



UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la  
matière



DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilité et Statistique

Par : ZIAD Ines

Thème

Marche aléatoire sur quelques classes de graphes

Soutenue publiquement le : 30/05/2017

Devant le jury composé de :

BAHEDDI Aissa	Professeur. UKMOuargla	Président
MEDDI Fatima	M.C.B. UKMOuargla	Examineur
BOUANANE Khadra	M.C.B. UKMOuargla	Rapporteur

---

## Remerciements

---

Je tiens tout d'abord à remercier **Allah** le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur Mme **Bouanane Khadra**, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années d'études.

Ma famille et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

\*\*\*\*\*

---

## Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>1 Théorie des graphes</b>	<b>9</b>
1.1 Notions de graphe . . . . .	9
1.2 Sous-graphe et graphe partiel . . . . .	13
1.3 Quelques types de graphes . . . . .	13
1.4 Graphe complémentaire, biparti complémentaire . . . . .	16
1.5 Couplage, stable et clique . . . . .	16
1.6 Distance . . . . .	16
1.7 Somme cartésienne . . . . .	16
1.8 Quelques graphes particuliers . . . . .	17
<b>2 Chaînes de Markov</b>	<b>20</b>
2.1 Introduction . . . . .	20
2.2 Quelques généralités sur les processus stochastiques . . . . .	20
2.3 Chaînes de Markov . . . . .	22
2.4 Marches aléatoires . . . . .	30
<b>3 Marches aléatoires sur un graphe</b>	<b>36</b>
3.1 Introduction . . . . .	36
3.2 Notions de base . . . . .	36
3.3 Marche aléatoire sur l'arbre . . . . .	42
3.4 Marche aléatoire sur l'hypercube . . . . .	48
<b>Conclusion générale</b>	<b>55</b>

TABLE DES MATIÈRES	4
--------------------	---

---

Bibliographie	56
---------------	----

---

## Table des figures

---

1.1	Un graphe non orienté. . . . .	9
1.2	Matrice d'adjacence du graphe de la figure 1.1. . . . .	10
1.3	Matrice d'incidence $M$ du graphe $G$ . . . . .	11
1.4	Graphe é $\Delta(G) = 5$ et $\delta(G) = 3$ . . . . .	12
1.5	Sous-graphe et graphe partiel de $G$ . . . . .	14
1.6	Graphe complet $k_6$ . . . . .	14
1.7	Graphe biparti complet $K_{2,3}$ . . . . .	15
1.8	Graphe planaire topologique (une carte). . . . .	15
1.9	$W = \{v_3\}$ est un séparateur minimal dans $G$ . . . . .	16
1.10	Arbre. . . . .	17
1.11	Fôret. . . . .	17
1.12	Un arbre couvrant. . . . .	18
1.13	$Q_3 = Q_1 \square Q_2$ et $Q_4 = Q_1 \square Q_3$ . . . . .	18
1.14	Décomposition de $Q_3$ en un cycle hamiltonien et un couplage parfait. . . . .	19
2.1	Chaîne de Markov de 7 états. . . . .	27
2.2	Le début de la trajectoire associée à une réalisation d'une marche aléatoire simple partant de $a$ . [17] . . . . .	31
2.3	Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ . [4] . . . . .	33
2.4	Les 1000 premiers pas d'une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^2$ partant du point rouge. [17] . . . . .	35
3.1	Exemple d'une marche aléatoire sur un graphe. . . . .	37
3.2	$T(x, y)$ et $T(y, x)$ dans l'arbre $T$ . . . . .	43
3.3	Une décomposition $u$ -centrée de $T$ . . . . .	44

---

3.4	L'araignée $S(x)$ est induite par $x$ . . . . .	45
3.5	Absorbabilité ajustée de $x$ . . . . .	46
3.6	$A = (0, 0, 0, 0)$ , $b = (0, 0, 0, 1)$ et $x = (1, 1, 1, 0)$ . [19] . . . . .	50
3.7	Exemple de marche aléatoire sur l'hypercube . . . . .	52

---

## Introduction générale

---

Étant donné un graphe et un sommet de départ, nous sélectionnons un voisin au hasard, et nous passons à ce voisin ; ensuite nous sélectionnons un voisin de ce point au hasard, et nous y passons, etc. La séquence (aléatoire) des points sélectionnés de cette façon est une marche aléatoire sur un graphe.

En mathématiques, en économie, et en physique théorique, une marche aléatoire est un modèle mathématique d'un système possédant une dynamique discrète composée d'une succession de pas aléatoires, ou effectués " au hasard ". On emploie également fréquemment les expressions : marche aléatoire, promenade aléatoire ou random walk en anglais. Ces pas aléatoires sont de plus, totalement décorrélés les uns des autres ; cette dernière propriété, fondamentale, est appelée caractère markovien du processus, du nom du mathématicien Markov. Elle signifie intuitivement qu'à chaque instant, le futur du système dépend de son état présent, mais pas de son passé, même le plus proche. Autrement dit, le système " perd la mémoire " à mesure qu'il évolue dans le temps. Pour cette raison, une marche aléatoire est parfois aussi appelée " marche de l'ivrogne ".

Les marches aléatoires sur les graphes et les chaînes de Markov avec un nombre fini d'états ont été étudiées depuis plus de 90 ans, mais leur étude n'a vraiment évolué qu'au cours des dernières décennies.

Une marche aléatoire sur un graphe est précisément ce que dit son nom : une marche  $X_0X_1\dots$  obtenue d'une certaine manière aléatoire. Dans sa forme la plus simple, cela dépend uniquement du graphe et rien d'autre. En commençant une promenade simple à  $X_0$ , son prochain sommet,  $X_1$ , est choisi au hasard parmi les voisins de  $X_0$ , alors  $X_2$  est un voisin aléatoire de  $X_1$ , et ainsi de suite. En fait, la simple marche aléatoire sur un graphe n'est qu'un peu moins générale qu'une chaîne réversible de Markov finie : attacher des poids aux arêtes et permettre des boucles, chaque chaîne de Markov finie peut être obtenue de cette manière. Suite à la notation habituelle pour les chaînes de Markov, au lieu de  $X_0X_1\dots$ , nous écrivons  $X_0X_1\dots$  pour une marche aléatoire.

À première vue, les mouvements aléatoires sur les graphes semblent être des chaînes de Markov finies plutôt spéciales, mais ce n'est pas le cas : les chaînes de Markov finies ne sont que des balises aléatoires sur des graphes orientés pondérés, avec des boucles autorisées. Compte-tenu de cela, il n'est pas surprenant que les allures aléatoires sur les graphes soient d'une grande importance.

Les marches aléatoires sur les graphes ont un grand intérêt dans plusieurs domaines mathématiques. L'objectif de ce travail est de présenter quelques résultats théoriques sur la marche aléatoire sur les graphes et plus particulièrement sur les arbres et l'hypercube. Notre manuscrit est alors divisé en trois parties capitales :

1. 1<sup>ère</sup> partie : *Théorie des graphes*. Dans cette partie, nous présenterons les définitions générales relatives aux graphes ainsi que quelques graphes particuliers.
2. 2<sup>ème</sup> partie : *Chaînes de Markov*. Dans cette partie nous introduirons quelques généralités sur les processus stochastiques. Nous nous intéresserons de manière particulière aux chaînes de Markov et à leurs propriétés avant de présenter la marche aléatoire.
3. 3<sup>ème</sup> partie : *Marche aléatoire sur un graphe*. Cette partie est consacrée à l'étude de la marche aléatoire sur quelques graphes particuliers tels que les arbres et l'hypercube.



# Chapitre 1

---

## Théorie des graphes

---

Dans ce chapitre, nous utilisons les notations et définitions données dans [2, 13] afin d'introduire quelques concepts de la théorie des graphes qui sont nécessaires à la bonne compréhension de ce manuscrit.

### 1.1 Notions de graphe

Un *graphe  $G$  non orienté* est défini par deux ensembles disjoints notés  $V(G)$  et  $E(G)$  ( $V$  et  $E$  s'il n'y a pas confusion) où  $E$  est constitué de paires (non ordonnées) de  $V$ .

Les éléments de  $V$  et  $E$  sont appelés *sommets* et *arêtes* de  $G$ . On appelle alors  $|V| = n$  et  $|E| = m$ , *l'ordre* et la *taille* du graphe  $G$  respectivement.

On notera par  $uv$  au lieu de  $\{u, v\}$  une arête de  $E$ . Dans ce cas, les sommets  $u$  et  $v$  constituent les *extrémités* de l'arête  $uv$ .

Une *boucle* est une arête de type  $uu$ . On appelle *arêtes multiples* des arêtes qui relient les mêmes sommets  $u$  et  $v$ . Un graphe  $G$  est dit *simple* s'il ne contient ni boucles ni arêtes multiples. Dans le cas contraire, le graphe  $G$  est appelé *multigraphe*.

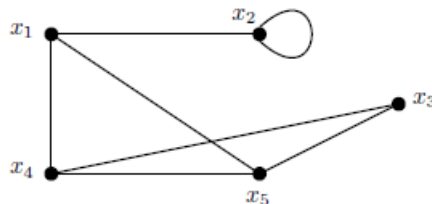


FIGURE 1.1 – Un graphe non orienté.

### 1.1.1 Adjacence et incidence

Deux sommets  $u$  et  $v$  sont *adjacents* s'il existe une arête qui les relie. De même, deux arêtes sont *adjacentes* si elles ont exactement une extrémité en commun. On dira qu'un sommet est *incident* à une arête ou une arête est *incidente* à un sommet, s'il constitue une de ses extrémités.

**Matrice d'adjacence.** On peut représenter un graphe par une *matrice d'adjacence*, notée  $A$ , qui est une matrice de dimension  $(n \times n)$ , où chaque élément  $A_{ij}$  désigne le nombre d'arêtes reliant les sommets  $i$  et  $j$ .

$$\sum_i A_{ij} = \sum_i A_{ji} = d(j)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

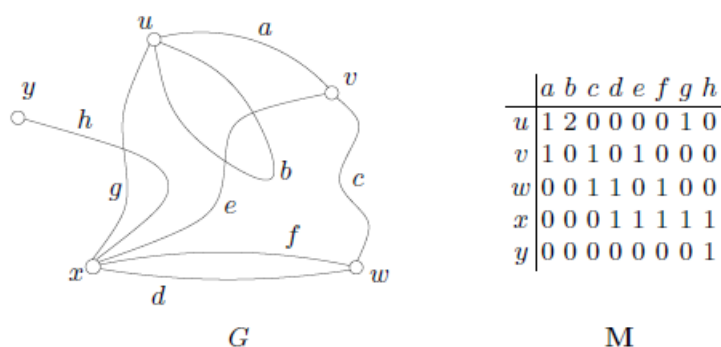
FIGURE 1.2 – Matrice d'adjacence du graphe de la figure 1.1.

**Matrice d'incidence.** À tout graphe non orienté  $G = (V, E)$ , on peut associer une matrice  $M$  de  $n$  lignes et  $m$  colonnes. où  $n$  est le nombre de sommets dans  $G$  et  $m$  est le nombre d'arêtes dans  $G$ .

$M_{ij}$  représente le nombre de fois où le sommet  $i$  est incident à l'arête  $j$ . Les éléments de  $M$  sont dans  $\{0, 1, 2\}$ .

Si deux colonnes  $j_1$  et  $j_2$  sont identiques alors les arêtes  $j_1$  et  $j_2$  sont parallèles.

Si un élément  $M_{ij} = 2$  alors l'arête  $j$  est une boucle.

FIGURE 1.3 – Matrice d'incidence  $M$  du graphe  $G$ .

### 1.1.2 Degré d'un sommet

Le *degré d'un sommet*  $v$  dans un graphe  $G$ , noté  $d_G(v)$ , est le nombre d'arêtes de  $G$  incidentes à  $v$ , chaque boucle comptant comme deux arêtes. En particulier, si  $G$  est un graphe simple,  $d_G(v)$  est le nombre de voisins de  $v$  dans  $G$ . Un sommet est dit *isolé*, si son degré est égal à 0. Il est dit *pendant* si son degré vaut 1. On désigne par  $\delta(G)$  et  $\Delta(G)$  les degrés minimum et maximum des sommets de  $G$ , et par  $d(G)$  leur degré moyen :

$$\delta(G) = \min \{d(v), v \in V\}$$

$$\Delta(G) = \max \{d(v), v \in V\}$$

$$d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v)$$

#### Exemple 1 .

Le graphe de la Figure 1.4 ci-dessous, est de degré maximum  $\Delta(G) = 5$ , de degré minimum  $\delta(G) = 3$ , son degré moyen est égal à  $10/3$ .

Le théorème suivant établit une relation fondamentale entre les degrés des sommets d'un graphe et son nombre d'arêtes.

#### Théorème 1.1.1 .

Pour tout graphe  $G$ ,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

*Preuve.*

Considérons la matrice d'incidence  $M$  de  $G$ . La somme des entrées dans la ligne correspondant

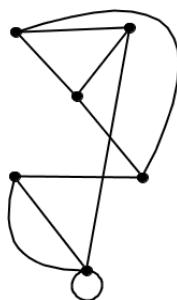


FIGURE 1.4 – Graphe é  $\Delta(G) = 5$  et  $\delta(G) = 3$ .

au sommet  $v$  est exactement  $d(v)$ . Par conséquent,  $\sum_{v \in V} d(v)$  est la somme de toutes les entrées de  $M$ . Mais cette somme vaut également  $2m$ , car la somme des entrées de chacune des  $m$  colonnes de  $M$  vaut 2, une arête ayant deux extrémités.  $\square$

### 1.1.3 Voisins et voisins communs

On appelle *ensemble de voisins* du sommet  $u$ , noté  $N_G(u)$  ( $N(u)$  s'il n'y a pas confusion), l'ensemble de tous les sommets différents de  $u$  qui lui sont adjacents. Si  $G$  est simple alors  $|N(u)| = d_G(u) \leq n - 1$ .

On appelle *ensemble de voisins communs* du sous-ensemble de sommets  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ , noté  $N_G(S)$  ou  $N(S)$  (s'il n'y a pas confusion), l'ensemble de sommets qui sont voisins communs à tous les sommets de l'ensemble  $S$ .

Autrement dit,  $N(S) = N(u_1) \cap N(u_2) \cap \dots \cap N(u_k)$ .

### 1.1.4 Chaînes et cycles

Une *chaîne* entre deux sommets  $u$  et  $v$  de longueur  $p$  est une séquence de  $p$  sommets  $u_1, u_2, \dots, u_p$ , tels que deux sommets consécutifs sont adjacents, avec  $u = u_0$  et  $v = u_p$ .

Une chaîne est dite *élémentaire*, si elle ne passe pas deux fois par un même sommet, elle est dite *simple* si elle n'utilise pas deux fois une même arête.

Une chaîne dont les extrémités sont confondues est appelée *cycle*.

Une chaîne (resp. cycle) qui passe par tous les sommets de  $V$  une seule fois, est appelée *chaîne hamiltonienne* (resp. cycle hamiltonien).

$G$  est dit graphe hamiltonien s'il contient un cycle hamiltonien.

### 1.1.5 Connexité

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *connexe* si chaque paire de ses sommets est reliée par une chaîne.

Pour un graphe quelconque, il est facile de remarquer que la relation binaire  $R$  définie sur  $V \times V$  par :  $uRv \iff u = v$  ou il existe une chaîne entre  $u$  et  $v$ , est une relation d'équivalence. Les sous-graphes de  $G$  induits par les classes d'équivalence de cette relation sont appelés *composantes connexes* de  $G$ . Autrement dit, un graphe est connexe s'il possède une seule classe d'équivalence.

### 1.1.6 Connectivité

Un graphe  $G$  est dit, *k-connexe* (resp. *k-arête connexe*) si la suppression de moins de  $k$  sommets (resp. arêtes) ne déconnecte pas  $G$ .

On appelle alors *connectivité* (resp. *arête-connectivité*) d'un graphe connexe  $G$ , notée  $\kappa(G)$  (resp.  $\lambda(G)$ ), le plus petit nombre de sommets (resp. d'arêtes) dont la suppression déconnecte le graphe  $G$ .

Rappelons l'inégalité de Whitney [20] reliant la connectivité, l'arête-connectivité et le degré minimum d'un graphe  $G$  donné.

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Un *ensemble d'articulation minimum* est alors, le plus petit ensemble de sommets qu'on doit supprimer pour déconnecter le graphe  $G$ .

## 1.2 Sous-graphe et graphe partiel

Soient  $G = (V, E)$  et  $H = (W, F)$  deux graphes. On dira que  $H$  est un *sous-graphe* de  $G$ , si  $W \subset V$  et  $F \subset E$ .

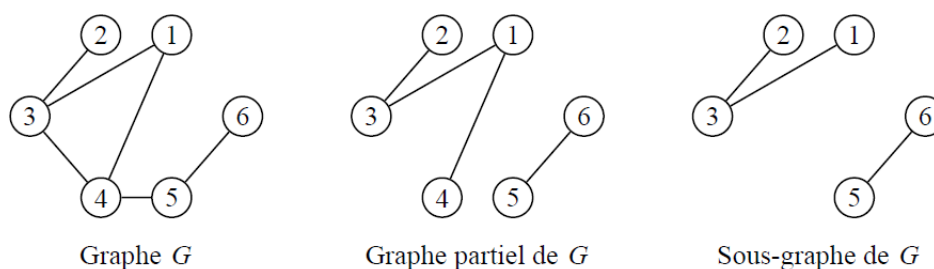
Si  $H$  est un sous-graphe de  $G$  tel que  $F$  est constitué de toutes les arêtes de  $G$  reliant les sommets de  $W$ , alors  $H$  est appelé *sous-graphe induit par l'ensemble de sommets  $W$* .

On dira que  $H$  est un *graphe partiel* de  $G$  si  $W = V$ .

## 1.3 Quelques types de graphes

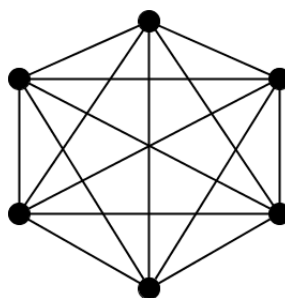
### 1.3.1 Graphe régulier

Un graphe est *régulier* si tous ses sommets ont le même degré, c'est-à-dire  $\delta(G) = \Delta(G) = k$ , on dit alors que le graphe est régulier de degré  $k$  ou *k-régulier*.

FIGURE 1.5 – Sous-graphe et graphe partiel de  $G$ .

### 1.3.2 Graphe complet

Un graphe *complet* d'ordre  $n$ , noté  $K_n$ , est un graphe simple tel que chaque paire de sommets sont adjacents. Autrement dit, on a  $d_G(u) = n - 1$  pour tout sommet  $u \in V$ .

FIGURE 1.6 – Graphe complet  $k_6$ .

### 1.3.3 Graphe biparti

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *biparti*, si  $V$  admet une partition en deux sous-ensembles  $V_1$  et  $V_2$ , tels que chaque arête de  $E$  a une extrémité dans  $V_1$  et une extrémité dans  $V_2$ .

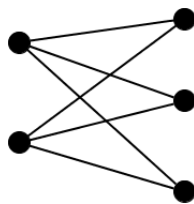
Un graphe *biparti complet* noté  $K_{p,q}$ , est un graphe biparti où chaque sommet de  $V_1$  est adjacent à chaque sommet de  $V_2$ .

#### Théorème 1.3.1 .

*Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.*

### 1.3.4 Graphe planaire

On dit qu'un graphe est *planaire* si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas. Rappelons que les arêtes ne sont pas forcément rectilignes. Une *carte*, ou

FIGURE 1.7 – Graphe biparti complet  $K_{2,3}$ .

*graphe planaire topologique*, est une représentation particulière d'un multigraphe planaire fini.

On dit qu'une carte est connexe si son graphe l'est. Une carte divise le plan en plusieurs régions.

Le degré d'une région  $r$ , noté  $d(r)$ , est la longueur de la chaîne fermée minimum passant par tous les sommets qui délimitent cette région.

Par exemple, la carte ci-dessous, avec sept sommets et neuf arêtes, divise le plan en quatre régions ( $A, B, C, D$ ). Trois régions sont limitées alors que la quatrième ( $D$ ), extérieure au diagramme, ne l'est pas.

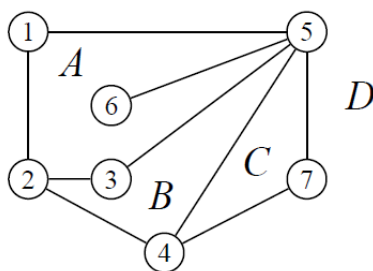


FIGURE 1.8 – Graphe planaire topologique (une carte).

### 1.3.5 Graphe triangulé

Un graphe est *triangulé* si tous ses cycles de plus de 3 sommets contiennent au moins une *corde* (arête reliant deux sommets non adjacents d'un cycle).

Un *séparateur* est un sous-ensemble  $W$  de sommets dans un graphe connexe  $G = (V, E)$  tel que le graphe  $G[V - W]$  est non connexe. Dans le graphe de la Figure 1.9,  $W = \{v_1, v_4\}$  est un séparateur,  $W = \{v_3\}$  est un séparateur minimal.

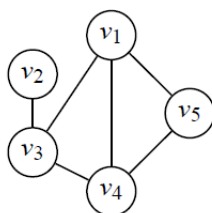


FIGURE 1.9 –  $W = \{v_3\}$  est un séparateur minimal dans  $G$ .

## 1.4 Graphe complémentaire, biparti complémentaire

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Le *graphe complémentaire* de  $G$ , est le graphe simple  $\overline{G} = (V, \overline{E})$ , avec  $\overline{E} = \{e \mid e \notin E\}$ .

Soit  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  un graphe biparti. Le *graphe biparti complémentaire* de  $G$ , noté  $\overline{G}_B$ , est un graphe biparti tel que pour tout couple de sommets  $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ ,  $v_1$  et  $v_2$  sont non adjacents dans  $G$  si et seulement s'ils sont adjacents dans  $\overline{G}_B$ .

## 1.5 Couplage, stable et clique

Dans un graphe  $G = (V, E)$ , un *couplage* noté  $M$ , est un sous-ensemble d'arêtes qui sont deux à deux non adjacentes. Chaque sommet  $u$  incident à une arête de  $M$  est dit *saturé* par  $M$ . Un couplage qui sature tous les sommets de  $G$  est appelé *couplage parfait*.

Un *stable* (resp. *clique*) de  $G$  est un sous-ensemble de sommets qui sont deux à deux non adjacents (resp. adjacents).

## 1.6 Distance

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et connexe et soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $G$ .

1. On appelle *distance* entre  $u$  et  $v$ , notée  $d_G(u, v)$  (ou  $d(u, v)$  s'il n'y a aucune confusion), la longueur d'une plus courte chaîne (en nombre d'arêtes) reliant les sommets  $u$  et  $v$ .
2. On appelle *diamètre du graphe* la plus grande distance entre une paire de sommets du graphe.

## 1.7 Somme cartésienne

Soient  $G = (V(G), E(G))$  et  $H = (V(H), E(H))$  deux graphes. On appelle *somme cartésienne* des graphes  $G$  et  $H$ , le graphe noté  $G \square H$  dont l'ensemble de sommets est égal à



$V(G) \times V(H)$ , où  $(u, \acute{u})$  est adjacent à  $(v, \acute{v})$  si et seulement si, soit  $u = v$  et  $\acute{u}\acute{v} \in E(H)$ , soit  $\acute{u} = \acute{v}$  et  $uv \in E(G)$ .

Le graphe  $G \square H$  somme cartésienne des deux graphes  $G = (V(G), E(G))$  et  $H = (V(H), E(H))$ , possède les propriétés suivantes :

- l'ordre du graphe  $G \square H$  est égal à  $|V(G)| |V(H)|$  ;
- la taille du graphe  $G \square H$  est égale à  $|V(G)| |V(H)| + |V(H)| |V(G)|$  ;
- $d_{G \square H}(u, \acute{u}) = d_G(u) + d_H(\acute{u})$  ;
- $D(G \square H) = D(G) + D(H)$ .

## 1.8 Quelques graphes particuliers

### 1.8.1 Arbres

Un *arbre*  $T$  est un graphe connexe et sans cycles. Un graphe sans cycle mais non connexe est appelé *une forêt*.

Un *point final* de  $T$  ou une *feuille* ou *sommet pendant* est un sommet de degré 1.

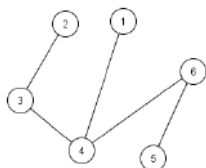


FIGURE 1.10 – Arbre.

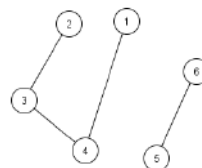


FIGURE 1.11 – Forêt.

#### Théorème 1.8.1 .

Pour tout graphe  $G$  à  $n$  sommets. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $G$  est un arbre,
2.  $G$  est sans cycle et connexe,
3.  $G$  est sans cycle et comporte  $n - 1$  arêtes,
4.  $G$  est connexe et comporte  $n - 1$  arêtes,
5. chaque paire  $u, v$  de sommets distincts est reliée par une seule chaîne simple (et le graphe est sans boucles).

### 1.8.1.1 Arbres couvrants

Un *arbre couvrant* est un graphe partiel qui est aussi un arbre.



FIGURE 1.12 – Un arbre couvrant.

### 1.8.2 Graphe de l'hypercube

L'*hypercube* de dimension  $d$  noté  $Q_d$ , est le graphe dont l'ensemble de sommets est formé des  $d$ -uplets binaires, et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent exactement en une seule coordonnée.

Notons que  $Q_0 = K_1$  et  $Q_1 = K_2$ , et on peut facilement voir que l'hypercube vérifie les relations suivantes :

$$Q_d = Q_{d-1} \square K_2.$$

$$Q_d = \underbrace{K_2 \square K_2 \dots \square K_2}_{d \text{ fois}} \text{ pour } d \geq 1.$$

$$Q_d = Q_m \square Q_r \text{ avec } m + r = d.$$

La Figure 1.13 montre les hypercubes de dimension 1,2,3 et 4 respectivement.

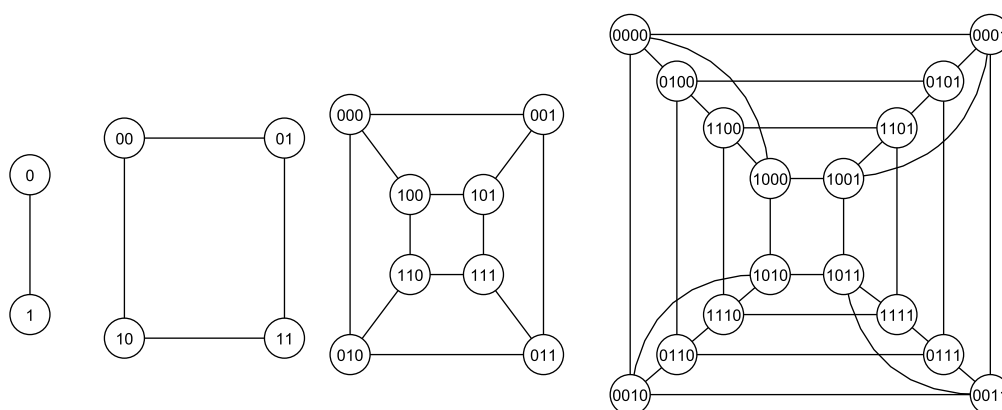


FIGURE 1.13 –  $Q_3 = Q_1 \square Q_2$  et  $Q_4 = Q_1 \square Q_3$

### 1.8.2.1 Propriétés de l'hypercube

1. L'hypercube  $Q_d$  est un graphe biparti  $d$ -régulier dont l'ordre est égal à  $2^d$  et la taille est égale à  $d2^{d-1}$ .
2. Il est aussi facile de vérifier que son rayon est égal à son diamètre et sont égaux à  $d$ .
3. La connectivité  $\kappa(Q_d)$  et l'arête-connectivité  $\lambda(Q_d)$  sont toutes deux égales à  $d$ .
4.  $Q_d$  est hamiltonien. De plus, il est décomposable en  $k$  cycles hamiltoniens si  $d = 2k$  et en  $k$  cycles hamiltoniens et un couplage parfait si  $d = 2k + 1$  [10]. La Figure 1.14 met en évidence une telle décomposition de  $Q_3$ .
5. Tout couplage parfait dans un hypercube peut être étendu à un cycle hamiltonien.

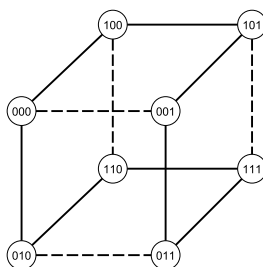


FIGURE 1.14 – Décomposition de  $Q_3$  en un cycle hamiltonien et un couplage parfait.

## Chapitre 2

---

### Chaînes de Markov

---

#### 2.1 Introduction

En mathématiques, une chaîne de Markov est, selon les auteurs, un processus de Markov à temps discret, ou bien un processus de Markov à temps discret et à espace d'états discret. Un processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov : de manière simplifiée, la prédiction du futur, sachant le présent, n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information supplémentaires concernant le passé ; toute l'information utile pour la prédiction du futur est contenue dans l'état présent du processus. Les processus de Markov portent le nom de leur découvreur, Andreï Markov.

Les marches aléatoires forment une classe très importante de processus stochastiques, avec de multiples connexions avec d'autres sujets en théorie des probabilités, mais également en analyse, en algèbre, etc.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions et propriétés élémentaires des chaînes de Markov et des marches aléatoires, en nous concentrant principalement sur le cas des marches aléatoires simples.

#### 2.2 Quelques généralités sur les processus stochastiques

Un processus stochastique est une collection  $(X_t)_{t \in T}$  de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble  $E$  et indexée par les éléments d'un ensemble  $T \subset \mathbb{R}$ . Dans cette section, nous allons brièvement décrire comment un tel processus est construit, dans le cas où  $T = \mathbb{Z}$  (processus en temps discret) et  $E$  est un ensemble au plus dénombrable. On suppose données les lois fini-dimensionnelles du processus, c'est-à-dire les fonctions de masse conjointes  $f_n$  des variables

aléatoires  $X_0, \dots, X_n$ , pour tout  $n \geq 0$ . Evidemment, ces fonctions doivent être consistantes, dans le sens que

$$\sum_{x \in E} f_{n+1}(x_0, \dots, x_n, x) = f_n(x_0, \dots, x_n)$$

Notre but est de construire un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et une collection de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 0}$  sur cet espace, à valeurs dans  $E$  et telle que

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = f_n(x_0, \dots, x_n) \text{ pour tout } n \geq 0$$

**Définition 2.2.1.** L'univers  $\Omega = E^{\mathbb{N}}$  est formé de toutes les trajectoires possibles  $\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  du processus.

**Définition 2.2.2.** Les variables aléatoires  $X_n : \Omega \rightarrow E, n \in \mathbb{N}$ , sont définies par

$$\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto X_n(\omega) = x_n$$

**Définition 2.2.3.** On introduit la tribu  $\mathcal{F}_n$  des événements antérieurs au temps  $n$  : celle-ci est engendrée par les ensembles

$$[x_0, \dots, x_n] \equiv \{\omega \in \Omega : X_0(\omega) = x_0, X_1(\omega) = x_1, \dots, X_n(\omega) = x_n\}$$

décrivant les  $n$  premiers pas de la trajectoires. On appelle *cylindres* les éléments de  $\mathcal{F}_n$  de la forme

$$\{\omega \in \Omega : X_0(\omega) \in A_0, X_1(\omega) \in A_1, \dots, X_n(\omega) \in A_n\} = \bigcup_{\substack{x_0 \in A_0 \\ \vdots \\ x_n \in A_n}} [x_0, \dots, x_n]$$

où  $A_0, A_1, \dots, A_n \subset E$ .

Manifestement,  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$  (on dit que  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  est une filtration), ce qui permet de conclure que  $\cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$  est une algèbre. La tribu associée au processus stochastique est alors

$$\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n\right)$$

**Définition 2.2.4.** On introduit à présent une mesure de probabilité sur  $\mathcal{F}_n$  en posant

$$\mathbb{P}_n([x_0, \dots, x_n]) = f_n(x_0, \dots, x_n)$$

Les mesures  $\mathbb{P}_n$  induisent une mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  sur l'algèbre  $\cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$  : si  $A \in \cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ , il

existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $A \in \mathcal{F}_m$ , et on peut donc poser

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_m(A)$$

## 2.3 Chaînes de Markov

Dans cette section, nous allons introduire une classe très importante de processus stochastiques : les chaînes de Markov. De manière informelle, une chaîne de Markov décrit un système dont l'évolution aléatoire est telle que la loi du système dans le futur ne dépend que de son état présent et pas de son histoire.

**Définition 2.3.1.** Le processus  $X$  est une chaîne de Markov s'il possède la propriété de Markov,

$$\mathbb{P}(X_n = i_n / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1})$$

pour tout  $n \geq 1$  et tout  $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ .

### 2.3.1 Chaîne de Markov homogène

Une chaîne de Markov  $X$  est *homogène* si

$$\mathbb{P}(X_n = j / X_{n-1} = i) = \mathbb{P}(X_1 = j / X_0 = i)$$

pour tout  $n, i, j$ .

### 2.3.2 Probabilité de transition

Le nombre  $\mathbb{P}(X_1 = j / X_0 = i)$  est appelé *probabilité de transition* de l'état  $i$  à l'état  $j$  en un pas. On note souvent ce nombre  $p_{i,j}$  :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X_1 = j / X_0 = i)$$

la famille de nombre  $p = (p_{i,j})_{i,j \in E}$

### 2.3.3 Matrice de transition

On appelle *matrice de transition*, la matrice  $P = (p_{i,j})_{i,j \in E}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{i_0,i_0} & p_{i_0,i_1} & p_{i_0,i_2} \cdots \\ p_{i_1,i_0} & p_{i_1,i_1} & p_{i_1,i_2} \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

#### Lemme 2.3.1 .

Une matrice de transition est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \text{i/-} & p_{i,j} \leq 1, \forall i, j \in E; \\ \text{ii/-} & \sum_{j \in E} p_{i,j} = 1, \forall i \in E \end{aligned}$$

Une matrice possédant ces deux propriétés est appelée une matrice stochastique.

#### Remarque 1 .

On dira que la matrice est sous-markovienne si ses coefficients sont positifs et la somme de chaque ligne est inférieure ou égale à 1.

### 2.3.4 Produit de matrice de Transition

Si  $P$  est une matrice de transition sur  $E$ , on définit par récurrence la suite  $P^n, \forall n \in \mathbb{N}$  par :

- $P^0(i, j) = \delta_{ij}$  ( $i.e P^0 = I_E$ )
- $P^1(i, j) = P(i, j)$  ( $i.e P^1 = P$ )
- $P^{n+1}(i, j) = \sum_{k \in E} P^n(i, k)P(k, j), \forall n \in \mathbb{N}$

**Définition 2.3.2.** Soit  $\mu = ((i))_{i \in E}$  une mesure de probabilité sur  $E$  et  $P$  une matrice stochastique. La chaîne de Markov  $(P, \mu)$  est la chaîne de Markov (homogène dans le temps) de matrice de transition  $P$  et de loi initiale  $\mu$ , c'est-à-dire telle que  $\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu(i)$ , pour tout  $i \in E$ . On écrira simplement  $X \sim (P, \mu)$ .

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes : la loi de la chaîne de Markov  $(P, \mu)$  sera notée  $\mathbb{P}_\mu$ , et l'espérance correspondante  $\mathbb{E}_\mu$ . En particulier, lorsque la loi initiale est concentrée sur un état  $i \in E$ , nous écrirons simplement  $\mathbb{P}_i$  et  $\mathbb{E}_i$ .

La matrice  $P$  contient toute l'information sur les probabilités de transition d'un état  $s$  au temps  $n$  vers un état  $s'$  au temps  $n + 1$ . On peut facilement l'utiliser pour déterminer également les probabilités de transition d'un état  $s$  au temps  $m$  vers un état  $s'$  en un temps ultérieur  $m + n$

quelconque. Notons

$$p_n(i, j) = \mathbb{P}_i(X_n = j)$$

Alors, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} p_n(i, j) &= \mathbb{P}_i(X_n = j) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}_i(X_n = j, X_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}_i(X_n = j \mid X_{n-1} = k) \mathbb{P}_i(X_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}_k(X_1 = j) \mathbb{P}_i(X_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k \in E} p(k, j) p_{n-1}(i, k). \end{aligned}$$

Cette relation est connue sous le nom d'*équation de Chapman-Kolmogorov*.

### 2.3.5 Chaîne de Markov cachée

Une chaîne de Markov *cachée* est un processus aléatoire  $(X_t, Y_t)$  tel que :

i/- $X_t$  est une chaîne de Markov finie.

ii/- $Y_t$  est une suite de v.a et  $Y_t/X_t$  est une suite de v.a indépendantes.

iii/-La loi conditionnelle de  $Y_t/\{X_t, t \in [1, T]\}$  est la loi  $Y_t/X_t$ .

### 2.3.6 Chaîne de Markov d'ordre 1

On considère le processus si  $n = 0, 1, 2, \dots$  dont l'état présent c'est à dire son état à l'instant  $n$ , résume toute l'information utile pour connaître son évolution future, le processus vérifie la propriété de Markov si et seulement si :

$$\mathbb{P}(X_t = x_t / X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_t = x_t / X_{t-1} = x_{t-1})$$

### 2.3.7 Chaîne de Markov d'ordre r

**Définition 2.3.3.** Une chaîne de Markov d'ordre  $r$  est construite à partir de la relation de dépendance suivante :

$$\mathbb{P}(X_t = x_t / X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_t = x_t / X_{t-i} = x_{t-i}, i = 1, \dots, r)$$



### 2.3.8 Récurrence et transience

**Définition 2.3.4.** Un état  $i$  de  $E$  est dit récurrent si et seulement si, partant de  $i$ , la chaîne  $X$  revient  $\mathbb{P}_i$ -presque sûrement à l'état  $i$ . Un état non récurrent est dit transient. On pose

$$\tau_i(\omega) = \begin{cases} \inf \{n \geq 1 \mid X_n(\omega) = i\} & \text{ou} \\ +\infty & \text{sur } \{\forall n \geq 1, X_n(\omega) \neq i\} \end{cases}$$

$\tau_i$  est un temps d'arrêt pour la filtration  $(\mathcal{F}_n = (X_0, \dots, X_n))$ , il est appelé temps de retour à  $i$  lorsque la chaîne part de  $i$  et temps d'atteinte de  $i$  sinon. On a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \forall i \in E, \quad i \text{ récurrent} &\iff \mathbb{P}_i(\tau_i < +\infty) = 1 \\ \forall i \in E, \quad i \text{ transient} &\iff \mathbb{P}_i(\tau_i < +\infty) < 1. \end{aligned}$$

**Proposition 2.3.1** [7].

Soient  $i$  et  $j$  deux états quelconques de  $E$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_j(N_i \geq n+1) = \mathbb{P}_j(\tau_i < +\infty) \mathbb{P}_j(N_i \geq n). \quad (1)$$

On s'intéresse également à la variable aléatoire  $N_i$  nombre de passages de la chaîne par l'état  $i$  après l'instant 0 :

$$N_i(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1_{X_n(\omega)=i}.$$

*Preuve.*

On considère l'instant  $\tau_i$  de premier passage de la chaîne par l'état  $i$ . L'événement  $\{N_i \geq n+1\}$  peut s'écrire :

$$\{N_i \geq n+1\} = \{\tau_i < +\infty \cap N_i \circ \theta^{\tau_i} \geq n\}$$

où  $N_i \circ \theta^{\tau_i}$  désigne le nombre de visites de l'état  $i$  après l'instant  $\tau_i$ . La propriété de Markov forte appliquée à l'instant  $\tau_i$  donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_j(N_i \geq n+1) &= \mathbb{P}_j(N_i \circ \theta^{\tau_i} \geq n \mid \tau_i < +\infty) \mathbb{P}_j(\tau_i < +\infty) \\ &= \mathbb{P}_j(N_i \geq n) \mathbb{P}_j(\tau_i < +\infty) \text{ car } X_{\tau_i} = i \text{ sur } \{\tau_i < +\infty\}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.3.2** [7].

Toute chaîne de Markov homogène sur un espace d'états fini a au moins un état récurrent. En

particulier, toute chaîne irréductible sur un espace d'états fini est récurrente.

*Preuve.*

Montrons que pour tout état  $i$  transient et pour tout  $j$ , l'espérance du nombre de passages par l'état  $i$ ,  $\mathbb{E}_j(N_i)$  est finie : rappelons que pour toute variable  $Z$  entière positive  $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Z \geq n)$ . En utilisant l'égalité 1, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_j(N_i) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_j(N_i \geq n + 1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_j(\tau_i < +\infty) \mathbb{P}_j(N_i \geq n) \\ &= \mathbb{P}_j(\tau_i < +\infty) \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_j(N_i \geq n) \\ &= \mathbb{P}_j(\tau_i < +\infty) [1 + \mathbb{E}_i(N_i)]. \end{aligned}$$

donc  $\mathbb{E}_j(N_i) < +\infty$  pour tout état  $i$  transient.

Si tous les états de  $E$  (fini) étaient transients on aurait aussi

$$\mathbb{E}_j \left( \sum_{i \in E} N_i \right) = \sum_{i \in E} \mathbb{E}_j(N_i) < +\infty \quad (\text{Tonelli}).$$

ce qui est absurde puisque  $\sum_{i \in E} N_i$  est le nombre total de visites aux états de  $E$  c'est-à-dire  $\text{card}(\mathbb{N}) = +\infty$ . □

### 2.3.9 Chaîne de Markov irréductible

**Définition 2.3.5.** Une chaîne de Markov est dite irréductible, si  $i \sim j$  (la probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  est différente de 0),  $\forall i, j \in X$ . La chaîne est dite régulière, s'il existe une puissance  $P^n$  de  $P$  dont tous les éléments sont strictement positifs.

Une chaîne de markov régulière est nécessairement irréductible, car tout état est accessible depuis tout autre en  $n$  pas au plus. La réciproque n'est pas vraie, car dans la définition de l'irréductibilité on n'a pas spécifié le nombre de pas.

**Définition 2.3.6.** Soit  $P$  une matrice stochastique sur un ensemble  $E$ .

- Un état  $i \in E$  est *absorbant* si  $p(i, i) = 1$ .
- $P$  est *irréductible* si, pour tout  $i, j \in E$ , on a  $i \longrightarrow j$ .
- $P$  *absorbant* si, pour tout  $i \in E$ , il existe  $j \in E$  absorbant avec  $i \longrightarrow j$ .

Si  $X$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$ , on dira que  $X$  est irréductible (resp. absorbante), lorsque  $P$  est irréductible (resp. absorbante).

**Lemme 2.3.2** [17].

Une chaîne  $X$  irréductible sur un espace d'états  $E$  fini est toujours récurrente. De plus, le temps moyen de récurrence dans l'état  $i$ ,  $\rho_i = \mathbb{E}_i(T_i)$  avec

$$T_i = \min \{n \geq 1 : X_n = i\}$$

est fini pour tout  $i \in E$ . On dit que la chaîne est récurrente-positive.

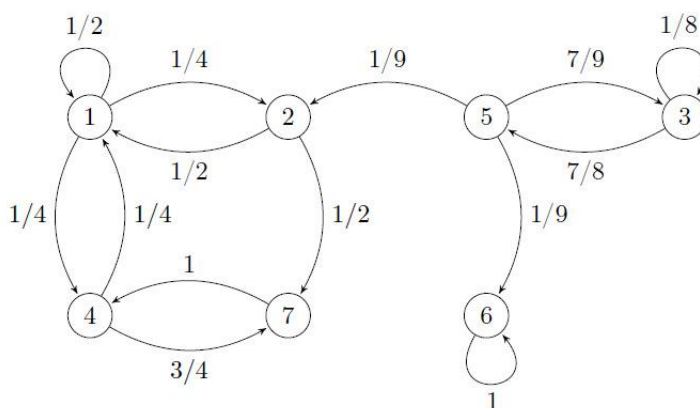
**Définition 2.3.7.** S'il n'y a qu'une seule classe pour la relation de communication, autrement dit, si tous les états communiquent entre eux, la chaîne est dite irréductible.

**Exemple 2 .**

On considère une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  sur  $\{1, \dots, 7\}$  de matrice de transition  $P$  donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Le graphe de la chaîne de Markov associée en précisant les probabilités de transitions entre les différents états est :



**FIGURE 2.1** – Chaîne de Markov de 7 états.

2. On déduit du graphe qu'il y a deux classes récurrentes :  $\{1, 2, 4, 7\}$  et  $\{6\}$ , et une classe transiente :  $\{3, 5\}$ .
3. La chaîne n'est pas irréductible, sinon elle n'admettrait qu'une seule classe.
4. Par la formule  $\mathbb{P}_x(X_2 = y) = P^2(x, y) = \sum_z P(x, z)P(z, y)$ , on obtient

$$\mathbb{P}_3(X_2 = 6) = P(3, 5)P(5, 6) = \frac{7}{8} \times \frac{1}{9} = \frac{7}{72}, \quad \text{et}$$

$$\mathbb{P}_1(X_2 = 7) = P(1, 2)P(2, 7) + P(1, 4)P(4, 7) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{16}.$$

### 2.3.10 Distribution stationnaire

Pour une chaîne de Markov irréductible  $X$ , le processus ne va pas s'arrêter dans un certain état, mais va continuer à évoluer éternellement. Une question fondamentale est alors de déterminer son comportement asymptotique ; si l'on observe une telle chaîne après un temps très long, quelle est la probabilité qu'elle se trouve dans un état donné ? Avec quelle fréquence visite-t-elle chaque état ? La réponse à ces questions est étroitement liée à la notion de distribution stationnaire.

Supposons pour un instant, qu'une telle convergence ait lieu. C'est-à-dire que, pour un certain  $i \in E$ , il existe un vecteur  $\pi$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(i, j) = \pi(j)$  pour tout  $j \in E$ . Alors, on devrait nécessairement avoir, d'une part,  $\sum_{j \in E} \pi(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in E} p_n(i, j) = 1$ , et d'autre part, pour tout  $k \in E$

$$\sum_{j \in E} \pi(j) p(j, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in E} p_n(i, j) p(j, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1}(i, k) = \pi(k)$$

Ceci motive la définition suivante :

**Définition 2.3.8.** Un vecteur  $\pi = (\pi(i))_{i \in E}$  est appelé *distribution stationnaire* associé à la matrice de transition  $P$  si

1.  $\pi(j) \geq 0$  pour tout  $j \in E$ , et  $\sum_{j \in E} \pi(j) = 1$ ;
2.  $\pi = \pi P$ .

La raison derrière cette terminologie est la suivante : si  $X \sim (P, \pi)$ , alors il s'ensuit du **Théorème 8.1.2** [17] que les probabilités d'occupation au temps  $n$  sont données par

$$\pi P^n = (\pi P) P^{n-1} = \pi P^{n-1} = \dots = \pi$$

On voit donc que la distribution est stationnaire ; elle ne change pas lorsque le temps passe.

**Définition 2.3.9.** -Le nombre  $d(i) = \text{pgcd}\{n : p_n(i, i) > 0\}$  est la *période* de l'état  $i \in E$ .

-Un état  $i$  est *apériodique* si  $d(i) = 1$ , et *périodique* sinon.

- $X$  est *apériodique* si tous ses états sont apériodiques.
- $X$  est dite *ergodique* si elle est récurrente-positive, irréductible et apériodique

### 2.3.11 Chaîne de Markov réversible

Dans de nombreux cas, en particulier pour les chaînes de Markov provenant de la modélisation de phénomènes physiques, la chaîne possède la propriété remarquable d'être invariante sous le renversement du temps (dans l'état stationnaire), dans le sens que si l'on filme son évolution et que l'on passe le film, il est impossible de déterminer si le film est passé dans un sens ou un autre. Bien entendu, ceci n'est possible que si la chaîne se trouve dans le régime stationnaire (sinon la relaxation vers l'équilibre permet de déterminer le sens d'écoulement du temps).

Soit  $X_n$ ,  $-1 < n < 1$ , une chaîne de Markov irréductible, telle que la loi de  $X_n$  soit donnée par  $\pi$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On définit la chaîne renversée  $Y$  par

$$Y_n = X_{-n}, n \in \mathbb{Z}$$

**Définition 2.3.10.** La chaîne  $X$  est *réversible* (à l'équilibre) si les matrices de transition de  $X$  et  $Y$  sont identiques.

**Théorème 2.3.1** [17].

$X$  est réversible si et seulement si la condition d'équilibre local est satisfaite :

$$\pi(i)p(i, j) = \pi(j)p(j, i), \quad \forall i, j \in E$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) &= \mathbb{P}(X_{-n-1} = j \mid X_{-n} = i) \\ &= \mathbb{P}(X_{-n} = i \mid X_{-n-1} = j) \frac{\mathbb{P}(X_{-n-1} = j)}{\mathbb{P}(X_{-n} = i)} \\ &= p(i, j) \frac{\pi(j)}{\pi(i)}. \end{aligned}$$

□

Une façon d'interpréter cette formule est comme suit, imaginons que l'on répartisse un volume total d'eau égal à 1 entre les différents sommets du graphe associé à la chaîne de Markov. À chaque instant, une fraction  $p(i, j)$  de l'eau se trouvant au sommet  $i$  est déplacée vers le sommet  $j$  (pour tous les sommets  $i, j$  simultanément). La distribution d'équilibre correspond à

la répartition de l'eau sur les sommets telle que la quantité d'eau en chaque sommet est préservée : toute l'eau qui en sort est compensée exactement par l'eau qui y entre ( $\pi(i) = \sum_j \pi_j p(j, i)$ ). La condition d'équilibre local est beaucoup plus forte : on demande à ce que, pour toute paire de sommets  $i, j$ , la quantité d'eau passant du sommet  $i$  au sommet  $j$  soit compensée exactement par la quantité d'eau passant du sommet  $j$  au sommet  $i$  :  $(\pi(i)p(i, j) = \pi(j)p(j, i))$ .

**Théorème 2.3.2** [17].

Soit  $X$  une chaîne irréductible. S'il existe  $\pi$  tel que

$$0 \leq \pi(i) \leq 1, \quad \sum_{i \in E} \pi(i) = 1, \quad \pi(i)p(i, j) = \pi(j)p(j, i) \text{ pour tout } i, j \in E$$

alors la chaîne est réversible (à l'équilibre) et de distribution stationnaire  $\pi$ .

*Preuve.*

Par la propriété d'équilibre local,

$$\sum_{j \in E} \pi(j)p(j, i) = \sum_{j \in E} \pi(i)p(i, j) = \pi(i)$$

ce qui montre que  $\pi$  est la distribution stationnaire de la chaîne. □

Ce dernier théorème permet, dans certaines situations, de déterminer beaucoup plus simplement la distribution stationnaire : si l'on parvient à trouver une distribution de probabilité sur  $E$  satisfaisant la condition d'équilibre local pour une chaîne irréductible, on est sûr que cette solution est bien la mesure stationnaire de la chaîne.

## 2.4 Marches aléatoires

### 2.4.1 Marche aléatoire simple unidimensionnelle

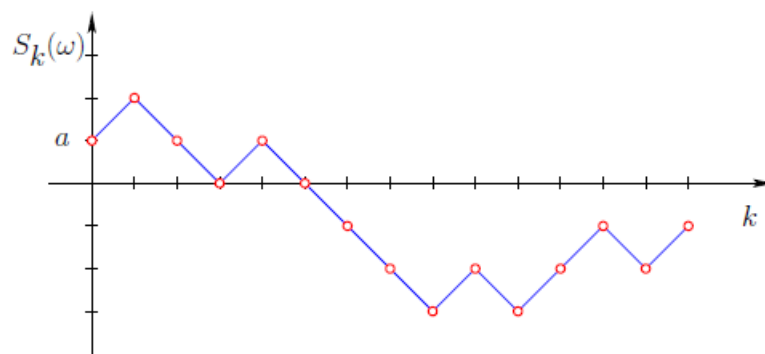
**Définition 2.4.1.** Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p = q$$

Pour un certain  $p \in [0; 1]$ . On appelle *marche aléatoire simple* partant de  $a \in \mathbb{Z}$ , la suite de variables aléatoires  $(S_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$S_n = a + \sum_{i=1}^n X_i$$

On notera  $\mathbb{P}_a$  la loi de la marche aléatoire simple partant de  $a$ . Cette marche aléatoire est dite *symétrique* lorsque  $p(= q) = \frac{1}{2}$ .



**FIGURE 2.2** – Le début de la trajectoire associée à une réalisation d’une marche aléatoire simple partant de  $a$ . [17]

Une réalisation de la trajectoire de la marche est donnée par la suite des couples  $((k, S_k(\omega)))_{k \geq 0}$ , avec la convention que  $S_0 = a$  (voir Figure 2.2). Le paramètre  $k$  est souvent interprété comme le temps, et la ligne polygonale passant par chacun des points  $(k, S_k(\omega))$  est appelée la trajectoire de la marche. Le processus  $(S_n)_{n \geq 0}$  possède les importantes propriétés suivantes :

- Lemme 2.4.1** [17].
1. *Homogénéité spatiale* :  $\mathbb{P}_a(S_n = s) = \mathbb{P}_{a+b}(S_n = s + b), \forall a, b \in \mathbb{Z}$ .
  2. *Propriété de Markov* : Soit  $B \in \sigma(S_0, \dots, S_n)$  un événement ne dépendant que des  $n$  premiers pas de la marche. Alors, pour tout  $s \in \mathbb{Z}$  tel que  $\mathbb{P}_a(S_n = s, B) > 0$ , on a

$$\mathbb{P}_a((S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots) \in A / S_n = s, B) = \mathbb{P}_s((S_0, S_1, S_2, \dots) \in A)$$

Pour tout ensemble de trajectoires  $A \in \mathcal{F}$ .

Ce qu’affirme la propriété de Markov, c’est que conditionnellement à  $S_n = s$ , ce qui a pu arriver à la marche jusqu’au temps  $n$  n’a pas d’influence sur son comportement à partir du temps  $n$ .

*Preuve.*

Pour la première affirmation,

$$\mathbb{P}_a(S_n = s) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = s - a\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = s + b - (a + b)\right) = \mathbb{P}_{a+b}(S_n = s + b)$$

Pour la seconde propriété, on observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a((S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots) \in A / S_n = s, B) \\ &= \mathbb{P}_a((s, s + X_{n+1}, s + X_{n+1} + X_{n+2}, \dots) \in A / S_n = s, B) \\ &= \mathbb{P}((s, s + X_{n+1}, s + X_{n+1} + X_{n+2}, \dots) \in A) \\ &= \mathbb{P}_s((S_0, S_1, S_2, \dots) \in A) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que  $\{S_n = s\} \cap B \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$  est indépendant de  $(X_{n+k})_{k \geq 1}$  pour la deuxième égalité, et le fait que  $(s, s + X_{n+1}, s + X_{n+1} + X_{n+2}, \dots)$  et  $(s, s + X_1, s + X_1 + X_2, \dots)$  ont même loi, puisque les  $(X_i)_{i \geq 1}$  sont i.i.d..  $\square$

### 2.4.2 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Soient la suite  $(\epsilon_t)_{t \in I}$  de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes telles que :

$$\mathbb{P}(\epsilon_t = 1) = p = 1 - p = \mathbb{P}(\epsilon_t = -1) \quad \forall t$$

et où  $I$  est un ensemble dénombrable.

Soient maintenant la suite  $(X_t)_{t \in I}$  des variables aléatoires indépendantes. On définit la relation :

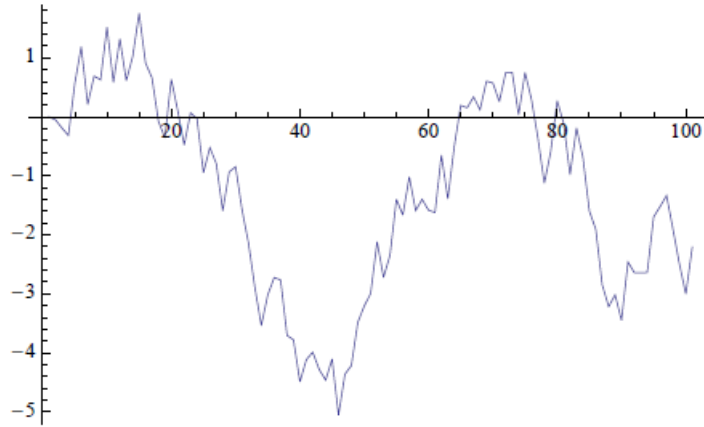
$$X_{t+1} = X_t + \epsilon_{t+1} \quad , \quad X_0 = 0 = \epsilon_0$$

**Définition 2.4.2.** On appelle marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  la suite de variables aléatoires  $(X_t)_{t \in I}$  lorsque  $I = \mathbb{N}$  et quand  $X_t \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall t$ . Les différentes valeurs que peut prendre nos variables aléatoires sont appelés des états de la marche et on regroupe en général ces états dans un ensemble qu'on appelle ensemble des états de la marche aléatoire.

**Définition 2.4.3.** Pour un  $\omega \in \Omega$  fixé et pour tout  $t$ , on appelle  $X_t(\omega)$  la trajectoire de la marche aléatoire.

Voici une trajectoire possible pour une marche aléatoire où  $p = 1/2$  et le nombre de pas de la marche est  $t = 100$



FIGURE 2.3 – Marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ . [4]**Proposition 2.4.1** [4].

La marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  est une chaîne de Markov, i.e.,

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = 0) = \mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

*Preuve.*

En réécrivant  $X_{t+1} = X_t + \epsilon_{t+1}$  puis en isolant  $\epsilon_{t+1}$ , on obtient, grâce à leur indépendance

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = 0) &= \mathbb{P}(\epsilon_{t+1} = j - i | \epsilon_t = i - i_{t-1}, \dots, X_0 = 0) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\epsilon_{t+1} = j - i, \epsilon_t = i - i_{t-1}, \dots, X_0 = 0)}{\mathbb{P}(\epsilon_t = i - i_{t-1}, \dots, X_0 = 0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\epsilon_{t+1} = j - i) \mathbb{P}(\epsilon_t = i - i_{t-1}) \dots \mathbb{P}(X_0 = 0)}{\mathbb{P}(\epsilon_t = i - i_{t-1}) \dots \mathbb{P}(X_0 = 0)} \\ &= \mathbb{P}(\epsilon_{t+1} = j - i) \frac{\mathbb{P}(\epsilon_t = i - i_{t-1})}{\mathbb{P}(\epsilon_t = i - i_{t-1})} \\ &= \mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i) \end{aligned}$$

□

On sait donc maintenant que la chaîne peut être représentée par une matrice stochastique en fonction des différents états qu'elle va parcourir. Ici l'ensemble des états est infini dénombrable (car sur  $\mathbb{Z}$ ).

**Définition 2.4.4.** Soit

$$T_i = \inf_t \{X_t = i\}$$

le temps de premier passage de la chaîne sur l'état  $i$ . On dit que l'état  $i$  est positivement récurrent si  $\mathbb{E}(T_i) < \infty$ . Si tous les états sont positivement récurrents, on dit que la chaîne est positivement récurrente.

### 2.4.3 Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$

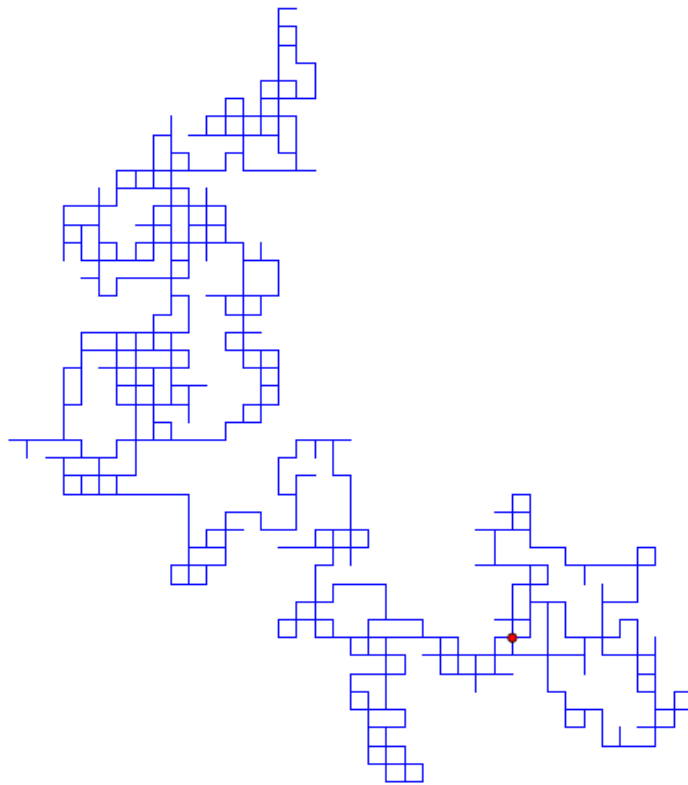
Nous allons à présent brièvement décrire la généralisation du processus étudié dans la section précédente de  $\mathbb{Z}$  à  $\mathbb{Z}^d$ . Le type de processus ainsi obtenu (et leurs généralisations) jouent un rôle central en théorie des probabilités. Une interprétation naturelle est la description de la diffusion d'une particule (un tel modèle a par exemple, été employé par Einstein en 1905 afin d'expliquer le mouvement erratique des particules de pollen dans l'eau observé en 1827 par Brown, et de cette façon confirmé la théorie atomiste alors encore controversée en permettant à Perrin de déterminer expérimentalement la constante d'Avogadro).

**Définition 2.4.5.** Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires i.i.d. prenant valeurs dans l'ensemble  $\{\pm \vec{e}_i, i = 1, \dots, d\}$  et de loi uniforme; ici,  $\vec{e}_i = (\delta_{ik})_{k=1}^d$  est le vecteur unité de  $\mathbb{R}^d$  dans la direction  $i$ . On appelle marche aléatoire simple symétrique sur  $\mathbb{Z}^d$  partant de  $a \in \mathbb{Z}^d$  le processus

$$S_n = a + \sum_{i=1}^n X_i$$

Comme précédemment, on note  $\mathbb{P}_a$  la loi de la marche partant de  $a$ .

Ce processus décrit donc une particule se déplaçant aléatoirement de proche en proche sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$ . Ce type de processus a été énormément étudié, et nous nous contenterons ici d'illustrer simplement quelques résultats élémentaires.



**FIGURE 2.4** – Les 1000 premiers pas d’une marche aléatoire simple symétrique sur  $\mathbb{Z}^2$  partant du point rouge.[17]

## Chapitre 3

---

### Marches aléatoires sur un graphe

---

#### 3.1 Introduction

Une marche aléatoire est une chaîne de Markov finie qui est réversible. En fait, il n'y a pas beaucoup de différence entre la théorie des marches aléatoires sur les graphes et la théorie des chaînes de Markov finies ; chaque chaîne de Markov peut être considérée comme une marche aléatoire sur un graphe orienté, si nous autorisons des arêtes pondérées. De même, les chaînes de Markov réversibles peuvent être considérées comme des marches aléatoires sur des graphes non orientés, et les chaînes de Markov symétriques en tant que marche aléatoire sur des graphes symétriques réguliers.

La marche aléatoire sur les graphes est un sujet qui a été intensément étudié [1, 5, 16, 8, 11]. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons de manière particulière à l'étude de la marche aléatoire sur quelques graphes particuliers tels que les arbres et l'hypercube.

les références suivants [8, 11] ont été utilisés pour donner les définitions et notions de base.

#### 3.2 Notions de base

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Pour éviter les trivialités nous supposons  $|V| > 1$ . Soit  $i \in V$ . Une marche aléatoire sur  $G$  à partir de  $i$  est une suite aléatoire  $x_0, x_1, x_2, \dots$  de sommets de  $G$  tels que :

(a)  $\mathbb{P}[x_0 = i] = 1,$

(b)  $\mathbb{P}[x_{m+1} = k \mid x_0 = i, x_1 = i_1, \dots, x_{m-1} = i_{m-1}, x_m = j]$

$$= \mathbb{P}[x_{m+1} = k \mid x_m = j] = \begin{cases} \frac{1}{d(j)} & \text{si } k \in N(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où  $x_0, x_1, x_2, \dots$  est une chaîne de Markov avec des probabilités de transition station-

naires et avec un espace d'états finis  $X$ . La chaîne est irréductible (puisque  $G$  est connexe) et soit apériodique soit, si  $G$  est biparti, périodique avec période 2.

Par exemple, considérons le graphe de la Figure 3.1. À  $a$  nous commençons une marche aléatoire le long des arêtes. Après une étape, nous sommes au sommet  $b$ . L'étape suivante est  $ba$  ou  $bc$ . Nous assignons la probabilité  $\frac{1}{2}$  à chacun. Des deux possibilités. Une fois que nous sommes en  $c$ , il y a trois possibilités pour l'étape suivante :  $cb$ ,  $cd$  ou  $ce$ . Nous assignons la probabilité  $\frac{1}{3}$ . Nous acceptons d'arrêter dès que nous sommes à  $d$ . Le nombre attendu d'étapes dans cette

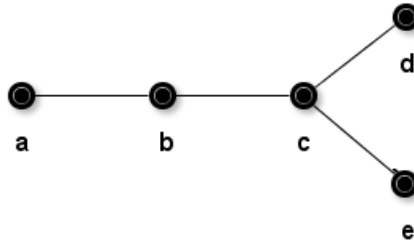


FIGURE 3.1 – Exemple d'une marche aléatoire sur un graphe.

marche aléatoire est désigné par  $\delta_{ad}$ , peut être facilement calculé :  $\delta_{ad} = 11$ . La quantité analogue  $\delta_{da}$  a la valeur 13. Si  $i$  et  $j$  sont deux sommets du graphe ci-dessus, on peut considérer  $\gamma_{ij}$  défini par

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{ji}.$$

Un simple calcul montre que

$$\gamma_{ab} = \gamma_{bc} = \gamma_{cd} = \gamma_{ce} = 8,$$

Donc  $\gamma$  a la même valeur pour toutes les arêtes du graphe. Un tel graphe est appelé équilibré.

Plus généralement, nous pouvons considérer un graphe assez arbitraire et étudier des quantités  $\delta$  et  $\gamma$  telles que définies ci-dessus.

Soit  $i$  et  $j$  deux sommets de  $V$ . Nous définissons la variable stochastique  $d_{ij}$  comme étant identiquement 0 si  $i = j$ . Si  $i \neq j$ , alors nous disons que  $d_{ij}$  prend la valeur  $k$  si et seulement si dans une marche aléatoire commençant par  $i$  nous avons

$$x_1 \neq j, x_2 \neq j, \dots, x_{k-1} \neq j, x_k = j.$$

Par conséquent,  $d_{ij}$  est le nombre d'étapes pour atteindre  $j$  de  $i$  pour la première fois.

L'espérance de  $d_{ij}$  est notée  $\delta_{ij}$ . Il s'ensuit que toute paire d'états communiquent, et puisque  $V$  est fini, il s'ensuit que  $\delta_{ij} < \infty$ .

Si  $i \in X$ , alors  $e_i$  est le temps de récurrence de  $i$ , c'est-à-dire  $e_i = k > 0$  si et seulement si

$$x_k = i, x_{k-1} \neq i, \dots, x_1 \neq i, x_0 = i.$$

L'espérance  $E(e_i)$  est notée  $\epsilon_i$ . Notons que  $\epsilon_i < \infty$ .

Les quantités  $\delta_{ij}$  et  $\epsilon_i$  satisfont les deux récursions étroitement liées

$$\delta_{ij} = 1 + d(i)^{-1} \sum_{k \in N(i)} \delta_{kj}, \quad i \neq j \tag{1.1}$$

$$\epsilon_i = 1 + d(i)^{-1} \sum_{k \in N(i)} \delta_{ki} \tag{1.2}$$

Ces deux relations peuvent être facilement prouvées en considérant les espérances conditionnelles; compte tenu du résultat de la première étape de la marche aléatoire commençant à  $i$ . En termes de matrices, 1.1 et 1.2 peuvent être écrits comme

$$\delta + \epsilon = E + P\delta,$$

Où  $\delta$  est la matrice  $n \times n$  avec les entrées  $\delta_{ij}$ ,  $\epsilon$  est la matrice diagonale  $n \times n$  avec  $\epsilon_i$  sur la diagonale,  $E$  se compose de 1, et  $P$  est la matrice de probabilité de transition. Notons que  $P$  peut s'écrire  $P = VA$ , où  $V$  est la matrice diagonale avec  $d(i)^{-1}$  sur la diagonale et  $A$  la matrice d'adjacence.

Les résultats suivants ont été montrés par Göbel, Jagers et Lovász :

**Théorème 3.2.1** [8].

Si  $G = (V, E)$  et  $i \in V$ , alors  $\epsilon_i = 2m/d(i)$ .

*Preuve.*

Une chaîne de Markov finie et irréductible a une distribution stationnaire, disons  $\pi_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) qui est la solution unique de :

$$\sum \pi_i p_{ij} = \pi_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \sum \pi_i = 1,$$

où  $p_{ij}$  sont les probabilités de transition. Par substitution, on vérifie facilement que :

$$\pi_i = \frac{1}{2} d(i) / m, \quad i = 1, 2, \dots,$$

constituent une solution du système ci-dessus, et le résultat :

$$\epsilon_i = \pi_i^{-1}.$$

□

**Corollaire 3.2.1** [8].

Si  $d(j) = k$  pour tout  $j$ , alors  $\epsilon_j = n$  pour tout  $j$ .

**Remarque 2** .

Le Théorème 3.2.1 et le Corollaire 3.2.1 sont également vrais lorsque  $G$  est un multigraphe, la preuve est pratiquement la même.

**Proposition 3.2.1** [8].

Si  $\{1\} \cup N(1) = \{2\} \cup N(2)$ , alors

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 2m / (d(1) + 1).$$

*Preuve.*

Il suffit d'appliquer 1.1 avec  $i = 1$ ,  $j = 2$  et 1.2 avec  $i = 2$ . □

Si  $i$  et  $j$  sont des éléments de  $V$ , le temps de commutation  $c_{ij}$  est défini comme le nombre d'étapes d'une marche aléatoire de  $i$  à  $j$  et de retour. D'où  $c_{ij}$  a la même distribution que  $d_{ij} + d_{ji}$ . L'espérance  $E(c_{ij})$  est notée  $\gamma_{ij}$ . Si  $i$  et  $j$  sont adjacents, alors  $\gamma_{ij}$  peut être désigné alternativement par  $\gamma_e$ .

Considérons une marche aléatoire qui commence à  $i$  et qui s'arrête dès que  $k$  est atteint. Le nombre de fois où le sommet  $j$  est visité pendant cette marche aléatoire sera noté  $b_{ijk}$ , et son espérance par  $\beta_{ijk}$ . Nous définissons  $b_{iji} \equiv 0$  et  $b_{ijj} \equiv 0$  pour tout  $i, j$ . Les quantités  $b_{ijk}$  satisfont les relations de récurrence :

$$\beta_{ijk} = \delta_i^j + d(i)^{-1} \sum_{s \in N(i)} \beta_{sjk}, \quad i \neq k, \quad (1.3)$$

Où  $\delta_i^j$  est le delta de Kronecker. La preuve de 1.3 est semblable à celle de 1.1 et 1.2.

En termes de matrices, 1.3 s'écrit :

$$\beta_k = I + P_k \beta_k, \quad (1.4)$$

Où  $\beta_k$  est la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  avec les entrées  $\beta_{ijk}$  ( $i \neq k, j \neq k$ ).  $I$  est la matrice d'identité et  $P_k$  la matrice obtenue de  $P$  en supprimant la  $k^{\text{ème}}$  ligne et la  $k^{\text{ème}}$  colonne. La solution formelle de 1.4 est

$$\beta_k = (I - P_k)^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} P_k^t. \quad (1.5)$$

**Proposition 3.2.2** [8].

$\beta_{ikj}/d(k) = \beta_{kij}/d(i)$  pour tout graphe  $G$ .

*Preuve.*

Par 1.5,  $\beta_j^T = (I - P_j^T)^{-1}$ . En outre, si  $V_j$  est obtenu à partir de  $V$ , comme  $P_j$  de  $P$ , en supprimant la  $j^{\text{ème}}$  ligne et colonne, alors  $P_j^T = V_j^{-1} P_j V_j$ .

Par conséquent,  $\beta_j^T = V_j^{-1} \beta_j V_j$ , ou  $V_j \beta_j^T = \beta_j V_j$  et donc  $\beta_{ikj}/d(k) = \beta_{kij}/d(i)$  (D'abord seulement pour  $i \neq j$  et  $k \neq j$ ).  $\square$

En général, si  $P$  est la matrice de transition d'une chaîne de Markov ergodique finie, la chaîne de Markov inverse est une chaîne de Markov avec matrice de transition  $\hat{P}$  donnée par  $\hat{P} = \epsilon P^T \epsilon^{-1}$ . Rappelons qu'une chaîne de Markov est réversible si  $P = \hat{P}$ . Il est clair que  $P = \hat{P}$  ici, puisque  $P = V^{-1} P^T V$  et  $\epsilon = 2mV^{-1}$  par le Théorème 3.2.1. Essentiellement à partir de ce fait, la Proposition 3.2.2 a été dérivée, et en effet cette même proposition peut être utilisée pour transformer la récursion directe 1.3

$$\beta_{ikj} = \delta_i^k + d(i)^{-1} \sum_{s \in N(i)} \beta_{skj}, \quad i \neq j,$$

Par récursivité en arrière

$$\beta_{ikj} = \delta_i^k + \sum_{s \in N(k)} (\beta_{isj}/d(s)), \quad k \neq j. \quad (1.6)$$

Une preuve plus directe résulte de 1.4; notons que, puisque  $\beta_j$  est inversible,  $\beta_j = I + P_j \beta_j$  si  $\beta_j = I + \beta_j P_j$ .

La formule 1.6 a une belle interprétation, qui peut aussi servir de preuve alternative. À savoir,  $\beta_{ikj}/d(k)$  est le nombre attendu de fois où un arc  $(k, x)$  est traversé dans une marche



aléatoire de  $i$  à  $j$ . Par conséquent :

$$\sum_{s \in N(k)} (\beta_{isj}/d(s))$$

est le nombre attendu d'arrivées à  $k$ , alors que  $\beta_{ikj}$  est, par définition, le nombre attendu de départs de  $k$ .

En considérant l'étape finale d'une marche aléatoire de  $i$  à  $j$ , la même interprétation donne le complément suivant à 1.6 :

$$1 = \sum_{s \in N(j)} (\beta_{isj}/d(s)), \quad i \neq j. \quad (1.7)$$

Ou, 1.6 et 1.7 combinés :

$$\delta_j^k + \beta_{ikj} = \delta_i^k + \sum_{s \in N(k)} (\beta_{isj}/d(s)) \quad (1.8)$$

pour tout  $i, j, k$ .

**Définition 3.2.1.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires avec des fonctions de distribution  $F$  et  $H$ , respectivement, alors on dit que  $X$  est stochastiquement inférieur ou égal à  $Y$  ( $X \leq^s Y$ ) si  $F(x) \geq H(x)$  pour tout  $x$ .

Clairement, si  $X \leq^s Y$  et  $Y \leq^s X$ , alors  $X \cong Y$ .

**Définition 3.2.2.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Si  $i, j, k \in V$ , on dit que  $k$  est compris entre  $i$  et  $j$  si  $k = i$  ou  $k = j$  ou chaque chemin de  $i$  à  $j$  contient  $k$ . (Donc  $k$  est un point d'articulation dans le dernier cas).

**Théorème 3.2.2 [8].**

- $d_{ij} \leq^s d_{ik} + d_{kj}$ .
- $d_{ij} \cong d_{ik} + d_{kj}$  si et seulement si  $k$  se situe entre  $i$  et  $j$ .
- $e_i \leq^s c_{ik}$ .
- $e_i \cong c_{ik}$  si et seulement si  $N(i) = \{k\}$ .

*Preuve.*

Une preuve peut être donnée à l'aide du Théorème de décomposition de Chung [3]. □

D'après le résultat bien connu

$$\mathbb{E}(x) = \int_0^\infty (1 - F(x)) dx$$

Pour une variable arbitraire non négative  $x$  avec fonction de distribution  $F(x)$ , on a les corollaires suivants :

- Corollaire 3.2.2** [8].
- a.  $\delta_{ij} \leq \delta_{ik} + \delta_{kj}$ .
  - b.  $\delta_{ij} = \delta_{ik} + \delta_{kj}$  si et seulement si  $k$  se situe entre  $i$  et  $j$ .
  - c.  $\epsilon_i \leq \gamma_{ik}$ .
  - d.  $\epsilon_i = \gamma_{ik}$  si et seulement si  $N(i) = \{k\}$ .

De (a) nous avons  $\gamma_{ij} \leq \gamma_{ik} + \gamma_{kj}$ , et puisque  $\gamma$  est symétrique, un graphe est un espace métrique par rapport à la distance  $\gamma$ .

- Théorème 3.2.3** [8].
- a.  $\sum_{(i,j) \in E} (\beta_{ikj} + \beta_{jki}) / d(k) = n - 1$ .
  - b.  $\sum_{e \in E} \gamma_e = 2m(n - 1)$ .

*Preuve.*

Selon la Proposition 3.2.2 et la formule 1.7,

$$1 - \delta_j^k = \sum_{i \in N(j)} (\beta_{ikj} / d(k)).$$

De là, (a) suit par sommation sur  $j$ , puis (b) de (a) par sommation sur  $k$ . □

**Proposition 3.2.3** [11].

*Si  $u$  et  $v$  ont le même degré, alors la probabilité qu'une marche aléatoire commençant à  $u$  visite  $v$  avant de retourner à  $u$  est égale à la probabilité qu'une marche aléatoire commence à  $v$ , visite  $u$  avant de revenir à  $v$ .*

*(Si les degrés de  $u$  et de  $v$  sont différents, alors le rapport des probabilités données est  $\pi(v)/\pi(u) = d(v)/d(u)$ .)*

### 3.3 Marche aléatoire sur l'arbre

Rappelons qu'un arbre noté  $T$ , est un graphe sans cycle et connexe. Le symbole  $q(T)$  désignera le nombre d'arêtes de  $T$ . Pour un arbre  $T$ ,  $T^0$  est l'ensemble de tous les points ou sommets intérieurs de  $T$ , celui-ci est l'ensemble de tous les sommets de  $T$  qui ne sont pas pendants. Le voisinage d'un sommet  $v$  est l'ensemble  $N(v)$  de sommets adjacents à  $v$ . Pour les sommets  $x$  et  $y$  dans un arbre  $T$ ,  $P_{xy}$  désignera la chaîne de  $x$  à  $y$ . Si  $V$  est un ensemble de sommets d'un arbre  $T$ , le sous-graphe de  $T$  induit par  $V$  sera noté  $\langle V \rangle$ .

Dans la marche aléatoire classique le long d'une chaîne de longueur  $n$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , telle que décrite dans [6], une particule se déplace avec une probabilité égale vers l'avant ou vers l'arrière par pas de longueur unitaire. Lorsque 0 ou  $n$  est atteint, le mouvement s'arrête. Les deux premiers théorèmes dans cette section sont les résultats fondamentaux sur le résultat d'une telle marche.

**Théorème 3.3.1** [14].

*Si une particule commence une marche à la  $k^{\text{ème}}$  position sur une chaîne de longueur  $n$ , la probabilité que la marche se termine à 0 est  $(n - k)/n$ .*

**Théorème 3.3.2** [14].

*Si une particule commence une marche à la  $k^{\text{ème}}$  position sur une chaîne de longueur  $n$ , la longueur attendue de la marche est  $k(n - k)$ .*

Ces théorèmes sont utilisés pour obtenir des résultats de base dans la généralisation de la marche aléatoire le long d'une chaîne, ou chemin, à une marche aléatoire sur un arbre avec les extrémités en tant qu'états absorbants. Une particule commence une marche à partir d'un point intérieur  $v$  dans un arbre. La marche se termine lorsqu'un point final est atteint.

**Notation 1** .

Soit  $T$  un arbre. Pour les sommets  $x, y \in T$ ,  $V_y$  désigne les sommets de la composante de  $T - x$  à laquelle  $y$  appartient. Soit l'arbre  $x$ -terminal déterminé par  $y$ ,  $T(x, y) = \langle \{x\} \cup V_y \rangle$ . Notons que  $x$  est un point final dans  $T(x, y)$ .

La Figure 3.2 illustre  $T(x, y)$  et  $T(y, x)$  pour les sommets  $x$  et  $y$  indiqués dans un arbre  $T$  sur huit points.

**Définition 3.3.1.** Soit  $T$  un arbre,  $u \in T$  et  $d = d(u)$ . Soit  $N(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_d\}$ . Soit  $T_i = T(u, u_i), i = 1, 2, \dots, d$  Alors  $T_1, \dots, T_d$  est une *décomposition  $u$ -centrée* de  $T$ .

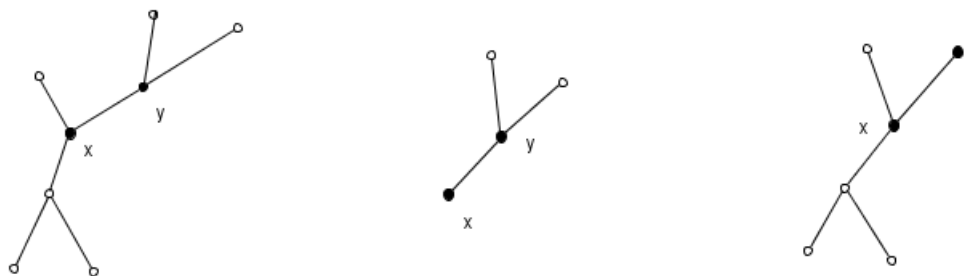


FIGURE 3.2 –  $T(x, y)$  et  $T(y, x)$  dans l'arbre  $T$ .

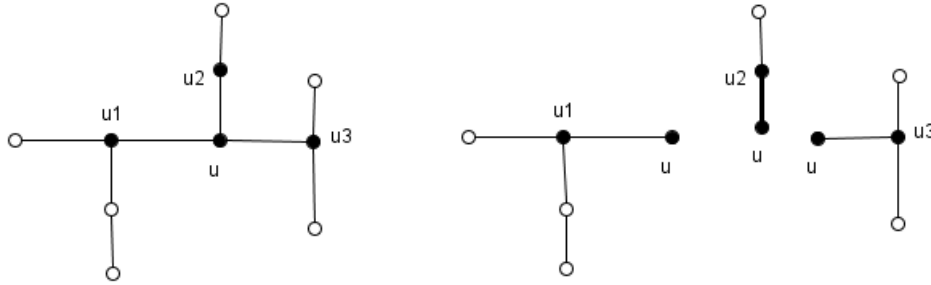


FIGURE 3.3 – Une décomposition  $u$ -centrée de  $T$ .

Dans la Figure 3.3, nous illustrons une décomposition pour un sommet de degré trois.

**Définition 3.3.2.** Soit  $T$  un arbre et  $x, y \in T$ . Alors  $\mathbb{P}(x \rightarrow y)$  est la probabilité que dans une marche aléatoire  $x_0, x_1, \dots, x_n$  avec  $x = x_0$ , on a  $x_i = y$  pour quelque  $i > 0$ . Donc, si  $y$  est un point final  $\mathbb{P}(x \rightarrow y)$  est la probabilité que la marche se termine à  $y$ , soit  $x_n = y$ . Soit  $\mathbb{P}(x \nrightarrow y) = 1 - \mathbb{P}(x \rightarrow y)$ .

**Théorème 3.3.3** [14].

Soit  $T$  un arbre et  $u$  un sommet dans  $T$  avec  $d = d(u)$  et  $N(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_d\}$ . Soit  $T_1, \dots, T_d$  est une décomposition  $u$ -centrée de  $T$ . Alors si  $e$  est un point final de  $T$ , et  $e \in T_i$

$$\mathbb{P}^T(u \rightarrow e) = \mathbb{P}^{T_i}(u_i \rightarrow e) / d\mathbb{P}^T(u \nrightarrow u).$$

où  $u_i$  est l'unique voisin de  $u$  dans la chaîne de  $u$  à  $e$ .

*Preuve.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^T(u \rightarrow e) &= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \mathbb{P}^{T_j}(u_j \rightarrow e) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d (\mathbb{P}^{T_j}(u_j \rightarrow u) \mathbb{P}^T(u \rightarrow e)) + \frac{1}{d} \mathbb{P}^{T_i}(u_i \rightarrow e). \end{aligned}$$

Depuis  $1 - (1/d) \sum_{j=1}^d (\mathbb{P}^{T_j}(u_j \rightarrow u) \mathbb{P}^T(u \nrightarrow u))$ , Le résultat suit.  $\square$

**Définition 3.3.3.** Un point de branchement d'un arbre est un sommet  $v$  avec  $d(v) > 2$ .

**Définition 3.3.4.** Une araignée est un arbre  $S$  avec exactement un sommet  $x$  qui est un point de branchement. Le sommet  $x$  est appelé l'origine de  $S$ . Si  $e$  est un point final de  $S$ , le chemin

de  $x$  à  $e$  est appelé une *jambe* de  $S$ .

**Définition 3.3.5.** Soit  $S$  une araignée d'origine  $v$ . Soit  $d = d(v)$  et  $l_1, \dots, l_d$  est les longueurs des jambes de  $S$ . L'absorbabilité de  $S$  est

$$m(S) = \sum_{i=1}^d 1/l_i.$$

**Corollaire 3.3.1** [14].

Soit  $S$  une araignée d'origine  $v$  et  $e$  un point final de  $S$  tel que  $d(v, e) = l$ . Alors  $\mathbb{P}(v \rightarrow e) = (1/lm(S))$

*Preuve.*

Soit  $d = d(v)$ . Soit  $T_1, \dots, T_d$  les jambes de  $S$  (décomposition de  $S$ ) et soit  $T_j$  de longueur  $l_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Soit  $N(v) = \{v_1, \dots, v_d\}$ . Alors par le Théorème 3.3.1,  $\mathbb{P}^{T_j}(v_j \rightarrow e) = 1/l_j$ , et  $\mathbb{P}^{T_j}(v_j \rightarrow v) = 1/l_j$ . Le résultat suit par le Théorème 3.3.3.  $\square$

**Définition 3.3.6.** Soit  $T$  un arbre et  $x$  un sommet intérieur dans  $T$ . Soit

$$S(x) = \langle \{y \mid \text{pour tout } z \in P_{xy} \text{ soit } d(z) = 2 \text{ soit } z = y \text{ soit } z = x\} \rangle.$$

Alors  $S(x)$  est l'araignée induite par  $x$ .

La Figure 3.4 illustre cette définition. Les sommets obscurcis sont ceux de  $S(x)$ .

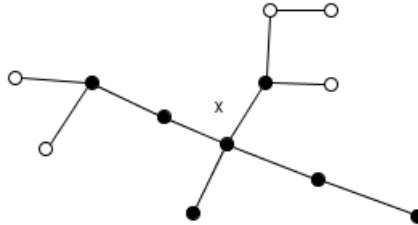


FIGURE 3.4 – L'araignée  $S(x)$  est induite par  $x$ .

**Remarque 3 .**

Lorsque  $x$  est désigné comme une origine dans  $T$ ,  $S(x)$  est l'araignée comprise. Si  $S$  est une araignée induite par  $x$ , on note  $m(S)$  et  $q(S)$  par  $m^T(x)$  et  $q^T(x)$  respectivement.

**Définition 3.3.7.** Soit  $x$  un sommet de  $T$ . Si  $T$  est une araignée, l'absorbabilité ajustée de  $x$  dans  $T$  est  $a^T(x) = m^T(x)$ . Sinon, l'absorbabilité ajustée de  $x$  est définie récursivement comme

$$a^T(x) = m^T(x) - \sum_y \frac{1}{l_y^2 a^T(x,y)(y)}$$

Où  $l_y = d(x, y)$ , et la somme est sur tous  $y \in S(x)$ ,  $y \neq x$ . Qui sont des points de branchement dans  $T$ .

Pour l'arbre de la Figure 3.5 les probabilités ajustées sont calculées :

$$a^T(y_1, y_3)(y_3) = m^T(y_1, y_3) = 3$$

$$a^T(x, y_2)(y_2) = m^T(x, y_2) = 3$$

$$a^T(x, y_1)(y_1) = m^T(x, y_1) = 3 - 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$a^T(x) = 3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{61}{24}$$

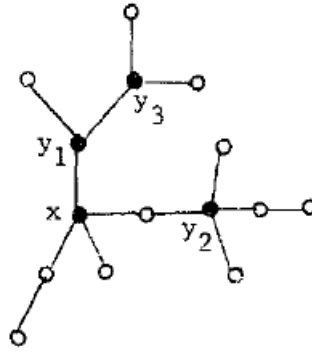


FIGURE 3.5 – Absorbabilité ajustée de  $x$ .

Dans ce contexte,  $a^T(v)$  peut être considérée comme la conductance de  $T$  (entre  $v$  et  $w$ ). En utilisant [[10], p.6], le théorème suivant a été montré :

**Théorème 3.3.4** [14].

Si  $T$  est un arbre et  $x \in T^0$ , alors  $a^T(x) = d(x)\mathbb{P}^T(x \nrightarrow x)$ .

**Définition 3.3.8.** Soit  $E^T(x)$  la durée prévue d'une marche dans  $T$  provenant de  $x$ . L'exposant peut être omis si aucune confusion n'est à prévoir. Le symbole  $E^T(x | y)$  indiquera la longueur conditionnelle attendue d'une marche qui provient de  $x$  et inclut  $y$ .  $E^T(x | \bar{y})$  désignera la longueur conditionnelle attendue d'une marche qui provient de  $x$ , mais ne comprend pas  $y$ .

**Lemme 3.3.1 .**

Soit  $T$  un arbre et  $x, v \in T^0$ , puis

$$E^T(x) = E^{T(v,x)}(x) + \mathbb{P}^{T(v,x)}(x \rightarrow v)E^T(v).$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} E^T(x) &= \mathbb{P}^{T(v,x)}(x \rightarrow v)E^T(x | v) + \mathbb{P}^{T(v,x)}(x \nrightarrow v)E^T(x | \bar{v}) \\ &= \mathbb{P}^{T(v,x)}(x \rightarrow v)(E^{T(v,x)}(x | v) + E^T(v)) + \mathbb{P}^{T(v,x)}(x \nrightarrow v)E^T(x | \bar{v}) \\ &= E^{T(v,x)}(x) + \mathbb{P}^{T(v,x)}(x \rightarrow v)E^T(v). \end{aligned}$$

□

Notons que  $\mathbb{P}^{T(v,x)}(x \rightarrow v) = \mathbb{P}^T(x \rightarrow v) = \mathbb{P}(x \rightarrow v)$ . Pour plus de commodité, nous utiliserons cette dernière notation.

**Théorème 3.3.5 [14].**

Soit  $T$  un arbre, et  $v$  un sommet de  $T$  avec  $d = d(v)$  et  $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ . Soit  $T_1, \dots, T_d$  soit une décomposition  $v$ -centrée de  $T$ . Alors

$$E^T(v) = \frac{d + \sum_{i=1}^d E^{T_i}(v_i)}{d - \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(v_i \rightarrow v)} = \frac{d + \sum_{i=1}^d \mathbb{P}^{T_i}(v_i)}{a^T(v)}.$$

*Preuve.*

Soit  $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ . alors

$$E^T(v) = 1 + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d E^{T_i}(v_i) = 1 + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (E^{T_i}(v_i) + \mathbb{P}(v_i \rightarrow v) E^T(v))$$

Dans le Lemme 3.3.1, résoudre  $E^T(v)$  et appliquer le Théorème 3.3.4

□

**Corollaire 3.3.2 [14].**

Soit  $S$  une araignée dont l'origine  $v$ . Alors  $E(v) = q(S)/m(S)$ .

*Preuve.*

Soit  $d = d(v)$  et  $L_1, \dots, L_d$  les jambes de  $S$ . Soient  $L_i$  de longueur  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Soient  $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ , et  $v_i$  appartiennent à la jambe  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Par le Théorème 3.3.2,  $E^{T(v,v_i)}(v_i) =$

$l_i - 1$  et par le Théorème 3.3.1,  $\mathbb{P}(v_i \rightarrow v) = (l_i - 1)/l_i$ . Le résultat suit maintenant par le Théorème 3.3.5.  $\square$

**Théorème 3.3.6** [14].

Soit  $T$  un arbre de diamètre  $d$ , et  $v \in T^0$ . Alors  $\mathbb{E}(v) \leq \frac{1}{4}d^2$ .

**Définition 3.3.9.** Une *patte d'extrémité* d'un arbre  $T$  est une jambe d'une araignée induite par un point de branchement qui a pour point d'extrémité dans l'araignée un point final de  $T$ .

**Lemme 3.3.2** [14].

Soit  $T$  un arbre. Supposons qu'une patte d'extrémité de longueur  $l$  avec point d'extrémité  $e$  soit attachée à un sommet  $v \in T^0$  pour former  $T'$ . Alors :

$$E^{T'}(v) - E^T(v) = \mathbb{P}^{T^0}(v \rightarrow e)(l^2 - E^T(v)).$$

*Preuve.*

Pour quelques constantes  $c$  et  $d$ , nous avons :

$$\begin{aligned} E^{T'}(v) - E^T(v) &= \frac{c+l}{d+(1/l)} - \frac{c}{d} = \frac{(1/l)}{d+(1/l)} \left( l^2 - \frac{c}{d} \right) \\ &= \mathbb{P}^{T^0}(v \rightarrow e)(l^2 - E^T(v)). \end{aligned}$$

$\square$

### 3.4 Marche aléatoire sur l'hypercube

Stanislav Volkov et Timothy Wong étudient une marche aléatoire simple sur un hypercube  $n$ -dimensionnel [19]. Pour toute position de départ, ils trouvent la probabilité de visiter le sommet  $a$  avant de visiter le sommet  $b$ , où les sommets  $a$  et  $b$  sont adjacents. Cela généralise le modèle dans [16].

Rappelons qu'un hypercube  $n$ -dimensionnel, est un graphe avec  $2^n$  sommets dans l'ensemble  $\{0, 1\}^n$ . Un sommet  $x$  d'un hypercube peut être encodé par une suite  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  où chaque  $x_i$  est soit 0 soit 1.

Deux sommets  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sont reliés par une arête, si et seulement si  $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 1$ , c'est-à-dire que  $x$  et  $y$  diffèrent dans exactement une coordonnée (par exemple quand  $n = 5$ ,  $x = (0, 1, 0, 1, 0)$  et  $y = (0, 0, 0, 1, 0)$ ). Pour deux sommets  $x$  et  $y$ , la distance entre eux est la quantité  $|x - y| := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ , qui est le plus petit nombre d'arêtes



sur le chemin reliant  $x$  et  $y$ .

Une simple marche aléatoire sur un hypercube est une particule qui se déplace d'un sommet à un autre le long des arêtes de ce graphe, avec des probabilités égales.

Probablement les références les plus pertinentes pour la marche sur l'hypercube seraient [5, 16, 18] qui bien sûr n'expirent pas l'ensemble de la littérature disponible sur ce thème.

Supposons que nous ayons deux sommets distincts  $a$  et  $b$ . Démarrer une marche aléatoire à un certain point  $X_0 = x$  et indiquer sa position à l'instant  $n$  comme  $X_n$ . Supposons que la marche s'arrête lorsqu'on atteint  $a$  ou  $b$ . L'objectif est de calculer la probabilité que  $X_n$  visite  $b$  avant de visiter  $a$ . Formellement, si

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n = a \text{ ou } b\}$$

On veut calculer

$$p_{a,b}(x) = \mathbb{P}(X_\tau = b \mid X_0 = x).$$

Bien que nous ne puissions pas répondre à cette question en général, nous pouvons le faire néanmoins dans le cas où  $a$  et  $b$  sont des voisins, c'est-à-dire reliés par une arête. Sans perte de généralités, supposons que

$$a = (0, 0, \dots, 0, 0)$$

et

$$b = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Voir Figure 3.6 pour un emplacement possible du point  $x$ .

**Théorème 3.4.1** [19].

Supposons que l'on commence une simple marche aléatoire sur l'hypercube à partir du point  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Alors la probabilité que cette promenade visite  $b$  avant  $a$ ,

est

$$p(x) = p_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i}}{2(2^n - 1) \binom{n-1}{k}}, & \text{si } x_n = 0; \\ \frac{1}{2} + \frac{\sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i}}{2(2^n - 1) \binom{n-1}{k}}, & \text{si } x_n = 1, \end{cases}$$

Où  $k = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$ .

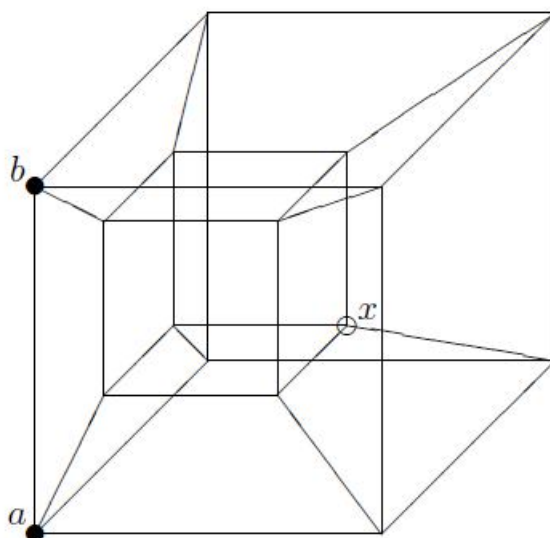


FIGURE 3.6 –  $A = (0, 0, 0, 0)$ ,  $b = (0, 0, 0, 1)$  et  $x = (1, 1, 1, 0)$ . [19]

**Remarque 4 .**

Si  $a = (0, 0, \dots, 0)$  et  $b = (1, 1, \dots, 1)$ , de sorte que les points  $a$  et  $b$  sont les points extrêmes de l'hypercube, on peut calculer  $p_{a,b}(x)$  très facilement. Cependant, à l'exception des deux cas où  $|a - b| = 1$  et  $|a - b| = n$  on ne connaît pas de formule générale pour  $p_{a,b}(x)$ .

### 3.4.1 Exemple d'application d'un marche aléatoire sur l'hypercube

L'objectif est de modéliser la perte de données dans un message chiffré, lorsque l'endroit où est stocké le message est soumis à divers aléas (chocs, changements de température ou de pression, etc.). On modélisera le message par un mot binaire

$$m(t) = (m(t))_1(m(t))_2 \dots (m(t))_N \in \{0, 1\}^N,$$

de taille  $N \geq 2$  fixée et dépendant du temps  $t$ , qu'on supposera discrétisé et appartenant à  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Le mot  $m(0)$  est le message originellement stocké (par exemple, 0101110100), et à chaque instant  $t \in \mathbb{N}$  :

- Si l'espace de stockage n'est pas modifié, alors  $m(t + 1) = m(t)$  ; ceci se produit avec probabilité  $1 - \rho$ , où  $\rho$  est un certain paramètre dans  $(0, 1)$  qui mesure la sensibilité de l'espace de stockage aux aléas extérieurs.
- Sinon, avec probabilité  $\rho$ , l'une des lettres de  $m(t)$  est modifiée. On supposera qu'une

seule lettre peut être modifiée à chaque instant, et que toutes les lettres ont la même probabilité d'être modifiées. Ainsi, pour tout  $i \in [1, N]$ , avec probabilité  $\frac{\rho}{N}$ ,

$$(m(t+1))_j = \begin{cases} (m(t))_j & \text{si } j \neq i, \\ 1 - (m(t))_i & \text{si } j = i. \end{cases}$$

On suppose par ailleurs que les aléas subis par le message à des instants différents sont indépendants. On se demande alors combien de temps on peut laisser le message  $m(t)$  se détériorer tout en récupérant au moins quelques informations concernant le message original.

Le processus de dégradation des messages constitue une chaîne de Markov  $(m(t))_{t \in \mathbb{N}}$  d'espace d'états  $E = \{0, 1\}^N$ , et de matrice de transition

$$P(m, m') = \begin{cases} 1 - \rho & \text{si } m = m', \\ \frac{\rho}{N} & \text{si } m \text{ et } m' \text{ diffèrent en exactement une lettre } i \in [1, N] \\ 0 & \text{si } m \text{ et } m' \text{ diffèrent en plus de deux lettres.} \end{cases}$$

Géométriquement, l'espace des états peut être représenté par un hypercube de dimension  $N$ , et la chaîne de Markov ci-dessus est une marche aléatoire sur cet hypercube. (voir la Figure 3.7)

Dans ce qui suit, on fixe un mot initial  $m(0)$ , et on note  $\pi_t$  la loi de  $m(t)$  :

$$\pi_t(w) = \mathbb{P}[m(t) = w]$$

où  $(m(t))_{t \in \mathbb{N}}$  est la chaîne de Markov d'espace d'états  $E$ , d'état initial  $m(0)$  et de matrice de transition  $P$ . Si l'on représente une probabilité sur  $E$  par un vecteur ligne de taille  $2^N$  dont les coordonnées sont indexées par  $E$ , alors

$$\pi_t = \pi_0 P^t, \quad \text{avec } \pi_0 = (0, \dots, 0, 1_{m(0)}, 0, \dots, 0)$$

### **Théorème 3.4.2 .**

*La chaîne de Markov  $(m(t))_{t \in \mathbb{N}}$  est irréductible, récurrente positive et apériodique, de loi invariante de mesure uniforme*

$$v(w) = \frac{1}{2^N} \quad \text{pour tout mot } w \in E$$

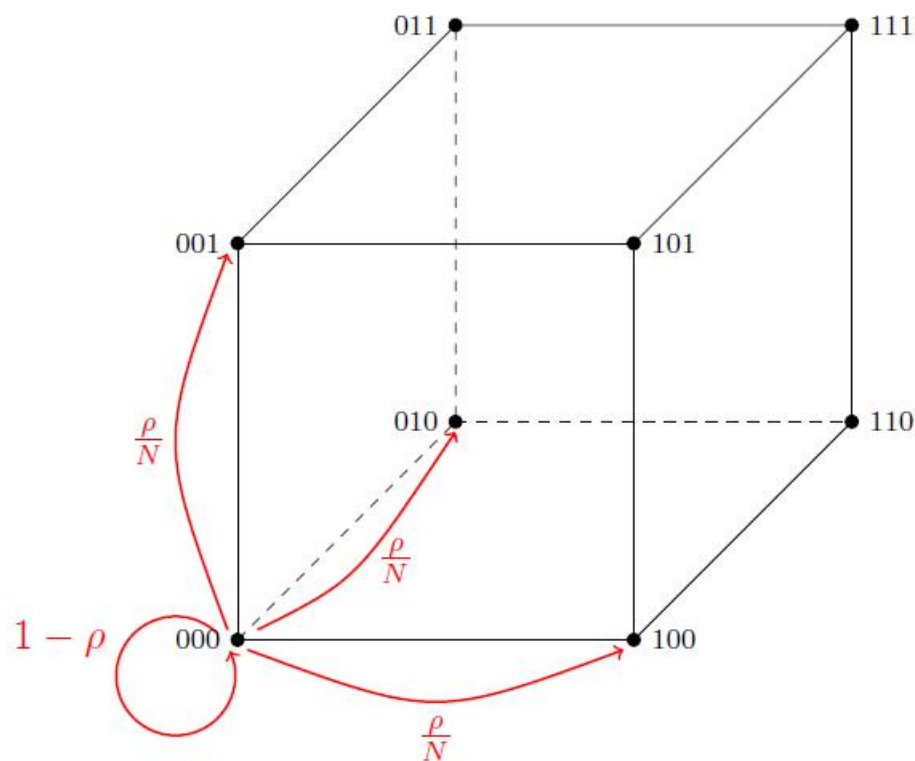


FIGURE 3.7 – Exemple de marche aléatoire sur l'hypercube

Pour tout mot initial  $m(0)$ , on a la convergence en loi

$$\forall w \in E, \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t(w) = v(w) = \frac{1}{2^N}.$$

*Preuve.*

On peut changer les lettres une à une par des transitions de la chaîne de Markov, donc celle-ci est irréductible. D'autre part, la matrice de transition  $P$  est bistochastique :

$$\forall m \in E, \sum_{m' \in E} P(m, m') = \sum_{m' \in E} P(m', m) = 1$$

Ceci implique que la mesure invariante est la loi uniforme. Finalement, comme  $P(m, m) \neq 0$  pour tout  $m$ , la matrice est apériodique. La convergence en loi découle alors du Théorème ergodique pour les chaînes irréductibles récurrentes positives et apériodiques.  $\square$

On munit  $E$  de la distance de Hamming

$$d(m, m') = \text{card} \{i \in [1, N] \mid m_i \neq m'_i\}$$

et on s'intéresse à la distribution de  $D(t) = d(m(0), m(t))$ . On a le résultat théorique suivant :

**Proposition 3.4.1 .**

Le processus  $(D(t))_{t \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov sur  $[0, N]$ , d'état initial 0 et de matrice de transition

$$Q(k, l) = \begin{cases} 1 - \rho & \text{si } l = k, \\ \frac{\rho k}{N} & \text{si } l = k - 1, \\ \frac{\rho(N - k)}{N} & \text{si } l = k + 1. \end{cases}$$

À l'aide de ce résultat, on peut calculer en fonction de  $t$  le nombre moyen  $\mathbb{E}[D(t)]$  de lettres de  $m(t)$  qui diffèrent de  $m(0)$ . En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D(t+1)] &= \sum_{k=0}^N \mathbb{E}[D(t+1) \mid D(t) = k] \mathbb{P}[D(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^N \left( (1 - \rho)k + \frac{\rho k}{N} (k - 1) + \frac{\rho(N - k)}{N} (k + 1) \right) \mathbb{P}[D(t) = k] \\ &= \rho + \sum_{k=0}^N \left(1 - \frac{2\rho}{N}\right) k \mathbb{P}[D(t) = k] = \rho + \left(1 - \frac{2\rho}{N}\right) \mathbb{E}[D(t)]. \end{aligned}$$

Les espérances  $\mathbb{E}[D(t)]$  vérifient donc une équation de récurrence d'ordre 1, dont la solution est

$$\mathbb{E}[D(t)] = \frac{N}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{2\rho}{N}\right)^t\right)$$

On peut de même, calculer

$$\text{var}(D(t)) = \frac{N}{4} \left(1 + (N - 1) \left(1 - \frac{4\rho}{N}\right)^t - N \left(1 - \frac{2\rho}{N}\right)^{2t}\right) \leq \frac{N}{4}$$

L'inégalité de Bienaymé-Chebyshev donne alors :

**Théorème 3.4.3 .**

Pour tout temps  $t$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left[ \left| \frac{D(t)}{N} - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right] \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2} \left( 1 + N \left( 1 - \frac{2\rho}{N} \right)^{2t} \right)$$

Ces calculs démontrent les faits suivants :

(1) Supposons  $N$  assez grand (disons  $N \geq 10$ ), et fixé dans  $(0, 1)$ . Le nombre de lettres modifiées  $D(t)$  dans le message  $m(t)$  est avec grande probabilité de l'ordre de  $N$  (c'est-à-dire une proportion positive du message) si et seulement si  $t$  est également au moins de l'ordre de  $N$ .

(2) Si  $t \geq \frac{N \log N}{4\rho}$ , alors  $\mathbb{P} \left[ \left| \frac{D(t)}{N} - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right] \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}$ , et on a une concentration des valeurs de  $D(t)$  autour de la valeur  $\frac{N}{2}$ .

---

## Conclusion générale

---

L'objectif de ce travail est d'étudier la marche aléatoire sur les graphes et en particulier celle définie sur les arbres et l'hypercube.

Une marche aléatoire est une chaîne de Markov finie qui est réversible. En fait, il n'y a pas beaucoup de différence entre la théorie des marches aléatoires sur les graphes et la théorie des chaînes de Markov finies; chaque chaîne de Markov peut être considérée comme une marche aléatoire sur un graphe orienté, si nous autorisons des arêtes pondérées. De même, les chaînes de Markov réversibles peuvent être considérées comme des marches aléatoires sur des graphes non orientés, et les chaînes de Markov symétriques, en tant que marche aléatoire dans des graphes symétriques réguliers.

Dans ce contexte, nous avons introduit au premier chapitre quelques notions de base de la théorie des graphes qui sont indispensables pour la bonne compréhension de ce manuscrit.

Au second chapitre, nous avons présenté les résultats de base sur les chaînes de Markov et la marche aléatoire.

Au dernier chapitre, nous avons introduit la marche aléatoire sur les graphes qui, à cause de ses multiples applications dans différents domaines, a suscité l'attention de plusieurs chercheurs.

Nous nous sommes intéressés de manière particulière à l'étude de la marche aléatoire sur les arbres et l'hypercube en mettant en avant, une application de cette dernière dans le domaine de la théorie de l'information.

---

## Bibliographie

---

- [1] D. Aldous and J. Fill. Reversible markov chains and random walks on graphs, 2002.
- [2] J. Bondy and U. Murty. *Graph Theory*.
- [3] K. L. Chung. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities : 2d Ed.* Springer, 1967.
- [4] P. Crotti. Marches aléatoires & théorie du mouvement brownien. 2009.
- [5] P. Diaconis, R. L. Graham, and J. A. Morrison. Asymptotic analysis of a random walk on a hypercube with many dimensions. *Random Structures & Algorithms*, 1(1) :51–72, 1990.
- [6] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications : volume I*, volume 3. John Wiley & Sons New York, 1968.
- [7] D. Flipo. Chaînes de markov. *Cours agrégation de mathématiques*.
- [8] F. Göbel and A. Jagers. Random walks on graphs. *Stochastic processes and their applications*, 2(4) :311–336, 1974.
- [9] F. Harary. Graph theory. 1969.
- [10] M. Kobeissi. *Plongement de graphes dans l'hypercube*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2001.
- [11] L. Lovász. Random walks on graphs. *Combinatorics, Paul erdos is eighty*, 2 :1–46, 1993.
- [12] J. Moon. Random walks on random trees. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 15(01) :42–53, 1973.
- [13] D. Müller. *Introduction à la théorie des graphes*. Commission romande de mathématique, 2012.
- [14] L. H. Pearce. Random walks on trees. *Discrete Mathematics*, 30(3) :269–276, 1980.



- 
- [15] S. Silvey. Jg kemeny and jl snell, finite markov chains (d. van nostrand co. ltd., london, 1960), 210 pp., 37s. 6d. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, 12(01) :61–62, 1960.
- [16] P. Snell and P. Doyle. Random walks and electric networks. *Free Software Foundation*, 2000.
- [17] Y. Velenik. Probabilités et statistique. *Université de Geneve*, 2011.
- [18] M. Voit. Asymptotic distributions for the ehrenfest urn and related random walks. *Journal of Applied Probability*, 33(02) :340–356, 1996.
- [19] S. Volkov and T. Wong. A note on random walks in a hypercube. *Pi Mu Epsilon journal*, pages 551–557, 2008.
- [20] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *American Journal of Mathematics*, 54(1) :150–168, 1932.

## Résumé

Une marche aléatoire sur un graphe  $G = (V, E)$ , est définie par une séquence de sommets  $x_0x_1\dots$ , où à chaque étape, on se déplace de  $x_i$  à  $x_{i+1}$ , avec une probabilité  $p = 1/d(x_i)$ , où  $d(x_i)$  est le degré du sommet  $x_i$  dans le graphe  $G$ . Il est évident que la séquence  $x_i, i = 0, 1, \dots$  définit une chaîne de Markov réversible.

Nous nous intéressons dans ce travail à l'étude de la marche aléatoire sur quelques graphes particuliers tels que les arbres et l'hypercube.

**Les mots clés:** marche aléatoire, graphes, chaînes de Markov, arbres, hypercube.

## Abstract

A random walk on a graph  $G = (V, E)$  is defined by a sequence of vertices  $x_0x_1\dots$ , where each step moves from  $x_i$  to  $x_{i+1}$ , with a probability  $p = 1/d(x_i)$ , where  $d(x_i)$  is the degree of vertex  $x_i$  in the graph  $G$ . It is evident that the sequence  $x_i, i = 0, 1, \dots$  defines a reversible Markov chain.

We are interested in this work in the study of random walk on some particular graphs such as trees and the hypercube.

**The key words:** Random walk, graphs, Markov chains, trees, hypercube.

## ملخص

يعرف السير العشوائي في الرسم البياني  $G = (V, E)$  من خلال سلسلة عقد  $x_0x_1\dots$ ، حيث في كل مرحلة ينتقل من عقدة إلى أخرى بإحتمال  $p = 1/d(x_i)$ ، علماً أن  $d(x_i)$  هو درجة العقدة  $x_i$  في الرسم البياني  $G$ . ومن الواضح أن السلسلة  $x_0x_1\dots$  تعرف سلسلة ماركوف المعكوسة.

ونحن مهتمون في هذا العمل بدراسة المشي العشوائي على بعض الرسومات البيانية الخاصة مثل الأشجار والزائدي.

**الكلمات المفتاحية:** السير العشوائي، الرسومات البيانية، سلاسل ماركوف، الأشجار، الزائدي.