# طريقة مويجات لوجندر في حل معادلات تفاضلية -تكاملية ذات رتب كسرية


## زيدي فاطمة

تحت إشراف الأستاذ: بن الشيخ عبد الكريم

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

قسم الرياضيات -كلية الرياضيات و علوم المادة-جامعة قاصدي مرباح ورقلة

fatmazidi94@gmail.com


### مقدمة

للمعادلات التكاملية التفاضلية دورا بارزا لحل المشاكل الفيزيائية و لقد تعددت طرق لحلها سواء كان حلا تحليليا أو حلا عدديا، هذه المذكرة خصصت لدراسة عددية للمعادلة التفاضلية التكاملية ذات الرتب الكسرية خطية :

$$D^{\alpha}f(x)=\lambda_1\int_0^x u_1(x,y)f(y)dy+\lambda_2\int_0^x u_2(x,y)f(y)dy+g(x) \tag{1}$$

تخضع للشروط الأولية $f^{(s)}(0)=0$ ,$s=0,1\dots,r-1$ ,$r-1<\alpha\leq r,r\in N$ حيث $u_1(x)$ و $u_2(x)$ , $f(x)$ دوال معلومة، $\lambda_1,\lambda_2$ ثوابت.

وغير خطية:

$$D^{\alpha}f(x)=\lambda_1\int_0^x u_1(x,y)[f(y)]^p dy+\lambda_2\int_0^x u_2(x,y)[f(y)]^q dy+g(x). \tag{2}$$

تخضع للشروط الأولية $f^{(s)}(0)=0$ $p,q\in N$

هذه الطريقة تعتمد على مويجات لوجندر ، حيث نتمكن من خلال هذه الطريقة من تحويل هذه المعادلة إلى جملة معادلات جبرية قابلة للحل بسهولة بطرق معروفة.

### 1. تعاريف عامة عن الحساب الكسري

#### 1.1 المشتق الكسري بمفهوم Caputo [1]

لنفرض أن $\alpha>0$ , $\alpha,a,t\in\mathbb{R}$ .

$$D^{\alpha}f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(r-\alpha)}\int_0^x\frac{f^{(r)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-r}}d\tau, & 0\leq r-1<\alpha<r,\\ \frac{d^r}{dx^r}f(x), & \alpha=r\in N,\end{cases} \tag{3}$$

#### 1.2 التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل [1]

$$J^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\qquad \alpha>0, \tag{4}$$

$$J^0f(x)=f(x) \tag{5}$$

### 2. مويجات لوجندر وتقريب تابع

#### 2.1 مويجات لوجندر[2]

مويجات لوجندر $\Psi_{nm}(x)$ معطاة بالمساواة التالية:

$$\Psi_{nm}(x)=\begin{cases}\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{1/2}2^{k/2}p_m(2^kx-\hat{n}), & \frac{\hat{n}-1}{2^k}\leq x<\frac{\hat{n}+1}{2^k}\\ 0 & \text{غيرذلك}\end{cases} \tag{6}$$

حيث $n=1,2,\dots,2^{k-1}$, $\hat{n}=2n-1$, $k=1,2,\dots$ $m=0,1,\dots,M-1$ هو رتبة كثير حدود لوجندر و $M$ عدد موجب و ثابت ، $p_m(x)$ هو كثير حدود لوجندر ذات رتبة $m$

$$f(x)\approx\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1}c_{nm}\Psi_{nm}(x)=C^T\Psi(x), \tag{7}$$

للتبسيط نكتب المساواة (7) كمايلي:

$$f(x)\approx\sum_{i=1}^{\hat{m}}c_i\Psi_i(x)=C^T\Psi(x), \tag{8}$$

حيث $c_i=c_{nm}=<f(x),\Psi_{nm}(x)>$ و $\Psi_i=\Psi_{nm}$ و

$C=[c_1,c_2,\dots,c_M,c_{M+1},\dots,c_{2M},\dots,c_{M(2^{k-1}-1)+1},\dots,c_{\hat{m}}]^T$,

$\Psi=[\Psi_1,\Psi_2,\dots,\Psi_M,\Psi_{M+1},\dots,\Psi_{2M},\dots,\Psi_{M(2^{k-1}-1)+1},\dots,\Psi_{\hat{m}}]^T$,

### 3. مصفوفة العمليات

ليكن $B(x)=[b_0(x),b_1(x),\dots,b_{\hat{m}-1}(x)]^T$ نفرض

$$J^{\alpha}(B(x))\approx F^{\alpha}B(x) \tag{9}$$

حيث $b_i(x)$ دوال القطع النبضية معرفة على المجال $[0,1)$ والتي من الشكل:

$$b_i(x)=\begin{cases}1, & ih\leq x<(i+1)h \qquad i=0,1,2,\dots,\hat{m}-1\\ 0 & \text{غيرذلك}\end{cases} \tag{10}$$

مع $\hat{m}$ عدد موجب و $h=1/\hat{m}$. حيث أن $F^{\alpha}$ تسمى مصفوفة العمليات للتكامل الكسري للدوال القطع النبضية

$$F^{\alpha}=h^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\begin{bmatrix}1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{\hat{m}-1}\\ 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{\hat{m}-2}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & \xi_{\hat{m}-3}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix},$$

و $\xi_k=(k+1)^{\alpha+1}-2k^{\alpha+1}+(k-1)^{\alpha+1}$, $k=1,2,\dots,\hat{m}-1.$ هناك علاقة بين دوال القطع النبضيةومويجات لوجندر ، أي

$$\Psi(x)=\Phi B(x), \tag{11}$$

حيث $\Phi=[\Psi(x_0),\Psi(x_1),\dots,\Psi_{\hat{m}-1}]$ $x_i=i/\hat{m},i=0,1,\dots,\hat{m}-1.$,

ولدينا $J^{\alpha}\Psi(x)\approx P^{\alpha}\Psi(x)$

بإستعمال عمليات حسابية نحصل على:

$$P^{\alpha}=\Phi F^{\alpha}\Phi^{-1} \tag{12}$$

حيث $P^{\alpha}$ مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لمويجات لوجندر

### 4. مويجات لوجندر في حل معادلات تفاضلية -تكاملية من رتب كسرية

#### 4.1 حل معادلات تفاضلية -تكاملية من رتب كسرية الخطية

نعتبر معادلات تفاضلية -تكاملية من رتب كسرية خطيةالمعادلة(1) الآن نقوم بتقريب $D^{\alpha}f(x)$, $u_1(x,y),u_2(x,y)$ و$g(x)$ شرط مويجات لوجندر كما يلي

$$D^{\alpha}f(x)\approx C^T\Psi(x),\qquad u_1(x,y)\approx\Psi^T(x)U_1\Psi(y),\qquad u_2(x,y)\approx\Psi^T(x)U_2\Psi(y) \tag{13}$$

و

$$g(x)\approx G^T\Psi(x). \tag{14}$$

حيث $U_1=[u_{ij}^{(1)}]$, $U_2=[u_{ij}^{(2)}]$ $i,j=1,2,\dots,\widehat{m}$ و $G=[g_1,g_2\dots,g_{\widehat{m}}]^T$.

ثم بواسطة عمليات حسابية نحصل على:

$$C^T\Phi=\lambda_1\tilde{\varphi}^T+\frac{\lambda_2}{\widehat{m}}E\Phi^TU_2^T\Phi+G^T\Phi \tag{15}$$

وهي جملة معادلات جبرية قابلة للحل بسهولة بطرق معروفة.

وبنفس الطريقة بالنسبة للمعادلات التفاضلية -التكاملية ذات الرتب الكسرية الغير خطية (2)

### 5. تطبيق عددي

الهدف من هذه المرحلة معرفةفعالية هذه الطريقة في الوصول إلى حلول دقيقة من خلال مقارنة نتائج هذه الطريقة مع طرق اخرى سنقوم بعرض مجموعة من الأمثلة عددية (في طور الانجاز)

### الملخص


إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم طريقة عددية لحل معادلة تفاضلية-تكاملية ذات الرتب الكسريةباستعمال مويجات لوجندر و مختلف مصفوفات العمليات الخاصة به حيث نحول تلك المعادلات التفاضلية التكاملية ذات رتب كسريةإلى جملة معادلات جبرية تحل بطريقة تكرارية معروفة.


### المراجع


[1] I. Podlubny,Fractional Differential Equations,Academic Press, NewYork, 1999.

[2] H. Jafari and S.A.Yousefi,Application of Legendre wavelets for solving fractional differential equations, Comput. Math.Appl. 62(3) (2011), pp. 1038–1045.