متعددمويجات ليجندر في حل فولتيرا التفاضلية -التكاملية الناتجة من معادلة Lane-Emden

ابتسام معمري

تحت إشراف الأستاذ: بن الشيخ عبد لكريم

تخصص: تحليل دالي

قسم الرياضيات -كلية الرياضيات و علوم المادة-جامعة قاصدي مرباح ورقلة

linalin002233@gmail.com

الملخص

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم طريقة عددية لحل معادلة فولترا التفاضلية-التكامليةالناتجة عن معادلة Lane-Emden من الدرجة الثانية وذلك باستخدام متعدد مويجات ليجندر . ثم نقدم تطبيق هذه الطريقة في بعض الامثلة ،ومقارنة النتائج المتحصل عليها باستخدام هذه الطريقة والنتائج المتحصل عليها باستخدام طرق عددية اخرى لرؤية مدى صحة ودقة الطريقة المستخدمة .

مقدمة

تلعب المعادلات التفاضلية-التكامليةدورا بارزا لحل المشاكل الفيزيائية و لقد تعددت طرق حلها، فهذه المذكرة خصصت لدراسة حل فولتيرا التفاضلية-التكاملية الناتجة عن معادلة Lane-Emden :

$$y''(x)+\frac{k}{x}y'(x)+f(y)=0,\quad y(0)=a,\quad y'(0)=0,\quad k\geq 1. \tag{1}$$

بضرب x^k و المكاملة على المجال $[0,x]$ تصبح لدينا

$$y'(x)=-\int_0^x(\frac{t^k}{x^k})f(y(t))dt,\quad y(0)=a,\quad k\geq 1. \tag{2}$$

وبالمكاملة مرة اخرى على $[0,x]$ لدينا

$$y(x)=a-\frac{1}{k-1}\int_0^x t(1-\frac{t^{k-1}}{x^{k-1}})f(y(t))dt. \tag{3}$$

حيث تمكننا هذه الطريقة بتطبيق متعدد مويجات ليجندر في حلها ولكن وفق شروط .

1. متعدد مويجات ليجندر

رمزه

$$\Psi_{m,n}(x)=\Psi(k,m,n,x)$$

لديه اربعة متغيرات حيث :

$m=0,1,2,...,2^k-1$
$k\in Z^+$

n هي رتبة كثير حدود ليجندر

x متغير بنسبة لزمن .

تعرف الدالة على المجال $[0.T)$; [1]

بشكل التالي :

$$\Psi_{m,n}(x)=\begin{cases}\sqrt{2m+1}\Big(\frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{T}}\Big)P_m\Big(\frac{2^kx}{T}-m\Big), \frac{mT}{2^k}\leq x<\frac{(m+1)T}{2^k}\\ 0.\quad Otherwise\end{cases} \tag{4}$$

P_m هي كثيرات حدود ليجندر

2. تقريب تابع بمتعدد مويجات ليجندر

الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $[0,T)$ نعبر عليها من قبل متعدد مويجات ليجندر

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{m,n}\Psi_{m,n}(x) \tag{5}$$

عندما يكون

$$C_{m,n}=<f(x),\Psi_{m,n}(x)>$$

بحيث $<.,.>$ الجداء السلمي

اذا كانت السلسة (5) غير منتهية فإنه يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$f(x)\cong\sum_{m=0}^{2^k-1}\sum_{n=0}^{N}C_{m,n}\Psi_{m,n}(x)=C^T\Psi(x) \tag{6}$$

حيث C و $\Psi(x)$ في $(2^k(N+1)\times 1)$ مصفوفة تعطى بالعلاقة التالية

$$C=[C_{0,0},C_{0,1},...,C_{0,N},C_{1,0},C_{1,1},...,C_{1,N},...,C_{2^k-1,0},...,C_{2^k-1,N}]^T \tag{7}$$

$$\Psi(x)=[\Psi_{0,0}(x),\Psi_{0,1}(x),...,\Psi_{0,N}(x),\Psi_{2^k-1,0}(x),...,\Psi_{2^k-1,N}(x)]^T \tag{8}$$

3. المعادلة التفاضلية نوع Lane-Emden

نقوم في هذا الفصل بتعرف على المعادلة التفاضلية من نوع Lane-Emden وكيفية حلها في الدراسات السابقة (في طور الانجاز)

4. استعمال متعدد مويجات ليجندر لحل المسالة

نعتبر المعادلة التفاضلية-التكاملية لفولترا المعطاة في (2) والتي هي على شكل معادلة Lane-Emden المعرفة في (1) . بتطبيق متعدد مويجات ليجندر [2] [3] [4] [5] ويجب اولا ان تقارب المعادلة $y(x)$ الى

$$y(x)=C^T\Psi(x). \tag{9}$$

عندما تكون C معرفة مثل (7) .

وفي الاخير نتحصل على المعادلة التالية :

$$C^T\Psi(x_i)\cong a-\frac{x_i}{2}\sum_{j=1}^{s}w_jH(\frac{x_i}{2}(\tau+1)), \tag{10}$$

حيث

$$H(z)=\int_0^z(\frac{t^k}{z^k})f(C^T\Psi(t))dt$$

$$x_i=\frac{(2i-1)T}{2^{k+1}(N+1)},i=1,2,...,2^k(N+1)$$

و τ هي s تؤول الى اصفار من كثيرات حدود ليجندر P_{s+1} و w_j هي ثوابت الوزن .

5. تطبيق عددي

نقوم في هذا الفصل باستخدام متعدد مويجات ليجندر في حل معادلات فولتيرا الفاضلية-التكاملية من نوع lane-Emden

مع النتائج المتحصل عليها عند حل نفس المعادلة بطرق اخرى (في طور الانجاز)

المراجع

[1] S. A. Yousefi; Legendre multiwavelet Galerkin method for solving the hyperbolic telegraph equation, Numer. Methods Partial Diferential Eq., 26 (2010), 535,543.

[2] J. Biazar, H. Ebrahimi; Legendre Wavelets for Systems of Fredholm Integral Equations of the Second Kind, World Applied Sciences Journal, 9(9) (2010), 1008 -1012.

[3] S. Yousefi, M. Razzaghi; Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra-Fredholm in- tegral equations, Mathematics and Computers in Simulation, 70 (2005), 1-8.

[4] K. Maleknejad, M. T. Kajani, Y. Mahmoudi; Numerical solution of linear Fredholm and Volterra integral equation of the second kind by using Legendre wavelets, Kybernetes, 32(9/10) (2003), 1530-1539.

[5] X. Zheng, X. Yang; Techniques for solving integral and diferential equations by Legendre wavelets, International Journal of Systems Science, 40(11) (2009), 1127-1137 .