Le Formalisme de La Géométrie Non-Commutative

Laboratoire LRPPS ,Faculté des Mathématique et des sciences de la Matière, Département de Physique
Université Kasdi Merbah Ouargla , Ouargla30000,Algérie

présenté par : Benzair Thouiba
Benhaoued Zahra
Encadré par: Kodja lamine
Date: 15/04/2018

Résumé:

On étudie l'équation de Klein-Gordon dans un potentiel coulombien dans le cadre de la géométrie non-commutative. En utilisant la théorie des perturbation, on trouve les corrections de l'énergie an second ordre du paramètre de la non-commutativité θ.

FORMALISME

Produit star (Moyal):

le produit de deux opérateurs de Weyl w[f]et w[g] correspondant aux fonctions f(x)et g(x)égal à l'opérateur de Weyl associe au produit star de deux fonction w[f]w[g]=w[f⋆g].

on commence par le première terme:

$$\hat{w}[f]\,\hat{w}[g] = \int \frac{d^DK}{(2\pi)^D}\tilde{f}(K)e^{iK_i\hat{x}^i}\int \frac{d^DK'}{(2\pi)^D}\tilde{g}(K)e^{iK'_i\hat{x}^i} = \int\int \frac{d^DK}{(2\pi)^D}\frac{d^DK'}{(2\pi)^D}\tilde{f}(K)\tilde{g}(K')e^{iK_i\hat{x}^i}e^{iK'_i\hat{x}^i}. \quad (1)$$

Et produit de 2 operateur de Weyl (1) écrire comme suit :

$$\hat{w}[f]\,\hat{w}[g] = \int\int \frac{d^DK}{(2\pi)^D}\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\tilde{f}(K)\tilde{g}(q-K)e^{iq_i\hat{x}^i}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}K_iK'_j} = \int\int \frac{d^DK}{(2\pi)^D}\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\tilde{f}(K)\tilde{g}(q-K)e^{i(q_i)\hat{x}^i}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}(K_iq_j-K_iK_j)}. \quad (2)$$

On passe au deuxième terme:

$$\hat{w}[f\star g] = \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}(\widetilde{f\star g})(q)e^{iq_i\hat{x}^i}, \quad (3)$$

D'après

$$\hat{w}[f]\,\hat{w}[g] = \hat{w}[f\star g], \quad (4)$$

On peut écrire le produit star de deux fonction au première ordre de θ ;comme suit:

$$f\star g = f(x)\exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_i\theta^{ij}\overrightarrow{\partial}_j\right)g(y)\ |_{x=y} = f(x)g(y) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(y) + O(\theta^2)\ |\ x=y. \quad (5)$$

Les coordonnées de l'espace-temps vérifient la relation de commutation $[\hat{x}^i,\hat{x}^j] = i\theta^{ij}$.
Avec θ^{ij} = constantant.

Les Applications de Seiberg-Witten

Considérons une théorie de jauge commutative. Le groupe de jauge peut être générale ne sera pas explicite. Le potentiel de jauge est $\hat{A}_\mu$,avec l'intensité de champ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A,A_\nu]_\star. \quad (6)$$

La transformation de jauge , avec le paramètre de jauge

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\lambda + i[\lambda,A_\mu]_\star \equiv D_\mu\lambda \quad (7)$$

$$\delta F_{\mu\nu} = i[\lambda,F_{\mu\nu}]_\star. \quad (8)$$

on peut écrire le commutateur star au premier ordre de comme suit :

$$\begin{aligned}[f,g]_* &= f*g-g*f = fg+\frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f\partial_\sigma g - gf - \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\sigma g\partial_\rho f + O(\theta^2)\\ &= fg-gf+\frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f\partial_\rho g - \frac{i}{2}\theta^{\sigma\rho}\partial_\rho g\partial_\rho g + O(\theta^2)\\ &= fg-gf+\frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f\partial_\sigma g + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho g\partial_\sigma f + O(\theta^2)\\ &= [f,g] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\{\partial_\rho f,\partial_\sigma g\} + O(\theta^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Sur un espace non commutatif vit la théorie de jauge non commutative avec le potentiel de jauge $\hat{A}_\mu$ et l'intensité de champ

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu,\hat{A}_\nu]_\star. \quad (10)$$

la transformation de jauge $\hat{\delta}$ a le paramètre de jauge

$$\hat{\delta}\hat{A}_\mu = \partial_\mu\hat{\lambda} + i\left[\hat{\lambda},\hat{A}_\mu\right]_\star \equiv \hat{D}_\mu\hat{\lambda} \quad (11)$$

$$\hat{\delta}\hat{F}_{\mu\nu} = i\left[\hat{\lambda},\hat{F}_{\mu\nu}\right]_\star. \quad (12)$$

pour résoudre l'équation (11)on développe les variables N-C ordre par ordre en θ

$$\hat{A}_\xi = A_\xi + \theta A^1_\xi(A_\xi) + \theta^2A^2_\xi(A_\xi) + O(\theta^3), \quad (13)$$

$$\hat{F}_{\mu\xi} = F_{\mu\xi}(A_\xi) + \theta F^1_{\mu\xi}(A_\xi) + \theta^2F^2_{\mu\xi}(A_\xi), \quad (14)$$

$$\hat{\lambda} = \lambda + \theta\lambda^1(\lambda,A_\mu) + \theta^2\lambda^2(\lambda,A_\mu) + O(\theta^3). \quad (15)$$

Application de l'équation de KG dans un potentiel coulombien dans le formalisme de la G.N.C

L'équation KG dans un espace-temps non commutatif en présence du vecteur potentiel $\hat{A}_\mu$ peut être jeté dans:

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\hat{\varphi} + (ie\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\hat{A}_\nu - e^2\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu\star\hat{A}_\nu + 2ie\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu\partial_\nu)\hat{\varphi} = 0. \quad (16)$$

Pour

$$\hat{A}^\mu = (\hat{A}_0,\hat{A}_i) \quad (17)$$

En utilisant les applications de S-W; on trouve:

$$\hat{A}_0 = -\frac{e}{r} - \frac{e^3}{r^4}\theta^{0j}x_j + O(\theta^2). \quad (18)$$

$$\hat{A}_i = \frac{e^3}{4r^4}\theta^{ij}x_j + O(\theta^2). \quad (19)$$

L'équation (16) prend la forme :

$$\left[-\partial_0^2 + \Delta - m_e^2 + \frac{e^4}{r^2} + i\frac{e^2}{r}\partial_0 - \frac{e^4}{2r4}\theta.L - \frac{e^8}{16r^8}(\theta^{ij}x_j)^2 - i\frac{4e^6}{20r^5}\theta^2\partial_0 - \frac{4e^8}{20r^6}\theta^2\right]\hat{\varphi} = 0. \quad (20)$$

Pour $\theta = 0$

Les solutions de l'équation de KG s'écrit: $\hat{\varphi}(r,\theta,\phi,t) = \frac{1}{r}R(r)Y(\theta,\phi)\exp(-iEt)$ (21)

Et l'énergie :

$$E = E^0_{n,\ell} = \frac{m_e\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right)}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}},\ \alpha = e^2. \quad (22)$$

Avec

$$R(r) = R_{n\ell}(r) = C_{n\ell}\,x^{\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}}\,e^{-\frac{x}{2}}L_n^{2\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}}(x) \quad (23)$$

$$\nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2} \quad (24)$$

θ<< ;On utilise la théorie des perturbations a première ordre de θ.
On calcule :

$$\langle n\ell m|r^{-k}|n\ell m'\rangle = \int_0^\infty R^2_{n\ell}r^{-k}dr\delta_{mm'} = \frac{2^ka^kn!}{2(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)}\times\int_0^\infty x^{2\nu+2-k}e^{-x}[L_n^{2\nu+1}(x)]^2dx\delta_{mm'} = f(k);(k=3,4,5,6). \quad (25)$$

$$\langle n\ell m|r^{-5}|n\ell m'\rangle = \frac{4a^5}{(2\nu-1)(\nu-1)\nu(n+\nu+1)} \times\left[1+\frac{6n}{(\nu+1)}+\frac{15n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}+\frac{5n(n-1)(n-2)}{(\nu+1)(2\nu+3)(\nu+2)}\right]\delta_{mm'} = f(5), \quad (26)$$

$$\langle n\ell m|r^{-6}|n\ell m'\rangle = \frac{4a^5}{(2\nu-1)(\nu-1)\nu(2\nu+1)(n+\nu+1)}\left[1+\frac{6n}{(\nu+1)}+\frac{15n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)} + \frac{5n(n-1)(n-2)}{(\nu+1)(2\nu+3)(\nu+2)}+\frac{15n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}+\frac{5n(n-1)(n-2)}{(\nu+1)(2\nu+3)(\nu+2)}\right]\delta_{mm'} = f(5). \quad (27)$$

Finalement les correction de l'énergie sont données par :

$$\Delta E^{nc} = -\frac{\alpha^2m_\ell}{2}f(4)\theta - \frac{\alpha^3}{5}\left(E^0_{n,\ell}f(5) + \frac{29}{24}\alpha f(6)\right)\theta^2. \quad (28)$$

(On utilisé les propriétés des polynômes de Laguerre.)

$$L_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+1)}F(-n;\nu+1;x);\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-x}[F(-n;\gamma;x)]^2dx \quad (29)$$

$$= \frac{n!\Gamma(\nu)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\left\{1+\frac{n(\gamma-\nu-1)(\gamma-\nu)}{1^2\gamma}+\frac{n(n-1)(\gamma-\nu-2)(\gamma-\nu-1)(\gamma-\nu)(\gamma-\nu+1)}{1^22^2\gamma(\gamma+1)} +\ldots+\frac{n(n-1)\ldots1(\gamma-\nu-n)\ldots(\gamma-\nu+n-1)}{1^22^2n^2\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\right\}. \quad (30)$$

CONCLUSION

-En utilisant les applications de Seiberg-Witten et la produit star de Moyal,on a dérivé l'équation de KG modifiée en présence d'un champ coulombien .

- En utilisant la théorie des perturbation, on on a trouvé les correction de l'énergie jusqu' an deuxième ordre de θ.

- La dégénérescence est complètement enlevée car l'énergie dépend de m_ℓ.

Référence

1. S. ZAIM, L. KHODJA and Y. DELENDA , International Journal of Modern Physics A. **26**, (2011) 4133–4144.
2. La géométrie non commutative et application sur l'atome d'hydrogène. Juin 2013.