دوال هار المحسنة وتطبيقاتها في حل المعادلات التكاملية غير الخطية

داهم لخضر

تحت إشراف الأستاذ: حسين عباسي

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

قسم الرياضيات -كلية الرياضيات و علوم المادة-جامعة قاصدي مرباح ورقلة

@gmail.com

مقدمة

تلعب المعادلات التكاملية دورا بارزا لحل المشاكل الفيزيائية و لقد تعددت طرق لحلها سواء أكان حلا تحليليا أو حلا عددية، هذه المذكرة خصصت لدراسة عددية للمعادلة التكاملية ذات المتغير وذات المتغيرين الخطيةوغير الخطية .
انفتتح دراستنا بمعادلة تكاملية خطية كما يلي:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt. \qquad (1)$$

حيث:
-λثابت يحمل معاني فيزيائية عن خواص المادة.
-$k(x,t)$ معلومة وتسمى نواة المعادلة وتحمل صفات وخواص المادة المستخدمة
-الدالة $f(x)$معلومة .
إما $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة المراد تعيينها وتمثل فيزيائيا دالة الهدم.
و المعادلة (1) خطية لأن الدالة المجهولة هي من الدرجة الأولى .

1. المعادلات التكاملية ذات متغيرين

تقريبا

$$u(x,t) = f(x,t) + \int_a^b \int_c^d k(x,t,y,z)u(y,z)dydz$$

في طور الإنجاز

2. دوال هار المحسنة ذات المتغير الواحد

تعريف

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases} \qquad (2)$$

اذا كانت $n,k' \in \mathbb{Z}$نعرف

$$\varphi_{n,k}(t) = 2^{n/2}\varphi(2^n x - k)$$

3. مصفوفة العمليات

4. المصفوفات التنفيذيةلدوال هار المحسنةذات المتغير الواحد

تعريف 4.1. مصفوفة هار Φ_{k*k} تعرف

$$\begin{cases} \Phi_{k*k} = \begin{bmatrix} \Phi_{\frac{k}{2}*\frac{k}{2}} \otimes [1,1] \\ I_{\frac{k}{2}*\frac{k}{2}} \otimes [1,-1] \end{bmatrix} \\ \Phi_{1*1} = 1 \end{cases}$$

اذا كانت $k=1$ تصبح لدينا

$$\Phi_{2*2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \otimes [1,1] \\ 1 \otimes [1,-1] \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \Phi_{2*2} = \begin{bmatrix} \Phi_{1*1} \otimes [1,1] \\ I_{1*1} \otimes [1,-1] \end{bmatrix} \right.$$

اذا كانت $k=4$ فتصبح

$$\Phi_{4*4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes [1,1] \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes [1,-1] \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{4*4} = \begin{bmatrix} \Phi_{2*2} \otimes [1,1] \\ I_{2*2} \otimes [1,-1] \end{bmatrix}$$

تعريف : نرمز$H(n-1)$صفوفة هار ذات البعد $2^n * 2^n$ نعرف مايلي

$$\Phi_{n*n} = \begin{bmatrix} H_{n-1} \otimes [1,1] \\ I_{n-1} \otimes [1,-1] \end{bmatrix}$$

ادا كان فردي
$H(0)=1 \quad H(n)=[1]$و I_{n-1} هي مصفوفة ذات البعد$2^{n-1} * 2^{n-1}$ المصفوفة المعاكسة لمصفوفة هار

$$\phi^{-1}_{k*k} = \frac{1}{K}\phi^T_{k*k} diag(1,1,2,2,\underbrace{2^2...2^2},\underbrace{2^3...2^3},....\underbrace{\frac{k}{2}...\frac{k}{2}}) \qquad (3)$$

5. تقريب تابع ذو متغير

5.1 تقريب تابع باستعمال دوال هار المحسنةذات متغير واحد

كل تابع $f(x)$ يحلل باستعمال دوال هار المحسنة على النحو التالي :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{m} F_i\varphi_i(x) = F^T\varphi(x) = \varphi(x)^T F$$

5.2 تقريب دالة متغيرين (النواة)

يمكننا الأن تقريب دالة $K(x,s) \in L^2([0,1] \times [0,1])$ بواسطةدوال دوال هار المحسنة ذات متغير واحد بالعبارة التالية

$$K(x,s) \approx \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} K_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(s) = \varphi(x)^T K\varphi(s)$$

5.3 تقريب دالة متغيرواحد (الدالة المجهولة)

يمكننا الان تقريب الدالة $X(s) \in L^2([0,1])$ بواسطةدوال هار المحسنة ذات متغير واحد بالعبارة التالية

$$X(s) \approx \sum_{i=1}^{m} X_i(s)\varphi_i(s) = X^T(s)\varphi(s) = \varphi(s)^T X^T$$

حيث

$$X^T = [x_1, x_2, ..., x_m]$$

و

6. حل تقريبي للمعادلة التكاملية

نحل في مرحلة الحل العددي للمعادلة التكاملية الخطية المعرفة في العلاقة (??) حيث قمنا بتعويض التوابع بصيغ التحليل و نقوم من خلال مصفوفات العمليات السابقة بتحويل تلك المعادلة الى جمل معادلات سهلة البرمجة والحل .

7. تطبيق عددي

الهدف من هذه المرحلة معرفة مدى فاعلية هذه الطريقة و ذلك من خلال مقارنتها بطرق اخرى (في طور الإنجاز).

الملخص

هذا العمل في مجمله يهدف الى توضيح طريقة حل المعادلات التكاملية ذات متغير ومتغيرين الخطية غير الخطية بإستخدام دوال هار المحسنة. اعتمد في الدراسة على أنواع المعادلات التكاملية الخطية والغير خطية ودوال هار المحسنةذات المتغير الواحد وذات متغيرين .

المراجع

[1] Abdul —majidwazwaz,Linearandnon—linearintegralequtionsmethodsandapplications, Saitxavieruni-versitychicago.USA.

[2] A.Arikoglu, I.Ozkol, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, Appl. Math. Comput. 168(2005)1145-1158.