UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :
N° de série :

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Zine Messaoud

Théme

Méthode de pénalisation pour les inéquations variationnelles de deuxiéme espèce

Soutenu publiquement le : 04/06/2017

Devant le jury composé de :

Mr. Chacha Djamel Ahmed	Pr. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Merabet Smail	M.C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Ghezal Abderrazek	M.C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Bensayah Abdallah	M.C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédication

Je dédie ce travail à :

Mes parents

-A mes frères

et mes sœurs,et toute la famille

- A mes chers amies

- Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.

-Et a tous mes professeurs

Remerciement

Premièrement nous remercions le dieu notre créateur. Nous remercions particulièrement notre encadreur :**Mr Bensayah Abdallah** pour son aide précieuse, sa patience et ses encouragements. Nous voulons également remercier : **Mr prof :Djamel Ahmed chacha** pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire Nos remerciements vont également aux : **Mr :Merabet Ismaîl** et **Mr Ghazal Abdelrazak** honorer de leur présence dans ce jury. Nos remerciements s'adressent également à : **Mr :Mabrouk Meflah** , Nos remerciements s'adressent également à tous ce qui n'ont aidé et n'ont permis de faire aboutir ce travail.

Notations et Préliminaires

- V : espace de Hilbert avec le produit scalaire (.,.) et la norme associée $\|.\|$.

- K : est un ensemble non vide convexe fermé de V.

- $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, continue et V-elliptique sur $V \times V$
continue :$\exists\, c > 0\ \forall u, v \in V\ \ |a(u,v)| \leq c\|u\|_V\|v\|_V$.
coercive :$\exists\, \alpha > 0\, \forall v \in V\ \ |a(v,v)| \geq \alpha\|v\|_V^2$.

- V' :l'espace dual de V.

- $\longrightarrow$ convergence forte.

- $\rightharpoonup$ convergence faible.

Table des matières

Introduction

Dans les cinquante dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil pertinent dans l'étude des problèmes non linéaires en physique et en mécanique.
En 1967 on trouve L'IV d'une façon générale par Lions-Stampacchia [7], et plus précise en 1968 les problèmes unilatéraux par Jacque-Louis Lions [22] qui permet de voir l'existence et l'unicité d'IVE, après en généralise les résultats à partir [2], qui sera ensuite également être utilisé pour étudier les problèmes de type parabolique [20] dans l'ouvrage de Duvaut et Lions[21], où on trouve des résultats de plus en plus généralise .

Ce mémoire est divisé en 3 chapitres.
Au début on commence ce mémoire par un chapitre qui contient les définitions, et les résultats fondamentaux qui seront essentiels pour comprendre les chapitres suivants .
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des inéquations variationnelles elliptiques de 2^{me} espèce linéaire et non linéaire dans le cadre Banach, et on utilisé une méthode de régularisation pour étudier l'existence et l'unicité de solutions des I.V.E de 2^{me} espace dans le cadre Hilbert.
Au troisième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des inéquations quasi-variationnelles linéaire et non linéaire dans le cadre Banach et on proposé la méthode de pénalisation pour résoudre des inéquations quasi-variationnelles dans le cadre Hilbert.

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre, nous abordons certains concepts mathématiques que nous devrions connaître pour un usage dans notre thème.

1.1 Rappels

Définition 1 *Un ensemble C est dit convexe si :*

$$\forall (x,y) \in I \qquad \forall \lambda \in]0,1[\qquad \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

Définition 2 *Soit V un espace de Banach et soit K un ensemble convexe non vide, Une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ est dit convexe lorsque :*

$\forall (x,y) \in K \qquad \forall \lambda \in [0,1], x \neq y$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Définition 3 *Soit V un espace de Banach et soit K un ensemble convexe non vide, une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe si :*

$\forall(x,y)\in K \qquad \forall\lambda\in]0,1[, x\neq y$

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Définition 4 *Soit V un espace de Banach, et Soit J une fonctionnelle convexe de V dans* $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *s.c.i pour la topologie forte. Si v_n est une suite dans V convergente vers v*

Alors

$j(v)\leq \lim_{n\to+\infty}\inf j(v_n)$

Définition 5 *Une fonction J de V dans* $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *est semi-continue supérieurement sur V s'elle satisfait*

$\forall\bar{u}\in\mathbb{R}, \lim_{u\to\bar{u}}\sup j(u)\leq j(\bar{u}).$

Définition 6 *Soit V un espace , Une fonction J de V dans* $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *est semi-continue inférieurement sur V s'elle satisfait :*

$\forall\bar{u}\in V \qquad \lim_{u\to\bar{u}}\inf j(u)\geqslant j(\bar{u})$

Définition 7 *Soit J une fonctionnelle de V dans* $\bar{\mathbb{R}}$. *et soit K un sous-ensemble convexe non vide et fermé dans V. J est propre c'est-a-dire qu'il existe un élément v_0 dans K tel que*

$J(v_0)<+\infty$.

Définition 8 *Soit l'espace V muni de produit scalaire* $(\cdot,\cdot)_V$ *et la norme* $\|\cdot\|_V$. *Soit* $A: V\to V$

(i) A est un opérateur monotone si :

$$(Au-Av,u-v)_V\geq 0,\forall u,v\in V \tag{1.1}$$

(ii) A est un opérateur strictement monotone si

$$(Au - Av, u - v)_V > 0, \forall u, v \in V, u \neq v,$$

(iii) A est fortement monotone s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m \|u - v\|_V^2 . \forall u, v \in V$$

(vi) A est un opérateur contractant s'il existe $C \in [0, 1]$ telle que :

$$\|Au - Av\|_V \leq C \|u - v\|_V , \forall u, v \in V$$

(vii) A est Lipschitzien continue s'il existe $M > 0$ telle que

$$\|Au - Av\|_V \leq M \|u - v\|_V , \forall u, v \in V$$

Définition 9 *Soit $(V, \|.\|)$ est un espace de Banach réel réflexif avec son dual $(V^*, \|.\|_*)$. un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ est dit hémicontinu si :*

$$\forall u, v \in V, l'application \quad t \in [0, 1] \longrightarrow \langle A((1 - t)u + tv), u - v\rangle est\ continue$$

où $\langle ., .\rangle$ désigne le produit de dualité entre V et V^*

Théorème 10 (point fixe de Banach) *Soit V un espace de Banach, $K \neq \varnothing$ convexe fermé, Tout application $T : K \longrightarrow K$ contractante admet un point fixe unique dans K i.e $\exists u \in K\, Tq \quad Tu = u.$*

Preuve. Voir [1] ■

Proposition 11 *Soit $(V, (.,.)_V)$ est un espace préhilprtien et soit $\phi : V \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable aux sens de Gâteaux . Les condition suivantes sont équivalentes :*

$$(a) \quad \phi \; est \; une \; fonction \; convexe; \tag{1.2}$$

$$(b) \quad \phi \textit{ satisfait l'inegalité} : \phi(v) - \phi(u) \geq (\nabla\phi(u), v-u)_V, \forall u, v \in V; \tag{1.3}$$

$$(c) \quad \textit{le gradient de} \quad \phi \textit{ est un opérateur monotone.i.e.,} : (\nabla\phi(u) - \nabla\phi(v), u-v)_V \geq 0 \forall u, v \in V. \tag{1.4}$$

Preuve. voir [13] ∎

Proposition 12 *Soit $(X, (.,.)_X)$ un espace préhilpertien et soit $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ une fonction semi continue inférieurement propre. Alors φ est borne par une fonction affine i.e.il existe $\alpha \in X$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\varphi(u) \geq (\alpha, u)_X + \beta, \forall u \in X.$$

Preuve. Voir [23] ∎

Proposition 13 *Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach , et soit K un ensemble fermé convexe non vide dans V, et $j : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors j est semi-continue inférieurement si et seulement si j est faiblement semi-continue inférieurement*

Preuve. Voir [13] ∎

Théorème 14 *Soit X un espace de Hilbert et soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone lipschitzien continue . Alors, pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tell que $Au = f$.*

Preuve. Voir [13] ∎

Corollaire 15 *Soit $(X, (.,.)_X)$ un espace préhilpertien et soit $j : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable aux sens de Gâteaux. Alors j est semi-continue inférieurement*

Preuve. Voir [23] ∎

1.2 Théorème de Projection

Théorème 16 *(Projection sur un convexe fermé). Soit V un espace de Hilbert et Soit $K \subset V$ est un ensemble convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in V$, il existe $u \in K$ unique tel que :*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$(u - f, u - v) \leq 0, \forall v \in K$$

On note $u = P_K f =$ Projection de f sur K .

Preuve. voir [1] ■

1.3 Coercivité

Définition 17 *Soit V un espace de Hilbert et soit $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est un forme bilinéaire, $a(.,.)$ est appelée coercive s'il existe une constante $c > 0$, telle que $|a(x,x)| \geq c\|x\|^2$ pour tout x dans V .*

Définition 18 *Soit V un espace de Banach avec son dual V^* et soit $K \subset V$ un ensemble convexe non vide, on dit que $A : V \longrightarrow V^*$ est coercive s'il existe $v_0 \in K$ ($v_0 = 0$ si $K = V$)*

$$\lim_{\|v\|_V \to +\infty} \frac{\langle Av, v - v_0 \rangle}{\|v\|_V} = +\infty$$

avec $\langle . \rangle$ la produit dualité entre V et V^*

1.4 Théorème de Stampacchia

Théorème 19 *(Stampacchia) Soit* V *un espace de Hilbert et soit* $a(.,.)$ *une forme bilinéaire continue et coercive sur* V*. Soit* K *un sous ensemble fermé et convexe non vide dans* V *. Ensuite, étant donné* $f \in V$ *il existe un unique* $u \in K$ *telle-que*
$a(u, v-u) \geq (f, v-u), \forall v \in K.$

Preuve. voir. [1] ■

1.5 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 20 *Soit* V *un espace de Hilbert, pour tout* $F \in V'$ *(dual de* V*), il existe un unique* $v \in V$ *telle que :*

$$F(u) = (u, v), \quad \forall u \in V$$

et en plus :

$$\|F\|_{V'} = \|v\|_V$$

Preuve. Voir [1] ■

Chapitre 2

Inéquations variationnelles de deuxième espèce

Dans ce chapitre nous présentons l'existence et l'unicité de la solution des inéquations variationnelles elliptiques de deuxième espèce, et nous étudions l'unicité de solution en utilisant une méthode de régularisation.

2.1 Inéquations variationnelles linéaires

Définition 21 *Soit V un espace de Hilbert et soit K un sous ensemble dans V convexe fermé non vide, et soit $a(.,.)$ un forme bilinéaire et soit $j : V \longrightarrow V$ une fonctionnelle , $f \in V$ On appelle Inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce linéaire toute inéquation de la forme*

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \; \forall v \in K.$$

Proposition 22 *Soient V un espace de Hilbert, $K \neq \varnothing$ convexe fermé dans V $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre convexe et semi-continue inférieurement, $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue* *et coercive , $f \in V$*

Alors l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K telle\ que \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u), \forall v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

admet une solution unique.

Preuve.

1 -L'unicité :

Supposons u_1 et u_2 solution de (2.1) alors

$$a(u_1, v-u_1) + j(v) - j(u_1) \geq (f, v-u_1)\ \forall v \in K \tag{2.2}$$

$$a(u_2, v-u_2) + j(v) - j(u_2) \geq (f, v-u_2)\ \forall v \in K \tag{2.3}$$

On pose $v = u_2$ puis $v = u_1$ respectivement dans (2.2) et (2.3) on trouve par sommation :

$$a(u_1, u_2-u_1) + a(u_2, u_1-u_2) \geq (f, u_2-u_1) + (f, u_1-u_2)$$

$$\alpha\|u_1-u_2\|^2 \leq a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq 0$$

$\Longrightarrow u_1 = u_2$ d'où l'unicité.

2 -L'existence :

On définit le problème auxiliaire pour u fixé dans K et $\rho > 0$

$$\begin{cases} Trouver\ w \in K \\ (w, v-w) + \rho j(v) - \rho j(w) \geq -\rho(a(u, v-w) - (f, v-w) + (u, v-w), \forall v \in K \end{cases} \tag{2.4}$$

Le problème (2.4) admet une solution unique (d'après le théorème de Weierstrass [6] p34)

On a L'application $T_\rho : u \longmapsto w$, w solution du problème (2.4), on montre que T_ρ admet un point fixe unique.

Il suffit de montrer que T_ρ est strictement contractante c.à.d

$\|T_\rho(u_1) - T_\rho(u_2)\| \leq C\|u_1 - u_2\| \; \forall u_1, u_2 \in V, \; C < 1$
$\|w_1 - w_2\| \leq C\|u_1 - u_2\| \; tq \; w_i = T_\rho(u_i) \; , i = 1, 2$
Alors :

$$(w_1, v - w_1) + \rho j(v) - \rho j(w_1) \geq -\rho a(u_1, v - w_1) + \rho(f, v - w_1) + (u_1, v - w_1) \quad (2.5)$$

$$(w_2, v - w_2) + \rho j(v) - \rho j(w_2) \geq -\rho a(u_2, v - w_2) + \rho(f, v - w_2) + (u_2, v - w_2) \quad (2.6)$$

On prend $v = w_2$ et $v = w_1$ respectivement dans (2.5) et (2.6) on obtient

$$-\|w_1 - w_2\|^2 \geq \rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) - (u_1 - u_2, w_1 - w_2)$$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\|^2 \leq -\rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) + (u_1 - u_2, w_1 - w_2)$$

En utilise théorème de représentation de Riesz $a(u, v) = (Au, v)$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\|^2 \leq (-\rho A(u_1 - u_2) + (u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq ((-\rho A + I)(u_1 - u_2), w_1 - w_2)$$

$$\leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|\|w_1 - w_2\|$$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\| \leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|$$

Nous montrons que $\exists \rho > 0 \;\; tq \;\; \|I - \rho A\| < 1$

$\|(I - \rho A)v\|^2 = (v - \rho Av, v - \rho Av) = (v, v) - 2\rho(Av, v) + \rho^2(Av, Av)$

$\leq \|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \rho^2\|Av\|^2$

En utilisant la coercivité $(Av, v) \geq \alpha\|v\|^2 \Longrightarrow -2\rho(Av, v) \leq -2\rho\alpha\|v\|^2$

Alors $\|(I - \rho A)v\|^2 \leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2$

$\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho\|A\|^2)\|v\|^2$

si $\rho \in \left]0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}\right[\Longrightarrow 1 - 2\alpha\rho + \rho^2\|A\|^2 < 1$

$\Longrightarrow \|I - \rho A\| < 1$ alors T_ρ est strictement contractante $\Longrightarrow T_\rho$ admet un point fixe unique .

$T_\rho u = u = w$ d'où u vérifié le problème (2.1)

■

2.2 Inéquations variationnelles non linéaires

Cette section est consacrée à l'étude d'existence et d'unicité des solutions des inéquations variationnelles d'opérateur pas forcement linéaire nommément les opérateurs monotones et hémicontinu.

Soient $(V, \|.\|)$ un espace de Banach réel réflexif avec son dual $(V^*, \|.\|_*)$ et $K \subset V$ un ensemble non vide convexe et fermé. On considère $j : K \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe semi-continue inférieurement propre et un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ monotone et hémicontinu, c'est-á-dire

$$\begin{cases} \langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in V \quad \text{(monotone)} \\ \forall u, v \in V, \text{ l'application} \quad t \in [0,1] \longrightarrow \langle A((1-t)u + tv), u - v\rangle \text{ est continue. (hémicontinu)} \end{cases} \tag{2.7}$$

où $\langle . \rangle$ désigne le produit de dualité entre V^* et V.

On va établir les conditions qui assure l'existence des solutions de l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in K \text{tel que} \\ \langle Au, v - u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{2.8}$$

pour $f \in V^*$ donnée.

Lemme 1 *Dans les hypothèses ci-dessus, un élément $u \in K$ satisfait l'inéquation (2.8) si et seulement s'il satisfait l'inéquation*

$$\langle Av, v - u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in K \tag{2.9}$$

De plus l'ensemble des solutions de l'inéquation (2.8) est un convexe fermé de V.

Preuve. Voir[[6]] ■

Le résultat essentiel de cette section est le théorème d'existence et d'unicité.

Théorème 23 *Dans les hypothèses ci-dessus, si une des trois conditions est satisfaite*

$$i) K \, est \; borné \tag{2.10}$$

$$ii) 0 \in K, j(0) = 0 \lim_{\|v\| \longrightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v \rangle + j(v)}{\|v\|} = +\infty \tag{2.11}$$

$$iii) \exists v_0 \in K tel \; que \lim_{\|v\| \longrightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v - v_0 \rangle + j(v) - j(v_0)}{\|v\|} = +\infty \tag{2.12}$$

alors, pour tout $f \in V^*$, il existe $u \in K$ solution de (2.8). De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (2.8) est un convexe fermé et borné de V (donc faiblement compact)

Si, de plus, j est strictement convexe et A est strictement monotone, soit

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \quad , \forall u, v \in V, \quad u \neq v.$$

alors la solution de l'inéquation variationnelle (2.8) est unique

Preuve. Voir[6] ■

On peut renoncer aux hypothèses (2.10)- (2.12) en demandant de plus pour l'opérateur A.

Corollaire 24 *Soient $j : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe semi-continue inférieurement propre et un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ hémicontinu et fortement monotone, i.e.*

$$\exists \alpha > 0 tel \; que \langle Au - Av, u - v \rangle \geq \alpha \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in V \tag{2.13}$$

Alors, pour tout $f \in V^*$, il existe $u \in K$ unique vérifiant (2.8).

Preuve. On montre que le hypothèses de coersivité (2.12) est satisfaite. De l'hypothèse (2.13) on obtient

$$\lim_{\|v\|\longrightarrow+\infty} \frac{\langle Av, v - v_0\rangle}{\|v\|} = +\infty \quad \forall v_0 \in K \tag{2.14}$$

D'autre part, les hypothèses faites sur j impliquent qu'il existent $\lambda \in V^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$j(v) \geq \lambda(v) + \mu \geq -\|\lambda\|_*\|v\| + \mu \quad \forall v \in K \tag{2.15}$$

De (2.14) et (2.15) nous obtenons (2.12) en prenant $v_0 \in \mathrm{dom} j = \{v \in K; j(v) < +\infty\}$ (évidemment, la fonctionnelle j étant propre, on a :$domj \neq \varnothing$) ■

2.3 Méthode de Régularisation

Nous considérons maintenant l'inéquation variationnelle (2.8) dans le cas où $K = V$, $f = 0$ et nous étudions l'existence et l'unicité de solution en utilisant une méthode de régularisation Ainsi , nous supposons que :
$A : V \to V$, $j : V \to \mathbb{R}$ sont données et nous considérons le problème suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telque} \\ (Au, v - u)_V + j(v) - j(u) \geq 0, \forall v \in V. \end{cases} \tag{2.16}$$

Soit un paramètre $\varepsilon > 0$. Nous supposons également qu'il existe une famille de fonctionnelles (j_ε) qui satisfait :

$(A).j_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$est une fonction différentiable aux sens de Gâteaux et convexe, pour chaque $\varepsilon > 0$. (2.17)

$(B).\nabla j_\varepsilon : V \to V$ est un opérateur lipschitzien continue, pour chaque $\varepsilon > 0$; (2.18)

$$\begin{cases} \text{Soit } F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ |j_\varepsilon(v) - j(v)| \leq F(\varepsilon) \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon) = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in V \text{ telle que} \\ Au_\varepsilon + \nabla j_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

2.4 Résultat de convergence

Nous avons résultat de l'existence et l'unicité et de la convergence suivant.

Théorème 25 *Soit V un espace de Hilbert. on pose $A : V \to V$ est un opérateur fortement monotone lipschitzien continue, $j : V \to \mathbb{R}$, (j_ε) est une famille de fonctionnelles qui satisfait (2.17)-(2.19) :*

(1)- Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un élément unique u_ε qui vérifié l'équation non linéaire (2.20).

(2)- La solution u_ε de (2.20) converge fortement vers la solution u de (2.16), à savoir

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans } V \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

(3)- Il existe un élément unique u qui vérifié l'inéquation variationnelle (2.16)

La preuve du théorème (25) sera réalisé en plusieurs étapes. Nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses du théorème (25) sont vérifie ; De plus, nous utilisons C pour désigner une constante positive qui peut dépendre de A , mais il est indépendant de ε.

Lemme 2 *Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un élément unique qui vérifie l'équation non linéaire (2.20)*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, en utilisant la différentiabilité aux sens de Gâteaux et l'hypothèse (2.17), et ∇j_ε l'opérateur gradient est monotone lipschitzien continue sur V. Par conséquent, étant donné que l'opérateur A est fortement monotone et lipschitzien continue, il résulte que $A + \nabla j_\varepsilon$ est un opérateur également fortement monotone lipschitzien continue sur V, le lemme 2 est une conséquence de Théorème 14 .

■

Etape 1 : Estimation a priori

Nous pouvons faire l'estimation a priori sur la solution de l'équation (2.20), ce qui implique le résultat de convergence suivant.

Lemme 3 *Il existe un élément $u \in V$ et une sous-suite de la suite $\{u_\varepsilon\}$, qui converge faiblement vers u à savoir*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ quand } \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.21}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, nous utilisons (2.20) pour obtenir

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_V + (\nabla j_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_V = 0, \forall v \in V$$

on en déduit que :

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_V + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 0, \forall v \in V \tag{2.22}$$

Nous utilisons $v = 0_V$ dans (2.22) avec

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon)_V + j_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq j_\varepsilon(0_V) \tag{2.23}$$

par l'hypothèse (2.19)-(b) en trouve :

$$\begin{aligned} j(u_\varepsilon) - F(\varepsilon) &\leq j_\varepsilon(u_\varepsilon) \\ j_\varepsilon(0_V) &\leq j(0_V) + F(\varepsilon) \end{aligned}$$

Combinons les inéquations précédant avec l'inéquation (2.23) on obtient :

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon)_V + j(u_\varepsilon) - F(\varepsilon) \leq (Au_\varepsilon, u_\varepsilon)_V + j_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq j(0_V) + F(\varepsilon),$$

implique que

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon)_V + j(u_\varepsilon) \leq j(0_V) + 2F(\varepsilon). \tag{2.24}$$

et donc

$$(Au_\varepsilon - A0_V, u_\varepsilon)_V + j(u_\varepsilon) \leq -(A0_V, u_\varepsilon)_V + j(0_V) + 2F(\varepsilon) \tag{2.25}$$

D'autre part, nous utilisons que j semi-continue inférieurement et d'après la proposition 12 il existe $\omega \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que

$$j(u_\varepsilon) \geq (\omega, u_\varepsilon) + \alpha \tag{2.26}$$

Par conséquent, la combinaison de(2.25)et(2.26)et en utilisant (Définition 8) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il en résulte que l'inéquation

$$m \|u_\varepsilon\|_V^2 \leq (\|A0_V\|_V + \|w\|_V) \|u_\varepsilon\|_V + |j(0_V)| + 2F(\varepsilon) + |\alpha|$$

Nous utilisons maintenant l'inéquation élémentaire

$$x, a, b \geq 0 \text{ et } x^2 \leq ax + b \Rightarrow x^2 \leq a^2 + 2b$$

et l'hypothèse (2.19-(b)) pour déduire que la suite $\{u_\varepsilon\}$ est bornée dans V $\forall\varepsilon \geq 0$. Lemme 3 est une conséquence du[théorème 1.19-[13]]. ■

Etape 2 : passage a la limite

Ensuite, nous étudions les propriétés de l'élément u définie dans le lemme suivant.

Lemme 4 *L'élément u satisfait l'inéquation variationnelle (2.16) et par ailleurs, cette inéquation admet une solution unique .*

Preuve. Après lemme 3 nous considérons une suite $\{u_\varepsilon\}$ telle que (2.21) est vérifiée. Soit $\varepsilon > 0$, nous utilisons (2.22) avec $v = u$ telle que

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V \leq j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon), \tag{2.27}$$

On peut écrire

$$j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) = j_\varepsilon(u) - j(u) + j(u) - j(u_\varepsilon) + j(u_\varepsilon) - j_\varepsilon(u_\varepsilon),$$

et utiliser l'hypothèse (2.19)-(a) telle que

$$j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq j(u) - j(u_\varepsilon).$$

Ensuite, nous passons à la limite supérieure quand $\varepsilon \to 0$ dans l'inéquation précédente et utiliser l'hypothèse (2.19)-(b) pour obtenir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup(j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon)) \leq j(u) - \lim_{\varepsilon\to 0} \inf j(u_\varepsilon)$$

Par conséquent, j est semi-continue inférieure en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup(j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon)) \leq 0 \tag{2.28}$$

Enfin, en passant à la limite supérieure $\varepsilon \to 0$ dans (2.27) et en utilisant (2.28) alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V \leq 0 \tag{2.29}$$

En utilisant maintenant (2.21), et de la monotonie de A, on déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V \geq (Au, u - v)_V, \forall v \in V. \tag{2.30}$$

Ensuite, nous utilisons l'inéquation (2.22) tel que

$$j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V, \forall v \in V.$$

et donc

$$j(v) + j_\varepsilon(v) - j(v) + j(u_\varepsilon) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq j(u_\varepsilon) + (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V, \forall v \in V. \tag{2.31}$$

Nous passons à la limite inférieure quand $\varepsilon \to 0$ dans (2.31) et utilisons l'hypothèse (2.19), j semi-continue inférieurement et de l'inéquation(2.30). Par conséquent, on obtient :

$$j(v) \geq j(u) + (Au, u - v). \tag{2.32}$$

Il en résulte maintenant de (2.32) que u satisfait l'inéquation variationnelle (2.16). Pour l'unicité en utilisant la fortement monotonie de l'opérateur A et était déjà présenté dans la démonstration du théorème 25. ■

Etape 3 : la convergence faible

Lemme 5 *La suite $\{u_\varepsilon\}$ converge faiblement vers l'élément u vérifie (2.16) dans V.*

Preuve. La preuve du lemme 4 montre que si u est la limite faible d'une suite faiblement convergente de la suite $\{u_\varepsilon\} \subset V$, alors u satisfait l'inéquation variationnelle (2.16). Rappelons aussi que cette inéquation variationnelle admet une solution unique et d'ailleurs, il était montré dans la démonstration du lemme 3 que la suite $\{u_\varepsilon\}$ est bornée dans V. Lemme 5 est un conséquence du [théorème 1.20-[13]] ■

La dernière étape est fournie par le résultat de la convergence forte suivant.

Etape 4 :la convergence forte

Lemme 6 *La suite* $\{u_\varepsilon\}$ *converge fortement vers l'élément* u *dans* V*,*

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans } V \text{ quand } \varepsilon \to 0 \tag{2.33}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, nous prenons $v = u$ dans (2.30) alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \inf (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V \geq 0$$

On combine cette inéquation avec (2.29) pour obtenir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V = 0 \tag{2.34}$$

D'autre part, de la convergence faible $\{u_\varepsilon\}$ vers u assureé par le lemme 5, il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (Au, u_\varepsilon - u)_V = 0 \tag{2.35}$$

A est un opérateur fortement monotone, alors

$$\begin{aligned} m\left\|u_\varepsilon - u\right\|_V^2 &\leq (Au_\varepsilon - Au, u_\varepsilon - u)_V &(2.36)\\ &\leq (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V - (Au, u_\varepsilon - u)_V &(2.37) \end{aligned}$$

La convergence (2.33) est maintenant une conséquence de (2.34) - (2.36), nous pouvons maintenant facilement fournir la preuve du théorème 25.

■

Chapitre 3

Inéquation quasi-variationnelles

Dans ce chapitre, Nous étudions l'existence et l'unicité de la solution des inéquation quasi-variationnelles dans cadre Banach, et nous résoudre inéquation quasi-variationnelle par la méthode de pénalisation dans le cas non linéaire et dans cadre Hilbert.

3.1 Inéquations quasi-variationnelles linéaire

Soit V un espace de Hilbert et soit K un ensemble non vide convexe fermé dans V
Nous considère le problème de trouve $u \in K$

$$a(u, v-u) + j(u,v) - j(u,u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in V \tag{3.1}$$

En considère le hypothèse suivant :

$$\begin{cases} a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{est un forme bilinear} \\ \text{coercive :} |a(v,v)| \geq \alpha \|v\|_V^2, \text{continue :} |a(u,v)| \leq c\|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} j : V \times V \longrightarrow (-\infty, +\infty] \quad \text{satisfaisant les condition suivant :} \\ \forall u \in V, j(u,.) : V \longrightarrow (-\infty, +\infty] \quad \text{une fonction} \\ \text{convexe, propre et semi-continue inférieurement} \\ \exists k < \alpha \text{tel que} |j(u_1, v_1) + j(u_2, v_2) - j(u_1, v_2) - j(u_2, v_1)| \\ \leq k\|u_1 - u_2\| \|v_1 - v_2\|, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in K \end{cases} \tag{3.3}$$

L'inégalité (3.1) est appelé inéquation quasi-variationnelle linéaire

3.2 Inéquations quasi-variationnelles non linéaire

Soient $(V, \|.\|)$ un espace de Banach réflexif, $(V^*, \|.\|_*)$ son dual et K un sous-ensemble non vide convexe fermé de V.
On considère un opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ et une fonctionnelle $j : V \times V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$.
Pour $f \in V^*$ donné nous considérons l'inéquation quasi-variationnelles.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{trouver } u \in K \text{ telque} \\ \langle Au, v-u\rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq \langle f, v-u\rangle, \forall v \in K \end{array} \right. \tag{3.4}$$

où $\langle . \rangle$ est le produit dualité entre V^* et V.

Théorème 26 *Soit $A : V \longrightarrow V^*$ un opérateur hémicontinu et fortement monotone, c'est -à-dire*

$$\exists \alpha > 0 \textit{ tel que } \langle Au - Av, u - v\rangle \geq \alpha \|u-v\|^2, \quad \forall u, v \in V \tag{3.5}$$

On considère une fonction $j : V \times V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ satisfaisant les condition suivant :

$$\begin{cases} \forall u \in V, j(u,.) : V \longrightarrow (-\infty, +\infty] \textit{une fonction} \\ \textit{convexe, propre et semi-continue inférieurement} \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \exists k < \alpha \quad \textit{tel que} \quad |j(u_1, v_1) + j(u_2, v_2) - j(u_1, v_2) - j(u_2, v_1)| \\ \leq k \|u_1 - u_2\| \|v_1 - v_2\|, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in K. \end{cases} \tag{3.7}$$

Alors pour tout $f \in V^*$, l'inéquation quasi-variationnelle (3.4) a une solution et une seule

Preuve. La démonstration se rélie sur le théorème de point fixe de Banach et le théorème (23) dans chapitre 2.
L'opérateur A étant fortement monotone, on obtient :

$$\frac{\langle Aw, w - v_0\rangle}{\|w\|} \leq \alpha\|w\| - 2\alpha\|v_0\| - \|Av_0\|_* + \frac{\alpha\|v_0\|^2 - \|Av_0\|_*\|v_0\|}{\|w\|}, \ \forall w, v_0 \in K. \tag{3.8}$$

$$\lim_{\|w\|\longrightarrow+\infty} \frac{\langle Aw, w-v_0\rangle}{\|w\|} = +\infty \tag{3.9}$$

De (3.6) il résulte que, pour tout $u \in K$ il existe $\lambda \in V^*$ $(\lambda = \lambda(u))$ et $\mu \in \mathbb{R}$ telle que

$$j(u,w) \geq \langle \lambda, w\rangle + \mu \geq -\|\lambda\|_*\|w\| + \mu, \quad \forall w \in K \tag{3.10}$$

De (3.9) et(3.10) on déduit que pour tout $u \in K$ on a

$$\lim_{\|w\|\longrightarrow+\infty} \frac{\langle Aw, w-v_0\rangle + j(u,w) - j(u,w_0)}{\|w\|} = +\infty \ \forall v_0 \in \ dom\ j(u,.) \tag{3.11}$$

oú dom $j(u,.) = \{v \in K; (j(u,v) < \infty\}$ Maintenant, désignons par S l'application $S : K \longrightarrow K$ qui associe à tout élément $w \in K$ la solution de l'inéquation variationnel de deuxième espèce

$$\begin{cases} Sw \in K \\ \langle A(Sw), v - Sw\rangle + j(w,v) - j(w,Sw) \geq \langle f, v - Sw\rangle \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{3.12}$$

De (3.11) et(3.5)-(3.7) en appliquant le théoréme (23) dans chapitre 2 on obtient l'existence et l'unicité de la solution de l'inéquation (3.12) donc l'application S est bien définie

Remarquons que l'ensemble des points fixes de l'application S coincide à l'ensemble des solutions de l'inéquation quasi-variationnelle (3.4). Ainsi, l'existence et l'unicité des solutions de l'inéquation quasi-variationnelle (3.4) se réduit à l'existence et l'unicité des points fixes de l'application S.

On va montrer que l'application S est une contraction. En effet, pour $w_1, w_2 \in K$ arbitraires, soient Sw_1 et Sw_2 les solutions correspondantes de l'inéquation (3.12). Par additions des deux inégalités pour $v = Sw_2$ et, respectivement, $v = Sw_1$ on obtient, en utilisant (3.5) et (3.7) :

$$\|Sw_1 - Sw_2\| \leq q\|w_1 - w_2\| \tag{3.13}$$

avec $q = \dfrac{k}{\alpha} < 1$ Il en résulte, du théorème de point fixe de Banach, que L'application S a un point fixe unique soit la solution unique de l'inéquation quasi-variationnelle (3.4). ■

3.3 Méthode de pénalisation

Nous proposons une extension de l' existence et l'unicité résultat d'inéquation quasi-variationnelle. Soit V est un espace de Hilbert, $A : V \to V$ un opérateur et $K \subset V$ un sous-ensemble; et notée $(.,.)_V$ le produit scalaire dans V. Nous considérons le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ telleque} \\ (Au, v-u)_V + j(u,v) - j(u,u) \geq 0, \forall v \in K \end{cases} \quad (3.14)$$

l'inéquation de forme (3.14) est appelée inéquation quasi-variationnelle . Dans l'étude de (3.14), nous considérons que le hypothèse suivant :

$$A : V \to V \text{est un opérateur fortement monotone Lipschitzien continue} \quad (3.15)$$

et $j : V \times V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ satisfait le condition

$$\begin{cases} \forall u \in V, \quad j(u,.) : V \longrightarrow (-\infty, +\infty] \quad \text{une fonction} \\ \text{convexe, propre et semi-continue inférieurement} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \exists k < \alpha \text{tel que} |j(u_1, v_1) + j(u_2, v_2) - j(u_1, v_2) - j(u_2, v_1)| \\ \leq k \|u_1 - u_2\| \|v_1 - v_2\|, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in K. \end{cases} \quad (3.17)$$

Théorème 27 *Soit les hypothèses (3.15)-(3.17) est satisfait , le problème (3.14)est équivalent à le problème de trouve $u^\eta \in K$ suivant :*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u^\eta \in K \textit{ telle que} \\ (Au^\eta, v - u^\eta)_V + j_\eta(v) - j_\eta(u^\eta) \geq 0, \forall v \in K \end{cases} \quad (3.18)$$

avec $j_\eta(v) = j(\eta, v)$ pour η fixé dans K

Preuve. Nous supposons que les hypothèses (3.15)-(3.17) sont satisfaits et on considère le problème (3.18).

Lemme 7 *pour tout $\eta \in K$,il existe une solution unique de (3.18)*

Preuve. On a A est un opérateur fortement monotone Lipschitzien continue et j_η satisfait (3.16) on applique la corolaire 24 dans chapitre 2 donné qu'il existe un solution unique de (3.18) pour tout $\eta \in K$. ∎

On utilise lemme (7) pour définie une opérateur $T : K \longrightarrow K$ tel que $T_\eta = u_\eta$.

Et Nous continue le suivant pour résultat de point fixe de Banach

Lemme 8 *si $\alpha > k$ alors T admet un point fixe unique*

Preuve. soit $\eta_1, \eta_2 \in K$ et soit u_i dénote la solution de (3.18) pour $\eta = \eta_i$,i.e.,$u_i = u^{\eta_i}$ on obtient :

$$(Au_1, v - u_1)_V + j(\eta_1, v) - j(\eta_1, u_1) \geq 0, \forall v \in K$$
$$(Au_2, v - u_2)_V + j(\eta_2, v) - j(\eta_2, u_2) \geq 0, \forall v \in K$$

on choix $v = u_2$ dans le premier inégalité et $v = u_1$ dans le deuxième inégalité, et par addition on obtient :

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V \leqslant j(\eta_1, u_2) - j(\eta_1, u_1) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2)$$

On utilise les hypothèse (3.15) et (3.17) on trouve : $\|u_1 - u_2\|_V \leqslant \frac{k}{\alpha}\|\eta_1 - \eta_2\|_V$
si $\alpha > k$ la dernier inégalité donnée que l'opérateur T admet un point fixé unique ■
preuve de théorème 27 : le théorème 27 est un résultat de lemme 7 et lemme 8 ■
· La théorème 27 donnée pour utilise méthode de pénalisation pour inéquation quasi-variationnelle, il suffit à applique cette méthode pour inéquation variationnelle de deuxième espèce

3.3.1 Problème pénalisé

Nous étudions maintenant l'unicité de la solution d'inéquation variationnelle (3.18) en utilisant une méthode de pénalisation. On supposé dans ce suit $A : V \to V$ et nous considérons β un opérateur qui satisfait les conditions suivant :

$$(a) \quad \beta : V \to V \text{ est un opérateur monotone lipschitzien continu} \tag{3.19}$$
$$(\beta u, v - u)_V \leq 0 \forall u \in V, v \in K; \tag{3.20}$$
$$(c) \quad \beta u = 0_V \text{ ssi } u \in K. \tag{3.21}$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$ nous considérons le problème de trouver un élément $u_\varepsilon^\eta \in V$ telle que

$$\begin{cases} \text{trouver } u_\varepsilon^\eta \in V \text{ telleque} \\ (Au_\varepsilon^\eta, v - u_\varepsilon^\eta)_V + j_\eta(v) - j_\eta(u_\varepsilon^\eta) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, v - u_\varepsilon^\eta) \geq 0, \forall v \in V \end{cases} \tag{3.22}$$

3.3.2 Régularisation de j_η

Soit un paramètre $\rho > 0$. Nous supposant également qu'il existe une famille de fonctionnelles (j_η^ρ) qui satisfait :

$(A).j_\eta^\rho : V \to \mathbb{R}$: est une fonction différentiable aux sens de Gâteaux et convexe, pour chaque $\rho > 0$. (3.23)

$(B).\nabla j_\eta^\rho : V \to V$ est un opérateur lipschitzien continue, pour chaque $\rho > 0$; (3.24)

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{soit } F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ \left| j_\eta^\rho(v) - j_\eta(v) \right| \leq F(\rho) \\ \lim\limits_{\rho \to 0} F(\rho) = 0 \end{array} \right. \tag{3.25}$$

Pour chaque $\rho > 0$, nous considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{trouver } u_{\varepsilon,\rho}^\eta \in V \text{ telleque} \\ A u_{\varepsilon,\rho}^\eta + \nabla j_\eta^\rho(u_{\varepsilon,\rho}^\eta) + \frac{1}{\varepsilon}\beta u_{\varepsilon,\rho}^\eta = 0 \end{array} \right. \tag{3.26}$$

3.3.3 Résultat de convergence

Nous montrer la convergence $u_{\varepsilon,\rho}^\eta \longrightarrow u_\varepsilon^\eta$ pour $\rho \longrightarrow 0$ et la convergence $u_\varepsilon^\eta \longrightarrow u^\eta$ pour $\varepsilon \longrightarrow 0$

Convergence par rapport à ρ

pour montre que $u_{\varepsilon,\rho}^\eta \longrightarrow u_\varepsilon^\eta$ vérifie (3.22) quand $\rho \longrightarrow 0$ on applique le théorème 25 dans chapitre 2. On a l'opérateur $F = A + \frac{1}{\varepsilon}\beta$ est un opérateur fortement monotone lipschitzien continue et j_η^ρ satisfait (3.23)-(3.25) donc toute les conditions des théorème 25 dans chapitre 2 sont satisfaites .

Par conséquence $u_{\varepsilon,\rho}^\eta \longrightarrow u_\varepsilon^\eta$ quand $\rho \longrightarrow 0$ vérifie

$$(F u_\varepsilon^\eta, v - u_\varepsilon^\eta)_V + j_\eta(v) - j_\eta(u_\varepsilon^\eta) \geq 0, \forall v \in V$$

et donc

$$(A u_\varepsilon^\eta, v - u_\varepsilon^\eta)_V + j_\eta(v) - j_\eta(u_\varepsilon^\eta) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, v - u_\varepsilon^\eta) \geq 0, \forall v \in V$$

$\Longrightarrow u_\varepsilon^\eta$ satisfait (3.22)

Convergence par rapport á ε

Nous avons résultat de l'existence et l'unicité et de la convergence par rapport à ε suivant :

Théorème 28 *Soit V un espace de Hilbert et soit $K \subset V$ un convexe fermé non vide. Supposons que $A : V \to V$ est un opérateur fortement monotone lipschitzien continue, β est un opérateur qui satisfait (3.19-3.20-3.21) alors :*

(1). pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un élément unique u_ε^η qui vérifié l'inéquation (3.22).

(2). u_ε^η solution de (3.22) converge faiblement vers la solution u^η de (3.18), c'est à dire :

$$u_\varepsilon^\eta \rightharpoonup u^\eta \text{ dans } V \text{ quand } \varepsilon \to 0. \tag{3.27}$$

La démonstration du théorème 28 sera réalisée en plusieurs étapes. Nous supposons dans qui suit les hypothèses du (3.19)-(3.21) . Nous utilisons C un constante positive qui ne dépend pas de ε.

Lemme 9 *Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un élément u_ε^η unique qui vérifié l'inéquation (3.22).*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Nous utilisons la méthode de Régularisation pour l'inéquation (3.22), cette méthode donnée que (3.22) admet une solution unique ■

Etape 1 : Estimation a priori

Ensuite, Nous pouvons faire l'estimation a priori sur la solution de l'inéquation (3.22), qui impliquent le résultat de convergence suivant.

Lemme 10 *Il existe un élément $u^\eta \in V$ et un sous-suite $\{u_\varepsilon^\eta\}$ qui converge faiblement vers u^η, à savoir*

$$u_\varepsilon^\eta \rightharpoonup u^\eta \text{ dans } V \text{ quand } \varepsilon \to 0. \tag{3.28}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $v_0 \in K$. Nous utilisons (3.22) pour obtenir

$$(Au_\varepsilon^\eta, v_0 - u_\varepsilon^\eta)_V + j_\eta(v_0) - j_\eta(u_\varepsilon^\eta) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, v_0 - u_\varepsilon^\eta)_V \geq 0$$

et donc

$$(Au_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v_0)_V \leq j_\eta(v_0) - j_\eta(u_\varepsilon^\eta) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, v_0 - u_\varepsilon^\eta)_V$$

on a :

$$(Au_\varepsilon^\eta - Av_0, u_\varepsilon^\eta - v_0)_V = (Au_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v_0)_V + (Av_0, v_0 - u_\varepsilon^\eta)_V$$

on utilise l'inégalité précédent voir que

$$(Au_\varepsilon^\eta - Av_0, u_\varepsilon^\eta - v_0)_V \leq (Av_0, v_0 - u_\varepsilon^\eta)_V + j_\eta(v_0) - j_\eta(u_\varepsilon^\eta) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, v_0 - u_\varepsilon^\eta)_V$$

en utilise la monotonie de β on obtient :

$$(Au_\varepsilon^\eta - Av_0, u_\varepsilon^\eta - v_0)_V \leq (Av_0, v_0 - u_\varepsilon^\eta)_V + j_\eta(v_0) - j_\eta(u_\varepsilon^\eta) \tag{3.29}$$

Comme j est semi-continue inférieur d'après proposition 12 on trouve.

$$\exists w \in V et \alpha \in \mathbb{R} \quad j_\eta(u_\varepsilon^\eta) \geq (w, u_\varepsilon^\eta)_V + \alpha \tag{3.30}$$

Nous remplace (3.30)dans (3.29) implique

$$(Au_\varepsilon^\eta - Av_0, u_\varepsilon^\eta - v_0)_V \leq (Av_0, v_0 - u_\varepsilon^\eta)_V + j_\eta(v_0) - (w, u_\varepsilon^\eta)_V - \alpha$$

Ensuite, Nous utilisant qui A fortement monotone et de (8-ii) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz en déduit que

$$m \|u_\varepsilon^\eta - v_0\|_V^2 \leq \|Av_0\|_V \|v_0 - u_\varepsilon^\eta\|_V + |j_\eta(v_0)| + \|w\|_V \|u_\varepsilon^\eta\| + |\alpha| \tag{3.31}$$

on prend $v_0 = 0$ dans (3.31) on obtient

$$m \|u_\varepsilon^\eta\|_V^2 \leq (\|A0_V\|_V + \|w\|_V) \|u_\varepsilon^\eta\|_V + |j_\eta(o_V)| + |\alpha|$$

Nous utilisons maintenant l'inéquation élémentaire

$$x, a, b \geq 0 \text{ et } x^2 \leq ax + b \Rightarrow x^2 \leq a^2 + 2b$$

Il résulte qu'il existe $C > 0$ indépendant de ε telle que

$$\|u_\varepsilon^\eta\| \leq C \tag{3.32}$$

Et par conséquent,la suite $\{u_\varepsilon^\eta\}$ est bornée dans V. Lemme 10 est un conséquence du [théorème 1.19-[13]].

■

Etape 2 : passage a la limite

Ensuite, nous étudions les propriétés de l'élément u^η définie dans le lemme 10.

Lemme 11 *L'élément u^η satisfait l'inéquation variationnelle (3.18)*

Preuve. Après lemme10, nous considérons la suite $\{u_\varepsilon^\eta\}$ telle que (3.28) vrais. Soit $\varepsilon > 0$ et soit v un élément arbitraire dans V ; nous utilisons (3.22) alors :

$$(Au_\varepsilon^\eta, v - u_\varepsilon^\eta)_V + j_\eta(v) - j_\eta(u_\varepsilon^\eta) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, v - u_\varepsilon^\eta) \geq 0$$

implique que

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v) \leq (Au_\varepsilon^\eta - Av, v - u_\varepsilon^\eta)_V + (Av, v - u_\varepsilon^\eta)_V + j_\eta(v) - j_\eta(u_\varepsilon^\eta)$$

Nous utilisons que j_η est semi-continue inférieur et de (3.30) et l'inégalité Cauchy-Schwartz en trouve

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v) \leq \|Au_\varepsilon^\eta - Av\|_V \|v - u_\varepsilon^\eta\|_V + \|Av\|_V \|v - u_\varepsilon^\eta\|_V + |j_\eta(v)| + \|w\|_V \|u_\varepsilon^\eta\| + |\alpha|$$

ce qui implique l'opérateur A est lipschitzien , et de (8-vi) en obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v)_V \leq M \|v - u_\varepsilon^\eta\|_V^2 + \|Av\|_V \|v - u_\varepsilon^\eta\|_V + \|w\|_V \|u_\varepsilon^\eta\|_V + |\alpha|$$

Ensuite, nous utilisons (3.32) et l'inéquation précédente pour montrer qu'il existe une C constante positive qui dépend de v, mais est indépendante de ε telle que :

$$(\beta u_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v)_V \leq C\varepsilon \tag{3.33}$$

Nous prenons maintenant $v = u^\eta$ dans (3.33), puis nous passons à la limite supérieure que $\varepsilon \to 0$ dans l'inéquation résultant pour obtenir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup(\beta u_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - u^\eta)_V \leq 0$$

Par conséquent, en utilisant l'hypothèse (3.19)-(a) et la convergence (3.28) on déduit que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf(\beta u_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v)_V \geq (\beta u^\eta, u^\eta - v)_V, \forall v \in V. \tag{3.34}$$

D'autre part, l'inéquation (3.33) implique que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}(\beta u_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v)_V \leq 0, \forall v \in V. \tag{3.35}$$

par sous traction les inéquations (3.34) et (3.35) de voir que

$$(\beta u^\eta, u^\eta - v)_V \leq 0 \forall, v \in V$$

Et prendre $v = u^\eta - \beta u^\eta$ dans cette inéquation donne

$$\|\beta u^\eta\|_V^2 \leq 0$$

On déduit que $\beta u^\eta = 0_V$ et, en utilisant l'hypothèse (3.21)-(c) on obtient :

$$u^\eta \in K \tag{3.36}$$

Ensuite, nous utilisons l'inéquation (3.22) tel que

$$(Au_\varepsilon^\eta, v - u_\varepsilon^\eta)_V + j_\eta(v) - j_\eta(u_\varepsilon^\eta) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, v - u_\varepsilon^\eta) \geq 0, \forall v \in K$$

et en utilisant l'hypothèse (3.20)-(b), nous trouvons que

$$(Au_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v)_V - j_\eta(v) + j_\eta(u_\varepsilon^\eta) \leq \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon^\eta, v - u_\varepsilon^\eta) \leq 0, \forall v \in K$$

en trouve De ce qui précède

$$(Au_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v)_V - j_\eta(v) + j_\eta(u_\varepsilon^\eta) \leq 0 \forall v \in K \tag{3.37}$$

Nous utilisons maintenant (3.36) et de prendre $v = u$ dans (3.37), puis nous passons à la limite supérieure que $\varepsilon \to 0$ dans l'inéquation résultant et on utiliser la convergence faible (3.28). En conséquence, on trouve

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}[(Au_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - u^\eta)_V - j_\eta(u^\eta) + j_\eta(u_\varepsilon^\eta)] \leq 0 \tag{3.38}$$

En utilisant la définition 6 (monotonie de A) et la convergence faible(3.28) et j_η est semi-continue inférieure, on trouve que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}[(Au_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v)_V - j_\eta(v) + j_\eta(u_\varepsilon^\eta)] \geq (Au^\eta, u^\eta - v)_V - j_\eta(v) + j_\eta(u^\eta), \forall v \in V \tag{3.39}$$

D'un autre côté, en passant la limite inférieure quand $\varepsilon \to 0$ in (3.37) les rendements

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf[(Au_\varepsilon^\eta, u_\varepsilon^\eta - v)_V - j_\eta(v) + j_\eta(u_\varepsilon^\eta)] \leq 0, \forall v \in K. \tag{3.40}$$

Nous combinons maintenant les inéquations (3.39) et (3.40) voir que

$$(Au^\eta, u^\eta - v)_V - j_\eta(v) + j_\eta(u^\eta) \leq 0, \forall v \in K,$$

et donc

$$(Au^\eta, v - u^\eta)_V + j_\eta(v) - j_\eta(u^\eta) \geq 0, \forall v \in K. \tag{3.41}$$

Il en résulte maintenant de (3.36) et (3.41) que u^η satisfait l'inéquation variationnelle (3.18), en conséquence de la première partie du lemme. Pour l'unicité de la solution en utilisant fortement monotonie de l'opérateur A et était déjà présenté dans la démonstration du théorème 28 . ■

Etape 3 :la convergence faible

Lemme 12 *L'ensemble de la suite $\{u_\varepsilon^\eta\}$ converge faiblement vers l'élément u^η vérifie (3.18) dans V .*

Preuve. Examen attentif de la preuve du lemme 11 montre que si u^η est la limite faible d'une suite faiblement convergente de la suite $\{u_\varepsilon^\eta\} \subset V$, alors u^η satisfait l'inéquation variationnelle (3.18). Rappelons également que cette inéquation variationnelle a une solution unique et de plus,de preuve du lemme 10 que la suite $\{u_\varepsilon^\eta\}$ est bornée dans V.Lemme 12 est un conséquence du [théorème 1.20-[13]] ■

Nous pouvons maintenant facilement fournir la preuve du théorème 28. Preuve les points (1)et(2) du théorème 28 sont des conséquences directes des lemmes 9,12 , respectivement.

Conclusion

Dans ce travail, on étudie l'existence et l'unicité d'inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce et inéquation quasi-variationnelle dans cadre Banach, et nous résoudre d'inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce non linéaire et inéquation quasi-variationnelle non linéaire par la méthode pénalisation dans cadre Hilbert
Pour les perspectives, il serait intéressant de trouver

1. La convergence fort de la suit de pénalisation u_ε^η

2. L'existence et l'unicité d'IV parabolique dans le cadre Banach

3. L'existence et l'unicité d'IV hyperbolique dans le cadre Banach

Bibliographie

[1] H.Brézes,Analyse fonctionnelle théories et application.Dunod 1999.

[2] R.Glowinski.Lectures on Numerical Methods For Non-Linear variational Problems.Bombay 1980.

[3] A.Signorini,Sopra alcune questioni di elastostatica, Atii Societa Italianna per il Progresso della Scienze, 1933.

[4] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964.

[5] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[6] Anca Capatina,Variational Inequalities and Frictional Contact Problems. Advances in Mechanics and Mathematics Volume 31,

[7] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967.

[8] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1, 1-168, 1972.

[9] H. Brézis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1, 115-175, 1968.

[10] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a Nato Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[11] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire Dunod, Paris, 1969.

[12] U. Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[13] M. Sofonea, A.Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics /London Mathematical Society Lecture Note Series : 398

[14] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[15] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[16] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières, Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.

[17] J. T. Oden and N. Kikuchi,Theory of Variational Inequalities with Applications to Problems of Flow Through Porous Media ,The University of Texas at Austin, Austin, TX 78712, U.S.A./

[18] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1984.

[19] Younes Mellak,Résolution des inéquations variationnelle par la méthode de pénalisation,memoir de master 2016,Universite Kasdi Merbeh,Ouargla

[20] Matthew Rudd and Klaus Schmitt, Variational Inequalities of Elliptic and Parabolic Type, Salt Lake City, Utah 84112-0090,May 20,2002.

[21] G.Duvaut J.L.Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Berlin Heidelberg New York,1976.

[22] Jacques-Louis Lions, sur les Problèmes Unilatérale, Seminaire N. bourbaki, 1968-1969, exp. n350,p.<http ://archive.numdam.org/ARCHIVE/SB/SB-1968-1969-11-/SB-1968-1969-11-55-0/SB-1968-1969-11-55-0.>

[23] M.Sofonea,A.Matei, Variational inequalities withe application, Advances in Mechanics and Mathematics Volume 18,

ملخص:

في هذا العمل قمنا بحل مسائل ذات قيود معرفة بمسائل متراجحات تغايراتية الشبيهة بالقطع الناقص من الصنف الثاني و مسائل متراجحات شبه تغايراتية بطريقة المعاقبة و دراسة وحدانية الحل .

كلمات مفتاحية : مسائل متراجحات تغايراتية الشبيهة بالقطع الناقص من الصنف الثاني, متراجحات شبه تغايراتية, طريقة المعاقبة, طريقة الصقالة

Abstract

In this work we solve problems with constrains of inequalities type formulated by variational inequality elliptic of second kind and quasi-variational inequality by the penalty method, and study existence and uniqueness of solution.

Keywords :Penalty method, quasi-variational inequality, variational inequality of second kind, Regularization.

Résumé

Dans ce travail on résoudre de problème avec contraintes de type inégalité formulés par d'inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce, et 'inéquation quasi-variationnelle par la méthode de la pénalisation,et étudié l'existence et l'unicité de solution.

Mots clés :Inéquation quasi-variationnelle ,Inéquation variationnelle elliptique deuxième espèce,méthode de pénalisation,Régularisation