons F . Par exemple, cet espace F peut être un espace de fonctions, d'opérateur non linéaires,...., Selon la terminologie en vigueur dans la littérature, on parle aussi bien de v.a.f. que de données fonctionnelles, ce qui englobe notamment tout ce qui concerne l'analyse statistique.

Exemple

En industrie alimentaire : Ferraty et Vieu (2002,2003) se sont intéressés à des données spectrométriques de masse. Ces données proviennent d'un problème de contrôle de qualité en industrie alimentaire. Ils ont étudié la contenance en graisse dans les morceaux de viande étant donné les courbes d'absorption de ces morceaux de viande (pour ceci figure "Les courbes spectrométriques"). Ces données réelles ont été utilisées dans le cas où les variables sont indépendantes.



Les données fonctionnelles.

1.1.2 Variable fonctionnelle

Définition 1.

Une variable aléatoire \mathcal{X} est appelée variable fonctionnelle si les valeurs dans un espace dimension infini(ou espace fonctionnel).

L'observation χ de \mathcal{X} s'appelle une donnée fonctionnelle.

Notez que, lorsque \mathcal{X} (resp. χ) désigne (resp. son observation) une courbe aléatoire, nous avons fait la définition $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}(t); t \in T\}$ (resp. $\chi = \{\chi(t); t \in T\}$).

Dans ce cas, une caractéristique fonctionnelle vient directement sur les notes.lorsque la variable est courbe associée à une dimension $T \in \mathbb{R}$, on notera que la notion de variable fonctionnelle couvre une plus grande surface de courbe d'analyse particulier, et peut être variable et la surface fonctionnelle de aléatoire, par exemple Niveaux de gris des courbes d'image ou vecteur (T est un ensemble bidimensionnel $T \subset \mathbb{R}^2$), ou d'autre dimensions infinies plus complexes.

1.1.3 Ensembles de données fonctionnels

Définition 2.

Un ensemble de données fonctionnelles χ_1, \dots, χ_n est l'observation de n variables fonctionnelles $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ est identique à \mathcal{X} .

1.1.4 Modèle non paramétrique

Définition 3.

Soit X un vecteur aléatoire évalué dans \mathbb{R}^p et soit ϕ un fonction définie sur \mathbb{R}^p et selon la distribution de X . Un modèle car l'estimation de ϕ consiste à introduire une certaine contrainte de la forme

$$\phi \in \mathcal{C}.$$

Le modèle est appelé un modèle paramétrique pour l'estimation de ϕ si \mathcal{C} est indexé par un nombre fini d'éléments de \mathbb{R} . Si non, le modèle est appelé modèle non paramétrique.

Définition 4.

Soit Z une v.a évaluée dans un espace de dimension infinie et ϕ une application définie sur F et en fonction du distribution de Z . Un modèle pour l'estimation de ϕ consiste à introduire une certaine contrainte de la forme

$$\phi \in \mathcal{C}.$$

Le modèle est appelé un modèle paramétrique fonctionnel pour l'estimation de ϕ si \mathcal{C} est indexé par un nombre fini d'éléments de F . Autrement, le modèle est appelé modèle non paramétrique fonctionnel.

1.1.5 Convergence presque sûre

Définition 5.

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si :

$$X_n \xrightarrow{p.s} X \iff \mathbf{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1$$

1.1.6 Convergence presque complète

Définition 6.

On dit que la suite de variable aléatoire réelle $(X_n)_{n \in \mathcal{N}}$ converge presque complètement vers une variable aléatoire X lorsque $n \rightarrow \infty$ (et on note $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ p.co), si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{P}[|X_n - X| > \epsilon] < \infty.$$

1.1.7 Vitesse de convergence presque complète

Définition 7.

On dit que la vitesse de convergence presque complète de la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathcal{N}}$ vers X d'ordre (\mathcal{U}_n) ((\mathcal{U}_n) étant une suite numérique déterministe), et on note $X_n = O_{p.co}(\mathcal{U}_n)$, si et seulement si :

$$\exists \epsilon_0 > 0, \sum_{n \in \mathcal{N}} P[|X_n - X| > \epsilon_0 \mathcal{U}_n] < \infty.$$

1.1.8 Méthode de noyau

Introduction

L'estimation par noyau (ou méthode de Parzen-Rozenblatt-1956) est une méthode non paramétrique d'estimation de la densité d'une variable aléatoire.

Cette méthode permet d'obtenir une densité continue et constitue en ce sens une généralisation de la méthode de l'histogramme.

En effet, la fonction indicatrice utilisée pour l'histogramme est ici remplacée par une fonction continue (le noyau) et une somme de fonctions continues reste continue.

En cas réel

Définition 8.

Soit $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du = 1$.

Alors K est appelé **noyau**. Pour tout $h_n > 0$ petit et $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \\ &= \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right), \end{aligned}$$

estimateur à noyau de f .

On a $\int \hat{f}_n(x) dx = 1$ et si $K > 0$ alors \hat{f}_n est une densité. Alors on dit que K est le noyau de cet estimateur et Le paramètre $h_n > 0$ est appelé paramètre de lissage (on note $h_n = h$).

Remarque 9.

L'estimateur à noyau est une densité quelle que soient les valeurs des observations X_1, \dots, X_n , et on dit symétrique si, pour tout u dans son ensemble de définition, $K(u) = K(-u)$.

On commence par remarquer que la densité est la dérivée de la fonction de répartition, ce qui permet d'écrire pour tout x :

$$\begin{aligned} f(x) = F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} \end{aligned}$$

Donc pour un $h > 0$, on peut penser à estimer $f(x)$ par :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{1}{2h} (F_n(x+h) - F_n(x-h)) \\ &= \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{]x-h, x+h]}(X_i) \end{aligned}$$

1.1.9 L'estimateur de \hat{f}

Pour obtenir quelque chose de plus lisse, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{1}{2nh_n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{]x-h_n, x+h_n]}(X_i) \\ &= \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mathbf{1}_{x-h_n < X_i \leq x+h_n} \\ &= \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1, +1]}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \\ &= \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \end{aligned}$$

avec $K = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1, +1]}(u)$

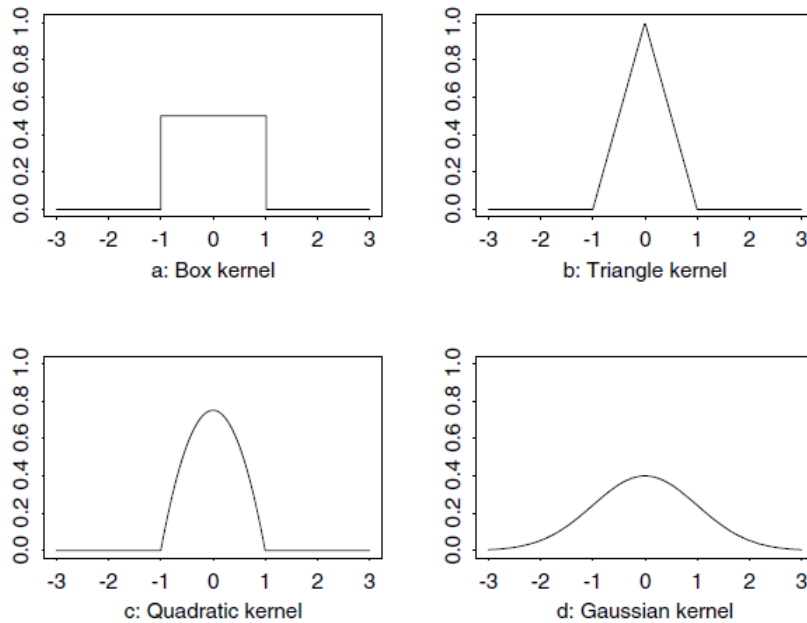


FIGURE 1.1 : Noyau symétrique

Les noyaux

Les noyaux les plus couramment utilisés en pratique sont :

- Le noyau rectangulaire : $K(u) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(u)$
- Le noyau triangulaire : $K(u) = (1 - |u|) \mathbf{1}_{[-1,1]}(u)$
- Le noyau gaussien : $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$
- Le noyau d'épanechnikov : $K(u) = \frac{3}{4} (1 - u^2) \mathbf{1}_{[-1,1]}(u)$

En cas multivarié

Dans des situations multivariées, on observe n vecteurs aléatoires $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ évalué en \mathbb{R}^p . La pondération locale précédente du noyau peut être facilement étendue à cette situation. À cette fin, il suffit de considérer un noyau multivarié K^* qui sera une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} . Le premier moyen (naturel) de le faire est de définir K^* comme un produit de p fonctions de noyau réel K_1, \dots, K_p :

$$\forall u = {}^t(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p, K^*(u) = K_1(u_1) \times K_2(u_2) \times \dots \times K_p(u_p).$$

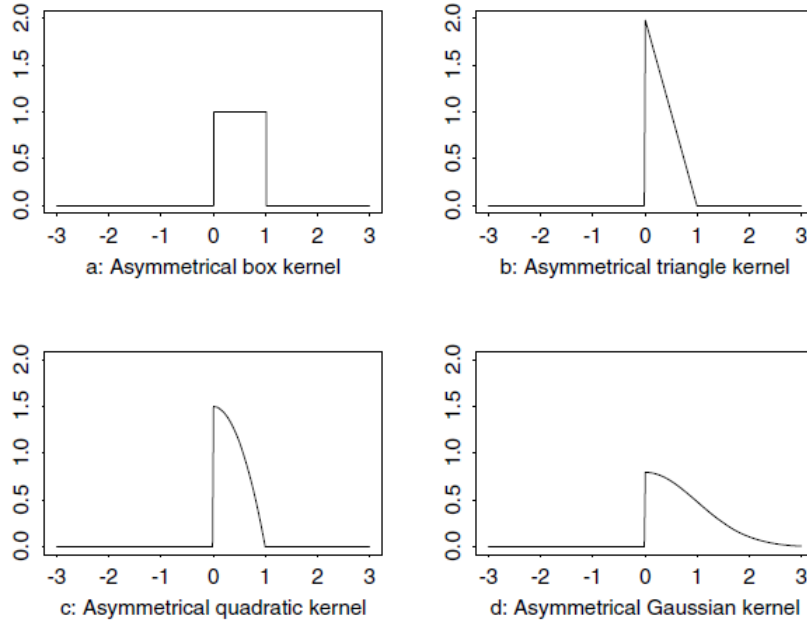


FIGURE 1.2 : Noyau asymétrique

Une deuxième façon consiste à combiner une fonction de noyau réelle H avec une norme (désignée par $\|\cdot\|$) dans \mathbb{R}^p comme suit :

$$\forall u \in \mathbb{R}^p, K^*(u) = K(\|u\|).$$

Notez que si $K_1 = K_2 = \dots = K_p = 1_{[-1,1]}$ et si $\|\cdot\|$ est la norme suprême, les deux approches coïncident en prenant $K = 1_{[-1,1]}$. En outre, parce que $\|u\|$ est toujours une quantité positive, le noyau réel K devrait avoir un support positif (i.e., $\{v \in \mathbb{R} \text{ tel que } K(v) > 0\} \subset \mathbb{R}^p$.) Cela conduit à utiliser des fonctions asymétriques pour le noyau K . Maintenant, nous discuterons de la façon dont cela peut être interprété en termes de pondération locale. Soit x un vecteur fixe de \mathbb{R}^p . La pondération locale du noyau multivarié consiste à transformer les n vecteurs aléatoires $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ à n variables $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ tel que :

$$\Delta_i = \frac{1}{h^p} K^* \left(\frac{x - \mathbf{X}_i}{h} \right).$$

Si l'on considère les noyaux compatibles de manière compacte, il apparaît clairement que les Δ_i sont des transformations pondérées localement des variables \mathbf{X}_i , puisque $\Delta_i = 0$ tant que le \mathbf{X}_i correspondant est hors de certains voisins de x .

En cas fonctionnel

Soit $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ et n v.a.f. évalué dans E et que χ un élément fixe de E . Une extension fonctionnelle des idées simple de pondération locale du noyau à variable multiples serait de transformer le n variable .a.f.

$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ dans le quantités n

$$\frac{1}{V(h)} K \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X}_i)}{h} \right),$$

que dit d est semi-metrique sur E , K est un noyau réel (asymétrique).

Dans cette expression $V(h)$ serait le volume de

$$B(\chi, h) = \{\chi' \in E, d(\chi, \chi') \leq h\}$$

avec B est une boule, par rapport à la topologie induite par d , centrée sur χ et de rayon h . Le noyau fonctionnel est défini comme des variables pondérées locales :

$$\Delta_i = \frac{K \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X}_i)}{h} \right)}{E \left(K \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X}_i)}{h} \right) \right)}.$$

Si nous retournons au cas multivarié, nous avons, pour un C constant selon K et sur la norme $\|\cdot\|$ utilisé dans R^p ,

$$\mathbb{E}K(\|x - \mathbf{X}_i\|/h) \sim Cf(x)h^p$$

Tant que \mathbf{X}_i a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue qui est continue et tel que $f(x) > 0$. Ainsi, il est clair maintenant que Δ_i est une extension de la pondération locale du noyau multivarié dans le cadre fonctionnel.

1.1.10 Noyau de type 0

Définition 10.

$K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\int K = 1$ avec support compact $[-1, 1]$ et tel que $\forall u \in (0, 1)$, $K(u) > 0$ est appelé à noyau de type 0.

1.1.11 Noyau de type I

Définition 11.

$K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\int K = 1$, est appelé un noyau de type I s'il existe deux constantes réelles $0 < C_1 < C_2 < \infty$ tel que :

$$C_1 \mathbf{1}_{[0,1]} \leq K \leq C_2 \mathbf{1}_{[0,1]}.$$

1.1.12 Noyau de type II

Définition 12.

$K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\int K = 1$, est appelé un noyau de type II si son support est $[0, 1]$ et si sa dérivée K' existe sur $[0, 1]$ et satisfait pour deux constantes réelles $-\infty < C_2 < C_1 < 0$:

$$C_2 \leq K' \leq C_1.$$

1.2 INÉGALITÉS DE TYPE BERNSTEIN

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires centrées. Pour démontrer la convergence presque complète, nous avons besoin de trouver des bornes supérieures pour certaines probabilités concernant des sommes de variables aléatoires telles que :

$$P \left(\left| \sum_{i=1}^n Z_i \right| > \epsilon \right)$$

où ϵ diminue avec n .

Supposons que $\{X_n, n \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et centrées, et Z_i v.a.

Proposition 1.

$$\forall m \geq 2, |E(X_i^m)| \leq \binom{m}{2} (a_i)^2 b^{m-2} \quad ,$$

alors

$$\forall \epsilon \geq P \left[\sum_{i=1}^n |X_i| > \epsilon A_n \right] \leq 2 \exp \left\{ \frac{-\epsilon^2}{2(1 + \frac{b\epsilon}{A_n})} \right\}$$

où $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des réels positifs, $b \in \mathbb{R}^+$ et $A_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$.

Corollaire 1.

a) S'il existe une constante positive $M < \infty$, telle que $|X_1| \leq M$, alors on a

$$\forall \epsilon \geq 0, \quad P \left[\sum_{i=1}^n |X_i| > \epsilon n \right] \leq 2 \exp \left\{ \frac{-\epsilon^2 n}{2\sigma^2(1 + \frac{M\epsilon}{\sigma^2})} \right\},$$

où $\sigma^2 = E(X_i^2)$.

b) Supposons que les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ dépendent de n et que $\sigma_n^2 = E(X_i^2)$, s'il existe $M = M_n < \infty$ tel que $|X_1| \leq M$ si $\frac{M}{\sigma_n^2} \leq C < \infty$ et si $u_n = n^{-1} \sigma_n^2 \log(n)$ vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, alors nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = O_{aco}(\sqrt{u_n})$$

Démonstration. a) En appliquant la proposition 15 à $a_i^2 = \sigma^2$, $A_n^2 = n\sigma_n^2$ et $b = M$ nous aboutissons à a).

b) Comme $\frac{Mu_n}{\sigma_n^2}$ tend vers zéro, il suffit de reprendre le résultat a) pour $\epsilon = \epsilon_0 \sqrt{u_n}$ on arrive donc à l'existence d'une constante C' telle que :

$$\begin{aligned} P \left[\sum_{i=1}^n |X_i| > \epsilon U_n \right] &\leq 2 \exp \left\{ \frac{-\epsilon_0^2 \log(n)}{2\sigma^2(1 + \epsilon_0 \sqrt{\frac{MU_n}{\sigma_n^2}})} \right\} \\ &\leq 2n^{-C'} \epsilon_0^2 \end{aligned}$$

Pour ϵ_0 bien choisi le terme de droite est le terme général d'une série convergente. Ainsi s'achève la preuve de ce corollaire.

ETUDE ASYMPTOTIQUE

2.1 PROBABILITÉ DE PETITE BOULE

Définition 13.

Soit \mathcal{X} une variable aléatoire fonctionnelle évalué dans E et soit χ un élément fixe de E . Nous pouvons écrire :

$$E \left(\mathbf{1}_{[0,1]} \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} \right) \right) = E(\mathbf{1}_{B(\chi, h)}(\mathcal{X})) = P(\mathcal{X} \in B(\chi, h)).$$

Pour tout χ en E et pour tout h réel positif, nous utiliserons la notation :

$$\varphi_\chi(h) = P(\mathcal{X} \in B(\chi, h)).$$

h tend vers 0, puis $B(\chi, h)$ est considéré comme une petite boule et $P(\mathcal{X} \in B(\chi, h))$ comme probabilité de boule.

Lemme 1.

Si K est un noyau de type I, il existe des élément finis non négatifs constantes réelles C et C' tel que :

$$C\varphi_\chi(h) \leq EK \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} \right) \leq C'\varphi_\chi(h).$$

Démonstration.

K est un noyau du type I,

$$C_1\mathbf{1}_{[0,1]} \leq K \leq C_2\mathbf{1}_{[0,1]},$$

ce qui implique directement

$$C_1 \mathbf{1}_{B(\chi, h)}(\mathcal{X}) \leq K \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} \right) \leq C_2 \mathbf{1}_{B(\chi, h)}(\mathcal{X}).$$

Il suffit d'appliquer Lemme 1 afin d'obtenir le résultat avec $C = C_1$ et $C' = C_2$. ■

Lemme 2.

Si K est un noyau de type II et si $\varphi_\chi(\cdot)$ satisfait

$$\exists C_3 > 0, \exists \epsilon_0, \forall \epsilon > \epsilon_0, \int_0^\epsilon \varphi_\chi(u) du > C_3 \epsilon \varphi_\chi(\epsilon),$$

Alors il existe des constantes réelles finies non négatives C et C' de sorte que, pour h petit :

$$C \varphi_\chi(h) \leq EK \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} \right) \leq C' \varphi_\chi(h)$$

Démonstration.

Nous commençons par écrire :

$$EK \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} \right) = \int_0^1 K(t) dP \frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} (t),$$

$\exists K'$ puis que, $K(t) = K(0) + \int_0^t K'(u) du$ tel que :

$$\begin{aligned} EK \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} \right) &= \int_0^1 K(0) dP \frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} (t) + \int_0^1 \left(\int_0^1 K'(u) du \right) dP \frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} (t), \\ &= K(0) \varphi_\chi(h) + \int_0^1 \left(\int_0^1 K'(u) \mathbf{1}_{[u, 1]}(t) du \right) dP \frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} (t), \\ &= K(0) \varphi_\chi(h) + \int_0^1 K'(u) P \left(u \leq \frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} \leq 1 \right) du, \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $K(1) = 0$ nous permet d'écrire :

$$EK \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} \right) = - \int_0^1 K'(u) \varphi_\chi(hu) du.$$

Ils suffit d'utiliser (2.5) pour montrer que, pour $h < \epsilon$ et avec $C = -C_3 C_1$,

$$EK \left(\frac{d(\chi, \mathcal{X})}{h} \right) \geq C \varphi_\chi(h).$$

En remarque que K est délimité avec le support $[0, 1]$ et les mêmes arguments que pour le Lemme 1 peuvent être utilisés par mettre $C' = \sup_{t \in [0, 1]} K(t)$.

■

2.2 ESTIMATION DE LA FONCTION DE RÉGRESSION

2.2.1 Introduction

Le modèle de la régression est l'un des modèles les plus fréquemment rencontrés en statistique paramétrique et non paramétrique.

Soient $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ dans couples de variables aléatoires indépendantes et de même loi que (X, Y) , de densité jointe $f(x, y)$ sur \mathbb{R}^2 et une densité marginale $f(x) > 0$. Dans le modèle de régression non paramétrique on suppose l'existence d'une fonction "r" qui exprime la valeur moyenne de la variable à expliquer Y en fonction de la variable fonctionnelle explicative \mathcal{X} , c'est-à-dire :

$$Y = r(\mathcal{X}) + \epsilon,$$

où " ϵ " est une variable centrée réduite et indépendante de χ .

Définition 14.

Soit $(\mathcal{X}_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$ et n paires, i.i.d. comme (\mathcal{X}, Y) évaluées dans $E \times \mathbb{R}$, où (E, d) est un espace semi-métrique.

On définit l'opérateur de régression "r" par :

$$r(\chi) = E[Y | \mathcal{X} = \chi].$$

2.3 PRÉSENTATION DE L'ESTIMATEUR :

Nous proposons pour l'opérateur non linéaire \mathbf{r} , l'estimateur de régression du noyau fonctionnel défini par :

$$\hat{r}(\chi) = \frac{\sum_{i=1}^n K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_i))Y_i}{\sum_{i=1}^n K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_i))},$$

où K est un noyau asymétrique et h est strictement positif réel.

On pose :

$$W_{i,h}(\chi) = \frac{K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_i))}{\sum_{i=1}^n K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_i))},$$

Il est facile de réécrire l'estimateur de noyau comme suit :

$$\hat{r}(\chi) = \sum_{i=1}^n W_{i,h}(\chi) Y_i.$$

avec, $\sum_{i=1}^n W_{i,h}(\chi) = 1$

2.4 HYPOTHÈSES

$$r \in C_E^0, \tag{2.1}$$

où

$$C_E^0 = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}, \lim_{d(\chi, \chi') \rightarrow 0} f(\chi') = f(\chi)\}.$$

$$\forall \epsilon > 0, P(\mathcal{X} \in B(\mathcal{X}, \epsilon)) = \varphi(\epsilon) > 0. \tag{2.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{hest positive telle que :} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\varphi_\chi(h)} = 0, \\ K \text{ est une noyau de type I} \\ \text{ou} \\ K \text{ est une noyau de type II .} \end{array} \right. \tag{2.3}$$

$$\forall m \geq 2, E(|Y^m| | \mathcal{X} = \chi) < \sigma_m(\chi) < \infty \text{ avec } \sigma_m(\cdot) \text{ continue a } \chi. \tag{2.4}$$

Une fonction K de \mathbb{R} en \mathbb{R}^+ telle que $\int K = 1$, appelé noyau de type I s'il existe deux constantes réelles $0 < c_1 < c_2 < \infty$ tell que :

$$c_1 1_{[0,1]} \leq K \leq c_2 1_{[0,1]}$$

$$\exists c_3 > 0, \exists \epsilon_0, \forall \epsilon < \epsilon_0, \int_0^\epsilon \varphi_\chi(u) du > c_3 \epsilon \varphi_\chi(\epsilon) \tag{2.5}$$

$\exists \beta > 0$, telle que :

$$r \in LipE, \beta, \tag{2.6}$$

où

$$LipE, \beta = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R}_*^+, \forall \chi' \in E, |f(\chi) - f(\chi')| < Cd(\chi, \chi')^\beta\}.$$

2.5 LA CONVERGENCE PRESQUE COMPLÈTE PONCTUELLE

Théorème 15.

Dans le modèle de type de continuité (2.1) avec la probabilité conditionnelle (2.2), si l'estimateur vérifie (2.3) et si la variable réponse Y satisfait (2.4), alors nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{r}(\chi) = r(\chi), p.co.$$

Démonstration.

En utilisant la notation de Δ_i défini par :

$$\Delta_i = \frac{K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_i))}{EK(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_1))}.$$

Soient $\hat{r}_1(\chi)$ et $\hat{r}_2(\chi)$ les quantités suivantes :

$$\hat{r}_1(\chi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

et

$$\hat{r}_2(\chi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \Delta_i$$

Nous avons clairement $\hat{r}(\chi) = \frac{\hat{r}_2(\chi)}{\hat{r}_1(\chi)}$ telle que :

$$\hat{r}_1(\chi) = \frac{1}{nE[K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_1))]} \sum_{i=1}^n K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_i))$$

et

$$\hat{r}_2(\chi) = \frac{1}{nE[K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_1))]} \sum_{i=1}^n K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_i)) Y_i.$$

En utilisant la décomposition suivante :

$$\hat{r}(\chi) - r(\chi) = \frac{1}{\hat{r}_1(\chi)} \{(\hat{r}_2(\chi) - E\hat{r}_2(\chi)) - (r(\chi) - E\hat{r}_2(\chi))\} - \frac{r(\chi)}{\hat{r}_1(\chi)} \{\hat{r}_1(\chi) - 1\}.$$

■

Lemme 3.

sous les hypothèses (2.1) et (2.3), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\hat{r}_2(\chi) = r(\chi).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} r(\chi) - E\hat{r}_2(\chi) &= r(\chi) - E(Y_1\Delta_1), \\ &= r(\chi) - E(E(Y_1\Delta_1|\mathcal{X}_1)), \\ &= r(\chi) - E(r(\mathcal{X}_1)\Delta_1), \\ &= E((r(\chi) - r(\mathcal{X}_1))\Delta_1). \end{aligned}$$

Puis que le support de la fonction de noyau K est $[0, 1]$, nous avons :

$$|r(\chi) - r(\mathcal{X}_1)| \Delta_1 \leq \sup_{\chi' \in B(\chi, h)} |r(\chi) - r(\chi')| \Delta_1,$$

et l'hypothèse de continuité sur r permet d'obtenir le résultat revendiqué. ■

Lemme 4.

selon les hypothèses(2.2) et (2.4) et (2.3), nous avons :

$$\hat{r}_2(\chi) - E\hat{r}_2(\chi) = O_{p.co.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\varphi_\chi(h)}} \right).$$

Démonstration.

On pose, pour $i = 1, \dots, n$, $K_i = K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_i))$.

La démonstration de ce résultat est basée sur l'utilisation d'une inégalité exponentielle de type Berntein.effectivement,

$$P(|\hat{r}_2(\chi) - E\hat{r}_2(\chi)| > \epsilon) = P\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (Y_i\Delta_i - E(Y_i\Delta_i)) \right| > \epsilon\right),$$

Et nous devons montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ telle que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (Y_i\Delta_i - E(Y_i\Delta_i)) \right| > \epsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{n\varphi_\chi(h)}}\right) < \infty.$$

Donc, nous appliquons l'inégalité exponentielle $Z_i = Y_i\Delta_i - EY_1\Delta_1$.

Pour ce faire, nous devons d'abord montrer :

$$\exists C > 0, \forall m = 2, 3, \dots, |E(Y_1\Delta_1 - EY_1\Delta_1)| \leq C\varphi_\chi(h)^{-m+1}.$$

Tout d'abord, nous prouvons que pour $m \geq 2$:

$$E|Y_1|^m \Delta_1^m = O(\varphi_\chi(h)^{-m+1}). \quad (2.7)$$

Pour cela, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
E |Y_1|^m \Delta_1^m &= \frac{1}{(EK_1)^m} \{E |Y_1|^m K_1^m\}, \\
&= \frac{1}{(EK_1)^m} \{E(E(|EY_1|^m \mathcal{X}) K_1^m)\}, \\
&= \frac{1}{(EK_1)^m} \{E\sigma_m(\mathcal{X}) K_1^m\}, \\
&= \frac{1}{(EK_1)^m} \{E((\sigma_m(\mathcal{X}) - \sigma_m(\chi)) K_1^m) + \sigma_m(\chi) EK_1^m\}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
|E |Y_1|^m \Delta_1^m| &\leq E |\sigma_m(\mathcal{X}) - \sigma_m(\chi)| \Delta_1^m + \sigma_m(\chi) E \Delta_1^m, \\
&\leq \left(\sup_{\chi' \in B(\chi, h)} |\sigma_m(\chi') - \sigma_m(\chi)| \right) E \Delta_1^m + \sigma_m(\chi) E \Delta_1^m.
\end{aligned}$$

Parce que $0 < \int K^m < \infty$, si K est du type I (resp II) puis $K^m / \int K^m$ est également du type I (resp II).

Donc, en appliquant lemme on :

$$C_1 \varphi_\chi(h) \leq EK_1^m \leq C_2 \varphi_\chi(h). \quad (2.8)$$

En utilisant (2.8) et Lemme 1 ou Lemme 2, on peut l'écrire pour $m = 2, 3, \dots$:

$$\frac{C_1}{\varphi_\chi(h)^{m-1}} \leq E \Delta_1^m \leq \frac{C_2}{\varphi_\chi(h)^{m-1}},$$

Ce qui implique que

$$E |Y_1|^m \Delta_1^m = O(\varphi_\chi(h)^{m-1}).$$

De plus, nous avons :

$$(Y_1 \Delta_1 - EY_1 \Delta_1)^m = \sum_{k=0}^m c_{k,m} (Y_1 \Delta_1)^k (EY_1 \Delta_1)^{m-k} (-1)^{m-k},$$

où $c_{k,m} = \frac{m!}{(k!(m-k)!)$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
E |Y_1 \Delta_1 - EY_1 \Delta_1|^m &\leq C \sum_{k=1}^m c_{k,m} E |Y_1 \Delta_1|^k |r(\chi)|^{m-k} \\
&\leq C \max_{k=0,1,\dots,m} E |Y_1 \Delta_1|^k \\
&\leq C \max_{k=0,1,\dots,m} \varphi_\chi(h)^{-k+1}
\end{aligned}$$

La dernière inégalité utilise (2.7) pour $K \geq 2$ alors que pour $K = 1$ on peut montrer que $E|Y_1| \Delta_1 = O(1)$ qu'en suivant les mêmes étapes que celles de la preuve de Lemme 3. Parce que $\varphi_\chi(h)$ tend vers zéro avec n , il devient

$$E|Y_1 \Delta_1 - EY_1 \Delta_1|^m = O((\varphi_\chi(h))^{-m+1}).$$

Ensuite, nous avons $u_n = (a^2 \log n)/n = \log n/(n\varphi_\chi(h))$ avec $a^2 = \varphi_\chi(h)^{-1}$, il est clair que u_n tend vers zéro à n en utilisant l'hypothèse (2.3). ■

Lemme 5.

Selon les hypothèses (2.2) et (2.3), on a :

$$\hat{r}_1(\chi) - 1 = O_{p.co.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\varphi_\chi(h)}} \right).$$

Démonstration.

pour $i = 1, \dots, n$, et $Y_i = 1$ on utilise l'inégalité exponentielle de type Bernstein. donc,

$$P(|\hat{r}_1(\chi) - 1| > \epsilon) = P\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (\Delta_i - E(\Delta_i)) \right| > \epsilon\right),$$

Et nous devons montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ telle que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (\Delta_i - E(\Delta_i)) \right| > \epsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{n\varphi_\chi(h)}}\right) < \infty.$$

Donc, nous appliquons l'inégalité exponentielle $Z_i = \Delta_i - EY_1 \Delta_1$.

Pour ce faire, nous devons d'abord montrer :

$$\exists C > 0, \forall m = 2, 3, \dots, |E(Y_1 \Delta_1 - EY_1 \Delta_1)| \leq C\varphi_\chi(h)^{-m+1}.$$

Tout d'abord, nous prouvons que pour $m \geq 2$:

$$E|Y_1|^m \Delta_1^m = O(\varphi_\chi(h)^{-m+1}). \tag{2.9}$$

Pour cela, nous écrivons :

$$\begin{aligned} E|Y_1|^m \Delta_1^m &= \frac{1}{(EK_1)^m} \{E|Y_1|^m K_1^m\}, \\ &= \frac{1}{(EK_1)^m} \{E(E(|EY_1|^m \mathcal{X}) K_1^m)\}, \\ &= \frac{1}{(EK_1)^m} \{E\sigma_m(\mathcal{X}) K_1^m\}, \\ &= \frac{1}{(EK_1)^m} \{E((\sigma_m(\mathcal{X}) - \sigma_m(\chi)) K_1^m) + \sigma_m(\chi) EK_1^m\}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} |E |Y_1|^m \Delta_1^m| &\leq E |\sigma_m(\mathcal{X}) - \sigma_m(\chi)| \Delta_1^m + \sigma_m(\chi) E \Delta_1^m, \\ &\leq \left(\sup_{\chi' \in B(\chi, h)} |\sigma_m(\chi') - \sigma_m(\chi)| \right) E \Delta_1^m + \sigma_m(\chi) E \Delta_1^m. \end{aligned}$$

Parce que $0 < \int K^m < \infty$, si K est du type I (resp II) puis $K^m / \int K^m$ est également du type I (resp II).

Donc, en appliquant lemme on :

$$C_1 \varphi_\chi(h) \leq EK_1^m \leq C_2 \varphi_\chi(h). \quad (2.10)$$

En utilisant (2.9) et Lemme 1 ou Lemme 2, on peut l'écrire pour $m = 2, 3, \dots$:

$$\frac{C_1}{\varphi_\chi(h)^{m-1}} \leq E \Delta_1^m \leq \frac{C_2}{\varphi_\chi(h)^{m-1}},$$

Ce qui implique que

$$E |Y_1|^m \Delta_1^m = O(\varphi_\chi(h)^{m-1}).$$

De plus, nous avons :

$$(Y_1 \Delta_1 - E Y_1 \Delta_1)^m = \sum_{k=0}^m c_{k,m} (Y_1 \Delta_1)^k (E Y_1 \Delta_1)^{m-k} (-1)^{m-k},$$

où $c_{k,m} = \frac{m!}{(k!(m-k)!)}$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} E |Y_1 \Delta_1 - E Y_1 \Delta_1|^m &\leq C \sum_{k=1}^m c_{k,m} E |Y_1 \Delta_1|^k |r(\chi)|^{m-k} \\ &\leq C \max_{k=0,1,\dots,m} E |Y_1 \Delta_1|^k \\ &\leq C \max_{k=0,1,\dots,m} \varphi_\chi(h)^{-k+1} \end{aligned}$$

La dernière inégalité utilise (2.7) pour $K \geq 2$ alors que pour $K = 1$ on peut montrer que $E |Y_1| \Delta_1 = O(1)$ qu'en suivant les mêmes étape que celles de la preuve de Lemme 3. Parce que $\varphi_\chi(h)$ tend vers zéro avec n , il devient

$$E |Y_1 \Delta_1 - E Y_1 \Delta_1|^m = O((\varphi_\chi(h))^{-m+1}).$$

Ensuite, nous avons $u_n = (a^2 \log n)/n = \log n / (n \varphi_\chi(h))$ avec $a^2 = \varphi_\chi(h)^{-1}$, il est clair que un tend vers zéro à n en utilisant l'hypothèse (2.3). ■

APPLICATION ET EXPLORATION DES OBSERVATIONS SUR DES DONNÉES SIMULÉES

3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous effectuons plusieurs simulations sous programme R, pour illustrer les résultats théoriques établi dans le deuxièmes chapitre précédents concernant l'estimation de la fonction de régression à noyau avec les observations idépendants.

- Dans la premier étape, générer les données fonctionnelles de taille n .
- Dans la deuxième étape, nous calculons l'opérateur de la fonction de régression r .
- Dans les étape trois, nous calculons l'estimateur de régression du noyau fonctionnel \hat{r} .

3.2 GÉNÉRER LES DONNÉES FONCTIONNELLES POUR $n = 100$

3.2.1 Algorithme 1

Dans cette partie, on simule 100 variables puis que \mathcal{X}_i est une matrice, pour chaque i nous avons un vecteur qui présente une variable aléatoire fonctionnelle et w_i vecteur $(\chi_i(t_j))_{i,j=1,\dots,100}$.
 $t \mapsto \cos(w_i + \pi(2t - 1))$ dans $[0,1]$:

$$\mathcal{X}[i, j] = \cos\left(w_i + \pi \left(\frac{2j}{100} - 1\right)\right).$$

On suit les étapes suivantes :

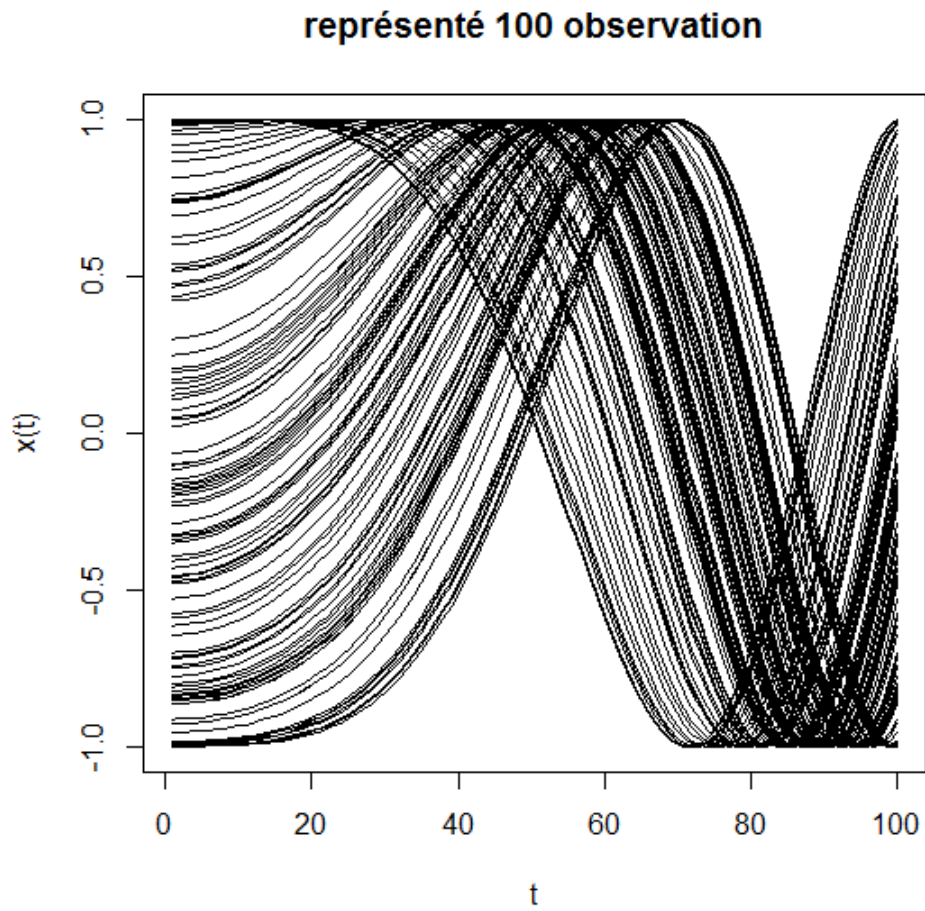
- 1- Générer un échantillon de taille $n = 100$.
- 2- $\mathcal{X}[i, j] = \cos\left(w_i + \pi \left(\frac{2j}{100} - 1\right)\right)$.
- 3- On représente \mathcal{X}_i .

3.2.2 Programme sous R :

```
x<- matrix(nrow=100,ncol=100,byrow=TRUE)
n<- 100
xx<-(1 :100)
w<-runif(100,0,pi) * échantillon de loi uniforme.
for(i in 1 :100){
  for (j in 1 :100){
    x[i, j] <- -cos(w[i] + (2 * (j/100)2 - 1))
  }
}
yy<-x[1, ] *vecteur de premier v.a.f.
plot(xx, yy, type="l", col="black", ylab="x(t)", xlab="t", ylim=c(-1,1), xlim=c(1,100),
main="représenter 100 observations")
for (j in 2 :100){
  lines (xx, x[j, ], col="black")
}
```

3.2.3 Résultats

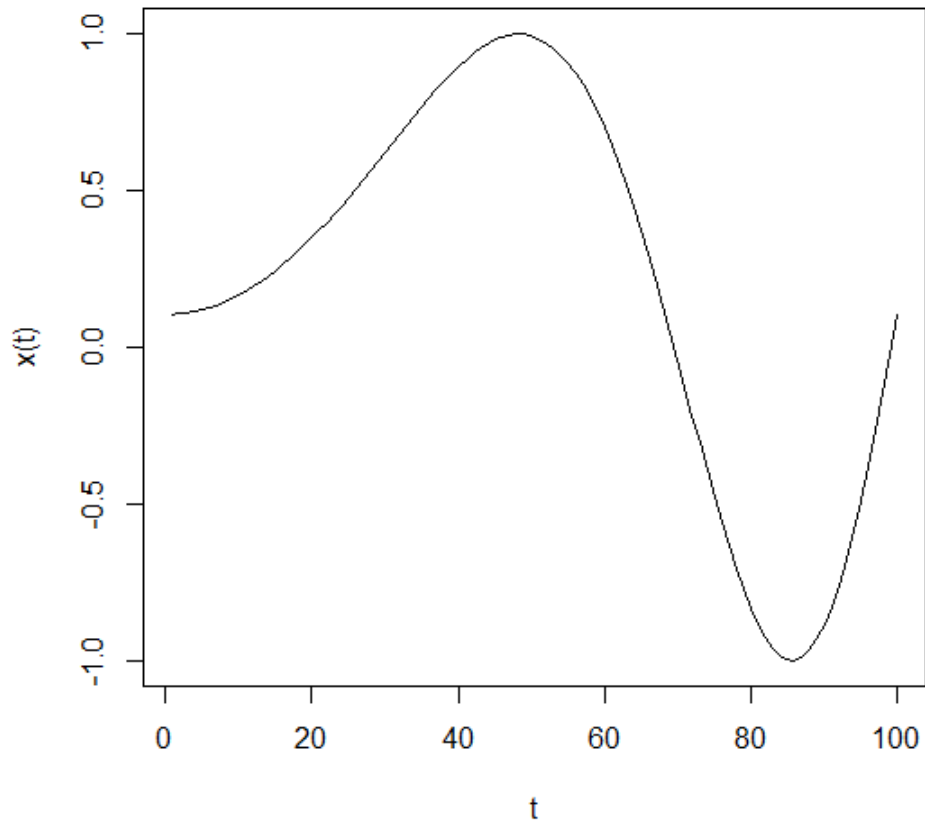
Les courbes \mathcal{X}_i sont observées dans l'intervalle $[0,1]$ et sont représentées sur le graphe suivant :



Courbes de plusieurs v.a.f .

On représente une observation de la graphe suivante :

représente un observation



Courbes de une v.a.f.

3.3 GÉNÉRER LA RÉGRESSION

3.3.1 Algorithme 2

Dans la partie deuxième, on revient à l'utilisation de la fonction de régression dans ce contexte de prévision. Pour cela, on considère un jeu de données assez compliqué pour lequel les observations (\mathcal{X}_i, Y_i) sont liées par le modèle de régression suivant :

$$Y_i = r(\mathcal{X}_i) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- 1- Générer un échantillon de taille n d'une variable normale ($\epsilon = rnorm(n)$).
- 2- Nous choisirons cette fonction pour représenter la régression :

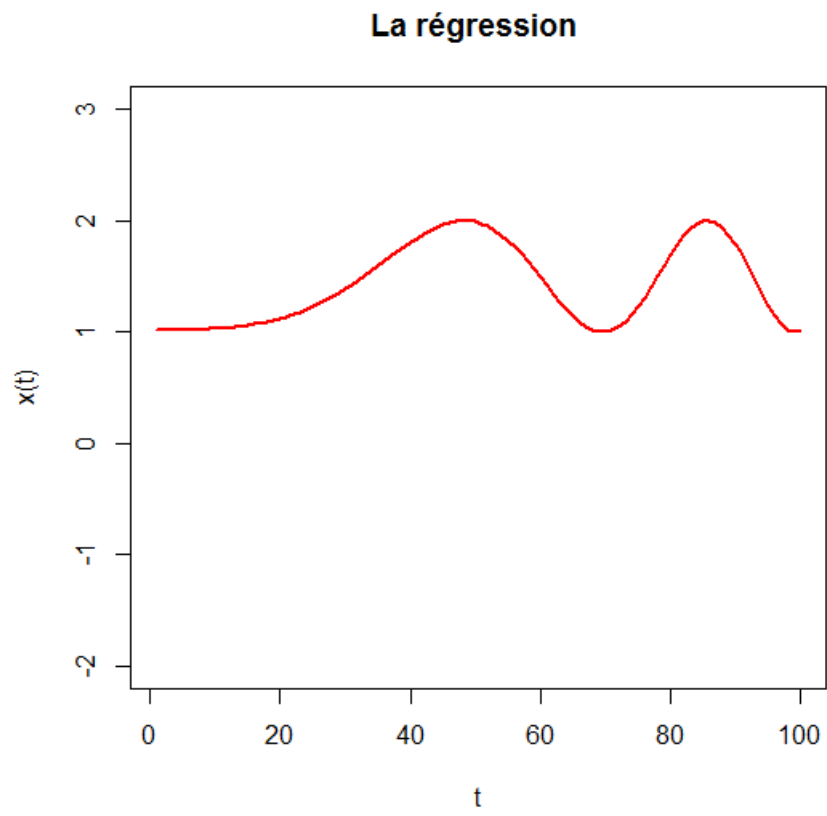
$$r(\chi) = \chi^2 + 1.$$

- 3- On représente r .

3.3.2 Programme dans R :

```
f = function(t){t^2 + 1}
r=f(x[1,])
plot(r,type="l",col="red",lwd="2",xlab="t",ylab="x(t)",ylim=c(-2,3),xlim=c(1,100),main="La
régression ")
```

3.3.3 Résultats



Courbes de la fonction r .

3.4 GÉNÉRER L'ESTIMATEUR DE LA RÉGRESSION

3.4.1 Algorithme 3

1- Nous utilisons un noyau gaussien défini par :

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

2- L'estimateur de régression pour la méthode de noyau défini par :

$$\hat{r}(\chi) = \frac{\sum_{i=1}^n K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_i))Y_i}{\sum_{i=1}^n K(h^{-1}d(\chi, \mathcal{X}_i))},$$

3- Choisi $h = 0,36$.

4- On représente \hat{r}

3.4.2 Programme sous R

```
f = function(t){t^2 + 1}
```

```
k = function(u){1/sqrt(2 * pi) * exp(-(u^2)/2)}
```

```
Y=r+rnorm(100,0,1)
```

```
A=0
```

```
B=0
```

```
for (i in 1 :100){
```

```
s=abs(x[1,]-x[i,])/0.36
```

```
e=Y[i]
```

```
A=A+k(s)
```

```
B=B+k(s)*e
```

```
}
```

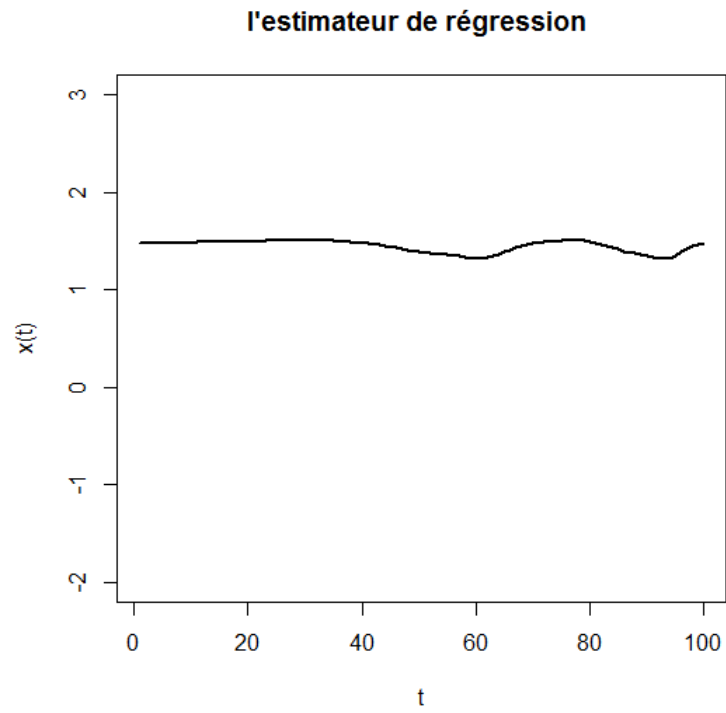
```
R=B/ A
```

```
plot(R,type="l",col="blue",lwd="2",xlab="t",ylab="x(t)",ylim=c(-2,3),xlim=c(1,100),main="l'es  
de régression ")
```

```
lines (R,col="black",lwd="2")
```

3.4.3 Résultats

La représentées le graphe de l'estimateur de la régression :



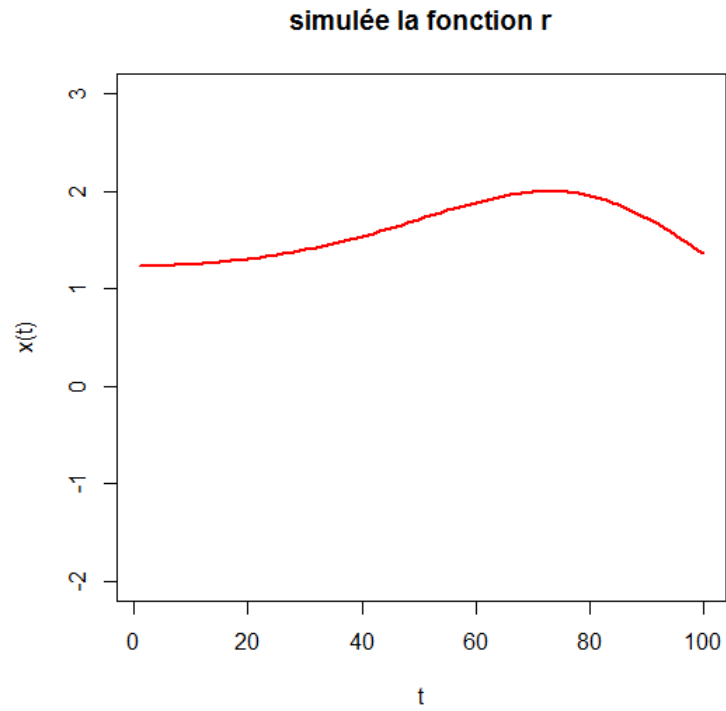
Courbes de l'estimateur de r.

Commentaires

Les deux courbes sont proches, donc les approximations sont bonnes.

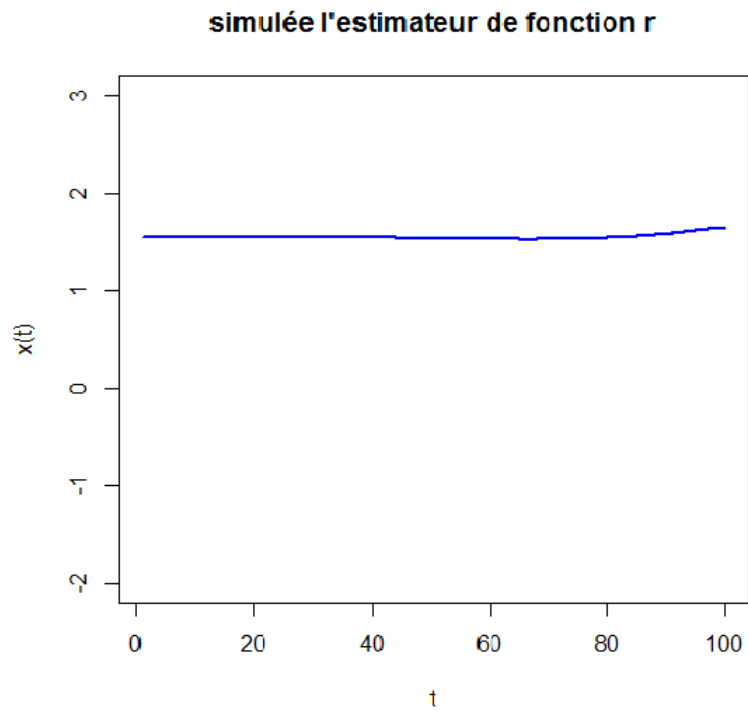
3.5 GÉNÉRER LES DONNÉES POUR N=1000

3.5.1 résultats de simulé la régression pour $h=0.36$



Courbes de la fonction r.

3.5.2 résultats de simulé de l'estimateur de la régression

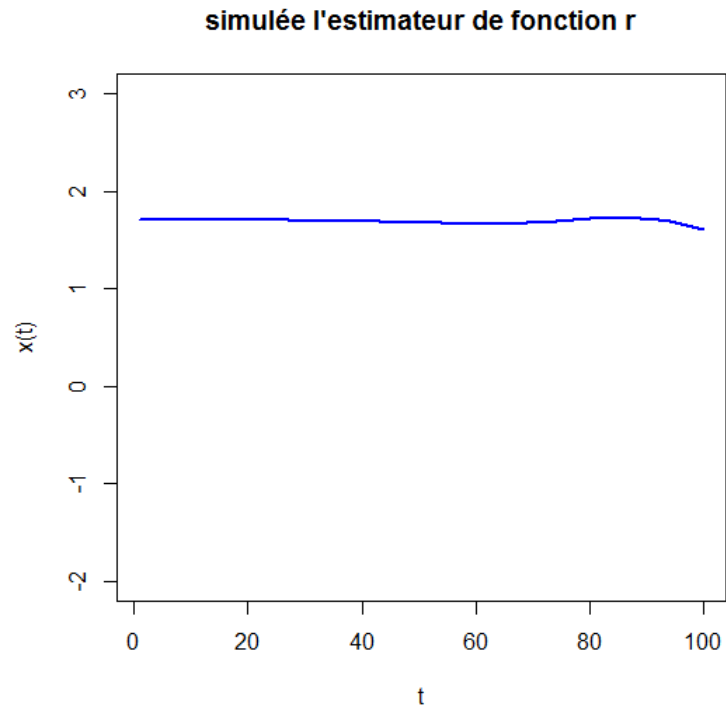


Courbes de l'estimateurs de la fonction r.

Commentaires

Les deux courbes ne pas sont proches, donc les approximations ne pas bonnes.

3.5.3 résultats de simulé de l'estimateur de la régression pour $h=0.30$



Courbes de l'estimateurs de la fonction r.

Commentaires

Après les résultats des simulations, nous avons obtenu les deux courbes sont proches, donc les approximations sont bonnes.

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons présenté d'une part des outils mathématique existants dans la littérature et qui sont en particulier nécessaire pour la résolutions du problème posé par cette dimension infinie.

Les vitesse de convergence sont aussi déterminées une application pratique est réalisé pour cela nous avons effectué une simulation pour l'estimateur dans le cadre indépendant. Les resultat de simulation ont validé les resultats obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.Ramsay and B.W.Silverman, Functional Data Analysis. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [2] Frédéric Ferraty et philippe Vieu. Non Parametric Functional Data Analysis.Springer Series in statistics, 2006.
- [3] Ferraty et Vieu. Locally modelled regression and functional data.Barrientos-Marin, 2010.
- [4] Biau, G., Cedre, B.(2004). Nonparametric Spatial Prediction. J. Statistical Inference for Stochastic Processes.
- [5] Carbon, M., Francq, C., Sarda, P. (2007). Kernel regression estimation for random fields. J. Statist. Plann. Inference.
- [6] BENHENNI, K., FERRATY, F., RACHDI, M., VIEU, P. (2007). Locally smoothing regression with functional data. Computational. Statistics. 22, 353-370.
- [7] BOSQ, D., LECOUTRE, J. P. (1987). Théorie de l'estimation fonctionnelle. ECONOMICA, Paris.

- [8] FERRATY, F., RABHI, A., VIEU, P. (2008). Estimation non paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Rom. J. Pure et Applied Math.* 52, 1-18.
- [9] NADARAYA, E. (1964). On estimating regression. *Theory Prob-App.* 10, 186-196.
- [10] RAMSAY, J. O., SILVERMAN, B. W. (1997). *functional data analysis*. Springer, New York.
- [11] ROSENBLATT, M. (1969). Conditional probability density and regression estimators. In *Multivariate Analysis II*, Ed. P. R. Krishnaiah. Academic press, New York and London.
- [12] Burba, F., Ferraty, F., Vieu, P. (2008). Convergence de l'estimateur à noyau des k plus proches voisins en régression fonctionnelle non paramétrique. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 346, 339-342.
- [13] Collomb, G. (1983). *Méthodes non paramétriques en régression, analyse de séries temporelles, prédiction et discrimination*. Doctorat d'état, Toulouse.
- [14] Gut, A. (1993). Complete Convergence And Ces Summation For I.I.D. Random variables. *probab. Th. Rel.fields* 97 169-178.
- [15] Delsol, L. (2007). Régression non paramétrique fonctionnelle : expression asymptotique des moments, *Ann. I.S.U.P.* Vol LI, 3, 43-67.
- [16] Laksaci, A., Madani, F., Rachdi, M.(2010). Kernel conditional density estimation when the regressor is valued in a semi metric space. *International Statistical Review*. (In press).
- [17] Szynal, D. (1972). on Almost Complete Convergence For The Sum Of A Random Number Of Independent Random Variables. *bull. Acad. Sci. Polon. Ser. Math. Astronom. Phys.* 20 571-574.