طريقة عددية لحل معادلة تكاملية ذات الرتب الكسرية باستعمال كثيرات حدود تشيبيتشيف

محمدي ربيعة

تحت إشراف الأستاذ: عباسي حسين

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

قسم الرياضيات -كلية الرياضيات و علوم المادة-جامعة قاصدي مرباح ورقلة

الكلمات المفتاحية: التكامل الكسري , الاشتقاق الكسري , كثيرات حدود تشيبيتشيف , مصفوفة العمليات.

مقدمة

ان العديد من المسائل الفيزيائية تؤول عند دراستها إلى معادلات تكاملية و عادة يصعب ايجاد الحلول لهذه المعادلات بالطرق التحليلية لذلك نلجأ إلى الطرق العددية. سنهتم في هذا العمل بحل المعادلات التفاضلية التكاملية ذات الرتب الكسرية.

هذه الطريقة تعتمد على حل معادلات تكاملية ذات الرتب الكسرية باستعمال كثي حدود تشيبيتشيف حيث تمكن من خلال هذه الطريقة من تحويل هذه المعادلة الى جملة معادلات جبرية غير خطية يؤول حلها الى طرق معروفة

1. لمحة عن الحساب الكسري

من المعروف أن التكامل والاشتقاق يكون من الدرجة n حيث n عدد طبيعي أما في هذا الفصل نتطرق الى التكامل والاشتقاق من درجة α حيث α عدد عشري ونذكر منه مايلي:

1.0.1 الاشتقاق الكسري لريمان ليوفيل

$$D^{\alpha} f(t)=\begin{cases}\frac{d^n f(t)}{dt^n} & \alpha=n\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau & 0\leq n-1<\alpha<n\end{cases}$$

1.0.2 الاشتقاق الكسري لكابيتو

$$D^{\alpha} f(t)=\begin{cases}\frac{d^n f(t)}{dt^n} & \alpha=n\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{n}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau & 0\leq n-1<\alpha<n\end{cases}$$

1.1 التكامل ذي الرتب الكسرية

تعريف 1.1. يعرف التكامل الكسري لريمان ليوفيل ذي الرتبة α, $(\alpha\geq 0)$ على النحو التالي [1] :

$$I^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\qquad t>0,$$
$$I^0 f(t)=u(t),$$

حيث أن $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ هي دالة غاما.

التكامل الكسري لريمان ليوفيل تحقق الخصائص التالية :

$$I^{\alpha}I^{\beta}f(t)=I^{\beta}I^{\alpha}f(t),$$
$$I^{\alpha}I^{\beta}f(t)=I^{\alpha+\beta}f(t),$$
$$I^{\alpha}t^{r}=\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)}t^{\alpha+r}.$$

وبشكل خاص يحقق المؤثر D_*^{α} الخواص التالية:

$$D_*^{\alpha}c=0,$$

$$D_*^{\alpha}t^{\beta}=\begin{cases}0, & \beta\in\mathbb{N}_0,\beta<\lceil\alpha\rceil,\\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}t^{\beta-\alpha}, & \beta\in\mathbb{N}_0,\beta\geq\lceil\alpha\rceil;\beta\notin\mathbb{N},\beta>\lfloor\alpha\rfloor,\end{cases}$$

$$D_*^{\alpha}I^{\alpha}f(t)=f(t),$$

$$I^{\alpha}D_*^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{r-1}f^{(k)}(0^+)\frac{t^k}{k!},\quad t>0,$$

$$D_*^{\alpha}(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda D_*^{\alpha}(f(t))+\mu D_*^{\alpha}(g(t)).$$

2. كثير حدود تشيبيتشيف ومصفوفات العمليات لتشيبيتشيف

نعرف كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع لأول والثاني بالشكل التالي :

النوع الأول : $(T_n(x)=cos\ (n\cos^{-1}\ x)(n\geq 0$

النوع الثاني: $(U_n(x)=sin\ (n\cos^{-1}\ x)(n\geq 0$

$$T_0(x)=1$$
$$T_1(x)=x$$
$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)n=1,2,3,\ldots$$

تحقق كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع الأول و النوع الثاني العلاقات التالية

$$\int_{-1}^{1}T_i(x)T_j(x)w(x)dx=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \frac{\pi}{\gamma_i} & i=j\end{cases}$$

و

$$\gamma=\begin{cases}1 & i=0\\ 2 & i\geq 1\end{cases}$$

أي ان كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوعين متعامدة على المجال $[1-,1]$ بالنسبة لدالة الوزن $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ كثير حدود تشيبيتشيق يلعب دور مهم لنظرية تقريب وطرق العددية للدالة $f(x)$ على المجال $[1-,1]$

$$f(x)=\sum_{i=0}a_iT_i(x)\qquad 1)($$

تعرف السلسلة (1) اذا تكتب من شكل

$$f(x)\simeq\sum_{i=0}a_iT_i(x)=T(x)^tA$$

حيث

$$T(x)=[T_0(x),T_1(x),...,T_N(x)]^t$$
$$A=[a_0,a_1,\ldots,a_N]^t$$

و

$$a_i=\frac{\gamma_i}{\pi}\int_1^{-1}=T_i(x)w(x)d$$

كثير حدود تشيبيتشيف يحقق الخاصية

$$\int_{-1}^{x}T_{N-1}(s)ds=\frac{1}{2N}T_N(x)-\frac{1}{2(N-2)}-T_{N-2}(x)+\frac{(-1)^{N-1}}{1-(N-1)^2}T_0(x)$$

$N\geq 3$

كذلك من اجل $T_1(x)$و$T_0(x)$

$$\int_{-1}^{x}T_0(s)ds=T_0(x)+T_1(x)\qquad 2)($$

$$\int_{-1}^{x}T_1(s)ds=\frac{-1}{4}T_0(x)+\frac{1}{4}T_2(x)\qquad 3)($$

من (2) و (3) اذن

$$\int_{-1}^{x}T(s)ds=PT(x),$$

حيث $P\in(N+1)\times(N+1)$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{6}\cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{(-1)^{N-1}}{1-(N-1)^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2N}\\ \frac{(-1)^{N}}{1-(N)^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{2N-2} & 0\end{bmatrix}N\geq 3$$

2.1 مصفوفةالعمليات للاشتقاق الكسري

$$D^{(\alpha)}=F\bar{D}_{\alpha}F^{-1}$$

$$\bar{D}_{\gamma}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} & \cdots\cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} & 0\end{bmatrix}$$

3. تطبيق عددي

و في الأخير نقوم بحل معدلات التكاملية باستخدام كثيري حدود تشيبيتشيف والتي هي في طور الإنجاز.

4. الملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم طريقة عددية لحل المعادلات التكاملية ذات الرتب الكسرية باستخدام كثيرات حدود تشيبيتشيف

المراجع

[1] Azim Rivaz1, Samane Jahan ara1, Farzaneh Yousefi2;Two-dimensional Chebyshev Polynomials for Solving Two-dimensional Integro-Differential Equations;Volume 12, No. 2 (2015) 001–011

.

[2] FakhrodinMohammadi;NumericalsolutionofBagley-Torvikequationusing Chebyshevwaveletoperationalmatrixof-fractional derivative;Int. J.Adv. Appl. Math. andMech. 2(1)(2014)83-91 ISSN:2347-2529

[3] Mohammadreza Ahmadi Darani;A fractional type of the Chebyshev polynomials for approximation of solution of linear fractional differential equations ;Vol. 1, No. 2, 2013, pp. 96-107