جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: تحليل دالي

من إعداد الطالبة : بـعــــضـــي فـــــــراح

الموضوع

حل عددي للمعادلات التفاضلية-التكاملية ذات الرتبة الكسرية بإستعمال كثيرات حدود برنشتاين

تناقش يوم 2018/06/02 من طرف لجنة المناقشة :

معمري محمد	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
بن الشيخ ع/ الكريم	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	ممتحنا
عباسي حسين	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

شكر وعرفان

نشكر الله تعالى الذي وفقنا لإتمام هذا العمل و إعترافا بفضله علينا و عملا بقوله صلى الله عليه و سلم :

"من صنع إليكم معروفا فكافائوه فإن لم تجدوا ماتكافئونه به فادعوا له حتى تروا أنكم كافأتموه"

نتقدم بفائق عبارات الشكر و العرفان إلى الأستاذ المشرف **عباسي حسين** الذي كان لنا موجها و ناصحا و مرشدا ، فمهما قلنا و مهما فعلنا لن نوفيه إلا القليل مما يستحق .

كما نتقدم بالشكر الجزيل إلى أستاذ المحترم **معمري محمد و بن الشيخ عبد الكريم** على مناقشة هذه المذكرة .

كما لا يفوتنا أن نشكر كل من قدم لنا يد العون من قريب أو بعيد لننجز هذا العمل المتواضع سواء بنصائحه و توجيهاته أو بدعواته و أمنياته ،دون أن ننسى كل من كان سببا في تعليمنا بدء بمعلمينا ووأساتذتنا و وصولا إلى زملائنا الأعزاء.

الملخص:

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو تقديم طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية–التكاملية ذات الرتبة الكسرية و ذلك بإستعمال كثيرات حدود برنشتاين، ويتم تحويل هذه المعادلات التفاضلية–التكاملية ذات الرتبة الكسرية إلى منظومة من المعادلات الجبرية تحل بطرق معروفة و سهلة البرمجة وكذلك المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية المتغيرة . فالأمثلة العددية تبين دقة و تقارب الحل التقريبي نحو الحل الحقيقي .

الكلمات المفتاحية : كثيرات حدود برنشتاين ، مصفوفات العمليات ،المعادلات التفاضلية–التكاملية ذات الرتبة الكسرية ،المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية المتغيرة .

Abstract :

The main purpose of this study is to present a numerical method for solving fractional-differential equations using the Bernstein polynomials. The differential-integrative equations of the fractional rank are converted into a system of algebraic equations solved by known and easy-to-use methods, The fractal changing. Numerical examples show the accuracy and approximation of the approximate solution to the real solution.

Key words: Bernstein polynomials , Fractional integro-differential equations , operational matrice , Equations differential , Differential with variable fractional rank .

Résumé :

L'objectif principal de cette note est de présenter une méthode numérique pour résoudre les équation différentielles fractionnaires en utilisant les polynômes de Bernstein. Ces équation différentielles-intégratives avec le rang fractal sont converties en un système d'équations algébriques qui sont

Résoiues dans méthodes connues et faciles à utiliser , ainsi que des équation différentielle .es exemples numériques montrent la précision et l'approximation de la solution approximative à la vraie solution .

الى من كلله الله بالهيبة والوقار .. الى من علمني العطاء بدون انتظار.. الى من أحمل اسمه بكل افتخار.. أرجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثمارا قد حان قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم اهتدي بها اليوم وفي الغد والى الأبد. أبي الغالي.

الى ملاكي في الحياة.. الى معنى الحب ومعنى الحنان والتفاني.. الى بسمة الحياة وسر الوجود..الى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي أكيد الى ست الحبايب أمي الغالية.

الى من بهم أكبر وعليهم أعتمد.. الى شموع تنير ظلمة حياتي..الى من بوجودهم أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها..الى من عرفت معهم معنا للحياة إخوتي الأعزاء.

الى من أرى التفاءل بعينها.. والسعادة في ضحكتها.. الى شعلة النور..الى الوجه المفعم بالبراءة الى فلذة قلبي ويلسم جراحي أخواتي الحبيبات.

الى توأم روحي ورفيقة دربي.. الى صاحبة القلب الطيب والنوايا الصادقة الى من رافقتني منذ أن حملنا حقائب صغيرة ومعك سرت الدرب خطوة خطوة وماتزال ترافقني الى الان.

الى الأخوات اللواتي لم تلدهن أمي..الى من تحلو بالاخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء الى ينابيع الصدق الصافي الى من معهم سعدت، وبرفقتهم في دروب الحياة الحلوة والحزينة سرت الى من كانوا معي على طريق النجاح والخير الى من عرفت كيف أجدهم وعلموني أن لا أضيعهم صديقاتي ورفيقات الدرب.

الفهـــــــــرس

ترميز

الرمز	مدلوله
$\Gamma(x)$	التابع جاما لأولر
$\beta(x,y)$	التابع بيتا
I^{α}	مؤثر التكامل الكسري لريمان-ليوفيل من الرتبة α
I^{0}	المؤثر الوحدوي
D_a^{α}	مؤثر الاشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل من الرتبة α
${}^{c}D_a^{\alpha}$	مؤثر الاشتقاق الكسري لكابيتو من الرتبة α
$\|.\|$	النظيم
$\lceil\alpha\rceil$	أقل عدد صحيح أكبر من أو يساوي α
c_i	عوامل كثيرات حدود برنشتاين
$\langle .,. \rangle$	جداء سلمي
$\|.\|_2$, $\|.\|_{L^2}$	نظيم على L^2
$span\{B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), \dots, B_{n,n}(x)\}$	الفضاء الجزئي المولد بالمجموعة $\{B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), \dots, B_{n,n}(x)\}$
δ_{ij}	دلتا كرونكر ($\delta_{ij}=1$ إذا كان $i=j$ و $\delta_{ij}=0$ إذا كان $i\neq j$)
$\det(A)$	محدد المصفوفة A
$w(x)$	دالة الوزن
$B_{i,n}(x)$	كثير حدود برنشتاين
$OB_{i,n}(x)$	كثير حدود برنشتاين المتعامد والمتجانس
$\widetilde{\mathbf{C}}$	مصفوفة العمليات لناتج الجداء
$\mathbf{D}^{(1)}$	مصفوفة العمليات الاشتقاق
$\mathbf{P}$	مصفوفة العمليات للتكامل
I^{α}	مصفوفة العمليات للتكامل الكسري
D^{α}	مصفوفة العمليات للاشتقاق الكسري
$D^{\alpha(x)}$	مصفوفة العمليات للإشتقاق الكسري المتغيرة
Φ	يمثل شعاع من كثيرات الحدود أساس برنشتاين
$\mathcal{H}$	مصفوفة هلبرت $Hilbert\ \ matrix$
Q	مصفوفة مزدوجة لـ $\Phi(x)$ $Dual\ \ matrix$
L^2	فراغ هيلبار
$\mathcal{P}_n$	فراغ كثيرات حدود برنشتاين من الدرجة أقل أو تساوي n

مقدمة

يمكن القول دون تجاوز أو مبالغة أن المعادلات التفاضلية-التكاملية تحتل مكانة المرموقة في كل فروع العلوم الهندسية و الفيزيائية، في مذكرتنا هذه نتطرق إلى تقديم المعادلات التفاضلية- التكاملية ذات الرتبة الكسرية و المعادلات التفاضلية ذات الرتبة المتغيرة ، و التي تلعب دور كبير في العديد من المجالات مثل حركة الموائع ،إنتشار الحرارة و نظرية التذبذب ، عادة يصعب إيجاد الحلول للمعادلات التفاضلية-التكاملية ذات الرتبة الكسرية بالطرق التحليلية لذلك نؤول إلى الطرق العددية ، وقد عمل الباحثون على استنباط طرق العددية مختلفة و تطويرها لحل هذه المعادلات مثل طريقة وظائف قياس المويجات (the wavelet method) ، طريقة تحليل الهوموتوبي (homotopy analysis) ، طريقة حدود تشيبيتشيف (Chebyshev polynomial method) ، طريقة مصفوفة برنولي (Bernoulli matrix method).

إن الغرض من هذه المذكرة هو تقديم طريقة عددية لحل معادلة التفاضلية-التكاملية ذات الرتبة الكسرية التالية

$$ {}^{c}D_{a}^{\alpha}y(x) = f(x) + \int_{a}^{b} k(x,t)y(t)dt, y(a) = y_a, 0 < \alpha \leq 1 \tag{1} $$

و المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الكسرية المتغيرة التالية :

$$ D_{x}^{\alpha(x)}u(x) + \lambda_1 u'(x) + \lambda_2 u(x) = f(x), u(0) = u_0 \tag{2} $$

تحتوي المذكرة على ثلاثة فصول و هي مقسمة كالآتي :

يتكون لفصل الأول من أربعة أقسام ، في القسم أعطيت التوابع الخاصة جاما و بيتا ، في القسم بعض التعريف التكامل الكسري مع ذكر بعض الخواص ، في القسم التعريفات المشتق الكسري مع ذكر بعض الخواص ، بينما في القسم الاخير من الفصل تم تعريف المعادلات التكاملية و ذكر أصنافها المختلفة .

و يتضمن الفصل الثاني قسمين ، ففي القسم الأول تم تعريف كثيرات حدود برنشتاين و ذكر خواصها ، تقريب التابع باستخدام كثيرات حدود برنشتاين ، و دراسة التقارب ،أما في القسم الثاني تم تعيين مصفوفة العمليات لناتج الجداء و مصفوفة العمليات للتكامل و الاشتقاق ، ثم مصفوفة العمليات للاشتقاق الكسري و التكامل الكسري .

ينقسم لفصل الثالث إلى قسمين ، ففي القسم الأول من المصفوفات العمليات لكثيرات حدود برنشتاين لحل المعادلة التفاضلية الكسرية المتغيرة الترتيب عدديا ،أما في القسم الثاني ، يتم إستخدام كثيرات حدود برنشتاين ، تحويل المعادلات التفاضلية-التكاملية ذات الرتب الكسرية إلى جملة معادلات جبرية ، إذ تم تطبيق الطريقة المقترحة على بعض الأمثلة من المعادلات التفاضلية-التكاملية مع مقارنة النتائج مع الحل الحقيقي.

الفصل الأول

أوليات الحساب الكسري

قائمة المحتويـــــــات

1.1 التوابع الإعتيادية في الحساب الكسري

نوفر في هذا الجزء التوابع الخاصة (جاما, بيتا) والتي تعتبر من التوابع الضرورية والأساسية في نظريات الحساب الكسري.

1.1.1 التابع جاما

تعريف 1 [1, 29]
واحدة من التوابع الأساسية للحساب الكسري و يسمى التابع جاما لأولر $(Euler)$ ،التابع جاما $\Gamma(\alpha)$ بدلالة التكامل يعطى في الشكل التالي :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \quad \forall\alpha \in \mathbb{C} \text{ حيث } Re(\alpha) > 0, x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

2.1.1 الخصائص الأساسية لتابع جاما

[1]

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \tag{2.1}$$

نكامل بالتجزئة فنجد :

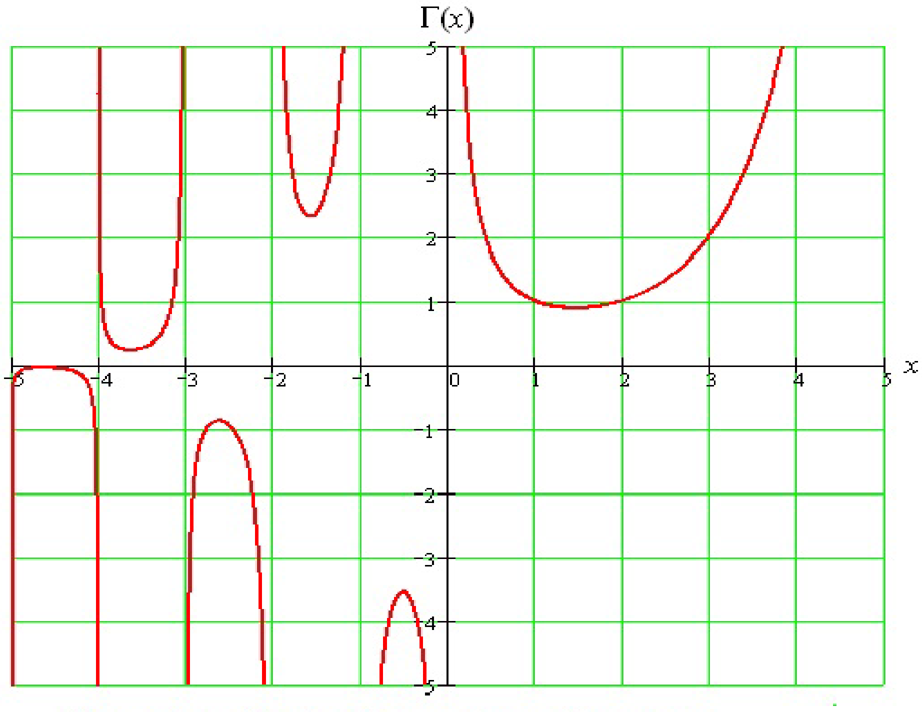
$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{(\alpha+1)-1}e^{-x}dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx \\
&= \Big[-x^{\alpha}e^{-x}\Big]_{x=0}^{x=+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dt \\
&= \alpha\Gamma(\alpha)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

بالخصوص

$$\Gamma(1) = 1 \tag{4.1}$$

و بإستخدام الخاصية أعلاه نحصل على القيم من أجل $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1!$$
$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3!$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha-1)! = \alpha!$$



شكل 1.1: المنحنى البيـــاني للـتابـع جـــامـــا .

3.1.1 التابع بيتا

تم التعرف لدالة بيتا بواسطة العالم أولر $(Leonhard\ \ Euler)$ سنة 1771 و تم تعريفها كما يلي :

تعريف 2
إذا كان $x > 0$, $y > 0$ ، فإنَ دالة بيتا تعرف كما يلي :

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (5.1)$$

إذا تم تغيير x, y في التعريف السابق ، فإنَ :

$$\beta(y,x)=\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt \tag{6.1}$$

فإذا كان $1-t=u$ ، فإن $dt=-du$ ، و بالتالي :

$$\begin{aligned}\beta(y,x)&=-\int_0^1(1-u)^{y-1}u^{x-1}du\\&=\int_0^1(1-u)^{y-1}du\end{aligned}$$

و بالمقارنة مع $(5\ .\ 1)$ نجد أن :

$$=\beta(x,y)$$

ملاحظة 1

التابع بيتا متناظر

$$\beta(x,y)=\beta(y,x)$$

نظرية 1

نظرية للتابع بيتا علاقة بتابع جاما المعرف بالعلاقة :

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{7.1}$$

بحيث $x>0$, $y>0$.

2.1 التكامل الكسري

1.2.1 نظرية ريمان-ليوفيل للتكامل الكسري

تعريف 3 [2]

لتكن $\alpha\in\mathbb{R}, a,x\in\mathbb{R}$ المؤثر التكامل الكسري

$$D_a^{-\alpha}f(x)=I_a^{\alpha}f(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, x>a \tag{8.1}$$

يسمى التكامل الكسري لريمان-ليوفيل من الرتبة α للتابع f

$\Gamma(\alpha)$ التابع جاما لأولر $\Gamma(\alpha)=(1-\alpha)!$ لدينا:

$$I_a^{\alpha}f(x):=\begin{cases} I\,(\text{المؤثر الوحدوي}) & \alpha=0\\ \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt & \alpha=n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

نلاحظ أن نظرية ريمان-ليوفيل للتكامل الكسري تكتب على نموذج الجداء التنسوري حيث :
$f(x)$ و $\varphi_\alpha = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

$$D_a^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = f(x) * \varphi_\alpha, x > a.$$

خواص 1 [2]

1. $I_a^0 f(x) := f(x)$
2. مؤثر التكامل يكون مؤثر خطي

مثال 1

ليكن التابع f المعرف بـ : $f(x) = (x-a)^c, c > -1$ في هذه الحالة لدينا :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (1-t)^{\alpha-1} (t-a)^c dt$$

نقوم بوضع التغيير متغير مع إدخال التابع بيتا فنجد :

$$t = a + (x-a)\vartheta,\ 0 \leq \vartheta \leq 1 \tag{9.1}$$

بإتباع ذلك ، النتيجة تكون كالتالي :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-\vartheta(x-a))^{\alpha-1} \vartheta^c (x-a)^{c+1} d\vartheta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{c+\alpha} \int_0^1 (1-\vartheta)^{\alpha-1} \vartheta^c d\vartheta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+c} \beta(\alpha, c+1) \\ I_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} (x-a)^{\alpha+c} \end{aligned}$$

نظرية 2

[2] إذا كان $f \in L^1[a,b]$, $\alpha > 0$ ، فإن $I_a^\alpha f(x)$ ، موجود من أجل $x \in [a,b]$ ، و عليه فيكون $I_a^\alpha f(x) \in L^1[a,b]$

قضية 1 [2]

ليكن $f \in L^1[a,b]$ من أجل كل $\alpha, \beta > 0$ يكون :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x) \tag{10.1}$$

فإن (10.1) محققة من أجل كل $x \in [a,b]$

برهان 1

لتكن $f \in L^1[a,b]$ ،لدينا:

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_\tau^x (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau dt$$

لدينا من النظرية (2) التكاملات موجودةو بواسطة نظرية فوبييني لدينا:

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1} dt d\tau$$

بوضع التغيير متغير

$$t-\tau = \vartheta(x-\tau), 0 \leq \vartheta \leq 1$$

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_0^1 (x-\tau)^{\alpha-1}(1-\vartheta)^{\alpha-1}\vartheta^{\beta-1}(x-\tau)^\beta d\vartheta d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\vartheta)^{\alpha-1}\vartheta^{\beta-1} d\vartheta d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau \\
&= I_a^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}$$

من أجل كل مجال مغلق $[a,b]$. إذا كان $f \in c[a,b]$ ، فإن $I_a^\alpha f \in c[a,b]$ ، و بالتالي فإن $I_a^\alpha I_a^\beta f \in c[a,b]$ ، و كذلك $I_a^{\alpha+\beta} f \in c[a,b]$.

ملاحظة 2

في الحالة العامة التكامل الكسري لريمان-ليوفيل من الرتبة α لتابع ثابت يعطى بالعلاقة التالية :

$$D_t^{-\alpha} C = I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha$$

تعريف 4 [15, 16, 17]

للتكامل الكسري تعريفان يميني و يساري من الرتبة $\alpha \in \mathbb{R}$ و ذلك حسب العالمان ريمان و ليوفيل :

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d(\tau), t \in [a,b]$$

$$I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{1-\alpha}} d(\tau), t \in [a,b]$$

في حالة $\alpha = 0$ يصبح :

$$(I_a^0 f)(t) = (I_b^0(t)) = f(t)$$

3.1 المشتقات الكسرية

1.3.1 نظرية ريمان-ليوفيل للمشتق الكسري

تعريف 5 [2]
لتكن $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ مؤثر المشتق الكسري

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= D^n I^{n-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, x > a \end{aligned}$$

يسمى المشتق الكسري لريمان-ليوفيل من الرتبة α للتابع $f \in C[a,b]$
لدينا :

$$(D_a^\alpha f)(x) := \begin{cases} f(x) & \alpha = 0 \\ D^n f(x) & \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

مثال 2
ليكن التابع f المعرف بـ: $f(x) = (x-a)^\mu, \mu > -1, \alpha \geq 0$ من (9 . 1) نجد :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n \frac{\Gamma(\mu+1)}{n-\alpha+\mu+1} (x-a)^{n-\alpha+\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{n-\alpha+\mu+1} D^n (x-a)^{n-\alpha+\mu} \end{aligned}$$

من أجل $(\alpha-\mu) \in \mathbb{N}$, نجد :

$$D_a^\alpha f(x) = 0, (\alpha-\mu) \in 1, 2, 3, \ldots$$

و في حالة $(\alpha-\mu) \notin \mathbb{N}$, لدينا :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)(x-a)^{\mu-\alpha}}$$

ملاحظة 3
المشتق الكسري لريمان-ليوفيل لتابع ثابت $f(x) = c$ غير معدوم ، عبارته :

$$D_a^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

قضية 2

ليكن التابع $f \in L^1[a,b], \alpha > 0$ المساواة صحيحة من أجل $x \in [a,b]$:

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x) \tag{11.1}$$

برهان 2

$$\begin{aligned} D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) &= D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(x) \\ &= D^n I_a^n f(x) = f(x) \end{aligned}$$

خواص 2 [1]

لتكن $\alpha, \beta > 0$ حيث $n-1 \leq \alpha < n$,$m-1 \leq \beta < m$,$(n, m \in \mathbb{N}^*)$ $\alpha > \beta > 0, n > m$

1. إذا كان $\alpha > \beta > 0$ و $f \in L^1[a,b]$

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x)$$

فإن المساواة صحيحة أين مكان تقريبا على $[a,b]$

2. إذا كان $\beta \geq \alpha > 0$ و المشتق الكسري $D_a^{\beta-\alpha} f$ موجود ،فإن:

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = D^{\beta-\alpha} f(x)$$

3. من جهة $\alpha > 0$, $\mathbb{K}^*$ إذا كانت المشتقات الكسرية موجودة $D_a^\alpha f$ و $D_a^{k+\alpha}$ حيث $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$ فإن :

$$D^k (D_a^\alpha f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x)$$

4. نقول أن $f = I_a^\alpha$ يوجود التابع $\varphi \in L^1[a,b]$:

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x)$$

من أجل $x \in [a,b]$

برهان 3

1. إذا كان $\alpha > \beta > 0$ و $n > m$ لدينا :

$$\begin{aligned} D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) &= D^n I_a^{n-\beta} (I_a^\alpha f)(x) \\ &= D^n (I_a^{n+\alpha-\beta} f)(x) \\ &= D^n I_a^n (I_a^{\alpha-\beta} f)(x) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x) \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}D_a^{\beta}(I_a^{\alpha}f)(x) &= D^m I_a^{m-\beta}(I_a^{\alpha}f)(x)\\ &= D^m I_a^{m-(\beta-\alpha)}f(x)\\ &= D_a^{\beta-\alpha}f(x)\end{aligned}$$

موجود من أجل $i-1 \leq \beta-\alpha < i$ و $i \leq m$

.3 لدينا :

$$\begin{aligned}D^k\left[D_a^{\alpha}f(x)\right] &= D^k D^n I_a^{n-\alpha}f(x)\\ &= D^{k+n}I_a^{n-\alpha+k-k}f(x)\\ &= D^{k+n}I_a^{k+n-(\alpha+k)}f(x)\\ &= D_a^{k+\alpha}f(x)\end{aligned}$$

و بالتالي النتيجة .

.4 من خلال العلاقة (11.1) نجد:

$$I_a^{\alpha}D_a^{\alpha}f(x) = I_a^{\alpha}(D_a^{\alpha}I_a^{\alpha}\varphi(x)) = I_a^{\alpha}(\varphi(x)) = f(x)$$

نظرية 3
ليكن التابعين f و g للمشتقات الكسرية لريمان-ليوفيل موجودة ، وذلك من أجل $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ، لدينا :

$$D_a^{\alpha}\left(c_1f(x)+c_2g(x)\right) = c_1D_a^{\alpha}+c_2D_a^{\alpha}g(x) \qquad (12.1)$$

خاصية 1 []
لتكن $\alpha > 0$ و $n = [\alpha]+1$ من أجل أي عدد صحيح $m \in \mathbb{N}^*$ ، لدينا :

$$D_a^{\alpha}f(x) = D^m I_a^{m-\alpha}f(x)m > \alpha \qquad (13.1)$$

برهان 4
من أجل $n \geq m$ ، لدينا:

$$\begin{aligned}D^m I_a^{m-\alpha}f(x) &= D^n D^{m-n}I_a^{m-n}I_a^{n-\alpha}f(x)\\ &= D^n I_a^{n-\alpha}f(x)\\ &= D_a^{\alpha}f(x)\end{aligned}$$

مع $D^{m-n}I_a^{m-n} = I$

2.3.1 نظرية كابيتو للمشتق الكسري

تعريف 6 [2]
لتكن $\alpha \in \mathbb{R}_+$، $x > a, x, a \in \mathbb{R}$، الإشتقاق الكسري
(14.1)

$$I_a^{n-\alpha} D^n f(x) =^c D_a^\alpha f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt & n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^n}{dx^n} f(x) & \alpha = n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

يسمى المشتق الكسري لكابيتو أو مؤثر الاشتقاق الكسري لكابيتو من الرتبة α ، يتم تقديم هذا المؤثر من طرف العالم الرياضي الإيطالي كابيتو 1967 [14].

- مؤثر الإشتقاق الكسري لكابيتو مؤثر خطي

$$^c D_a^\alpha = [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda^c D_a^\alpha f(x) + \mu^c D_a^\alpha g(x), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

مثال 3

ليكن التابع $f(x)$ المعرف بـ : $f(x) = (x-a)^\gamma$، $\gamma > -1$, $(0 < \alpha \leq 1)$ إستخدام التغيير متغير من (9 . 1) لدينا :

$$\begin{aligned} ^c D_a^\alpha f(x) &= I_a^{1-\alpha} f'(x) = \gamma I_a^{1-\alpha} (x-a)^{\gamma-1} \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-a)^{\gamma-1} dt \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{\gamma-\alpha} \int_0^1 \vartheta^{\gamma-1} (1-\vartheta)^{-\alpha} d\vartheta \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{\gamma-\alpha} \beta(\gamma, 1-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} (x-a)^{\gamma-\alpha} \end{aligned}$$

ملاحظة 4
مؤثرالمشتق الكسري لكابيتو لتابع ثابت يكون معدوم أي :

$$_a^c D_t^\alpha C = 0$$

3.3.1 العلاقة بين المشتق الكسري لريمان -ليوفيل و كابيتو

نظرية 4 [2]
لتكن $\alpha \geq 0$, $n=[\alpha]+1$ ، إذا كان التابع f يحتوي على $n-1$ مشتق فإن :

$$ {}^{c}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] $$

من أجل $x \in [a,b]$

برهان 5
من التعريف لدينا :

$$ D_a^{\alpha}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] $$

$$ = D^n I_a^{n-\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] dt $$

بإستخدام التكامل بالتجزئة نحصل :

$$ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] dt $$

$$ = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\left(f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)(x-t)^{n-\alpha}\right]_a^x $$

$$ + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} D\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] dt $$

$$ I_a^{n-\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] = I_a^{n-\alpha+1} D\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] $$

بنفس الطريقة من أجل n مرة :

$$ I_a^{n-\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] = I_a^{n-\alpha} I_a^n D^n\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] $$

لدينا $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ متعددالحدود من الدرجة $n-1$ لدينا :

$$I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]=I_a^{n-\alpha}I_a^nD^nf(x).$$

بإستخدام تعريف مؤثر الإشتقاق نجد :

$$D^nI_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]=D^nI_a^nI_a^{n-\alpha}D^nf(x)={}^cD_a^\alpha f(x)$$

قضية 3

إذا كان التابع f مستمر فإن :

$${}^cD_a^\alpha f(x)I_a^\alpha=f$$

و

$$I_a^\alpha(D_a^\alpha f(x))=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

إذن مؤثر الإشتقاق الكسري لكابيتو مؤثر عكسي يساري للمؤثر التكاملي الكسري و العكس غير صحيح .

تعريف 7 [15, 16, 17]

المشتق الكسري لكابيتو اليساري و اليميني على الترتيب لتابع f يتم تعريفه كالتالي :

$${}_a^cD_t^\alpha f(t):={}_aI_t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t),\forall t\in(a,b]$$

$${}_t^cD_b^\alpha f(t):={}_tI_b^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t),\forall b>t$$

4.1 مدخل للمعادلات التكاملية

1.4.1 أنواع المعادلات التكاملية

تعريف 8 [3, 4]

المعادلات التكاملية هي المعادلة التي يكون فيها المجهول تحت علامة التكامل و قد يضاف المجهول أيضا خارج التكامل في أحد طرفي المعادلة .

مثال 4

لدينا : $a\le y\le b,\ a\le x\le b$

$$f(x)=\int_a^b k(x,y)u(y)dy$$

$$u(x)=f(x)+\int_a^b k(x,y)u(y)dy$$

تسمى معادلات تكاملية ،التابع $u(x)$ هو تابع مجهول يطلب تحديده ،والتوابع $k(x,t), f(x)$ الأخرى معلومة

نذكر أنواع المعادلات التكاملية الخطية و غير الخطية .

2.4.1 بعض المعادلات التكاملية الخطية

و من أشهرها نذكر منها مايلي :

المعادلات التكاملية إريك إيفار فريدهولم :

تعريف 9

نسمي معادلة التكاملية الخطية لفريدهولم من النمط الثاني كل معادلة من الشكل :

$$\mu u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (15.1)$$

وذلك في حالة $\mu = constant \neq 0$

بحيث : λ وسيط المعادلة التكاملية لفريدهولم

ϕ تابع مجهول و يطلب تعيينه

$k(x,t)$ تسمى نواة معادلة فريدهولم (متصلة) وهي تابع ذات متغيرين معرف على Ω حيث :

$$\Omega \begin{cases} & a \leq x \leq b \\ (x,t) & \\ & a \leq t \leq b. \end{cases}$$

إذا كان $\mu = 1$ و $f = 0$ فإن المعادلة متجانسة و تكتب من الشكل :

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

كل معادلة تكاملية من الشكل :

$$\lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x).$$

تسمى معادلة تكاملية لفريدهولم من النمط الأول وذلك في حالة $\mu = 0$ و إذا كانت $\mu = \mu(x)$ ، المعادلة تمثل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثالث .

معادلات فيتو فولتيرا التكاملية :

تعريف 10

نسمي معادلة تكاملية خطية لفولتيرا من النمط الثاني كل معادلة من الشكل :

$$\mu u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (16.1)$$

وذلك في حالة $\mu = constant \neq 0$

بحيث : λ وسيط المعادلة التكاملية لفريدهولم

ϕ تابع مجهول و يطلب تعيينه

$k(x,t)$ تسمى نواة معادلة فريدهولم (متصلة) وهي تابع ذات متغيرين معرف على Ω حيث :

$$\Omega \begin{cases} \qquad a \leq x \leq b \\ (x,t) \\ \qquad a \leq t \leq b. \end{cases}$$

إذا كان $\mu = 1$, $f = 0$ فإن المعادلة :

$$u(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$$

تسمى المعادلة المتجانسة لفولتيرا من النمط الثاني .

كل معادلة تكاملية من الشكل :

$$\lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = f(x)$$

تسمى معادلة تكاملية لفولتيرا من النمط الأول وذلك في حالة $\mu = 0$ ومن النوع الثالث عندما $\mu = \mu(x)$.

معادلات وينر-هويف التكاملية:

تعريف 11

$$u(x) = f(x) + \int_a^\infty k(x-y)u(y)dy$$

تسمى معادلة وينر-هويف .

معادلة رينوال التكاملية:

تعريف 12

$$u(x) = f(x) + \int_a^x k(x-y)u(y)dy$$

تسمى معادلة رينوال .

معادلة آبل التكاملية :

تعريف 13

$$\mu u(x) - \lambda \int_a^x \left[u(y)/(x-y)^\alpha\right] dy = f(x) 0 \leq \alpha < 1$$

تسمى معادلة آبل ، و قد سميت بهذا الإسم نسبتا إلى العالم آبل .

معادلة كوشي التكاملية:

تعريف 14

$$a(x)u(x) + b(x) \int_\Gamma [u(y)/(x-y)]dy + \int_\Gamma k(x,y,u(y))dy = f(x)$$

تسمى معادلة كوشي الشاذة حيث Γ تعني قوس مغلق أو مفتوح في $\mathbb{R}^2$.

3.4.1 بعض المعادلات التكاملية غيرالخطية

للمعادلات التكاملية غير الخطية الكثير منها نذكر أشهرها :

معادلة هامريشتين التكاملية:

تعريف 15

نسمي معادلة تكاملية غير خطية لهامريشتين كل معادلة تكتب من الشكل :

$$\mu u(x) = f(x) + \lambda \int_D k(x,t) F(t,u(t)) dt, D \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$$

معادلة تكاملية لهامريشتين نوعها يعتمد على قيم μ تأخذ المعادلة الشكل :

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) F(t,u(t)) dt$$

في حالة $\mu = 0$ فسمى هامريشتين-فولتيرا تكاملية غير خطية من النوع الأول ، أما في حالة $\mu = 1$ المعادلة تأخذ الشكل :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) F(t,u(t)) dt$$

فإنها تسمى هامريشتين-فولتيرا تكاملية غير خطية من النوع الثاني .

معادلة فريدهولم-فولتيراالتكاملية:

تعريف 16

نسمى معادلة فريدهولم- فولتيرا التكاملية غير الخطية كل معادلة معرفة على الشكل التالي :

$$\mu u(\overline{x},t)+\lambda\int_\Omega k(\overline{x}-\overline{\xi},\overline{y}-\overline{s})F(t,u(\overline{\xi},\overline{s}))d\overline{\xi}d\overline{s}+\lambda\int_0^t G(t,T)u(\overline{x},\overline{y},T)dT$$
$$=f(\overline{x},\overline{y},t)$$
$$\overline{x}=(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n),\overline{t}=(t_1,t_2,\ldots,t_n).$$

حيث Ω تعتمد على منحنى التكامل .

معادلة يورشون-فولتيرا التكاملية:

تعريف 17

المعادلة :

$$\mu u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t,u(t))dt, 0\leq x\leq T<\infty$$

تسمى معادلة يورشون-فولتيرا التكاملية غير الخطية ، فمعادلة يورشون-فولتيرا التكامليةغير الخطية نوعها يعتمد على قيم μ فإذا كانت $\mu=0$ ، فإن:

$$0=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t,u(t))dt, 0\leq x\leq T<\infty$$

وهي معادلة يورشون-فولتيرا التكاملية غير الخطية من النمط الأول ، فإذا كانت $\mu=1$ ، فإن :

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t,u(t))dt, 0\leq x\leq T<\infty$$

وهي معادلة يورشون-فولتيرا التكاملية غير الخطية من النمط الثاني ، تكون ومن النوع الثالث عندما $\mu=\mu(x)$

$$\mu(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t,u(t))dt$$

معادلة كوشي التكاملية الشاذة غير الخطية:

تعريف 18

نسمى معادلة كوشي التكاملية الشاذة غير الخطية كل معادلة تكاملية تكتب على الصورة التالية :

$$a(x)u(x)+b(x)\int_\Gamma\frac{u(t)}{t-x}dt+\int_\Gamma F(x,t,u(t))dt=f(x)$$

حيث a,b,f توابع معطاة أما u مجهولة يطلب تعيينها .

معادلة إريك إيفار فريدهولم التكاملية غير الخطية:

تعريف 19

المعادلة التكاملية :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F\left(u(t)\right) dt$$

وهي معادلة التكاملية غيرالخطية لفريدهولم من النمط الثاني .

أما إذا كانت $f = 0$ فإن المعادلة التكاملية لفريدهولم غير الخطية تكون متجانسة، المعادلة التكاملية :

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)F\left(u(t)\right) dt$$

وهي معادلة التكاملية غيرالخطية لفريدهولم من النمط الأول .

5.1 المعادلات التفاضلية العادية

[27 ,28]

1.5.1 المعادلة التفاضلية :

هي علاقة بين المتغيرة التابع و المتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة) تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات و تسمى المعادلة التفاضلية عادية $(ordinary)$

إذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد و بالتالي لا تحتوي إلا على مشتقات عادية.

مثال 5 ليكن المتغير المستقل و المتغير التابع ، فالعلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية عادية:

$$\frac{dy}{dx} + y = 3x^2 \tag{17.1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{18.1}$$

$$(x-y)dx + (x+y)dy = 0 \tag{19.1}$$

2.5.1 المعادلة التفاضلية الجزئية:

هي معادلة تفاضلية فيها المتغير التابع داله لأكثر من متغير مستقل أي تظهر فيها المشتقات الجزئية.

مثال 6 ليكن U المتغير التابع و x, y, z المتغيرات المستقلة ، فالعلاقات التالية هي معادلات تفاضلية جزئية:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + 3\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(x,y,z)$$

3.5.1 مرتبة المعادلة التفاضلية:

إذا كانت المشتقة النونية y^n هي أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية العادية قيل أن هذه المعادلة من الرتبة تحدد مرتبة المعادلة التفاضلية بأعلى مشتقة داخلة فيها.

مثال 7 1. المعادلة التفاضلية (17.1) هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى .

2. المعادلة التفاضلية (18.1) هي من المرتبة الثانية .

4.5.1 درجة المعادلة التفاضلية :

هي الأس المرفوع إليها أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية ، و قبل تحديد درجة المعادلة يجب وضعها على صورة قياسية و صحيحة من حيث المشتقات .

مثال 8 1. المعادلة (17.1) هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى و من الدرجة الأولى .

5.5.1 المعادلة التفاضلية الخطية:

هي المعادلة الخطية في المتغير التابع و مشتقاته جميعا.

مثال 9 المعادلة

$$x^2y'' + xy' + x^2y = e^x \sin x$$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية حيث أن كلا من المتغير التابع y و مشتقاته y', y'' خطية أي كل منها مرفوع للأس واحد و لاتوجد حواصل ضرب مشتركة فيما بينها و لا يهم أن تكون معاملاتها ثوابت أو دوال في x إذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها معادلة تفاضلية لا خطية .

6.5.1 الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n هي

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = Q(x) \qquad (20.1)$$

أو

$$\sum_{i=0} P_i(x)y^{(i)} = Q(x) \qquad (21.1)$$

حيث المتغير y وجميع مشتقاته مرفوعة للأس واحد و لاتوجد حواصل ضرب مشتركة بين أي منها . و الدوال المعاملات $P_i(x)$ هي دوال في x خطية أم غير خطية و كذلك بالنسبة للدالة $Q(x)$

7.5.1 المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

إذا إنعدمت الدالة $Q(x)$ من المعادلة التفاضلية (21.1) لجميع قيم x قيل أنها معادلة تفاضلية خطية متجانسة ، و إلا كانت المعادلة التفاضلية غير متجانسة أو كاملة .

مثال 10 المعادلة

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1) = 0$$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية متجانسة من المرتبة الثانية .

$$y''' + 6y'' - 3y' + 2y = e^x$$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية غير متجانسة من المرتبة الثالثة ذات معاملات ثابتة.

الفصل الثاني

كثيرات حدود برنشتاين ومصفوفات العمليات

قائمة المحتويـــــــات

1.2 كثيرات حدود برنشتاين

في المجال الرياضي للتحليل العددي برنشتاين كثيرات الحدود " المسمى سيرجي ناتانوفيتش برنشتاين ($Sergei\ Natanovich\ Bernstein$) ، هو كثيرات حدود في شكل برنشتاين ،و هو عبارة على مزج خطي وفق أساس كثيرات حدود برنشتاين . إستخدم برنشتاين في كثير من الأحيان مصطلحات كثيرات الحدود في شكل برنشتاين و ذلك في دليل بناء على نظرية تقريب ستون-ويرستراس [18].

1.1.2 تعريف وخواص

تعريف 20 (أنظر [18, 5, 22])

كثيرات حدود برنشتاين ($Bernstein\ \ polynomial$) من الرتبة n المعرف على المجال $[0,1]$ بواسطة الصيغة :

$$B_{i,n}(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}, 0\leq i\leq n$$

حيث : $i=0,1\ldots,n$ ، والرمز C_n^i هو توفيقة لـ i من العناصر مأخوذة من n يعنى أن :

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

و باستخدام دستور ثنائي الحد لنيوتن فيما يتعلق بـ $(1-x)^{n-i}$ ، لدينا :

$$\begin{aligned}B_{i,n}(x)&=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\\&=\binom{n}{i}x^i\left(\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}x^k\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}x^{i+k}, i=0,1,\ldots,n\end{aligned}$$

أما صيغته العامة من الدرجة n على المجال $[a.b]$ تكون كالتالي :

$$B_{i,n}(x)=\binom{n}{i}\frac{1}{(b-a)^n}(x-a)^i(b-x)^{n-i}$$

ملاحظة 5 إذا كان $0>i$ أو $n<i$ فإن $B_{i,n}(x)=0$.

نتيجة 1 مجموعة $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^n$ كثيرات حدود برنشتاين في الفراغ الهلبرتي $L^2[0,1]$ تشكل أساس تام ، لذا يمكن كتابة أو توسيع أي كثير حدود $u(x)$ من الدرجة n و تكون على شكل مزج خطي بالنسبة لـ

$\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n}$ كما هي موضح في الشكل التالي :

$$u(x) \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n} = C^T \Phi(x), i = 0, \ldots, n \tag{1.2}$$

من العلاقة (1.2) ، يمكننا كتابة الشعاع

$$\Phi(x) = [B_{0,n}, B_{1,n}, \ldots, B_{n,n}]^T, \tag{2.2}$$

ويكون على النحو التالي :

$$\Phi(x) = AT_n(x), \tag{3.2}$$

حيث : $T_n(x)$ مصفوفة من الرتبة $(n+1) \times 1$

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

و A عبارة على مصفوفة مثلثيه علوية من الرتبة $(n+1) \times (n+1)$ بحيث :

$$A = \begin{bmatrix} (-1)^0 \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} & \ldots & (-1)^{n-0} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-0 \\ n-0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & (-1) \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \neq 0$ وهذا يعني أن المصفوفة $\mathbf{A}$ قابلة للقلب .

مثال 11

$$B_{0,5}(x) = (1-x)^5$$

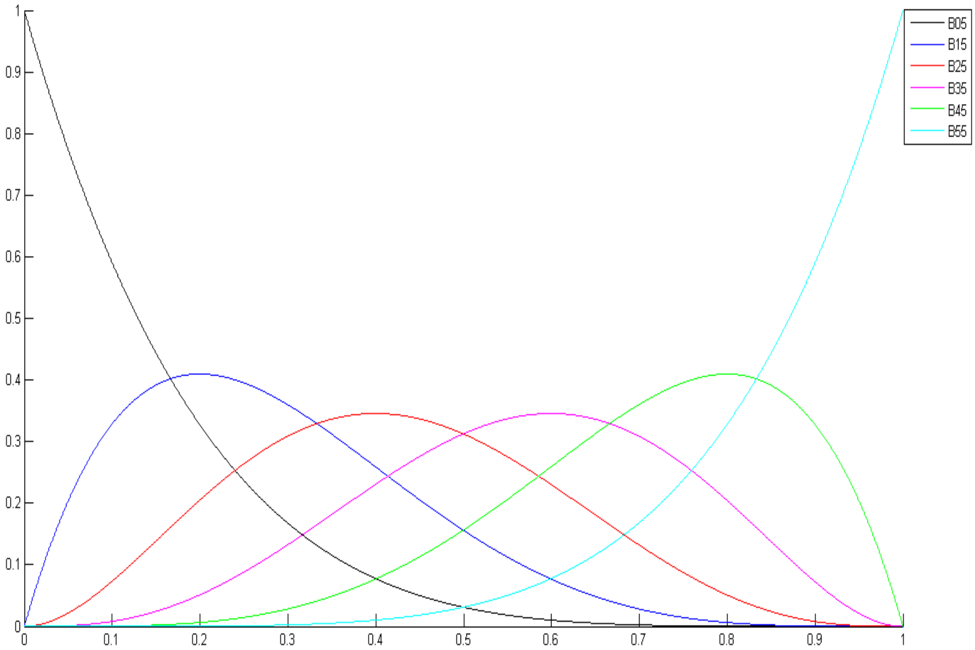
$$B_{1,5}(x) = 5x(1-x)^4$$

$$B_{2,5}(x) = 10x^2(1-x)^3$$

$$B_{3,5}(x) = 10x^3(1-x)^2$$

$$B_{4,5}(x) = 5x^4(1-x)$$

$$B_{5,5}(x) = x^5$$



شكل 1.2: كثيرات حدود برنشتاين من أجل $n=5$.

3 خواص

.1

$$B_{i,n}(x) \geq 0, \ \forall x \in [0,1] \qquad (5.2)$$

.2

$$B_{i,n}(1-x) = B_{n-i,n}(x) \qquad (6.2)$$

.3

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = 1 \tag{7.2}$$

.4

$$B_{i,n-1}(x) = \left(\frac{n-i}{n}\right) B_{i,n}(x) + \left(\frac{i+1}{n}\right) B_{i+1,n}(x) \tag{8.2}$$

.5

$$B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x) \tag{9.2}$$

.6

$$\frac{d}{dx}(B_{i,n}(x)) = \frac{i-nx}{x(1-x)}B_{i,n}(x) \tag{10.2}$$

.7

$$\frac{d}{dx}(B_{i,n}(x)) = n\left[B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)\right] \tag{11.2}$$

.8

$$B_{i,n}(x)B_{j,m}(x) = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}}B_{i+j,n+m}(x) \tag{12.2}$$

.9

$$B_{i,n}(1) = \delta_{in}, \quad B_{i,n}(0) = \delta_{i0} \tag{13.2}$$

برهان 6 .1

$$\binom{n}{i} > 0, x \geq 0, (1-x) \geq 0, x \in [0,1]$$

$$\Longrightarrow x^i \geq (1-x)^{n-i} \text{و منه} \quad B_{i,n}(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

.2

$$\begin{aligned}
B_{i,n}(1-x) &= \binom{n}{i}(1-x)^i\left[1-(1-x)\right]^{n-i} \\
&= \binom{n}{i}x^{n-i}(1-x)^i \\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!}x^{n-i}(1-x)^i \\
&= \frac{n!}{(n-i)!(n-(n-i))!}x^{n-i}(1-x)^i \\
&= \binom{n}{n-i}x^{n-i}(1-x)^i \\
&= B_{n-i,n}(x)
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(x) \\
&= \cdots = \sum_{i=0}^{1} B_{i,1}(x) = (1-t)+t = 1
\end{aligned}$$

.4

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n-i}{n}\right)B_{i,n}(x)+\left(\frac{i+1}{n}\right)B_{i+1,n} &= \left(\frac{n-i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} \\
&+\left(\frac{i+1}{n}\right)\binom{n}{i+1}x^{i+1}(1-x)^{n-i-1} \\
&= x^i(1-x)^{n-1-i}\left[\left(\frac{n-i}{n}\right)\binom{n}{i}(1-x)\right. \\
&+\left.\left(\frac{n+1}{n}\right)\binom{n}{i+1}x\right] \\
&= x^i(1-x)^{n-i-1}\left[\left(\frac{n-i}{n}\right)\binom{n}{i}-\left(\frac{n-i}{n}\right)\binom{n}{i}x\right. \\
&+\left.\left(\frac{n-i}{n}\right)\binom{n}{i+1}x\right] \\
&= x^i(1-x)^{n-i-1}\left[\left(\frac{n-i}{n}\right)\frac{n!}{i!(n-i)!}\right. \\
&-\left.\left(\frac{n-i}{n}\right)\frac{n!(i+1)}{(i+1)!(n-i!)}x+\left(\frac{i+1}{n}\right)\frac{n!(n-i)}{(n-i)!(i+)!}x\right] \\
&= x^i(1-x)^{n-1-i}\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} \\
&= B_{i,n-1}(x)
\end{aligned}$$

.5

$$\begin{aligned}
(1-x)B_{i,n-1}(x)+xB_{i-1,n-1}(x) &= (1-x)\binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-1-i} \\
&\quad + x\binom{n-1}{i-1}x^{i-1}(1-x)^{n-1-(i-1)} \\
&= \binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-i}+\binom{n-1}{i-1}x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right]x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \left[\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}+\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\right]x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \left[\frac{(n-1)!(n-i)}{i!(n-i-1)!(n-i)}+\frac{(n-1)!i}{(i-1)!(n-i)!i}\right]x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \left[\frac{(n-1)!(n-i)}{i!(n-i)!}+\frac{(n-1)!i}{i!(n-i)!}\right]x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \left[\frac{(n-1)!(n-i)+(n-1)!i}{i!(n-i)!}\right]x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \left[\frac{n(n-1)!-i(n-1)!+i(n-1)!}{i!(n-i)!}\right]x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} \\
&= B_{i,n}(x)
\end{aligned}$$

.6

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(B_{i,n}(x)\right) &= \binom{n}{i}\left[ix^{i-1}(1-x)^{n-i}-x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1}\right] \\
&= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\left(\frac{i}{x}-\frac{n-i}{1-x}\right) \\
&= \frac{(1-x)i-x(n-i)}{x(1-x)}B_{i,n}(x) \\
&= \frac{i-nx}{x(1-x)}B_{i,n}(x)
\end{aligned}$$

.7

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(B_{i,n}(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}x^i(1-x)^{n-i}\right)\\
&= \frac{in!}{i!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!}x^i(1-x)^{n-i-1}\\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!}x^i(1-x)^{n-i-1}\\
&= n\left[\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}x^i(1-x)^{n-i-1}\right]\\
&= n\left[B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)\right]
\end{aligned}$$

.8

$$\begin{aligned}
B_{i,n}(x)B_{j,m}(x) &= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\binom{m}{j}x^j(1-x)^{m-j}\\
&= \binom{n}{i}\binom{m}{j}x^{i+j}(1-x)^{n+m-(i+j)}\\
&= \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{n+m}{i+j}}{\binom{n+m}{i+j}}x^{i+j}(1-x)^{n+m-(i+j)}\\
&= \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}}B_{i+j,n+m}(x)
\end{aligned}$$

9. بتطبيق مباشر للتعريف نحصل على المطلوب.

قضية 4

تشكل مجموعة $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n}$ كثيرات حدود برنشتاين في الفراغ $\mathcal{P}_n$ فراغ كثيرات حدود برنشتاين من الدرجة أقل أو تساوي n .

برهان 7

لبرهان أن $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n}$ كثيرات حدود برنشتاين تشكل أساس للفضاء $\mathcal{P}_n$ ، نبين أن $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n}$ مستقلة خطيا و مولدة للفضاء $\mathcal{P}_n$.

1. نبرهن أن $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n}$ مستقلة خطيا :

لدينا :

$$\begin{aligned}
B_{i,n}(x) &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} x^i \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} x^{k+i} \\
&= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} x^k \\
&= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} x^k
\end{aligned}$$

$$\forall c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 B_{0,n}(x) + c_1 B_{1,n}(x) + \cdots + c_n B_{n,n}(x) \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{0} x^k + c_1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{1} x^k + \cdots \\
&\quad + c_n \sum_{k=n}^{n} (-1)^{k-n} \binom{n}{k} \binom{k}{n} x^k \\
&= c_0 + \sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} c_k \binom{n}{1} \binom{1}{k} x^1 + \cdots + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} c_k \binom{n}{n} \binom{n}{k} x^n
\end{aligned}$$

وبما أن عناصرالأساس القانوني $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ مستقلة خطيا فإن:

$$c_0 = 0 \tag{14.2}$$

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} c_k \binom{n}{1} \binom{1}{k} = 0 \tag{15.2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} c_k \binom{n}{n} \binom{n}{k} = 0 \tag{16.2}$$

نقوم بتعويض قيمة c_0 في (15.2) نجد $c_1 = 0$، ثم نعوض كل من c_0 و c_1 في المعادلة التي تلي نجد $c_2 = 0$ ، وهكذا إلى أن نجد $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

إذن المجموعة $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n}$ مستقلة خطيا.

2. لبرهان أن $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n}$ كثيرات حدود برنشتاين مولدة للفضاء $\mathcal{P}_n$:
نبرهن أن كل عنصر من عناصرالأساس القانوني $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ للفضاء $\mathcal{P}_n$ يكتب على شكل مزج خطي لعناصر المجموعة $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n}$.
كثيرات حدود برنشتاين لدينا :

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \tag{17.2}$$

- من أجل 1:
بوضع $y = 1 - x$ ثم نعوضها في العلاقة التي أعلاه فنجد :

$$1 = (x+1-x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x)$$

- من أجل x:
بإشتقاق المعادلة (17.2) بالنسبة إلى x نجد:

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} x^{i-1} y^{n-i} \tag{18.2}$$

بضرب طرفي المعادلة (18.2) في x وقسمتها على n و وضع $y = 1 - x$ فنحصل على:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} B_{i,n}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{i}{1}}{\binom{n}{1}} B_{i,n}(x) \tag{19.2}$$

- من أجل x^2:
بإشتقاق (18.2) بالنسبة إلى x نحصل على:

$$n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \binom{n}{i} x^{i-2} y^{n-i} \tag{20.2}$$

بضرب طرفي المعادلة (20.2) في x^2 و قسمتها على $n(n-1)$ و وضع $y = 1 - x$ نجد:

$$x^2 = \sum_{i=2}^{n} \frac{i(i-1)}{n(n-1)} B_{i,n}(x) = \sum_{i=2}^{n} \frac{\binom{i}{2}}{\binom{n}{2}} B_{i,n}(x) \tag{21.2}$$

و بالتالي في الحالة العامة:

$$x^k = \sum_{i=k}^{n} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} B_{i,n}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{22.2}$$

إذن $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n}$ كثيرات حدود برنشتاين مولدة للفضاء $L^2[0,1]$.

نتيجة 2

كثيرات حدود برنشتاين $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n}$ هي مجموعة تامة في الفراغ الهلبرتي $\mathcal{P}_n$.

2.1.2 كثيرات حدود برنشتاين المتعامد و المتجانس

ليكن X فضاء شبه هلبرتي الجملة $(B_{i,n})_{1\leq i\leq n}$ مستقلة خطيا في الفضاء X ،لذلك يمكن إنشاء جملة $(OB_{i,n})_{1\leq i\leq n}$ من الجملة $(B_{i,n})_{1\leq i\leq n}$ و تكون متعامدة و متجانسة و تولد نفس الفضاء الذي تولده الجملة $(B_{i,n})_{1\leq i\leq n}$ ، و لتعيين المجموعة المتعامدة و المتجانسة $(OB_{i,n})_{1\leq i\leq n}$ نستخدم خوارزمية غرام-شميدت وهي كالتالي :

$$\begin{cases} \Phi_{0,n} &= B_{0,n}, \quad OB_{0,n} = \frac{1}{\|\Phi_{0,n}\|}\Phi_{0,n} \\ \Phi_{k,n} &= B_{k,n} - \sum_{j=0}^{k-1}\langle B_{k,n}, OB_{j,n}\rangle OB_{j,n} \quad OB_{k,n} = \frac{1}{\|\Phi_{k,n}\|}\Phi_{k,n}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

مثلا من أجل $n = 5$ لدينا :

$$OB_{0,5}(x) = \sqrt{11}(1-x)^5$$

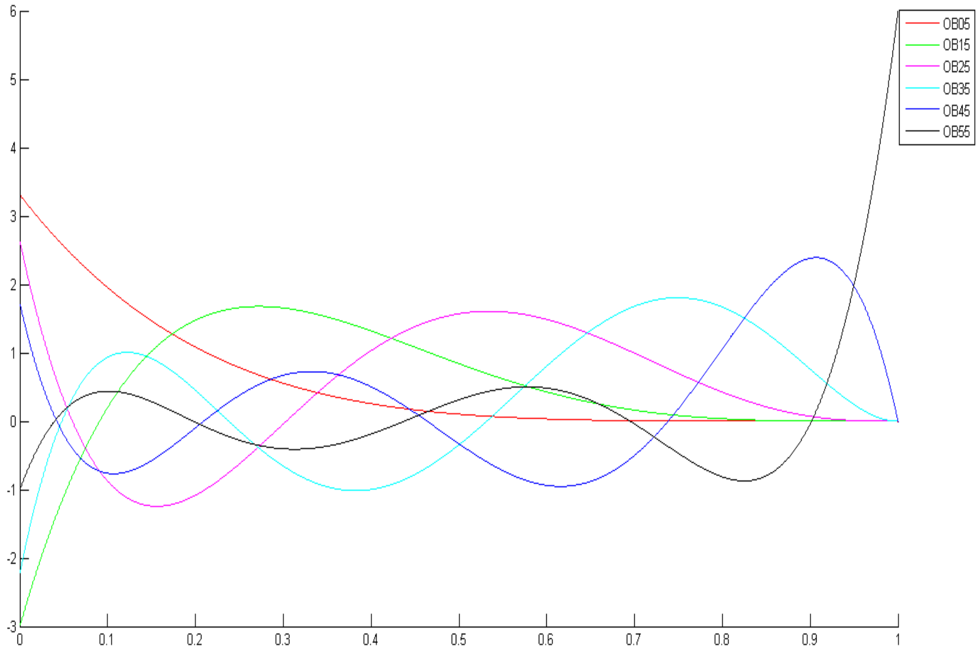
$$OB_{1,5}(x) = 3(1-x)^4(11x-1)$$

$$OB_{2,5}(x) = \sqrt{7}(1-x)^3(55x^2-20x+1)$$

$$OB_{3,5}(x) = \sqrt{5}(1-x)^2(165x^3-135x^2+27x-1)$$

$$OB_{4,5}(x) = \sqrt{3}(1-x)(330x^4-480x^3+216x^2-32x+1)$$

$$OB_{5,5}(x) = 462x^5-1050x^4+840x^3-280x^2+35x-1$$



شكل 2.2: كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة و المتجانسة من أجل $n = 5$.

من خلال تطبيق عملية غرام-شميدت على مجموعة كثيرات حدود برنشتاين من الدرجة n يتم الحصول على كثيرات الحدود برنشتاين المتعامدة و المتجانس وتكون في الصورة التالية :

(23.2)

$$OB_{i,n}(x) = \left(\sqrt{2(n-i)+1}\right)(1-x)^{n-i}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{2n+1-j}{i-j}\binom{i}{j}x^{i-j}$$

أو بعبارة أخرى

$$OB_{i,n}(x) = \left(\sqrt{2(n-i)+1}\right)\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\frac{\binom{2n+1-j}{i-j}\binom{i}{j}}{\binom{n-j}{i-j}}B_{i-j,n-j}(x) \qquad (24.2)$$

ملاحظة 6

فيما تتعلق دالة الوزن $w_s = 1$ على المجال $[0,1]$ ، كثيرات الحدود لديها العلاقة التعامدية

$$\int_0^1 b_{i,n}b_{j,n}w_s dx = \delta_{ij}.$$

حيث $w(x)$ هي دالة وزن على المجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت :

1. الدالة $w(x)$ مستمرة .

2. $w(x) > 0$

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ x \in [a, b] :\ \int_a^b w(x)|x|^n dx < \infty$

نتيجة 3 كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة و المتجانسة مجموعة تامة في $L^2[0, 1]$ ، و مستقلة خطيا .
(و للاستفسار أكثر نطلع على المراجع التالية [8, 19])

3.1.2 تقريب تابع

نظرية تقريب ويرستراس $(weierstrass)$ هي نتيجة مركزية للرياضيات ، تنص على أن كل تابع مستمر على المجال المغلق و المحدود $[a, b]$ يمكن تقريبه بشكل وحيد من قبل كثير الحدود.

نظرية 5
لتكن $f \in C[a, b]$ من أجل أي $\epsilon > 0$ ، يوجد كثير حدود p_n نقول أن :

$$| f(x) - p_n(x) | \leq \epsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

⋆ هناك العديد من البراهين على نظرية وايرستراس $(weierstrass)$ ،و تعتبر واحدة من أكثر البراهين المهمةإستخداما لكثيرات حدود برنشتاين .

برهان 8 لإتباع برهان نضرية وييرستراس العودة إلى الكتاب [30] صفحة 535.

- نفرض أن $H = L^2[0, 1)$ و $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^{n} \subset H$ مجموعة دوال برنشتاين ، وليكن

$$Y = Span\{B_{0,n}, B_{1,n}, \ldots B_{n,n}\}$$

و تابع f ينتمي إلى الفراغ $L^2[0, 1)$ ، بما أن Y فضاء شعاعي جزئي ذو بعد منتهي و مغلق فإنه يوجدأحسن تقريب y_0 للتابع f في Y أي [20]:

$$\exists y_0! \in Y; \forall y \in Y \parallel f - y_0 \parallel \leq \parallel f - y \parallel \tag{25.2}$$

حيث $\parallel f \parallel_2 = \sqrt{< f, f >}$
و هذا يعني أن :

$$\forall y \in Y \ (f - y_0, y) = 0 \tag{26.2}$$

بما أن $y_0 \in Y$ ، يوجد معاملات وحيدة $c_0, c_1 \ldots, c_n$ أي :

$$f(x) \simeq y_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n} = C^T \Phi(x), i = 0, \ldots, n \tag{27.2}$$

بحيث :

$$C^T = [c_0, c_1, \dots, c_n]. \tag{28.2}$$

بواسطة العلاقة (26.2) نجد :

$$< f - C^T\Phi(x), B_{i,n}(x) >= 0, i = 0, 1, \dots, n$$

و ببساطة نكتب

$$C^T < \Phi(x), \Phi(x) >=< f(x), \Phi(x) >, \tag{29.2}$$

حيث :

$$\begin{aligned} < f(x), \Phi(x) > &= \int_0^1 f(x)\Phi(x)dx \\ &= [< f, B_{0,n} >, < f, B_{1,n} >, \dots, < f, B_{n,n} >] \end{aligned}$$

حيث $< .,. >$ الجداء السلمي المعرف على $[0, 1)$.
و بوضع

$$Q =< \Phi(x), \Phi(x) > \tag{30.2}$$

و هي مصفوفة من الرتبة $(n+1)(n+1)$ ، و نقول عنها مصفوفة مزدوجة للشعاع $\Phi(x)$ أي :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^1 \Phi(x)\Phi(x)^T dx \\ &= \int_0^1 AT_n(x)(AT_n(x))^T dx \\ &= A\left[\int_0^1 T_n(x)(AT_n(x))^T dx\right] \\ &= \left[\int_0^1 T_n(x)(T_n(x))^T dx\right] A^T \\ Q &= A\mathcal{H}A^T \end{aligned}$$

$\mathcal{H}$ هي مصفوفة هيلبرت $(Hilbert \quad matrix)$ من إجراءالتكاملات حيث :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \int_0^1 1 \times 1dx & \dots & \int_0^1 1 \times x^n dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 x^n \times 1dx & \dots & \int_0^1 x^n \times x^n dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dfrac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{n+1} & \dots & \dfrac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه يمكن تحديد كل عنصر من عناصر Q كما في التالي :

$$Q_{i+1,j+1} = \int_0^1 B_{i,n}(x)B_{j,n}(x)dx, i, j = 0, 1, \ldots, n$$

بعد إجراء التكامل لعناصر Q نجد :

$$\begin{aligned} Q_{i+1,j+1} &= \binom{n}{i}\binom{n}{j}\int_0^1 (1-x)^{2n-(i+j)}x^{i+j}dx \\ &= \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{(2n+1)\binom{2n}{i+j}} \end{aligned} \tag{31.2}$$

أي تابع $f(x) \in [0, 1)$ يمكن توسيعه وفق أساس كثيرات حدود برنشتاين من (29.2) و (30.2) فنحصل على :

$$C = Q^{-1} < f(x), \Phi(x) > . \tag{32.2}$$

لدينا معاملات كثيرات حدود برنشتاين تعطى في الشكل التالي [10] :

$$c_i = \int_0^1 f(x)d_{i,n}(x), i = 0, 1, \ldots, n$$

حيث $d_{i,n}$ يعطى في شكل المعادلة التالية :

$$d_{j,n}(x)\sum_{k=0}^{n} \lambda_{j,k}B_{k,n}(x)j = 0, \ldots, n$$

(33.2)

$$\lambda_{j,k} = \frac{(-1)^j + k}{\binom{n}{j}\binom{n}{k}} \sum_{i=0}^{min(j,k)} (2i+1)\binom{n+i+1}{n-j}\binom{n-i}{n-j}\binom{n+i+1}{n-k}\binom{n-i}{n-k}$$

$$j, k = 0, 1, \ldots, n$$

⋆ وكذلك لدينا في البعد الثاني التابع $u(x,t) \in L^2([0,1] \times [0,1])$ يقارب على النحو التالي [13]:

$$u(x,t) \simeq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} u_{i,j}B_{i,n}(x)B_{j,n}(t) = \Phi^T(x)\mathbf{U}\Phi(t), i, j = 0, 1, \ldots, n \tag{34.2}$$

حيث :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \ldots & u_{0n} \\ u_{10} & u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n0} & u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

يمكن الحصول على عبارة $\mathbf{U}_{(n+1)(n+1)}$ كالتالي :

$$\mathbf{U} = Q^{-1}(\Phi(x), (\Phi(t), u(x,t)))Q^{-1} \tag{35.2}$$

4.1.2 تحليل التقارب

توطئة 1 [13, 25]
لتكن $\mathbb{R} \to [x_0, 1) : f$ تابع قابل للتفاضل بإستمرار $n+1$ مرة ، $f \in C^{(n+1)}[0,1)$ و

$$Y = Span\{B_{0,n}, B_{1,n}, \ldots, B_{n,n}\}$$

إذا كان $C^T\Phi(x)$ هو أحسن تقريب للد لة f في Y ، إذن يتم تقديم متوسط الخطأ ، أي يحقق المتراجحة التالية :

$$\|f - c^T\Phi(x)\|_2 \leq \frac{NS^{n+1}}{(n+1)!}, N = \max_{x\in[0,1]} |f^{(n+1)}(x)|, S = \max 1 - x_0, x_0. \quad (36.2)$$

برهان 9 [13]
نعتبر سلسلة تايلور التالية :
$f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ و التي تعرف كذلك

$$|f(x) - f_1(x)| \leq |f^{(n+1)}(\eta)|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (37.2)$$

حيث $\eta \in [0,1)$ ، لدينا $C^T\Phi(x)$ يمثل أحسن تقريب لـ f في Y
مع $f_1 \in Y$ ، وبإستخدام (37.2) لدينا :

$$\begin{aligned}
\|f - C^T\Phi\|_2^2 \leq \|f - f_1\|_2^2 &= \int_0^1 (f(x) - f_1(x))^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(f^{(n+1)}(\eta)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right)^2 dx \\
&\leq \frac{N^2}{[(n+1)!]^2}\int_0^1 (x - x_0)^{2n+2} dx \\
&= \frac{N^2S^{2n+2}}{[(n+1)!^2]},
\end{aligned}$$

وبأخذ الجذر التربيعي ، نحصل على المطلوب .

2،2 مصفوفات العمليات

1،2،2 مصفوفة العمليات لناتج الجداء

من الضروري دائما تقييم حاصل الضرب $\Phi(x)$ و $\Phi(x)^T$ ، وهذا ما يسمى الناتج المصفوفي وفق أساس كثيرات حدود برنشتاين ، ليكن

$$\pi(x) = \Phi(x)\Phi(x)^T, \tag{38،2}$$

حيث $\pi(x)$ مصفوفة من الرتبة $(n+1)\times(n+1)$، نقوم بضرب المصفوفة π في الشعاع المعرف في العلاقة (28،2) نجد [25] :

$$C^T\pi(x) = \Phi(x)^T\widehat{\mathbf{C}}, \tag{39،2}$$

حيث $\widetilde{\mathbf{C}}$ عبارة على مصفوفة لناتج الجداء من الرتبة $(n+1)\times(n+1)$ وتسمى مصفوفة العمليات لناتج الجداء (the operational matrix of the product) ، و بالتالي لدينا :

$$C^T\pi(x) = \left[\sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x), \sum_{i=0}^{n} c_i x B_{i,n}(x), \ldots, \sum_{i=0}^{n} c_i x^n B_{i,n}(x)\right] A^T. \tag{40،2}$$

الآن ، نقوم بتقريب كل التوابع $x^k B_{i,n}$ في معاملات $\Phi(x)$ ، ليكن الشعاع :

$$e_{k,i} = \begin{bmatrix} e_0^{k,i} \\ e_1^{k,i} \\ \vdots \\ e_n^{k,i} \end{bmatrix}$$

من العلاقة (32،2) لدينا $x^k B_{i,n} \simeq e_{k,i}\Phi(x)$, $(i,k = 0,1,\ldots,n)$

بإستخدام العلاقة (32،2) و (31،2) و من أجل $(i,k = 0,\ldots,n)$ لدينا :

$$e_{k,i} = \mathbf{Q}^{-1}\int_0^1 x^k B_{i,n}(x)\Phi(x)dx \;\; = \frac{Q^{-1}\binom{n}{i}}{2n+k+1} \begin{bmatrix} \dfrac{\binom{n}{0}}{\binom{2n+k}{i+k}} \\ \dfrac{\binom{n}{1}}{\binom{2n+k}{i+k+1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\binom{n}{n}}{\binom{2n+k}{i+k+n}} \end{bmatrix}$$

من ثم

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c_i x^k B_{i,n}(x) &\simeq \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\sum_{j=1}^{n} e_j^{k,i} B_{j,n}(x)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} B_{j,n}(x) \left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_j^{k,i}\right)\\
&= \Phi(x)^T \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_i e_0^{k,i} \\ \sum_{i=1}^{n} c_i e_1^{k,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i e_n^{k,i} \end{bmatrix}\\
&= \Phi(x)^T [e_{k,0}, e_{k,1}, \ldots, e_{k,n}] C = \Phi(x)^T E_{k+1} C,
\end{aligned} \tag{41.2}$$

حيث E_{k+1} مصفوفة من الرتبة $(n+1)\times(n+1)$ ، التي أعمدتها على الترتيب $e_{k,i}, (k = 0, 1, \ldots, n)$ ، بوضع
$\widetilde{E_{k+1}} = E_{k+1}c$ من أجل $k = 0, 1, \ldots, n$، إذا اخترنا $\widetilde{C}$ مصفوفة من الرتبة $(n+1)\times(n+1)$ تعطى كالتالي :

$$\widetilde{C} = \left[\widetilde{E_1}, \widetilde{E_2}, \ldots, \widetilde{E_{n+1}}\right]$$

من (40.2) و (41.2) لدينا :

$$c^T \pi(x) \simeq \Phi(x)^T \widetilde{C} A^T,$$

و بالتالي لدينا مصفوفة المعاملات $\widetilde{\mathbf{C}} = \widetilde{C} A^T$.

2.2.2 مصفوفة العمليات للتكامل

التكامل بالنسبة للشعاع $\Phi(x)$ المعرف في (2.2) يعطى في الشكل التالي [25]:

$$\int_0^x \Phi(x')dx' \simeq \mathbf{P}\Phi(x), \tag{42.2}$$

حيث $\mathbf{P}_{(n+1)\times(n+1)}$ مصفوفة العمليات للتكامل (the operational matrix of integration) ، أي :

$$\int_0^x \Phi(x')dx' = A_p X_p, \tag{43.2}$$

حيث A_p مصفوفة من الرتبة $(n+1)\times(n+1)$ أي :

$$A_p = A\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix} \text{و} X_p = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix}$$

نقوم الآن بتقريب عناصر الشعاع X_p في معاملات $\Phi(x)$ و بإستخدام العلاقة (3.2) ، لدينا $T_n(x) = A^{-1}\Phi(x)$ من أجل $k = 0, 1, 2, \dots, n$ لدينا :

$$x^k = A_{[k+1]^{-1}}\Phi(x), \tag{44.2}$$

حيث $A_{[k+1]^{-1}}$ هو $k+1$ سطر لـ A^{-1} ، نحن بحاجة فقط لتقريب $x^{n+1} \simeq C_{n+1}^T\Phi(x)$ ، ولنقربها نستخدم العلاقتين (31.2) و (32.2) ، لدينا :

$$C_{n+1} = \mathbf{Q}^{-1}\int_0^1 x^{n+1}\Phi(x)dx = \mathbf{Q}^{-1}\begin{bmatrix} \int_0^1 x^{n+1}B_{0,n}(x)dx \\ \int_0^1 x^{n+1}B_{1,n}(x)dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x^{n+1}B_{n,n}(x)dx \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{Q}^{-1}}{2n+2}\begin{bmatrix} \frac{\binom{n}{0}}{\binom{2n+1}{n+1}} \\ \frac{\binom{n}{1}}{\binom{2n+1}{n+2}} \\ \vdots \\ \frac{\binom{n}{n}}{\binom{2n+1}{2n+1}} \end{bmatrix}$$

ومنه نجد عناصر الشعاع C_{n+1} ،و بوضع B مصفوفة حيث :

$$B = \begin{bmatrix} A_{[1]}^{-1} \\ A_{[2]}^{-1} \\ \vdots \\ A_{[n]}^{-1} \\ U_{n+1}^T \end{bmatrix}$$

أي $X_p \simeq B\Phi(x)$ و منه مصفوفة العمليات للتكامل تكون على الصورة التالية :

$$\mathbf{P} = A_pB.$$

3.2.2 مصفوفة العمليات للتكامل الكسري

مصفوفة العمليات للتكامل الكسري (the operational matrix of the fractional integration) وفق أساس كثيرات حدود برنشتاين لشعاع ، يمكن تقريب المصفوفات التنفيذية للتكامل الكسري للشعاع

$\phi(x)$ على النحو التالي : [23]:

$$I_a^{\alpha}\phi(x) \simeq I^{\alpha}\Phi(x)$$

حيث I^{α} مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لريمان-ليوفيل رتبتها $(n+1)\times(n+1)$ ، لدينا سابقا :

$$I^{\alpha}\Phi_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} * \Phi_n(x), \tag{45.2}$$

حيث $*$ تدل على الجداء التنسوري ، من (3.2) نجد :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} * \Phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} * (AT_n(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}A(x^{\alpha-1} * T_n(x)) \\
&= \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left[x^{\alpha-1} * 1, x^{\alpha-1} * x, \ldots, x^{\alpha-1} * x^n\right]^T \\
&= A\left[I^{\alpha}1, I^{\alpha}x, \ldots, I^{\alpha}x^n\right]^T \\
&= A\left[\frac{0!}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}, \frac{1!}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}, \ldots, \frac{n!}{\Gamma(\alpha+1+n)}x^{\alpha+n}\right]^T \\
&= AD\bar{T}_n,
\end{aligned}$$

حيث $D_{(n+1)\times(n+1)}$ مصفوفة تعطى في الشكل التالي :

$$D = \begin{bmatrix} \frac{0!}{\Gamma(\alpha+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1!}{\Gamma(\alpha+2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)} \end{bmatrix} \text{أو} D_{i,j} = \begin{cases} \frac{i!}{\Gamma(\alpha+i+1)}, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

حيث $i,j = 0,1,\ldots,n$ و $\bar{T}_n$ معطى في الشكل التالي:

$$\bar{T}_n = \begin{bmatrix} x^{\alpha} \\ x^{\alpha+1} \\ \vdots \\ x^{\alpha+n} \end{bmatrix}$$

الآن نقوم بتقريب قيمة $x^{i+\alpha}$ وذلك وفق أساس كثيرات حدود برنشتاين

$$x^{\alpha+i} \simeq E_i^T\Phi_n(x) \tag{46.2}$$

و بالتالي لدينا :

(47.2)

$$\begin{aligned} E_i &= Q^{-1}\left(\int_0^1 x^{\alpha+i}\Phi(x)dx\right) \\ &= Q^{-1}\left[\int_0^1 x^{\alpha+i}B_{0,n}(x)dx, \int_0^1 x^{\alpha+i}B_{1,n}(x)dx, \ldots, \int_0^1 x^{\alpha+i}B_{n,n}(x)dx\right]^T \\ &= Q^{-1}\bar{E}_i, \end{aligned}$$

حيث $\bar{E}_i = [\bar{E}_{i,0}, \bar{E}_{i,1}, \ldots, \bar{E}_{i,n}]$ و

$$\bar{E}_{i,j} = \int_1^0 x^{\alpha+i}B_{i,j}(x)dx = \frac{n!\Gamma(i+j+\alpha+1)}{\Gamma(j!+n+\alpha+2)}, i,j = 0,1,\ldots,n, \qquad (48.2)$$

حيث : $E_{(n+1)\times(n+1)}$ مصفوفة التي لديهاالأشعة $E_i$$(i=0,1,\ldots,n)$ و بالتالي يمكن أن نكتب :

$$\begin{aligned} I^\alpha\Phi_n(x) &= AD\left[E_0^T, E_1^T, \ldots, E_n^T\right] \\ &= ADE^T\Phi_n(x), \end{aligned} \qquad (49.2)$$

وفي الأخير نجد :

$$I^\alpha\Phi_n(x) \simeq I^\alpha\Phi(x) \qquad (50.2)$$

حيث :

$$I^\alpha = ADE^T, \qquad (51.2)$$

تسمى مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لكثيرات حدود برنشتاين .

4.2.2 مصفوفة العمليات للإشتقاق

مشتق الشعاع $\Phi(x)$ يمكن التعبير عنه [21] بـ :

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = \mathbf{D}^{(1)}\Phi(x), \qquad (52.2)$$

حيث $\mathbf{D}^{(1)}$ مصفوفة العمليات للإشتقاق (the operational matrix of differentiation) من الرتبة $(n+1)\times(n+1)$ ، لدينا سابقا أن $\Phi(x) = AT_n(x)$ وعليه فإن :

$$\Phi^{'}(x) = A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ \vdots \\ nx^{n-1} \end{bmatrix}$$

لدينا المصفوفة V من الرتبة $(n+1)(n)$ والشعاع $T_n^*(x)$ يمكن التعبير عنهما في الصورة التالية وذلك على الترتيب :

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 \end{bmatrix}, T_n^*(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix}$$

وعليه نكتب العلاقة التالية :

$$\Phi^{'}(x) = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ \vdots \\ nx^{n-1} \end{bmatrix} = AVT_n^*(x)$$

نقوم بتقريب مركبات الشعاع $T_n^*(x)$ وفق أساس كثيرات حدود برنشتاين نجد :

$$T_n^*(x) = B^*\Phi(x)$$

حيث :

$$B^* \begin{bmatrix} A_{[1]}^{-1} \\ A_{[2]}^{-1} \\ A_{[3]}^{-1} \\ \vdots \\ A_{[n]}^{-1} \end{bmatrix}$$

حيث $A_{[k]}^{-1}$ هو k سطر لـ A^{-1} ، وتكون عبارة $\Phi^{'}(x)$ كالتالي :

$$\Phi^{'}(x) = AVB^*\Phi(x)$$

وبالتالي مصفوفة العمليات للإشتقاق تكون على الصورة التالية :

$$\mathbf{D}^{(1)} = AVB^* \qquad (53.2)$$

باستخدام العلاقة (52.2) فمن الواضح أن :

$$\frac{d^n}{dx^n}\Phi(x) = (\mathbf{D}^{(1)})^n\Phi(x), n \in \mathbb{N}$$

العلاقة التي أعلاه $\mathbf{D}^{(1)}$ تدل على قوى مصفوفة ، أي :

$$D^{(n)} = (D^{(1)})^n, n = 1, 2, \dots \tag{54.2}$$

نظرية 6 [10]
ليكن $\Phi(x)$ شعاع كثيرات حدود برنشتاين المعرف في (3.2) نفرض أنه لدينا :

$$D^{\alpha}\Phi(x) \simeq D^{(\alpha)}\Phi(x)$$

حيث $D^{(\alpha)}_{(n+1)(n+1)}$ مصفوفة العمليات للإشتقاق الكسري من الرتبة α المعرفة كالتالي :

$$D^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \sum_{j=\lceil q\rceil}^{n} \omega_{0,j,0} & \sum_{j=\lceil q\rceil}^{n} \omega_{0,j,1} & \dots & \sum_{j=\lceil q\rceil}^{n} \omega_{0,j,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=\lceil q\rceil}^{n} \omega_{i,j,0} & \sum_{j=\lceil q\rceil}^{n} \omega_{i,j,1} & \dots & \sum_{j=\lceil q\rceil}^{n} \omega_{i,j,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=\lceil q\rceil}^{n} \omega_{n,j,0} & \sum_{j=\lceil q\rceil}^{n} \omega_{n,j,1} & \dots & \sum_{j=\lceil q\rceil}^{n} \omega_{n,j,n} \end{bmatrix}$$

حيث $\omega_{i,j,l}$ تعطى في الشكل التالي :

$$\omega_{i,j,l} = (-1)^{j-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\lambda_{l,k}\mu_{k,j} \tag{55.2}$$

حيث $\lambda_{k,l}$ معطاة في العلاقة (33.2) و :

$$\mu_{k,j} = \sum_{s=k}^{n}(-1)^{s-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}\frac{1}{j-\alpha+s+1}$$

برهان 10
لدينا من خطية الاشتقاق لـ D^{α}

$$D^{\alpha}(\lambda f(x) + \mu f(x)) = \lambda D^{\alpha} f(x) + \mu D^{\alpha} f(x)$$

و المعادلة :

$$B_{i,n}(x) = \sum_{j=i}^{n}(-1)^{j-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}x^i, i = 0, 1, \dots, n$$

لدينا :

(56.2)

$$D^{\alpha}B_{i,n}(x) = \sum_{j=i}^{n}(-1)^{j-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}D^{\alpha}(x^{i})$$
$$= \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}(-1)^{j-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)}x^{j-\alpha}, i = 0,1,2,\ldots,n$$

نقوم الآن بتقريب $x^{j-\alpha}$ و ذلك وفق كثيرات حدود برنشتاين ، لدينا :

$$x^{j-\alpha} \simeq \sum_{l=0}^{n} f_{l,j}B_{l,n}(x) \quad (57.2)$$

حيث :

$$f_{l,i} = \int_0^1 x^{j-\alpha}d_{l,n}(x)dx = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{l,k}\int_0^1 x^{j-\alpha}B_{k,n}(x)dx$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\lambda_{l,k}\sum_{s=k}^{n}(-1)^{s-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}\int_0^1 x^{j-\alpha+s}dx$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\lambda_{l,k}\sum_{s=k}^{n}(-1)^{s-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}\frac{1}{j-\alpha+s+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\lambda_{l,k}\mu_{k,j}$$

من (56.2) و (57.2) ، نجد :

$$D^{\alpha}B_{i,n}(x) \simeq \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{j-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)}\mu_{l,j}B_{l,n}(x)$$
$$= \sum_{l=0}^{n}\left(\sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{i,j,l}\right)B_{l,n}(x) \quad (58.2)$$

حيث $\omega_{i,j,l}$ معطاة في المعادلة (55.2) كما يمكن إعادة كتابة المعادلة (58.2) كنموذج شعاع من أجل $i = 0,1,\ldots,n$ لدينا :

$$D^{\alpha}B_{i,n}(x) \simeq \left[\sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{i,j,0}\ \sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{i,j,1}\cdots\sum_{j=\lceil\alpha\rceil}^{n}\omega_{i,j,n}\right]\Phi(x)$$

5.2.2 مصفوفة العمليات للإشتقاق الكسري

في هذه الخطوة من الدراسة ،نريد التعبير عن الإشتقاق الكسري بمصفوفة و نسميها مصفوفة العمليات للإشتقاق الكسري و نكتب [22]

$$D^{\alpha}\Phi_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} t^{n-\alpha-1} * \Phi_n, 0 \leq t \leq 1, \tag{59.2}$$

حيث $*$ يدل على الجداءالتنسوري من (3.2) نجد :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\Phi_n(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} A(t^{n-\alpha-1} * T_n(x)) \\ &= AD^{\alpha}T_n(x) \\ &= A[D^{\alpha}1, D^{\alpha}x, \ldots, D^{\alpha}x^n]^T \end{aligned} \tag{60.2}$$

حيث :

$$D^{\alpha}t^j = \begin{cases} 0 & j = 0, \ldots, \lceil \alpha \rceil - 1, \\ \dfrac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} t^{j-\alpha} & j = \lceil \alpha \rceil, \ldots, n. \end{cases} \tag{61.2}$$

إذن لدينا :

$$D^{\alpha}T_n(x) = \tilde{\xi}\tilde{T}, \tag{62.2}$$

حيث $\tilde{\xi}$ و $\tilde{T}$ مصفوفة قطرية من الرتبة $(n+1) \times (n+1)$ و مصفوفة من الرتبة $(n+1) \times 1$ و ذلك على الترتيب

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \left(\tilde{\xi}\right)_{i,j=1}^{m+1}, \tilde{\xi}_{i+1,j+1} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} & i,j = \lceil \alpha \rceil, \ldots, m \text{ و } i = j, \\ 0 & \text{otherwise, ,} \end{cases} \end{aligned} \tag{63.2}$$

$$\tilde{T} = \left(\tilde{T}_i\right) = \begin{cases} 0 & i = 0, \ldots, \lceil \alpha \rceil - 1, \\ t^{i-\alpha} & i = \lceil \alpha \rceil, \ldots, n. \end{cases} \tag{64.2}$$

نقوم الآن بتقريب القيمة $t^{i-\alpha}(i = \lceil \alpha \rceil, \ldots, n)$ وفق أساس كثيرات حدود برنشتاين وباستخدام العلاقة (27.2) ، يمكن أن نكتب النتيجة كالتالي

$$t^{i-\alpha} \approx p_i^T \Phi_n(x), \tag{65.2}$$

حيث :

$$\bar{P}_i = [\bar{P}_{i,0}, \bar{P}_{i,1}, \ldots, \bar{P}_{i,n}]^T, \tag{66.2}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{i,j} &= \int_0^1 t^{i-\alpha} B_{j,n}(x)dx = \frac{n!\Gamma(i+j-\alpha+1)}{j!\Gamma(i+n-\alpha+2)}, \\ i &= \lceil\alpha\rceil, \ldots, n \text{ و } j = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{67.2}$$

نفرض الآن $\mathbf{P}$ هي مصفوفة من الرتبة $(n+1) \times (n+1)$ بحيث $\lceil\alpha\rceil$ أعمدة الأولى هي أعمدة صفرية وتكون مساوية للشعاع $\mathbf{P}_i$ في العمود $(i+1)$ بحيث $i = \lceil\alpha\rceil, \ldots, n$ نحصل على :

$$D^\alpha \Phi_n(x) \approx D_\alpha \Phi_n(x), \tag{68.2}$$

حيث :

$$D_\alpha \approx A\bar{\xi}P^T, \tag{69.2}$$

تسمى مصفوفة العمليات للاشتقاق الكسري لكثيرات حدود برنشتاين .

6.2.2 مصفوفة العمليات للإ شتقاق الكسري $\mathbf{D}^{\alpha(\mathbf{x})}\Phi(x)$

من أجل تحويل كل من العوامل التفاضلية للأعداد الصحيحة و الكسرية إلى أشكال مصفوفة .
أولا ، يمكن بسهولة الحصول على المعادلة التالية من أجل مؤثر الإشتقاق من الرتبة الأولى :
بواسطة المعادلات (3.2) و (4.2.2) :

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = AVB^*\Phi(x)$$

من خلال جمع (27.2) مع (4.2.2) يتم الحصول على النتيجة التالية :

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left[C^T\Phi(x)\right] = C^T\frac{d}{dx}\Phi(x) = C^TAVB^*\Phi(x) \tag{70.2}$$

ثانيا ، يمكن الحصول على مؤثر الإ شتقاق الكسري عن طريق المعادلة التالية :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha(x)}\Phi(x) &= D_a^{\alpha(x)}\left[AT_n(x)\right] \\ &= AD_a^{\alpha(x)}\left[1, x, x^2, \ldots, x^n\right]^T \\ &= AGA^{-1}\Phi(x) \end{aligned} \tag{71.2}$$

حيث :

$$G=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha(x))}x^{-\alpha(x)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha(x))}x^{-\alpha(x)} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha(x))}x^{-\alpha(x)} \end{bmatrix}$$

من خلال جمع بين (27،2) و (4،2) ، يتم الحصول على النتيجة التالية :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha(x)}f(x) &= D_a^{\alpha(x)}[C^T\Phi(x)] \\ &= C^T D_a^{\alpha(x)}\Phi(x) \\ &= C^T AGB^*\Phi(x) \end{aligned} \tag{72،2}$$

الفصل الثالث

الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية-التكاملية بإستعمال كثيرات حدود برنشتاين

قائمة المحتويـــــــات

1.3 مصفوفة برنشتاين التنفيذية للمشتق الكسري المتغير من أجل حل المعادلات التفاضلية الكسرية المتغيرة الترتيب

في هذا الجزء، نستعمل مصفوفات كثيرات حدود برنشتاين ،وهي عبارة عن مصفوفات التنفيذية لحل معادلة التفاضلية الكسرية المتغيرة الترتيب [27]:

$$D_x^{\alpha(x)}u(x) + \lambda_1 u'(x) + \lambda_2 u(x) = f(x), u(0) = u_0 \tag{1.3}$$

حيث $f(x) \in L^2[0,1]$ و $u(x) \in L^2[0,1]$ و هو التابع المجهول الذي نريد أن نقربه ، λ_2, λ_1 و u_0 عبارة على ثوابت .

من أجل حل المعادلة (1.3) نضع الحل التقريبي للمعادلة (1.3) و تكون :

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n} = C^T \Phi(x) \tag{2.3}$$

حيث $C = [c_0, c_1, \ldots, c_n]^T$ و $\Phi(x) = [B_{0,n}, B_{1,n}, \ldots, B_{n,n}]^T$.

نقوم بضرب $D_x^{\alpha(x)}$ على أطراف المعادلة (2.3) و باستخدام المعادلة (72.2) ، وبالتالي لدينا :

$$D_x^{\alpha(x)}u(x) = C^T D_a^{\alpha(x)} \Phi(x) = C^T AGB^* \Phi(x) \tag{3.3}$$

نقوم بتعويض المعادلتين (2.3) و (3.3) في المعادلة (1.3) ثم يمكن كتابتها في الشكل التالي :

$$\begin{aligned} &C^T AGB^*\Phi(x) + \lambda_1 C^T AVB^*\Phi(x) + \lambda_2 C^T \Phi(x) = f(x) \\ &C^T \Phi(0) = u_0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

و بالتالي ، من خلال حساب القيم Φ و f على $[0,1]$ ، لدينا $x_i = \dfrac{2i+1}{2(n+1)}$ ، من أجل $i = 0, 1, \ldots, n$ لذلك نحصل على النظام من المعادلات الجبرية التالي :

$$\begin{aligned} &C^T AGB^*\Phi(x_i) + \lambda_1 C^T AVB^*\Phi(x_i) + \lambda_2 C^T \Phi(x_i) = f(x_i) \\ &C^T \Phi(0) = u_0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

يمكن الحصول على C الغير معروف من خلال حل نظام المعادلات الجبرية التي قدمها في المعادلة (5.3) و يتم تعويضها في المعادلة (2.3) ، و عليه يتم الحصول على الحل المطلوب .

1.1.3 التطبيق العددي

في هذا القسم ، يتم تقديم مثالين توضيحيين $(12, 13)$ مع مقارنة الحل العددي للمعادلات التفاضلية الكسرية المتغيرة الترتيب التي تم الحصول عليها باستخدام كثيرات حدود برنشتاين مع الحل التحليلي و مع الطرق الحالية مثل $[chan, 2015]$ من أجل توضيح كفاءة و بساطة الطريقة المقترحة .

مثال 12

نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية المتغيرة الترتيب الخطي :

$$\begin{aligned} &D_x^{\alpha(x)}u(x) + u(x) = f(x), x \in [0,1] \\ &u(0) = 5 \end{aligned} \tag{6.3}$$

حيث :

$$f(x) = \frac{3x^{(3-\alpha(x))}}{\Gamma(4-\alpha(x))} - \frac{x^{(1-\alpha(x))}}{\Gamma(2-\alpha(x))} + x^3 - x + 5\,,\ \alpha(x) = 2e^x$$

الحل الحقيقي لهذه المعادلة يعطى كالتالي $u(x) = x^3 - x + 5$.

نفرض أن الحل التقريبي للمعادلة (6.3) و ذلك من أجل $n = 3$ نجد :

$$u(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i B_{i,3}(x) = C^T\Phi(x) \tag{7.3}$$

حيث :

$$C = [c_0, c_1, c_2, c_3]^T$$

و

$$\Phi(x) = [B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}, B_{3,3}]^T$$

و

$$\begin{aligned} B_{0,3} &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\ B_{1,3} &= 3x - 6x^2 + 3x^3 \\ B_{2,3} &= 3x^2 - 3x^3 \\ B_{3,3} &= x^3 \end{aligned}$$

من خلال تطبيق الطريقة المقترحة الواردة في القسم (1.3) و المعادلة (6.3) ، يمكن تحويلها إلى المعادلة التالية :

$$\begin{aligned} &C^T AGB^*\Phi(x) + C^T\Phi(x) = f(x) \\ &C^T\Phi(0) = 5 \end{aligned}$$

حيث :

$$G(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha(x))}x^{-\alpha(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha(x))}x^{-\alpha(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha(x))}x^{-\alpha(x)} \end{bmatrix}$$

و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

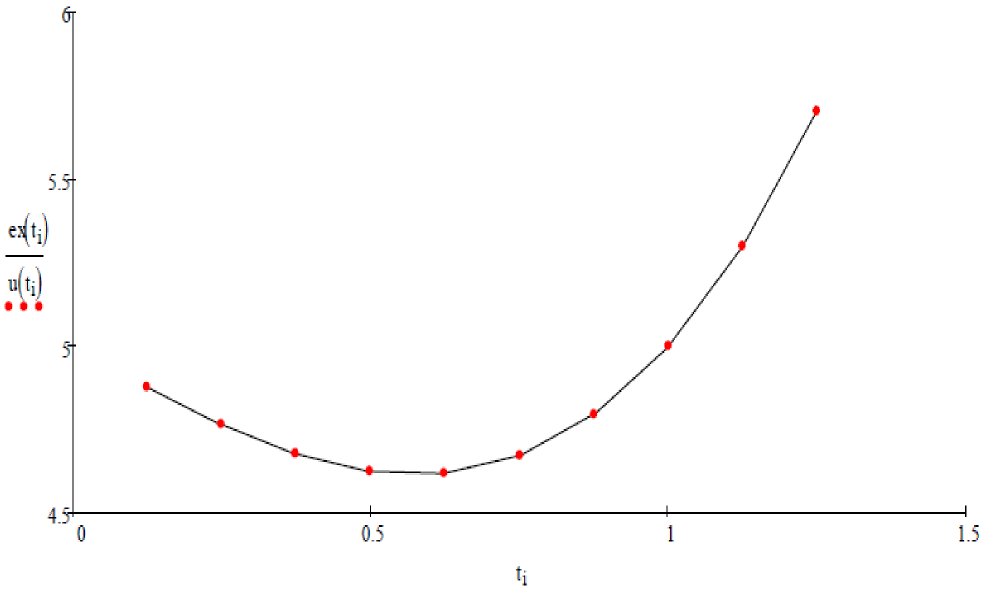
و بأخذ $x_i = \dfrac{2i+1}{2^n}$ ، من أجل $i = 0, 1, \dots, n$ نحصل على نظام من المعادلات الجبرية في معاملات C على النحو التالي :

$$\begin{aligned} &C^T AGB^* \Phi(x_i) + C^T \Phi(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3 \\ &C^T \Phi(0) = 5 \end{aligned} \tag{8.3}$$

حل النظام الذي تم الحصول عليه ، يمكننا الحصول على المجهول $C = [5, 4.667, 4.333, 4.999]^T$ عن طريق تعويضها في (7.3) و بالتالي الحل التقريبي لـ (6.3) ومنه يتم التوصل إليه .
يمثل الجدول (1.3) الحل التقريبي للمثال (12) باستخدام الطريقة المقترحة مقارنة بالحل الحقيقي .

الطريقة المقترحة	الحل الحقيقي	x
4.808	4.808	0.2
4.664	4.664	0.4
4.616	4.616	0.6
4.711	4.711	0.8
5	5	1

جدول 1.3: الشكل (1.3) مقارنة بين الحل الحقيقي مع الطريقة المقترحة



شكل 1.3: التمثيل البياني للحل التحليلي و العددي للمثال (12)

مثال 13

نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية المتغيرة الترتيب :

$$D_x^{\alpha(x)}u(x) - 10u'(x) + u(x) = f(x), x \in [0,1] \qquad (9.3)$$
$$u(0) = 5$$

حيث

$$\alpha(x) = \frac{x+2e^x}{7}\ ,\ f(x) = 10\left(\frac{x^{(2-\alpha(x))}}{\Gamma(3-\alpha(x))} + \frac{x^{(1-\alpha(x))}}{\Gamma(2-\alpha(x))}\right) + 5x^2 - 90x - 95$$

الحل الحقيقي لهذه المعادلة يعطى كالتالي $u(x) = 5(1+x)^2$.

نفرض أن الحل التقريبي للمعادلة (9.3) و ذلك من أجل $n = 3$ نجد :

$$u(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i B_{i,3}(x) = C^T \Phi(x) \tag{10.3}$$

حيث :

$$\Phi(x) = [B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}, B_{3,3}]^T$$
$$C = [c_0, c_1, c_2, c_3]^T$$

و

$$B_{0,3} = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$
$$B_{1,3} = 3x - 6x^2 + 3x^3$$
$$B_{2,3} = 3x^2 - 3x^3$$
$$B_{3,3} = x^3$$

من خلال تطبيق الطريقة المقترحة الواردة في القسم (1.3) و المعادلة (9.3) ، يمكن تحويلها إلى المعادلة التالية :

$$\begin{aligned} &C^T AGB^*\Phi(x) - 10C^T AVB^*\Phi(x)C^T\Phi(x) = f(x) \\ &C^T\Phi(0) = 5 \end{aligned} \tag{11.3}$$

حيث :

$$G(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha(x))}x^{-\alpha(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha(x))}x^{-\alpha(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha(x))}x^{-\alpha(x)} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{و} A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و بأخذ $x_i = \dfrac{2i+1}{2^n}$ ، من أجل $i = 0, 1, \ldots, n$ نحصل على نظام من المعادلات الجبرية في معاملات C على النحو التالي

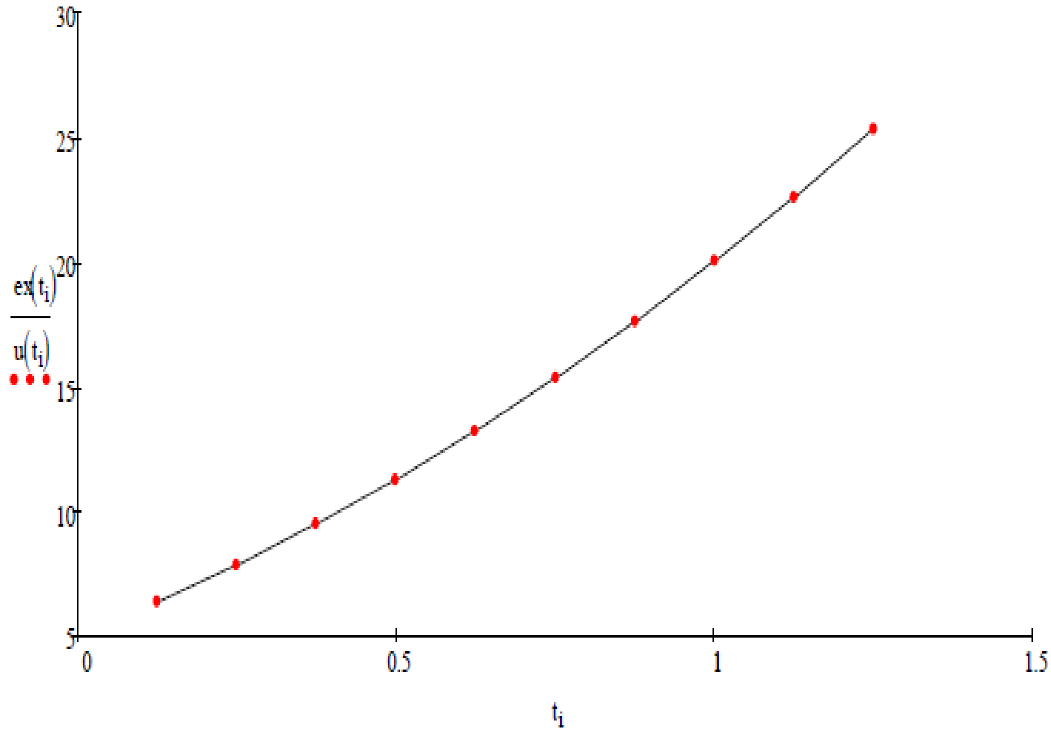
(12.3)

$$C^T AGA^{-1}\Phi(x_i) - 10C^T AD^{(1)}B^*\Phi(x_i) + C^T\Phi(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$$
$$C^T\Phi(0) = 5$$

حل النظام الذي تم الحصول عليه ، يمكننا الحصول على المجهول $C = [5, 8.333, 13.334, 20]^T$ عن طريق تعويضها في (10.3) و بالتالي الحل التقريبي لـ (9.3) ومنه يتم التوصل إليه .

x	الحل الحقيقي	الطريقة المقترحة	الطريقة $[chan2015]$
0.2	7.2	7.2	7.2
0.4	9.8	9.8	9.8
0.6	12.8	12.8	12.8
0.8	16.2	16.201	16.2
1	20	20	20

جدول 2.3: مقارنة بين الحل الحقيقي مع الطريقة المقترحة و طريقة $[chan2015]$



شكل 2.3: التمثيل البياني للحل التحليلي و العددي للمثال (13)

2.3 الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية-التكاملية ذات الرتب الكسرية

في هذا الجزء ، يتم إستخدام كثيرات حدود برنشتاين ، لتقريب حل المعادلات التفاضلية-التكاملية ذات الرتبة الكسرية ، والتي إعتمد تعريف كابيتو فيها بالنسبة للمشتق الكسري ، و تم تقديم أمثلة لتحقيق من

فعالية الإشتقاق المقترح ، و الحلول التقريبية تضمن الدقة المطلوبة .
نعتبر المعادلة التفاضلية-التكاملية ذات الرتبة الكسرية على النموذج التالي [24] :

$$ {}^{c}D_a^{\alpha}y(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)y(t)dt, y(a) = y_a, 0 < \alpha \leq 1 \tag{13.3} $$

حيث : ${}^{c}D_a^{\alpha}$ المشتق الكسري لكابيتو من الرتبة α و $f(x), k(x,t)$ توابع معطاة .
نهجنا يبدأ بضرب التكامل الكسري على طرفي المعادلة (13.3) فنجد :

$$ y(x) = y(0) + I^{\alpha}f(x) + I^{\alpha}\left(\int_a^b k(x,t)y(t)dt\right) \tag{14.3} $$

لتحديد الحل التقريبي لـ (13.3) ، نستخدم أساس كثيرات حدود برنشتاين على $[a,b]$ أي :

$$ y(x) \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x) \tag{15.3} $$

حيث :
$c_i(i = 0, 1, \ldots, n)$ يتم تحديد ثوابت غير معروفة و ذلك بتعويض المعادلة (15.3) في المعادلة (14.3) ، فنجد :

$$ \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x) = y(0) + I^{\alpha}f(x) + I^{\alpha}\left(\int_a^b k(x,t)\sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(t)dt\right) $$

و بالتالي ،

$$ \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x) - I^{\alpha}\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \Phi(x)\right) = y(0) + I^{\alpha}f(x) $$

حيث :
$\Phi(x) = \int_a^b k(x,t)B_{i,n}(t)dt$ و بالتالي ، لدينا :

$$ \sum_{i=0}^{n} c_i \left[B_{i,n}(x) - I^{\alpha}\Phi(x)\right] = y(0) + I^{\alpha}f(x) \tag{16.3} $$

الآن ، نضع $x = x_j$
في المعادلة (16.3) على $[a,b]$ ، من أجل $(j = 0, 1, \ldots, n)$ نحصل على النظام الخطي التالي :

$$ \sum_{i=0}^{n} c_i \alpha_{ij} = f_j, j = 0, 1, \ldots, n \tag{17.3} $$

حيث $\alpha_{ij} = B_{i,n}(x_j) - I^{\alpha}\Phi(x_j)$ و $f_j = y(0) + I^{\alpha}f(x_j)$.
يمكن الحصول $c_i(i = 0, 1, \ldots, n)$ الغير معروف من خلال حل النظام الخطي (17.3) ثم يتم إستخدامها في المعادلة (15.3) و من ثم الحصول على تابع $y(x)$ غير معروف تقريبا .

1.2.3 التطبيق العددي

سنقدم بعض الأمثلة التوضيحية لتوضيح المقاربة

مثال 14

نعتبر المعادلة التفاضلية-التكاملية ذات الرتب الكسرية :

$$ {}^{c}D_a^{\alpha}y(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xty(t)dt, y(0) = 0, 0 < \alpha \leq 1 \tag{18.3} $$

نضرب طرفي المعادلة أعلاه بالتكامل الكسري ، نحصل على :

$$ y(x) = y(0) + I^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{3}x\right) + I^{\alpha}\left(\int_0^1 xty(t)dt\right) \tag{19.3} $$

لتحديد الحل التقريبي لـ (18.3) بوضع $y(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i B_{i,3}(x)$ وبعد تعويضه في المعادلة (19.3) ، نجد :

$$ \sum_{i=0}^{3} c_i B_{i,3}(x) = y(0) + I^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{3}x\right) + I^{\alpha}\left(\int_0^1 xt \sum_{i=0}^{3} c_i B_{i,3}(t)dt\right) $$

و بالتالي ،

$$ \begin{aligned} & c_0(1-x)^3 + c_1 3x(1-x)^2 + c_2 3x^2(1-x) + c_3 x^3 \\ & - I^{\alpha}\left[c_0 x \int_0^1 t(1-t)^3 dt + c_1 x \int_0^1 3t^2(1-t)^2 dt\right. \\ & \left. + c_2 x \int_0^1 3t^3(1-t)dt + c_3 x \int_0^1 t^4 dt = I^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{3}x\right)\right. \end{aligned} $$

بالتالي ،

$$ \begin{aligned} & c_0\left[(1-x)^3 - 0.05\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}\right] + c_1\left[3x(1-x)^2\right. \\ & \left. - 0.1\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}\right] + c_2\left[3x^2(1-x) - 0.15\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+2}\right] \\ & + c_3\left[x^3 - 0.2\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}\right] = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\Gamma(2)x^{\alpha+1}}{3\Gamma(\alpha+2)} \end{aligned} \tag{20.3} $$

الحالة (1) :

عندما $\alpha = 1$ المعادلة (20.3) ، تصبح :

$$ \begin{aligned} & c_0(1-x)^3 + 3c_1 x(1-x)^2 + 3c_2 x^2(1-x) + c_3 x^3 - 0.05c_0\int_0^x tdt \\ & - 0.1c_1\int_0^x tdt - 0.15c_2\int_0^x tdt - 0.2c_3\int_0^x tdt = \int_0^x dt - \frac{1}{3}\int_0^x tdt \end{aligned} $$

أو

$$c_0\left[(1-x)^3-\frac{0.05}{2}x^2\right]+c_1\left[3x(1-x)^2-\frac{0.1}{2}x^2\right]+c_2\left[3x^2(1-x)\right.$$
$$\left.-\frac{0.15}{2}x^2+c_3\left[x^3-\frac{0.2}{2}x^2\right]=x^3-\frac{x^2}{6}. \quad (21.3)$$

أيضا ، نقوم بإستبدال القيم $x = 0.1, 0.2, 0.3$ و 0.4 في المعادلة (21.3) ،على التوالي ، نحصل على نظام خطي الذي يحتوي على الحل التالي ،

$$c_0 = 0.0001, c_1 = 0.3327, c_2 = 0.6689, c_3 = 0.9921$$

وهكذا ، الحل التقريبي لـــلمعادلة (18.3) ، عندما $\alpha = 1$ يصبح :

$$y(x) = 0.0024(1-x)^3 + 0.32\times 3x(1-x)^2 + 0.712\times 3x^2(1-x) + 0.841x^3$$

x	الحل التقريبي	الحل الحقيقي
0.1	0.09996	0.1
0.2	0.1999	0.2
0.3	0.2999	0.3
0.4	0.3999	0.4
0.5	0.4996	0.5
0.6	0.5991	0.6
0.7	0.6982	0.7
0.8	0.7968	0.8
0.9	0.8948	0.9

جدول 3.3: المقارنة بين الحل التقريبي للمثال 14 عندما $\alpha = 1$ مع الحل الحقيقي $y = x$.

الحالة(2):

عندما $\alpha = 0.5$ في المعادلة (20.3) لدينا :

$$c_0(1-x)^3 + 3c_1x(1-x)^2 + 3c_2x^2(1-x) + c_3x^3 - I^{0.5}(0.05c_0x) - I^{0.5}(0.1c_1x) - I^{0.5}(0.15c_2x) - I^{0.5}(0.2c_3x) = I^{0.5}(1) - I^{0.5}\left(\frac{1}{3}x\right)$$

والتي يمكن كتابتها كالتالي :

$$c_0\left[(1-x)^3 - 0.05\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}x^{1.5}\right] + c_1\left[3x(1-x)^2 - 0.1\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}x^{1.5}\right] + c_2\left[3x^2(1-x) - 0.15\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}x^{1.5}\right] + c_3[x^3 - 0.2\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}x^{1.5}] = \frac{1}{\Gamma(1.5)}x^{0.5} - \frac{1}{3}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}x^{1.5} \quad (22.3)$$

الآن ، نقوم بإستبدال القيم $x = 0.1, 0.2, 0.3$ و 0.4 في المعادلة (22.3) ،على التوالي نحصل على النظام الخطي الذي يحتوي على الحل التالي :

$$c_0 = 0.158, c_1 = 0.937, c_2 = 0.691, c_3 = 1.987$$

وهكذا ، الحل التقريبي لـــلمعادلة (18.3) ، عندما $\alpha = 0.5$ يصبح :

$$y(x) = 0.158(1-x)^3 + 0.937 \times 3x(1-x)^2 + 0.691 \times 3x^2(1-x) + 1.987x^3$$

المتبقي	الحل الحقيقي	x
0.04	0.364	0.1
0.01	0.523	0.2
0.01	0.652	0.3
0	0.765	0.4
0.04	0.879	0.5
0.14	1.008	0.6
0.31	1.168	0.7
0.59	1.374	0.8
0.96	1.642	0.9

جدول 4.3: الحل التقريبي للمثال (14) عندما $\alpha = 0.5$

الحالة (3) :

عندما تكون $\alpha = 0.25$ في المعادلة (20.3) لدينا :

$$c_0(1-x)^3 + 3c_1x(1-x)^2 + 3c_2x^2(1-x) + c_3x^3 - I^{0.25}(0.05c_0x) - I^{0.25}(0.1c_1x) - I^{0.25}(0.15c_2x) - I^{0.25}(0.2c_3x) = I^{0.25}(1) - I^{0.25}\left(\frac{1}{3}x\right).$$

والتي يمكن كتابتها كالتالي :

$$c_0\left[(1-x)^3 - 0.05\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.25)}x^{1.25}\right] + c_1\left[3x(1-x)^2 - 0.1\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.25)}x^{1.25}\right] + c_2\left[3x^2(1-x) - 0.15\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.25)}x^{1.25}\right] + c_3\left[x^3 - 0.2\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.25)}x^{1.25}\right] = \frac{1}{\Gamma(1.25)}x^{0.25} - \frac{1}{3}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.25)}x^{1.25} \tag{23.3}$$

الآن ، نقوم بإستبدال القيم $x = 0.1, 0.2, 0.3$ و 0.4 في المعادلة (23.3) ، على التوالي نحصل على النظام الخطي الذي يحتوي على الحل التالي :

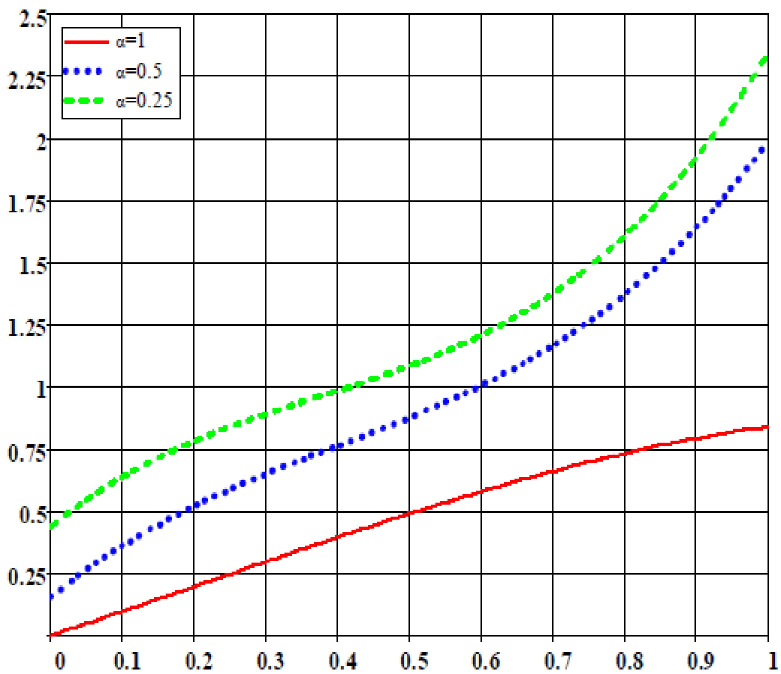
$$c_0 = 0.441, c_1 = 1.218, c_2 = 0.751, c_3 = 2.345$$

وهكذا ، الحل التقريبي لـــلمعادلة (18.3) ،عندما $\alpha = 0.25$ يصبح :

$$y(x) = 0.441\times(1-x)^3 + 1.218\times 3x(1-x)^2 + 0.751\times 3x^2(1-x) + 2.345\times x^3 \tag{24.3}$$

المتبقي	الحل التقريبي	x
0.02	0.6401	0.1
0.01	0.7844	0.2
0	0.8937	0.3
0	0.9878	0.4
0.03	0.0866	0.5
0.1	1.2100	0.6
0.26	1.3776	0.7
0.5	0.6095	0.8
0.86	1.9253	0.9

جدول 5.3: الحل التقريبي للمثال (14) عندما $\alpha = 0.25$



شكل 3.3: التمثيل البياني للحل التقريبي للمثال (14)

مثال 15

نعتبرالمعادلة التفاضلية-التكاملية ذات الرتبة الكسرية :

$$ {}^{c}D_{a}^{\alpha}y(x) = xe^{x} + e^{x} - x + \int_{0}^{1} xy(t)dt, y(0) = 0, 0 < \alpha \leq 1 \qquad (25.3)$$

من خلال أخذ التكامل الكسري على طرفي المعادلة (25.3) ،نجد:

$$y(x) = I^{\alpha}(xe^{x} + e^{x} - x) + I^{\alpha}\left(\int_0^1 xy(t)dt\right) \tag{26.3}$$

لتحديد الحل التقريبي لـــ (18.3) نضع $y(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i B_{i,3}(x)$ وبعد إستبداله في المعادلة (25.3) ، نجد :

$$\sum_{i=0}^{3} c_i B_{i,3}(x) - I^{\alpha}\left(\int_0^1 x\sum_{i=0}^{3} c_i B_{i,3}(t)dt\right) = I^{\alpha}(xe^{x} + e^{x} - x),$$

أو

$$c_0(1-x)^3 + 3c_1x(1-x)^2 + 3c_2x^2(1-x) + c_3x^3 I^{\alpha}\left[c_0x\int_0^1 (1-t)^3dt +\right.$$
$$\left. 3c_1x\int_0^1 t(1-t)^2dt + 3c_2x\int_0^1 t^2(1-t)dt + a_3x\int_0^1 t^3dt = I^{\alpha}(xe^{x} + e^{x} - x),\right.$$

بالتالي

$$\begin{aligned} &c_0(1-x)^3 + 3c_1x(1-x)^2 + 3c_2x^2(1-x) + a_3x^3 \\ &- I^{\alpha}(0.25a_0x + 0.25a_1x + 0.25a_2x + 0.25a_3x) \\ &= I^{\alpha}(xe^{x} + e^{x} - x), \end{aligned}$$

و لتجنب صعوبة تقييم التكامل الكسري لـ e^x ، يجب أن تحل محل السلسلة ماكلوران $(maclaurin)$ حتى خمس فترات أو شروط للحصول عليها :

$$\begin{aligned} &c_0[(1-x)^3 - \frac{0.25}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}] + c_1[3x(1-x)^2 - \frac{0.25}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}] \\ &+ c_2[3x^2(1-x) - \frac{0.25}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}] + c_3[x^3 - \frac{0.25}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}] \\ &= I^{\alpha}(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4) \end{aligned} \tag{27.3}$$

الحالة (1) :

عندما $\alpha = 1$ المعادلة (27.3) وبعد الاستبدال بالقيم $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ على التوالي ، نحصل على نظام خطي يحتوي على الحل التالي :

$$c_0 = -2.377 \times 10^{-3}, c_1 = 0.348, c_2 = 0.933, c_3 = 2.819$$

و بالتالي ، فإن الحل التقريبي للمعادلة (25.3) ،عندما $\alpha = 1$ يصبح :

$$y(x) = -2377\times10^{-3}\times(1-x)^3 + 0.348\times3x(1-x)^2 + 0.933\times3x^2(1-x) + 2.819\times x^3$$

x	الحل التقريبي	الحل الحقيقي
0.1	0.111	0.11052
0.2	0.245	0.24428
0.3	0.405	0.40496
0.4	0.599	0.59673
0.5	0.832	0.82436
0.6	1.112	1.09327
0.7	1.444	1.40963
0.8	1.835	1.78043
0.9	2.291	2.21364

جدول 6.3: المقارنة بين الحل التقريبي للمثال (15) مع الحل الحقيقي $y = xe^x$:

الحالة (2) :

عندما $\alpha = 0.5$ المعادلة (27.3) وبعد الاستبدال بالقيم $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ على التوالي ، سنحصل على نظام خطي من المعادلات التي لديها حلول :

$$c_0 = 0.145, c_1 = 1.115, c_2 = 1.966, c_3 = 5.362$$

و بالتالي ، فإن الحل التقريبي للمعادلة (25.3) ، عندما $\alpha = 0.5$ يصبح :

$$y(x) = 0.145(1-x)^3 + 1.115 \times 3x(1-x)^2 + 1.966 \times 3x^2(1-x) + 5.362x^3$$

x	الحل التقريبي	المتبقي
0.1	0.435	0.04
0.2	0.734	0.01
0.3	1.058	0
0.4	1.422	0.01
0.5	1.844	0.05
0.6	2.338	0.14
0.7	2.921	0.28
0.8	3.608	0.47
0.9	4.417	0.73

جدول 7.3: الحل التقريبي للمثال (15) عندما $\alpha = 0.5$

الحالة (3) :

عندما $\alpha = 0.25$ المعادلة (27.3) وبعد الاستبدال بالقيم $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ على التوالي ،سنحصل على نظام خطي من المعادلات التي لديها حلول :

$$c_0 = 0.417, c_1 = 1.791, c_2 = 3.073, c_3 = 6.992$$

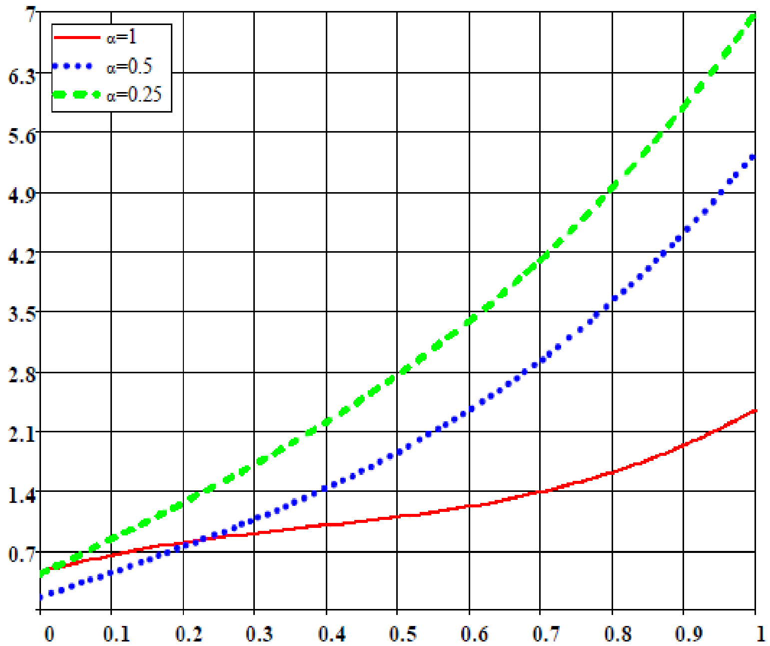
و بالتالي ، فإن الحل التقريبي للمعادلة (25.3) ، عندما $\alpha = 0.5$ يصبح :

$$y(x) = 0.417(1-x)^3 + 1.791 \times 3x(1-x)^2 + 3.073 \times 3x^2(1-x) + 6.992x^3$$

الجدول (6) التالي يمثل الحل التقريبي للمثال (2) عندما $\alpha = 0.25$

x	الحل التقريبي	المتبقي
0.1	0.8292	0.02
0.2	1.2522	0.01
0.3	1.7024	0
0.4	2.1963	0
0.5	2.7501	0.01
0.6	3.3803	0.06
0.7	4.1032	0.14
0.8	4.9352	0.27
0.9	5.8927	0.44

جدول 8.3: الحل التقريبي للمثال (15) عندما $\alpha = 0.25$



شكل 4.3: التمثيل البياني للحل التقريبي للمثال (15)

نتيجة 4 في دراستنا هذه نلاحظ طريقة بسيطة و مباشرة ، مرتكز على تقريب تابع غير معروف للمعادلة التفاضلية-التكاملية ذات الرتبة الكسرية وفق أساس كثيرات حدود برنشتاين ،وفي الأخير تنتج نتائج مقبولة إذا قورنت مع الحل الدقيق عندما $\alpha = 1$ ، كما هي مقبولة عند $\alpha = 0.5, 0.25$ حيث أن الباقي أقل من واحد لكل القيم بخصوص x.

3.3 ملحق برنامج المتلاب

• الشكل (1.1)

function plot gamma

% plots the gamma function

$i = -5 : 0.005 : 4;$

$y = gamma(i);$

$y1 = []; x = [];$

for$j = -5 : 2 : 5;$

$x = [x, j];$

$y1 = [y1, -1];$

end

plot$(y1, x,' k^{--}', 2. * y1, x,' k^{--}', 3. * y1, x,' k^{--}', \ldots$

$4. * y1, x,' k^{--}', 5. * y1, x,' k^{--}', i, y,' r')$

on hold;

plot$(0. * y1, x,' k', x, 0. * y1,' k');$

xlabel$('x');$

ylabel$('Gamma(x)');$

axis$([-5 \ \ 4 \ \ -5 \ \ 5]);$

خاتمة

قمنا في هذه المذكرة بعرض طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية-التكاملية ذات الرتبة الكسرية ، و المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية المتغيرة بإستخدام كثيرات حدود برنشتاين ، و يتم تحويلها إلى جملة معادلات جبرية ، فمن مميزات الطريقتين هو الحصول على الحل التحليلي إذا كان الحل الحقيقي عبارة عن دالة كثير حدود ، وإستخدمت الأمثلة التوضيحية لإثبات تطبيق هذه الطريقة .

المراجع العلمية

[1] K.B. Oldham,J. Spanier, (1974). The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order. Academic Pressé Inc.

[2] I. Podlubny, Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering, vol. 198. New York/London:Springer;1999.

[3] S.Krasnov ,A.Kisslev ,G.Makarenko ,equations intgrales ,problmes et exercices ; ditions Mir ,Moscou ,1981.

[4] Abdul-majid wazwaz ,Linear and non- linear integral equtions methods and applications ,Sait xavier university Chicago .USA. 2011 .

[5] S. A. Yousefi, Z. Barikbin, and M. Dehghan, Ritz-Galerkin method with Bernstein polynomial basis for finding the product solution form of heat equation with nonclassic boundary conditions, International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow, vol. 22, no. 1, pp. 39–48, 2012.

[6] Michael A. Bellucci, On the explicit representation of orthonormal Bernstein Polynomials, arXiv: 1404.2293 v2 [math.CA] (2014).

[7] E. H. Doha, A. H. Bhrawy, M. A. Saker, On the derivatives of Bernstein polynomials: An application for the solution of high even-order differential equations, Boundary Value Problems Volume 2011, (2011) Article ID 829543, 16 pages doi:10.1155/2011/829543.

[8] Abdelkrim Bencheikh, Lakhdar Chiter, Abbassi Hocine, A New Operational Matrix of Orthonormal Bernstein Polynomials and Its Applications, Global

Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 12, no. 5, pp. 4219-4232, 2016.

[9] Kenneth I. Joy , “BERNSTEIN POLYNOMIALS’’, Department of Computer Science University of California, Davis, (2000).

[10] Saadatmandi A., “Bernstein Operational Matrix of Fractional Derivatives and its Applications”, Appl. Math. Modeling (2013), doi: http:// dx.doi.org/ 10.1016/j.apm. 2013.08.007.

[11] G. Tachev, Pointwise approximation by Bernstein polynomials,vol. 85, no. 3, pp. 353–358, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2012.

[12] Sandeep Dixit, Rajesh K. Pandey, Sunil Kumar, On P. Singh, Solution of the generalized Abel integral equation by using almost Bernstein operational matrix, American Journal of Computational Mathematics, 2011, 1, 226-234.

[13] Mingxu Yi,Jun Huang and Lifeng Wang ,Operational Matrix Method for Solving Variable Order Fractional Integro-differential Equations,vol.96, no.5, pp.361-377, 2013.

[14] Caputo M.,Linear model of dissipation whose Q is almost frequency indepedent - II the Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol.13,1967 ,529-539.

[15] Klimek M (2009) On solutions of linear fractional differential equations of a variational type. The Publishing Office of Czestochowa University of Technology, Czestochowa

[16] Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ (2006) Theory and applications of fractional differential equations, vol 204. North-Holland mathematics studies. Elsevier, Amsterdam

[17] Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI (1993) Fractional integrals and derivatives. Translated from the 1987 Russian original.Gordon and Breach, Yverdon

[18] Korovkin P.P,“Bernstein Polynomials”, in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics”, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4, (2001).

[19] Erwin Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, Wiley Classics Library. John Wiley and Sons Inc., New York, 1989.

[20] S. A. Yousefi, Z. Barikbin, and M. Dehghan,The operational matrices of Bernstein polynomials for solving the parabolic equation subject to specification of the mass,Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (2011) 5272–5283.

[21] M.H.T.Alshbool ,A.S.Bataineh ,I.Hashim ,OSman Rasit Isik ,APPROXIMATE SOLUTIONS OF SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ESTIMATION ERROR BY USING BERNSTEIN POLYNOMIALS ,International Journal of Pure and Applied Mathematics,Volume 100 No. 1 2015, 109-125.

[22] Mohsen Alipour1, Davood Rostamy and Dumitru Baleanu ,Solving multidimensional fractional optimal control problems with inequality constraint by Bernstein polynomials operational matrices,Journal of Vibration and Control published online 4 October 2012.

[23] Hasib Khan, Hossein Jafari, Rahmat Ali Khan, Haleh Tajadodi, and Sarah Jane Johnston,Numerical Solutions of the Nonlinear Fractional-Order Brusselator System by Bernstein Polynomials,Received 28 July 2014; Revised 2 September 2014; Accepted 2 September 2014; Published 17 November 2014.

[24] Osama H. Mohammed ,Sarmad A. Altaie ,Approximate Solution of Fractional Integro-Differential Equations by Using Bernstein Polynomials ,Eng. Tech. Journal, Vol.30, No.8, 2012.

[25] Mingxu Yi, Jun Huang , LifengWang, Operational Matrix Method for Solving Variable Order Fractional Integro-differential Equations,vol.96, no.5, pp.361-377, 2013 .

[26] Chen Y.M., Wei Y.Q., Liu D.Y. and Yu H., “Numerical Solution for a Class of Nonlinear Variable-Order Fractional Differential Equations with

Legendre Wavelets”, Appl. Math. Lett. (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j. aml. 2015.02.010.

[27] Pierre Grisvard , calcul Differential of Equations Differential ,office des publications universitaires,2 eme Edition ,Alger ,1980.

[28] Ross,Introduction of Ordinary Differential Equations, 1989.

[29] Shantanu Das ,Functional Fractional Calculus ,DOI 10.1007/978-3-642-20545-3,ISBN 978-3-642-20544-6,2011 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[30] Hervé Queffélec Claude Zuily ,Analyse pour l’agrégation ,master Agrégation.

الملخص:

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو تقديم طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية–التكاملية ذات الرتبة الكسرية و ذلك بإستعمال كثيرات حدود برنشتاين، ويتم تحويل هذه المعادلات التفاضلية–التكاملية ذات الرتبة الكسرية إلى منظومة من المعادلات الجبرية تحل بطرق معروفة و سهلة البرمجة وكذلك المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية المتغيرة . فالأمثلة العددية تبين دقة و تقارب الحل التقريبي نحو الحل الحقيقي .

الكلمات المفتاحية : كثيرات حدود برنشتاين ، مصفوفات العمليات ،المعادلات التفاضلية–التكاملية ذات الرتبة الكسرية ،المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية المتغيرة .

Abstract :

The main purpose of this study is to present a numerical method for solving fractional-differential equations using the Bernstein polynomials. The differential-integrative equations of the fractional rank are converted into a system of algebraic equations solved by known and easy-to-use methods, The fractal changing. Numerical examples show the accuracy and approximation of the approximate solution to the real solution.

Key words: Bernstein polynomials , Fractional integro-differential equations , operational matrice , Equations differential , Differential with variable fractional rank .

Résumé :

L'objectif principal de cette note est de présenter une méthode numérique pour résoudre les équation différentielles fractionnaires en utilisant les polynômes de Bernstein. Ces équation différentielles-intégratives avec le rang fractal sont converties en un système d'équations algébriques qui sont

Résoiues dans méthodes connues et faciles à utiliser , ainsi que des équation différentielle .es exemples numériques montrent la précision et l'approximation de la solution approximative à la vraie solution .