مويجات تشيبيشيف في حل فولتيرا التفاضلية -التكاملية الناتجة من معادلة Lane-Emden

بوقرينات مونى

تحت إشراف الأستاذ: بن الشيخ عبد لكريم

تخصص: تحليل دالي

قسم الرياضيات -كلية الرياضيات و علوم المادة-جامعة قاصدي مرباح ورقلة

mounabou94@yahoo.com

الملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية-التكاملية لفولتيرا الناتجة من معادلة لين-امدن من الدرجة الثانية .وذالك بإستخدام مويجات تشيبيشيف .ثم نقدم تطبيق هذه الطريقة في بعض الأمثلة , ومقارنة النتائج المتحصل عليها بإستخدام هذه الطريقة , والنتائج المتحصل عليها بإستخدام طرق عددية أخرى لرؤية مدى صحة ودقة الطريقة المستخدمة .

مقدمة

المعادلات التفاضلية -التكاملية لها تطبيقات واسعة في الفيزياء الرياضية والفلكية و تعددت طرق حلها ,هذه المذكرة خصصت لدراسة حل فولتيرا التفاضلية -التكاملية الناتجة من معادلة Lane-Emden :

$$y''(x)+\frac{\alpha}{x}y'(x)+p(x)y(x)=g(x) \qquad 0<x\leq 1, \qquad \alpha\geq 0 \tag{1}$$

مع الشروط الإبتدائية التالية

$$y(0)=A, \qquad y'(0)=B, \tag{2}$$

حيث A وB ثوابت , $p(x)$ هي دالة تحليلية و $g(x)\in C[0 \quad 1]$. الى معادلة التكامل التفاضلية ,التفاضل متوفر في المرجع [4] :

$$u'(x)+\frac{\alpha}{x}u(x)=F(x)-\int_0^x k(x,t)u(t)dt \qquad u(0)=u_0, \tag{3}$$

حيث $F(x)=f'(x)$ و $k(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}k(x,t)$.
المعادلة (3) هي صيغة فولتيراالتكاملية التفاضلية المطلوبة من نوع لين -امدن (1)

1. مويجات تشيبيشيف

مويجات تشيبيشيف $\Psi_{n,m}(t)=\Psi(k,n,m,t)$ لديها أربع متغيرات
حيث $k\in\mathbb{Z}+ \quad m,n=1,2,...,2^{k-1},$ هي درجة كثير حدود تشيبيشيف وt هي الوقت المحدد.معرفين في المجال $[1,0]$ كما في [6]

$$\Psi_{n,m}(t)=\begin{cases}2^{\frac{k}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}U_m(2^kt-2n+1) & (\frac{n-1}{2^k-1}\leq x<\frac{n}{2^k-1}) \\ 0 & (si \quad no)\end{cases} \tag{4}$$

2. تقريب تابع بمتعدد مويجات تشيبيشيف

الدالة $U(x)$ المعرفة على المجال $[0,1]$ يمكن أن نعبر عنها بمويجة تشيبيشيف بشكل التالي

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=8}^{\infty}c_{m,n}\Psi_{m,n}(x), \tag{5}$$

حيث

$$c_{m,n}=\langle u(x),\Psi_{m,n}(x)\rangle_{\omega_n(x)}=\int_0^1\omega_n(x)u(x)\Psi_{n,m}(x) \tag{6}$$

في حالة $\langle .,.\rangle$ يدل على الجداء السلمي في المجال $L^2_{\omega_n(x)}[0,1]$.إذا كانت سلسلة (5) غير منتهيه فإنه يمكن أن نقربها على الشكل الموالي :

$$u(x)\cong\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1}c_{m,n}\Psi_{m,n}(x)=C^T\Psi(x), \tag{7}$$

حيث , C و$\Psi(x)$ هي $\left(2^{k-1}M\times 1\right)$ مصفوفة تعطى بواسطة العلاقة التاليه

$$C=[c_{1,0},c_{1,1},\ldots,c_{1,M-1},c_{2,0},\ldots,c_{2,M-1},\ldots,c_{2^{k-1},0},\ldots,c_{2^{k-1},M-1}]^T \tag{8}$$

$$\Psi(x)=[\psi_{1,0}(x),\Psi_{1,1}(x),\ldots,\psi_{1,M-1}(x),\ldots,\Psi_{2^{k-1},0}(x),\ldots,\Psi_{2^{k-1},M-1}(x)]^T \tag{9}$$

3. المعادلات التفاضلية نوع Lane-Emden

نقوم في هذا الفصل بالتعرف على المعادلات التفاضلية من نوع Lane-Emden وكيفية حلها في الدرسات السابقة (في طور الإنجاز)

4. استعمال مويجات تشيبيشيف لحل المسألة

معادلة فولتيرا التفاضلية-التكاملية ذكرت مسبقا في المعادلة (3). والتي هي نموذج لمعادلة لين-امدن التي أشير لها في المعادلة (1)نقوم في هذا الجزء بحل هذه المعادلة بإستعمال مويجات تشيبيشيف .أولا يجب ان تتقارب الدالة $u(x)$ الى

$$u(x)=C^T\Psi(x) \tag{10}$$

حيث C مساوية ل(8)

وفي الأخير نتحصل على المعادلة التالية:

$$C^T\Psi(x_i)=G(x_i)-\frac{x_i}{2}\sum_{j_1=1}^{s_1}\omega_{j_1}H_1\left(\frac{x_i}{2}(\tau_{j_1}+1)\right)-\frac{x_i}{2}\sum_{j_2=1}^{s_2}\omega_{j_2}H_2\left(\frac{x_i}{2}(\tau_{j_2}+1)\right) \tag{11}$$

بحيث

$$\begin{aligned} G(x)&=u_0+\int_0^x F(x)dx \\ H_1(x)&=\frac{\alpha}{x}C^T\Psi(x), \\ H_2(x)&=\int_0^x K(x,t)C^T\Psi(t)dt \end{aligned} \tag{12}$$

و τ_{j_1} و τ_{j_2} تساوي s_1 وs_2 وتؤول الى أصفار لكثيرات حدود ليجاندر ,.(Legendre)
وω_{j_1} وω_{j_2} أوزان متناظرة .

5. تطبيق عددي

نقوم في هذا الفصل بحل معادلة فولتيرا -التكاملية الناتجة من معادلة لين -امدن. مع مقارنة النتائج المتحصل عليها مع النتائج المتحصل عليها عند حل نفس معادلة بطرق أخرى لمعرفة مدى دقة نتائج الطريقة المتبعة (في طور الإنجاز)

المراجع

[1] S. Chandrasekhar, Introduction to the Study of Stellar Structure (Dover, New York, 1967).

[2] C. K. Chui, An Introduction to Wavelets, Wavelet Analysis and Its Applications, Vol. 1 (Academic Press, Massachusetts, 1992).

[3] A. M.Wazwaz, A new method for solving singular initial value problems in the secondorder ordinary differential equations, Appl. Math. Comput. 128 (2002) 45–57.

[4] A. M. Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications (Springer Science Business Media, Berlin, 2011).

[5] A. Yildirim and T. Ozis, Solutions of singular IVPs of Lane–Emden type by homotopy perturbation method, Phys. Lett. A. 369 (2007) 70–76.

[6] L. Zhu and Q. Fan, Solving fractional nonlinear Fredholm integro-differential equations by the second kind Chebyshev wavelet, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 17 (2012) 2333–2341. 17500