Groupes fondamentaux de variétés affinement plates complètes

Hamdan Benhaddad
Département de Mathématiques

Résumé

Nous nous intéressons aux variétés affinement plates complètes et à leurs groupes fondamentaux. Milnor dans [4], a montré que tout groupe virtuellement polycyclique sans torsion est le groupe fondamental d'une certaine variété affinement plate complète et a conjecturé que se sont les seuls groupes fondamentaux possibles. Quelques années plus tard, Margulis (voir [3]) a donné un exemple, en dimension 3, d'une variété lorentzienne plate dont le groupe fondamental est libre (non abélien), donnant ainsi un contre-exemple à la conjecture de Milnor.

Mots clefs : structures affinement plates, groupes polycycliques, groupe fondamental.

Travail en cours...

Notions préliminaires

Groupe polycyclique. Un groupe G est *polycyclique* s'il admet une suite de composition finie :

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_k = \{1\}.$$

où tout quotient H_i/H_{i+1} est cyclique. Le nombre de facteurs H_i/H_{i+1} infini cycliques est un invariant (d'après un Théorème de Hirsch) appelé *rang* de G.

Groupe virtuellement P. Étant donnée une propriété P (comme, par exemple, être abélien, résoluble, sans torsion...). On dit qu'un groupe G est virtuellement P, s'il possède un sous-groupe d'indice fini qui a la propriété P.

Exemples.

1. Un groupe est polycyclique si, et seulement si, il est résoluble et vérifie la condition maximale (i.e. tout ses sous-groupes sont de type fini).
2. Tout groupe nilpotent (en particulier, abélien) et de type fini est polycyclique.
3. Un groupe est polycyclique si, et seulement s'il est isomorphe à un sous-groupe résoluble du groupe linéaire $GL(n, \mathbb{Z})$.
4. La classe des groupes polycycliques est stable par passage aux : sous-groupes, aux quotients et aux extensions.

Variétés affinement plates complètes. Une variété différentielle M est *affinement plate* si elle est munie d'une connexion, i.e. une application bilinéaire :

$$\nabla : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

telles que, pour tout $f \in C^\infty(M)$, $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ et $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + \mathscr{L}_X f Y$,
qui est plate : $\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X = \nabla_{[X,Y]}$
et sans torsion : $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
Une variété affinement plate est *complète* si toute géodésique est définie sur tout $\mathbb{R}$, ou d'une façon équivalente, son revêtement universel $\tilde{M}$ est affinement difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exemples.

1. Une variété est affinement plate si, et seulement si, elle possède un atlas dont les changements de cartes sont des restrictions d'application affines.
2. Étant donné un groupe discret Γ qui agit par transformations affines sur $\mathbb{R}^n$. Si l'action est libre (i.e. tout les groupes d'isotropie sont triviaux) et proprement discontinue (i.e. $\{g \in \Gamma,\ gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$) alors le quotient $\mathbb{R}^n/\Gamma$ est une variété affinement plate complète.

Résultats

Théorème

Tout groupe virtuellement polycyclique et sans torsion est le groupe fondamental d'une certaine variété affinement plate complète.

Démonstration. • Tout groupe G virtuellement polycyclique agit effectivement et proprement discontinûment par des transformations affines sur $\mathbb{R}^n$ (pour un certain n) : Soit Γ un sous-groupe polycyclique d'indice fini. $\Gamma \hookrightarrow GL(m, \mathbb{Z})$ et se plonge donc, comme sous-groupe discret dans $GL(m, \mathbb{C})$. Γ_0, la fermeture de Zariski de Γ est un groupe de Lie complexe résoluble. La composante S du neutre de Γ_0 est un sous-groupe d'indice fini et donc $\Delta = S \cap \Gamma$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ. $S \hookrightarrow B$ (le groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures). Quitte à conjuguer par un élément de B on peut supposer $\Delta \subset B$.

$B = UD$, U étant le groupe des matrices uni-triangulaires (variété affine complexe de dimension $m(m-1)/2$) et D est le groupe abélien des matrices diagonales. Comme $U \lhd B$ on a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow U \longrightarrow B \stackrel{p}{\longrightarrow} D \longrightarrow 1.$$

B agit sur U par transformations affines : $b \cdot u = bup(u)^{-1}$ (donc aussi Δ, par restriction). Comme groupe abélien de type fini, $\Delta/\Delta \cap U \simeq \Lambda_1 \oplus \dots \Lambda_p$ (groupes finis cycliques) et chaque Λ_i agit effectivement et proprement discontinûment sur $\mathbb{C}$ (par translation, ou par rotation) donc l'action diagonale de Δ sur $U \times \mathbb{C}^p$ est effective et proprement discontinue. Soit l'espace affine de dimension kq où $k = m(2m-1) + p$ et $q = [G : \Gamma]$:

$$\mathrm{Hom}_\Delta(G, \mathbb{R}^k) = \left\{ f : G \to \mathbb{R}^k,\ \text{homomorphisme } \Delta - \text{équivariant} \right\}$$

G agit effectivement et proprement discontinûment par des transformations affines sur $\mathrm{Hom}_\Delta(G, \mathbb{R}^k) \simeq \mathbb{R}^{kq}$.

• Tout groupe d'isotropie est fini (car l'action est proprement discontinue). Comme Γ est sans torsion alors tout ses sous-groupe finis sont triviaux et l'action est donc libre. L'espace quotient $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$ est la variété affinement plate complète, dont le groupe fondamental s'identifie à Γ.

□

Conjectures

Conjecture de Markus. Une variété affinement plate compacte est complète si, et seulement si, elle a possède une forme volume parallèle.

Conjecture d'Auslander. Tout groupe cristallographique est virtuellement résoluble.

Conjecture de Chern. Toute variété fermée (compacte et sans bord) et affinement plate est de caractéristique d'Euler nulle.

Conclusion

Plusieurs conjectures de longue date, liées aux structures affines, sont encore ouvertes. Nous avons revu le travail de Milnor et les idées qui y sont derrière en vu d'étudier ces conjectures avec de possibles résultats nouveaux.

Références

[1] H. Abels, *Properly discontinuous groups of affine transformations : a survey*, Geom. Ded. 87 no. 1-3, 309-333. 2001.
[2] W. M. Goldman, *Two papers which changed my life : Milnor's seminal work on flat manifolds and flat bundles*, 2011, https://arxiv.org/abs/1108.0216v2
[3] G. Margulis, *Free properly discontinuous groups of affine transformations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 272,937-940, 1983.
[4] J. Milnor, *Fundamental Groups of Affinely Flat Manifolds*, Journal of Geometry and Physics 62 (2012) 1600-1610.
[5] D. Segal, *Polycyclic Groups*, Cambridge University Press, 2005.
[6] W. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Princeton University, 1979.