ETUDE DES E.D.S MULTIDIMENSIONNELLES LINEAIRE Á BRUIT MULTIPLICATIF

CHINOUNE ASMA encadreur :A. BAHEDDI

Département des Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie

Résumé

On étude l équation différentiel stochastique multidimensionnelle lineaire á bruit multiplicatif , Et chercher les solutions á cette équation
L'objectif du travail :Etude le solution de E.D.S á bruit multiplicatif dans un cadre multidimensionnelle lineaire
Mots Clés : *calcul stochastique,existence et unicite,multidimensionnelles,Différentielle stochastique.*

1. Introduction

Le concept d'equation differentielle stochastique généralise celui d'equation differentielle ordinaire aux processus stochastiques. La formalisation théorique de ce probléme à elle seule a posè probléme aux mathématiciens, et il a fallu attendre les années 1940 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la definition de l'intégrale stochastique. la forme génerel est :

$$\int_S^T f(s,w)dB_s \tag{1.1}$$

Comment etude des equations différentilles stochastiques multidimensionnelles ? ?

2. Revue de littérature

Auteur :Rebiha Zeghdane
Théme :Dynamique de structures soumises á des sollicitations aléatoires : analyse mathématique et résolution numérique des équations differentielles stochastiques.
Mots clé :Équation differentielle stochastique, semi-implicites ,stabilite.
Résume :Cette thése traite des techniques numériques pour la résolution des équations différentielles stochastiques, on a construit une famille des méthodes semi-implicites .

2.1 Synthése

Dans le domaine de probabilité les mathématiciens introduisent des études détaillés dans les équations différentielles stochastiques simple.
Mon travail est consacré à l'étude des ces équations multidimensionnelles.

3. Position du probléme

PROBLEMATIQUE
1.Quelles sont les conditions necessaires pour l éxistence de solution .
2..Quelles sont les conditions necessaires pour l únicite de solution.
Nous avons maintenant tous les elements en main pour definir la notion de solution d'une équation différentielle stochastique (EDS), de la forme :

$$dX_t = a(t)X_t d_t + b(t)X_t dW_t \qquad X_0 = x \tag{3.1}$$

Ou sous la forme d'une matrice

$$\begin{pmatrix} dx_t^1 \\ \vdots \\ dx_t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0^1 \\ \vdots \\ X_0^n \end{pmatrix} \cdot dt + \begin{pmatrix} b_{1,1}(t) & \dots & b_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}(t) & \cdots & b_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0^1 \\ \vdots \\ X_0^n \end{pmatrix} \cdot dW_t$$

$$\begin{pmatrix} X_0^1 \\ \vdots \\ X_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$$

avec à nouveau a et σ des fonctions d´eterministes. Nous pouvons alors ´ecrire

$$\frac{dX_t}{X_t} = a(t)dt + \sigma(t)dB_t \tag{3.2}$$

on obtient donc la solution

$$X_t = X_0 \exp\left\{ \int_0^t [a(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2]ds + \int_0^t \sigma(s)dBs \right\} \text{(3.3)}$$

(3.4)

3.1 Théoréme utilisées

3.1.1 Théoréme :(Existence et unicite)

Nous donnons d'abord un résultat d'existence et d'unicité d'une solution forte sous des conditions un peu restrictives les coefficients f et g

on supposons que les fonctins f et g satisfont les deux conditions suivantes :

1.Condition de LIPSCHITZ GLOBALE :Il existe une constante K telle que pour tous les x,y $\in \mathbb{R} et\ t \in [0,T]$

$|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq k_n|x - y|$

2.Condition de croissance :Il existe une constante L telle que pour tous les x$\in \mathbb{R} et\ t \in [0,T]$

$|f(t,x)|^2 + |g(t,x)^2| \leq L_2(1 + |x^2|$

3.1.2 Théoréme :(Formule d'Itô)

X processus d'Itô, avec

$$dX_t = b_t d_t + \sigma_t dB_t \tag{3.5}$$

et $g \in C^2$, alors $Y_t = g(t, X_t)$ est un processus d'tô

$$dY_t = \frac{\delta g(t,X_t)}{\delta_t}dt + \frac{\delta g(t,X_t)}{\delta X_t}dXt + \frac{1}{2}\frac{\delta^2(t,X_t)}{\delta X_t^2}(dX_t)^2 \tag{3.6}$$

avec $(dX_t)^2 = dX_t.dX_t, d_t.d_t = 0, d_t.dB_t = dB_t.d_t = 0, etdB_t.dB_t = d_t$
On peut encoure écrire

$$dY_t = \left(\frac{\delta g(t,X_t)}{\delta_t} + \frac{\delta g(t,X_t)}{\delta X_t}b_t + \frac{1}{2}\frac{\delta^2(t,X_t)}{\delta X_t^2}(\sigma_t)^2 \right) d_t + \frac{\delta g(t,X_t)}{\delta X_t}\sigma_t dB_t \tag{3.7}$$

4. Quelques solution explicites des E.D.S

Équations differentielles stochastiques linéaires : bruit multiplicatif équation homogéne avec coeffcient constant

$$dXt = aX_t dt + bX_t dWt$$

dont la solution générale est donnée par :

Xt = $x_0 \exp\left((a - \frac{1}{2}b^2)t + bwt\right)$

Références

[1] Bernt Oksendal, Stochastic Differential Equations,Springer-Verlag.
[2] Avner Friedman, Stochastic differential equations and applications
[3] Ĭ.Ĭ. Gīhman and A. V. Skorohod, Stochastic differential equations, Springer, New York, 1972.