الدوال القطع النبضية وتطبيقاتها في حل المعادلات التكاملية غير الخطية

خالد عطية

تحت إشراف الأستاذ: حسين عباسي

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

قسم الرياضيات -كلية الرياضيات و علوم المادة-جامعة قاصدي مرباح ورقلة

@gmail.com

مقدمة

تلعب المعادلات التكاملية دورا بارزا لحل المشاكل الفيزيائية و لقد تعددت طرق لحلها سواء كان حلا تحليليا أو حلا عددية، هذه المذكرة خصصت لدراسة عددية للمعادلة التكاملية ذات المتغير وذات المتغيرين الخطيةوغير الخطية .
تصنف المعادلات التكاملية حسب حدود التكامل فولتيرا وفريدهولم.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt. \qquad (1$$

حيث:
-λثابت يحمل معاني فيزيائية عن خواص المادة.
-$k(x,t)$ معلومة وتسمى نواة المعادلة وتحمل صفات وخواص المادة المستخدمة وقد تكون متصلة أو غير متصلة
-الدالة $f(x)$معلومة أيضا أ ما بالمفهوم الفيزيائي تمثل دالة السطح المرا د حساب التكامل عليه .
إما $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة المراد تعيينها وتمثل فيزيائيا دالة الهمد.
و المعادلة (1) خطية لأن الدالة المجهولة هي من الدرجة الأولى .

1. الدوال القطع النبضيةBPF's

إن دوال القطع النبضيةهي مجموعة دوال متعامدة ذات قيم ثابتة على كل مجال جزئي و هي عادة تستخدم كطريقة مفيدة في التحليل،تطرقنا إلى دراسة الدوال القطع النبضيه ذات المتغير الواحدوذات المتغيرين. لكن في هذا الجزء سوف نقوم بدراسة الدوال القطع النبضية ذات متغير واحد

تعريف 1.1.نسمي الدالة القطع النبضية كل دالة φ معرفة على $[0,T)$ كمايلي:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & \frac{iT}{m} \le x \le \frac{(i+1)T}{m} \\ 0 & \text{خارجه} \end{cases} \qquad (2$$

حيث $i = 0,1,\dots,m-1$ و m عدد صحيح موجب.

في مايلي نأخذ $T = 1$

2. مصفوفة العمليات

2.1 المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضيةذات متغير واحد

أثناء حلنا للمعادلات التكاملية نتصادف كثيرا مع تكامل $\int_0^x \varphi(t)dt$ وحيث أن الناتج هو دالة يمكن تحليلها باستعمال الدوال القطع النبضية ذات متغير واحد على النحو التالي

$$\int_0^x \varphi_i(t)dt \simeq P\varphi_i(x) \qquad (3$$

إن المصفوفة P تدعى المصفوفة التنفيدية للتكامل وهي من الرتبة $(m)(m)$

$$P = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ومن هنا يمكننا أيضا تقريب التابع $f(\tau)$ كمايلي:

$$\int_0^x f(\tau)d\tau = \int_0^x F^T\varphi(\tau)d\tau = F^T\int_0^x \varphi(\tau)d\tau \simeq F^T P\varphi(x)$$

2.2 المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضيةذات متغيرين

أثناء حلنا للمعادلات التكاملية ذات متغيرين نتصادف كثيرا مع التكامل $\int_0^x\int_0^y \varphi(t,s)dtds$ وحيث أن الناتج هو دالة يمكن تحليلها باستعمال الدوال القطع النبضية ذات متغيرين على النحو التالي

$$\int_0^x\int_0^y \varphi_{i,j}(t,s)dtds \backsimeq E\varphi(x,y) = [P_{(m_1\times m_1)} \otimes P_{(m_2\times m_2)}]\varphi(x,y), \qquad (4$$

حيث E هي المصفوفةالتنفيذية لتكامل الثنائي و P هي المصفوفة التنفيذية بالنسبة للتكامل ذات متغير واحد

3. تقريب تابع ذو متغير

3.1 تقريب تابع باستعمال الدوال القطع النبضيةذات متغير واحد

كل تابع $f(x)$ يحلل باستعمال الدوال القطع النبضية على النحو التالي :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{m} F_i\varphi_i(x) = F^T\varphi(x) = \varphi(x)^T F$$

$$F^T = [f_1, f_2, ..., f_m]$$

حيث

$$f_i = \frac{1}{h}\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$$

4. تقريب دالة متغييرين

يمكننا الأن تقريب الدالة $K(x,s) \in L^2([0,1]\times[0,1])$ بواسطةالدوال القطع النبضية ذات متغير واحد بالعبارة التالية

$$K(x,s) \approx \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} K_{ij}\phi_i(x)\phi_j(s) = \phi(x)^T K\phi(s)$$

حيث $\varphi(x)$و$\varphi(s)$ دوال قطع نبضية ذات متغير واحد ولهما نفس البعد m.
و k مصفوفة معرفة بالعبارة التالية :

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & \dots & k_{mm} \end{bmatrix}$$

K_{ij} هي عناصر محددة بواسطة

$$K_{ij} = \frac{1}{h^2}\int_0^1\int_0^1 k(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)dxds$$

من أجل $i,j = 0,1,........,m$

5. حل تقريبي للمعادلة التكاملية

نحل في مرحلة الحل العددي للمعادلة التكاملية الخطية المعرفة في العلاقة (??) حيث قنا بتعويض التوابع بصيغ التحليل و نقوم من خلال مصفوفات العمليات السابقة بتحويل تلك المعادلة الى جمل معادلات سهلة البرمجة والحل .

6. تطبيق عددي

الهدف من هذه المرحلة معرفة مدى فاعلية هذه الطريقة و ذلك من خلال مقارنتها بطرق اخرى (في طور الإنجاز).

الملخص

يندرج محتوى هذه المذكرة في توضيح الدوال القطع النبضية وأنواع المعادلات التكاملية من أجل تحديد طريقة لحل المعادلات التكاملية الغير خطية حيث هذه المعادلات تكون فيها الدالة المجهولة تحت علامة التكامل وهي عبارة عن دالة مركبة وتكون من الشكل :
لهذا الغرض جمعنا أهم المقالات والكتب المتعلقة بهذا الموضوع وتبقى الدراسة مفتوحة لأنواع أخرى

المراجع

[1] Abdul —majidwazwaz,Linearandnon—linearintegralequtionsmethodsandapplications, Saitxavieruniversitychicago.USA.

[2] .B.N. Mandal, S. Bhattacharya, "Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials," Applied Mathematics and Computation, vol. 190, pp. 1707–1716, 2007.