طريقة عددية لحل معادلة تكاملية ذات الرتب الكسرية باستعمال كثيرات حدود لوجندر

نصير نور الهدى

تحت إشراف الأستاذ: عباسي حسين

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

قسم الرياضيات - كلية الرياضيات و علوم المادة-جامعة قاصدي مرباح ورقلة

nouralhouda8@gmail.com

الكلمات المفتاحية: التكامل الكسري , الاشتقاق الكسري , كثيرات حدود لوجندر , مصفوفة العمليات.

مقدمة

المعادلات التكاملية التفاضلية تلعب دورا بارزا في حل المشاكل الفيزيائية و لقد تعددت الطرق لحلها سواء أكان حلا تحليليا أو حلا عدديا، سنهتم في هذا العمل بحل جملة من المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الرتب الكسرية كما يلي:

$$\begin{cases} a(x)\dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{x^\alpha}+b(x)\dfrac{\partial^\beta u(x,t)}{x^\beta}=f(x,t) \\ u(x,0)=g(x) \qquad u(0,t)=h(t) \end{cases} \qquad (1)$$

حيث ان $\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{x^\alpha}$ و $\frac{\partial^\beta u(x,t)}{x^\beta}$ مشتقات كسرية لكابيتو $\alpha>0$, $\beta\le 1$, $a(x)$,$f(x,t)$ و $b(x)$ دوال معلومة و $u(x,t)$ تابع مجهول.

هذه الطريقة تعتمد على تحويل جملة المعادلات السابقة باستعمال كثيرات حدود لوجندر، إلى جملة معادلات جبرية غير خطية قابلة للحل بسهولة بطرق معروفة.

1. تعاريف في التكامل و الإشتقاق الكسري

من المعروف أن التكامل والاشتقاق يكون من الدرجة n حيث n عدد طبيعي أما في هذا الفصل نتطرق الى التكامل والاشتقاق من درجة α حيث α عدد عشري ونذكر منه مايلي:

تعريف 1.1. يعرف التكامل الكسري لريمان ليوفيل ذي الرتبة α, $(\alpha\ge 0)$ على النحو التالي [1] :

$$I^\alpha u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}u(\tau)d\tau, \qquad t>0, \qquad (2)$$
$$I^0 u(t)=u(t),$$

حيث أن $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ هي دالة غاما.

التكامل الكسري لريمان ليوفيل تحقق الخصائص التالية :

$$I^\alpha I^\beta u(t)=I^\beta I^\alpha u(t),$$
$$I^\alpha I^\beta u(t)=I^{\alpha+\beta}u(t), \qquad (3)$$
$$I^\alpha t^r=\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)}t^{\alpha+r}.$$

تعريف 1.2. يعرف الإشتقاق الكسري لكابيتو ذي الرتبة α, $\alpha\ge 0$ على النحو التالي [1]:

$$D_*^\alpha u(t)=\frac{1}{\Gamma(r-\alpha)}\int_0^t \frac{u^r(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-r+1}}d\tau, \qquad (4)$$
$$0\le r-1<\alpha<r.$$

وبشكل خاص يحقق المؤثر D_*^α الخواص التالية:

$$D_*^\alpha c=0,$$

$$D_*^\alpha t^\beta=\begin{cases}0, & \beta\in\mathbb{N}_0, \beta<\lceil\alpha\rceil, \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}t^{\beta-\alpha}, & \beta\in\mathbb{N}_0, \beta\ge\lceil\alpha\rceil; \beta\notin\mathbb{N}, \beta>\lfloor\alpha\rfloor,\end{cases} \qquad (5)$$

$$D_*^\alpha I^\alpha u(t)=u(t),$$
$$I^\alpha D_*^\alpha u(t)=u(t)-\textstyle\sum_{k=0}^{r-1}u^{(k)}(0^+)\frac{t^k}{k!}, \quad t>0,$$
$$D_*^\alpha(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda D_*^\alpha(f(t))+\mu D_*^\alpha(g(t)).$$

2. كثيرات حدود لوجندر و بعض خصائصه

تعرف كثيرات حدود لوجندر على المجال $[0,1]$ بالعلاقة التالية [2]:

$$P_{i+1}(t)=\frac{(2i+1)(2t-1)}{(i+1)}P_i(t)-\frac{i}{i-1}P_{i-1}(t), \qquad i=1,2,\ldots, \qquad (6)$$

حيث أن $P_0(t)=1, P_1(t)=2t-1$. ويمكن أيضا كتابة كثير حدود لوجندر من درجة i كمايلي:

$$P_i(t)=\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}\frac{(i+k)!}{(i-k)!}\frac{t^k}{(k!)^2}. \qquad (7)$$

ان كثيرات حدود لوجندر من الدرجة n تشكل أساس الفضاء $L^2(0,1)$ ليكن:

$$\Phi(t)=[P_0(t),P_1(t),\ldots,P_n(t)]^T, \qquad (8)$$

يمكن التعبير عن معادلة كثير حدود لوجندر (6) على شكل مصفوفة كالتالي:

$$\Phi(t)=AT_n(t), \qquad (9)$$

جيث أن :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & (-1)^2 2! & 0 & \cdots & 0 \\ (-1)^2 & (-1)^3\frac{3!}{1!} & (-1)^4\frac{4!}{2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n & (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n-1)!} & (-1)^{n+1}\frac{(n+2)!}{(n-2)!2!} & \cdots & (-1)^{2n}\frac{(2n)!}{n!} \end{bmatrix},$$

$$T_n(t)=[1,t,\ldots,t^n]^T.$$

من الواضح أن

$$T_n(t)=A^{-1}\Phi(t). \qquad (10)$$

3. تقريب تابع

لتكن الدالة $u(t)\in L^2(0,1)$

نقوم بتقريبها بدوال لوجندر من الدرجة n على النحو التالي:

$$u(t)\cong\sum_{i=0}^{n}c_iP_i(t)=c^T\Phi(t), \qquad (11)$$

حيث أن $c=[c_0,c_1,\ldots,c_n]^T$

$c_i=(2i+1)\int_0^1 u(t)P_i(t)dt, \quad (i=0,1,2,\ldots,n)$, هي معاملات لوجندر .

الدالة $u(x,t)\in L^2([0,1]\times[0,1))$, يمكننا أيضًا الحصول على تقريبها باستخدام كثير حدود لوجندر :

$$u(x,t)\cong\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}u_{ij}P_i(x)P_j(t)=\Phi^T(x)U\Phi(t), \qquad (12)$$

حيث أن

$$U=\begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0n} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n0} & u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

4. مصفوفة العمليات

في هذا الجزء نقوم بتعريف مصفوفة العمليات للتكامل الكسري وهي كالتالي [3] :

ليكن $\Phi(x)$ أساس كثيرات حدود لوجندر لدينا :

$$I^\upsilon\Phi(x)\simeq A^\upsilon\Phi(x), \qquad (14)$$

حيث أن A^υ هي مصفوفة العمليات للتكامل الكسري من درجة $(N+1)(N+1)$

$$A^\upsilon=\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{0}\xi_{0,0,k} & \sum_{k=0}^{0}\xi_{0,1,k} & \cdots & \sum_{k=0}^{0}\xi_{0,N,k} \\ \sum_{k=0}^{1}\xi_{1,0,k} & \sum_{k=0}^{k=1}\xi_{1,1,k} & \cdots & \sum_{k=0}^{1}\xi_{1,N,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{i}\xi_{i,0,k} & \sum_{k=0}^{i}\xi_{i,1,k} & \cdots & \sum_{k=0}^{i}\xi_{i,N,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{N}\xi_{N,0,k} & \sum_{k=0}^{N}\xi_{N,1,k} & \cdots & \sum_{k=0}^{N}\xi_{N,N,k} \end{pmatrix},$$

حيث أن:

$$\xi_{i,j,k}=(2j+1)\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^{i+j+k+l}(i+k)!(l+j)!}{(i-k)!k!(k+\alpha+1)(j-1)!(l!)^2(k+l+\alpha+1)}.$$

5. تطبيق عددي

نقوم في هذا الفصل بحل معادلات تكاملية باستخدام كثيري حدود لوجندر (في طور الانجاز)

الملخص

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم طريقة عددية لحل معادلة تكاملية ذات الرتب الكسرية باستعمال كثير حدود لوجندر و مختلف مصفوفات العمليات الخاصة به حيث نحول تلك المعادلات التفاضلية التكاملية إلى جملة معادلات جبرية غير خطية تحل بطريقة تكرارية معروفة.

المراجع

[1] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, NY, USA, 1999.

[2] A. Saadatmandi and M. Dehghan, "A new operational matrix for solving fractional-order differential equations," Computers andMathematics with Applications, vol. 59, no. 3, pp. 1326–1336, 2010.

[3] M. H. Akrami, M. H. Atabakzadeh and G. H. Erjaee, "The operational matrix of fractional integration for shifted Legendre polynomials" Iranian Journal of Science Technology,IJST (2013) 37A4: 439-444.