رقم الترتيب:

رقم التسلسل:

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

مذكرة مقدمة لإستكمال متطلبات شهادة ماسترأكاديمي

الميدان: رياضيات و إعلام آلي

الشعبة: رياضيات

التخصص: تحليل دالي

تحت عنوان

التمديد التام لمؤثر فولتيرا

من إعداد الطالب :

- قمولي نورالدين

تحت إشراف الأستاذ :

- عسيلة مصطفى

نوقشت يوم 31 ماي 2018 من طرف أعضاء اللجنة :

الأستاذ :عمارة عبد القادر	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
الأستاذ :السعيد محمد السعيد	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
الأستاذ : عسيلة مصطفى	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

السنة الجامعية 2017-2018

شكر وعرفان

أحمد لله على إحسانه، وأشكره على توفيقه وإمتنانه، و أشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له تعظيما لشأنه، وأشهد أن سيدنا ونبينا محمد عبده ورسوله، الداعي إلى رضوانه، صلى الله عليه وعلى آله وأصحابه وسلم.

بعد شكر الله سبحانه وتعالى على توفيقه لإتمام هذا البحث المتواضع، أتقدم بجزيل الشكر، إلى الوالدين العزيزين الذين أعانانيَ وشجعانيَ على الإستمرار في مسيرة العلم والنجاح، كما أتوجه بالشكر الجزيل إلى من شرفني بإشرافه على مذكرة بحثي الأستاذ الدكتور "مصطفى عسيلة" الذي لن تكفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه بصبره الكبير عليَّ، ولتوجيهاته العلمية التي لا تقدر بثمن، والتي ساهمت بشكل كبير في إتمام وإستكمال هذا العمل، كما أتقدم بالشكر والتقدير إلى أساتذة لجنة المناقشة إلى كل من الأستاذ:

عمارة عبد القادر - السعيد محمد السعيد - عسيلة مصطفي

والشكر موصول إلى كل أساتذة قسم الرياضيات وأخص بذكر الأساتذة: محمد الأمين باحيو - عبدالله بن السايح - عبد الرّزاق غزال .

إهـداء

أحمد الله عز وجل على منّه و عونه على إتمام هذا البحث
إلى الذي وهبني كل ما يملك حتى أحقق له آماله، إلى من كان يدفعني قدما نحو الأمام لنيل المبتغى
إلى الذي سهر على تعليمي بتضحيات جسام، مترجمة في تقديسه للعلم، إلى مدرستي الأولى في الحياة
أبي الغالي على قلبي أطال الله في عمره
إلى التي وهبت فلذة كبدها كل العطاء والحنان، إلى التي صبرت على كل شيء
إلى التي رعتني حق الرعّاية وكانت سندي في الشدائد، وكانت دعواتها لي بالتوفيق تتبعتني خطوة في عملي
إلى التي كلما تذكرت إبتسامتها إرتحت، نبع الحنان أمي حفظك الله ورعاك
إليهما أهدي هذا العمل المتواضع، لكي أدخل على قلبيهما شيئا من السعادة
إلى جدّتي "عائشة بنت البشير"التي لم تنساني من صالح دعائها، إلى كل الأقارب
كما أهدي ثمرة جهدي لأستاذي المحترم الدكتور"عسيلة مصطفى" الذي كلما دبّ اليأس في نفسي،
زرع فيا الأمل لأسير قدما، وكلما سألت عن معرفة زودني بها
وكلما طلبت كمية من وقته الثمين وفره لي، بالرغم من مسؤولياته المتعددة
إلى كل أساتذة وطلبة قسم الرّياضيات

نورالدين قمولي

الفهرس

الفصل 2
التمديد التام لمؤثر فولتيرا 20

دليـــل الرّمـــوز

الرّمـز	مدلوله	الرّمـز	مدلوله
X	مجموعة كيفية	$\ker F$	نواة المؤثر F
$P(X)$	مجموعة كل المجموعات الجزئية من X	$\Gamma(F)$	بيان المؤثر F
τ	تبولوجيا	L(X,Y)	فراغ المؤثرات الخطية من X في Y
(X,τ)	فراغ تبولوجي	X^*	فراغ الأشكال الخطية على X
(X,d)	فراغ متري	$l(X,Y)$	المؤثرات من $L(X,Y)$ والمحدودة
$\|.\|$	تطبيق النظيم	X'	الأشكال الخطية والمحدودة على X
$(X,\|.\|)$	الفراغ الشعاعي النظيمي	F^*	المؤثر القرين للمؤثر F
$\langle,\rangle$	تطبيق الجداء السلمي	F^{-1}	المؤثر العكسي للمؤثر F
$(X,\langle,\rangle)$	فراغ شبه هيلبرتي	$\rho(F)$	مجموعة النقط النظامية للمؤثر F
H	فراغ هيلبار	$\sigma(F)$	طيف المؤثر F
$x\perp y$	العنصر x عمودي على y	$P_\sigma(F)$	الطيف النقطي للمؤثر F
$x\perp A$	x عمودي على المجموعة A	$R_\sigma(F)$	الطيف الباقي للمؤثر F
$A^\perp$	مجموعة العناصر العمودية على A	$C_\sigma(F)$	الطيف المستمر للمؤثر F
$X_0^\perp$	المتمم التبولوجي للفراغ X_0 بالنسبة H	$R_\lambda(F)$	مؤثر الحالة للمؤثر F
$F: X \longmapsto Y$	F مؤثر من X في Y	$f(F)$	دالة المؤثر للمؤثر F
$D(F)$	مجموعة تعريف المؤثر F	$\dotplus$	الجمع الجبري
$E(F)$	مجموعة قيم المؤثر F	$\oplus$	الجمع التبولوجي

مقدّمـــــة

نشأ التحليل الدالي في أوائل القرن العشرين، ورغم حداثة سنّه نسبيا، إلا أنه يحتل حاليًا مركزًا متميزًا بين العلوم الرياضية المعاصرة.
يشغل مفهوم " المؤثر " مركز الصدارة في التحليل الدالي، فهو تعميم لمفهوم الدالة، ودراسة المؤثرات جاءت لتعميم مفاهيم الجبر الخطي في الأبعاد غير المنتهية، وهذه الدراسة تنقسم لعدة أقسام عامة من حيث كونها خطية - غير خطية - محدودة - غير محدودة، هذا كله من أجل تسهيل حل المعادلات الدالية التي عواملها مؤثرات .
بخلاف المؤثرات الخطية في فراغ بعده منته، التي توجد من أجلها دراسة معمقة وكاملة، نجد أن دراسة المؤثرات الخطية الكيفية في فراغ بعده غير منته قضية معقدة لا نستطيع تصور إتّساعها، ورغم ذلك فإن هناك أصنافًا هامة من هذه المؤثرات يمكن وصفها وصفًا تامًا، من أهم هذه الأصناف نجد صنف ما يدعى بالمؤثرات المتراصة، فبحكم خواصها تعتبر أقرب نوع من المؤثرات إلى المؤثرات المنتهية .
وفي نظرية المؤثرات يعتبر التمديد من أهم المفاهيم، وهذا من أجل الحصول على مؤثر معرف على فراغ أوسع من الفراغ الأول، ويساوي المؤثر الأصلي على الفراغ الأول، وفي هذه المذكرة نوضح الشروط الكافية لإمكانية تمديد صنف من أصناف المؤثرات المتراصة وهو مؤثر فولتيرا، المعرف على فراغ بناخ قابل للفصل إلى مؤثر متراص وتام معرف على فراغ أوسع .
وعلى هذا الأساس اخترنا عنوان المذكرة :

"التمديد التام لمؤثر فولتيرا"

قسمنا هذه المذكرة إلى فصلين:
الفصل الأول: " مفاهيم أساسية " من التبولوجيا والتحليل الدالي، وبالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية، و أخذت مختصرة بدون براهين، وهذا لغرض إستعمالها في الفصل الثاني .
الفصل الثاني: تطرقنا فيه إلى تمديد مؤثر فولتيرا، ومن ثَمَّ قدمنا تطبيقًا عمليًا على ذلك .

الفصل

1

مفاهيم أساسية

1.1 الفراغ التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية، و $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X .

تعريف 1.1.1

تعرف التبولوجيا على X، ويرمز لها بالرمز τ على أنها أسرة جزئية من $P(X)$، تحقق :

① $\varnothing, X \in \tau$

② $\forall O_1, O_2 \in \tau \longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$

③ $(O_i \in \tau \;/\; i \in I) \longrightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$, حيث I مجموعة دلائل كيفية

❑ الزوج (X, τ)، يسمى فراغاً تبولوجياً .

❑ عناصر الأسرة τ، تسمى مفتوحات الفراغ التبولوجي (X, τ) .

تعريف 2.1.1

تعرف المجموعة المغلقة في الفراغ التبولوجي على أنها متمم المفتوح فيه.

تعريف 3.1.1

ليكن (X, τ) فراغا تبولوجيا، وx من X

المجموعة الجزئية V من X، يقال أنها جوار للنقطة x، إذا وجد مفتوح O $(O \in \tau)$، يحقق $x \in O \subset V$.

مجموعة كل جوارات النقطة x، يرمز لها بالرمز $V(x)$ وتسمى أسرة جوارات النقطة x .

تعريف 4.1.1

ليكن (X, τ) فراغا تبولوجيا، و M مجموعة جزئية غير خالية من X، و x نقطة من X.

يقال أن النقطة x نقطة تلاصق للمجموعة M، إذا كان كل جوار للنقطة x يحوي نقطة على الأقل من M .

يرمز لمجموعة نقط تلاصق M بالرمز $\overline{M}$، و تسمى لصاقة M، ونكتب :

$$x \in \overline{M} \Longleftrightarrow (\forall V \in \vartheta(x) \longrightarrow V \cap M \neq \varnothing)$$

1.1.1 الفراغ القابل للفصل

ليكن (X, τ) فراغًا تبولوجيًا، و A, B مجموعتين جزئيتين من X .

تعريف 5.1.1

يقال أن:

① المجموعة A كثيفة في المجموعة B، إذا كان $B \subset \overline{A}$.

② المجموعة A كثيفة في كل مكان أو كثيفة في X، إذا كان $X = \overline{A}$.

③ يقال الفراغ التبولوجي (X, τ) قابل للفصل، إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة وعلى الأكثر قابلة للعد .

2.1.1 الفراغ المنفصل

تعريف 6.1.1

يقال أن الفراغ التبولوجي منفصل، إذا وجد من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y منه، جوار للنقطة x وآخر للنقطة y تقاطعهما خاليا .

3.1.1 التراص

ليكن (X, τ) فراغا تبولوجيا و I مجموعة دلائل كيفية .

تعريف 7.1.1

لتكن B مجموعة جزئية من X و A أسرة معرفة كالتالي:

$$A = \{A_i \subset X_i \backslash i \in I\}$$

① يقال أن الأسرة A تغطية للمجموعة B، إذا كان $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ (تغطية للمجموعة X، إذا كان $X = \bigcup_{i \in I} A_i$)

② يقال بإمكاننا إخراج من التغطية A للمجموعة B، تغطية منتهية لها، إذا وجدت I_0 مجموعة دلائل منتهية من I ، بحيث يكون: $B \subset \bigcup_{i \in I_0} A_i$

③ يقال أن التغطية A مفتوحة، إذا كانت كل عناصرها مفتوحات.

تعريف 8.1.1

① يقال أن الفراغ (X,τ) متراص، إذا كان منفصلاً وكل تغطية مفتوحة له، تحوي تغطية منتهية له
② يقال أن المجموعة A من X متراصة، إذا كان الفراغ الجزئي (A,τ) متراصًا.
③ يقال أن المجموعة A من الفراغ المنفصل (X,τ) شبه متراصة، إذا كانت $\overline{A}$ متراصةً .

2.1 الفراغ المتري

لتكن X مجموعة غير خالية.

تعريف 1.2.1

يقال أن على المجموعة X، عرفت مسافة، إذا عرف تطبيق d من $X \times X$ في $\mathbb{R}$ ، يحقق من أجل كل x, y, z من X، مايلي :

① $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
② $d(x,y) = d(y,x)$
③ $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$

التطبيق d يسمى مسافة، والعدد الحقيقي $d(x,y)$، هو المسافةبين x وy، و الزوج (X,d)، يسمى فراغاً متريًا.

نتيجة

❖ $\forall x, y \in X \to d(x,y) \geqslant 0$
❖ $|d(x,y) - d(x,z)| \leqslant d(z,y)$
❖ كل فراغ متري، يكون فراغاًتبولوجيًا.

1.2.1 المتتاليات في الفراغ المتري

لتكن $(x_n)_{n\geqslant 1}$، متتالية من الفراغ المتري (X,d)، و x_0 عنصر من X .

تعريف 2.2.1

① يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة نحو العنصر x_0 ، إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_\varepsilon \geqslant 1 \ , \forall n \geqslant n_\varepsilon \longrightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

② يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ لكوشي، إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_\varepsilon \geqslant 1 \ , \forall q, p \geqslant n_\varepsilon \longrightarrow d(x_q, x_p) < \varepsilon$$

نتيجة

❖ كل متتالية متقاربة تكون لكوشي

تعريف 3.2.1

يقال أن الفراغ المتري (X,d) فراغًا تامًا، إذا كانت كل متتالية كوشي منه متقاربة فيه.

2.2.1 التراص في الفراغ المتري

تعريف 4.2.1

ليكن (X,d) فراغًا متريًا و B, A مجموعتين من X و ε عددًا موجبًا كيفيًا .

① المجموعة A يقال أنها $\varepsilon-$شبكة للمجموعة B، إذا تحقق:

$$\forall b \in B, \exists a \in A \ / \ d(a,b) < \varepsilon$$

② يقال أن المجموعة B محدودة كليًا، إذا إستطعنا من أجل كل ε $(\varepsilon > 0)$، إيجاد $\varepsilon-$شبكة منتهية لها في X، أي توجد مجموعة منتهية تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall b \in B \rightarrow d(b,A) < \varepsilon$$

③ يقال أن الفراغ نفسه (X,d) محدودًا كليًا، إذا وجدت فيه من أجل كل ε مجموعة منتهية A تحقق:

$$\forall x \in X \rightarrow d(x,A) < \varepsilon$$

نظرية 1.2.1

في الفراغ المتري

(X,d) متراص $\Leftrightarrow$ (X,d) تامًا و محدودًا كليًا.

البرهان [3]

■

3.1 الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 1.3.1

يسمى فراغًا شعاعيًا نظيميًا كل زوج $(X,\|.\|)$، حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ أو $\mathbb{C})$، و $\|.\|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}$ ، يحقق الشروط التالية:

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

① $\forall x \in X, \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

② $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

③ $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

الرمز $\|.\|$ يسمى نظيماً، والعدد $\|x\|$ يسمى نظيم العنصر x .

نتيجة

كل فراغ شعاعي نظيمي يكون فراغاً متريًا، عندها يكون:

- ❖ $d(x, 0) = \|x\|$
- ❖ $\forall x \in X \to \|x\| \geqslant 0$
- ❖ $d(x, y) = \|x - y\|$

ملاحظة

الفراغ الشعاعي النظيمي، إختصاراً يكتب: ف.ش.ن .

1.3.1 فراغ بناخ

ليكن $(X, \|.\|)$ ف.ش.ن .

تعريف 2.3.1

يقال إن الفراغ $(X, \|.\|)$ فراغ بناخ، إذا كان فراغًا تامًا.

نظرية 1.3.1

ليكن $(X, \|.\|)$ ف.ش.ن، إذا كانت A مجموعة مغلقة ومحدبة من X و x من X ، حيث $x \notin A$ فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من A، يكون أحسن تقريب للعنصر x في المجموعة A، أي:

$$\forall x \in H, (x \notin A), \exists! y_0 \in A \;/\; d(x, y_0) = \|x - y_0\| = d_0(x, A)$$

البرهان [3]

■

قضية 1.3.1

ليكن $(X, \|.\|)$ ف.ش.ن، إذا كانت كرة الوحدة المغلقة $F(0,1) = \{x \in X \setminus \|x\| \leqslant 1\}$ متراصة، فإن X منتهي البعد.

البرهان [1]

■

4.1 الفراغ الهيلبرتي

1.4.1 الجداء السلمي

ليكن X فراغاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 1.4.1

يعرف الجداء السلمي على X، بأنه تطبيق h من $X \times X$ في $\mathbb{K}$، يحقق من أجل كل x, y, z من X و α من $\mathbb{K}$، مايلي:

① $h(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \ , \ h(x,x) \geqslant 0$

② $h(\alpha x, x) = \alpha h(x,x)$

③ $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$

④ $h(x+y, z) = h(x,z) + h(y,z)$

يرمز للجداء السلمي بالرمز $\langle , \rangle$، عندها الزوج $(X, \langle , \rangle)$ يسمى فراغا شبه هيلبرتي .

نتيجة

كل فراغ شبه هيلبرتي، يكون فراغاً شعاعياً نظيمياً مع النظيم: $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$

قضية 1.4.1

إذا كان X فراغ شبه هيلبرتي، فإن:

① $\forall x, y \in X, |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (متراجحة كوشي شوارتز).

② $\forall x, y \in X, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2)$ (قاعد متوازي الأضلاع).

③ $\forall x, y \in X, \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle)$

④ $\forall x, y \in X, 4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$

البرهان [3]

■

2.4.1 الفراغ الهيلبرتي

تعريف 2.4.1

الفراغ الهيلبرتي هو كل فراغ شبه هيلبرتي تام، ونرمز لفراغ هيلبار بالرمز H .

3.4.1 التعامد

ليكن X فراغا شبه هيلبرتي، A , B مجموعتان من X، حيث $A \neq \varnothing \neq B$.

تعريف 3.4.1

- يقال أن الشعاعين x, y من X متعامدان، ونكتب $(x \perp y)$، إذا كان جداؤهما السلمي معدومًا، أي:

$$x \perp y \Longleftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

- يقال أن الشعاع x من X عمودي على المجموعة A ،إذا كان عموديًا على كل شعاع منها، ونكتب:

$$x \perp A \Longleftrightarrow (\forall y \in A \longrightarrow \langle x, y \rangle = 0)$$

يرمز لمجموعة العناصر العمودية على A بالرمز $A^{\perp}$.

- يقال أن A, B متعامدان، إذا تحقق:

$$\forall x \in A, \forall y \in B \longrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

ونكتب: $A \perp B$.

4.4.1 الإسقاط العمودي

ليكن H فراغًا لهيلبار .

نظرية 1.4.1

إذا كان X_0 فراغًا جزئيًا مغلقًا من H، و x شعاع من H، حيث $x \notin X_0$، فإنه يوجد شعاع وحيد y_0 من X_0 ، يمثل أحسن تقريب للشّعاع x في X_0، يحقق:

$$(x - y_0) \perp X_0$$

في هذه الحالة يسمى y_0 المسقط العمودي للشّعاع x على الفراغ X_0، ويرمز له بالرمز $P_{X_0}x$.

البرهان [3]

■

5.4.1 التحليل العمودي

ليكن H فراغا لهيلبار، و X_0 فراغًا جزئيًا مغلقًا منه.

تعريف 4.4.1

يعرف المتمم العمودي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H، بأنه مجموعة كل العناصر من H العمودية على X_0 ، أي أنه المجموعة $X_0^{\perp}$.

نتيجة

- ❖ $X_0^{\perp}$ فراغ جزئي مغلق من H .
- ❖ كل عنصر x من H يكتب بشكل وحيد كالتالي:

$$x = y + z \ / \ y \in X_0, z \in X_0^{\perp}$$

- ❖ $H = X_0 \oplus X_0^{\perp}$ ، عندها نقول أن X_0 و $X_0^{\perp}$، هما التحليل العمودي للفراغ H، ونكتب:

$$y = P_{X_0}x, z = P_{X_0^{\perp}}x$$

حيث P_{X_0} تطبيق الإسقاط على الفراغ X_0، و $P_{X_0^{\perp}}$ تطبيق الإسقاط على الفراغ $X_0^{\perp}$.

قضية 2.4.1

تطبيق الإسقاط P_{X_0} هو تطبيق خطي ومحدود ويحقق:

① $P_{X_0} = P_{X_0}^2$

② $\|P_{X_0}\| \leqslant 1$

③ $\forall x, y \in H \longrightarrow \langle P_{X_0}x, y\rangle = \langle x, P_{X_0}y\rangle$

البرهان [3]

■

6.4.1 الجمع المباشر الجبري والتبولوجي

ليكن X ف.ش.ن و X_1, X_2 فراغين جزئيين من X .

تعريف 5.4.1

يقال أن الفراغ X يكتب بشكل جمع مباشر جبري للفراغين X_1 و X_2، ونكتب: $X = X_1 \dotplus X_2$ إذا تحقق:

$$X_1 \cap X_2 = \{0\}$$

$$\forall x \in X, \exists! x_1 \in X_1, \exists! x_2 \in X_2 \diagdown x = x_1 + x_2$$

عندها يقال أن X_1, X_2، كلًا منهما متممًا جبريًا للآخر بالنسبة للفراغ X .

نتائج

- ❖ المجموع $X = X_1 + X_2$، يكون جمع مباشر جبري، إذا وفقط إذا كان $X_1 \cap X_2 = \{0\}$.
- ❖ كل فراغ جزئي من X يملك على الأقل متمماً جبرياً له بالنسبة للفراغ X .
- ❖ الكتابة $X_1 + X_2$، تقتضي وجود تطبيقي إسقاط P_{x_1}, P_{x_2}، معرفين كالتالي :

$$P_{x_1} : X \longmapsto X_1 \;/\; P_{x_1}(x = x_1 + x_2) = x_1$$

$$P_{x_2} : X \longmapsto X_2 \;/\; P_{x_2}(x = x_1 + x_2) = x_2$$

التطبيقان P_{x_1}, P_{x_2} واضح أنهما خطيان، لكن في الحالة العامة قد يكونا غير مستمرين.

- ❖ إستمرار أحد التطبيقين P_{x_1} أو P_{x_2}، يقتضي إستمرار الأخر ذلك لأن $x = P_{x_1}x + P_{x_2}x$.

تعريف 6.4.1

الجمع المباشرالجبري $X = X_1 + X_2$، يسمى جمع مباشر تبولوجي، إذا وفقط إذا كان على الأقل أحد التطبيقين P_{x_1}, P_{x_2} مستمرا، ونكتب $X = X_1 \oplus X_2$، عندها يقال أن X_1, X_2، كلا منهما متمماً تبولوجياً للأخر بالنسبة للفراغ X .

تعريف 7.4.1

يعرف الجمع المباشر التبولوجي لفرغات هيلبار $H_1, H_2, ..., H_n, ...$، بأنه الفراغ H، حيث:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n$$

الصيغة الأخيرة هي التحليل العمودي للفراغ H، حيث:

$$\xi \in H \longrightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \;/\; \xi_n \in H_n, n \geqslant 1$$

والسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_{H_n}^2$ متقاربة .

5.1 الجملة المتعامدة والمتجانسة والأساس

الجملة المتعامدة والمتجانسة

ليكن X فراغاً شبه هلبيرتي و $A = \{x_i, i \in I\}$ جملة عناصرها من X، (I مجموعة دلائل كيفية)

تعريف 1.5.1

① يقال أن الجملة A متعامدة، إذا كانت متعامدة مثنى مثنى .

② يقال أن الجملة A متعامدة ومتجانسة، إذا كانت متعامدة مثنى مثنى، وتحقق: $\|x_i\| = 1$.

الأساس

ليكن X فراغًا شبه هلبيرتي، و $A = \{x_i, i \in I\}$ جملة متعامدة ومتجانسة فيه .

تعريف 2.5.1

① يقال أن الجملة A كلية في X، إذا كان الفراغ المولد عنها كثيف في X .

② يقال أن الجملة A أعظمية (تامة) في X، إذا لم يوجد عنصر من X يختلف عن الصفر و يعامد كل عناصرها.

تعريف 3.5.1

يعرف الأساس في الفراغ شبه الهلبيرتي، بأنه كل جملة متعامدة ومتجانسة و كلية فيه.

نظرية 1.5.1 ريس فيشر

ليكن H فراغ هيلبار منفصل و $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة ومتجانسة فيه، تكون السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ متقاربة، إذا وفقط إذا كان المجموع $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ منتهي .

في هذه الحالة إذا كان $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ فإن $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle \ , \ n \geqslant 1$

البرهان [9]

■

قضية 1.5.1

ليكن H فراغ هيلبار، من أجل $x \in H$، و $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة ومتجانسة فيه، تكون المساواة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$ (مساواة بارسيفل) محققة، إذا وفقط إذا كانت الجملة $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ تامة .

البرهان [9]

■

6.1 المؤثرات ونظرية الأطياف

1.6.1 المؤثرات الخطية

ليكن $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ فراغين شعاعيين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$، ولتكن D مجموعة غير خالية من X ، $(D \subseteq X)$.

تعريف 1.6.1

إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصرا معينا y من Y، يقال أنه قد عرف مؤثرًا من X في Y ، يرمز له

بالرمز F، ونكتب $y = F(x)$ أو $y = Fx$.

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر F، ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y، حيث $y = F(x)$ و $x \in D(F)$ تسمى مجموعة قيم المؤثر F، ويرمز لها بالرمز $E(F)$، و نكتب:

$$E(F) = \{y \in Y \ / \ y = Fx, x \in D(F)\}$$

- صيغة المؤثر F تكتب كالتالي: $X \supset D(F) \xrightarrow{\text{F}} E(F) \subset Y$

إختصارا نكتب: $F : X \longmapsto Y$

- مجموعة الأزواج (x, Fx) من فراغ الجداء $X \times Y$، حيث $x \in D(F)$ تسمى بيان المؤثر F، ويرمز لها بالرمز Γ_F، ونكتب:

$$\Gamma_F = \{(x, Fx) \ / \ x \in D(F)\} \subset X \times Y$$

- مجموعة أصفار المؤثر F تسمى نواة المؤثر F، ويرمز لها بالرمز $KerF$، ونكتب:

$$KerF = \{x \in D(F) \ / \ Fx = 0\}$$

نتيجة

❖ المجموعاتان $KerF$, $E(F)$ فراغان جزئيان من X, Y على التوالي .

تعريف 2.6.1

المؤثر F من X في Y يقال أنه خطي، إذا تحقق مايلي:

① المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X .

② $\forall x_1, x_2 \in D(F), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \longrightarrow F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha F(x_1) + \beta F(x_2)$.

يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y، بالرمز $L(X,Y)$.

❏ في حالة $X = Y$، إختصاراً نكتب: $L(X,X) = L(X)$.

❏ في حالة $Y = \mathbb{K}$، المجموعة $L(X,\mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية على X، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي، ويرمز لها بالرمز X^*، وتسمى الثنوي الجبري للفراغ X .

2.6.1 المؤثرات الخطية المحدودة

ليكن F مؤثرا خطيا من X في Y .

تعريف 3.6.1

① يقال أن F مستمر في نقطة x_0 من X، إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \|x - x_0\|_X < \delta \longrightarrow \|Fx - Fx_0\|_Y < \varepsilon$$

② يقال أن F محدود على X أو محدود، إذا حول كل مجموعة محدودة في X إلى مجموعة محدودة في Y.
③ يقال أن F محدود على X أو محدود، إذا تحقق:

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in X \longrightarrow \|Fx\|_Y \leqslant \alpha \|x\|_X$$

❑ التعريف 2) يكافئ التعريف 3) .
❑ نرمز لمجموعة المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y، بالرمز $l(X,Y)$، وهي فراغ جزئي من الفراغ $L(X,Y)$.

في حالة $X = Y$، إختصارا نكتب: $l(X,Y) = l(X)$.
في حالة $Y = \mathbb{K}$، المجموعة $l(X,\mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية المحدودة على X، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي محدود، ويرمز لها بالرمز X'، وتسمى الثنوي التبولوجي للفراغ X .

نظرية 1.6.1

إذا كان F من $L(X,Y)$ فإن الإثباتات التالية متكافئة
① F مستمر
② F محدود على كرة الوحدة المغلقة
③ F محدود على سطح كرة الوحدة المغلقة
④ Fمحدود

البرهان [4]

■

نتيجة

❖ إذا كان F من $l(X,Y)$، فإن $KerF$ فراغ جزئي مغلق من X .

تعريف 4.6.1

يعرف نظيم المؤثر F من $l(X,Y)$ بإحدى الصيغ التالية:

① $\|F\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X}$

② $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Fx\|_Y$

③ $\|F\| = \inf\{c > 0 \;/\; \|Fx\|_Y \leqslant c\|x\|_X\}$

④ $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|_X \;=1} \|Fx\|_Y$

3.6.1 المؤثرالعكسي والمؤثر القرين

المؤثر العكسي

ليكن F مؤثر من $L(X,Y)$.

تعريف 5.6.1

يقال أن المؤثر F قابل للقلب ، إذا كانت المعادلة $y = Fx$ تقبل حلًا وحيدًا x من أجل كل $y \in E(F)$،
إذا كان F يقبل القلب فمن أجل كل $y \in E(F)$، يوجد عنصر وحيد $x \in D(F)$ هو حل المعادلة $y = Fx$،
يسمى المؤثر من $E(F)$ في $D(F)$ الذي يرفق بالعنصر y العنصر x مقلوب المؤثر F، ونرمز له بالرمز F^{-1}

قابلية القلب بإستمرار

تعريف 6.6.1

المؤثر F من $L(X,Y)$، يقال أنه قابل للقلب بإستمرار، إذا وجد له مؤثر عكسي معرف ومحدود على كل الفراغ Y، أي $F^{-1} \in l(Y,X)$.

المؤثر القرين

ليكن H_2, H_1 فراغي هيلبار و F مؤثر من $l(H_1, H_2)$.

تعريف 7.6.1

يسمى مؤثرا قرينا للمؤثر F، المؤثر F^* المعرف من H_2 في H_1، كالتالي:
من أجل كل (x, y)، من $H_1 \times H_2$ يكون

$$\langle Fx, y\rangle = \langle x, F^*y\rangle$$

نظرية 2.6.1

إذا كان F من $l(H_1, H_2)$، فإن F^* موجود ووحيد من $l(H_2, H_1)$، ويحقق:

$$\|F\| = \|F^*\|$$

البرهان [4]

■

خواص

إذا كان F, T من و $l(H)$ و α من $\mathbb{K}$، فإن:

- $(F + T)^* = F^* + T^*$
- $(\alpha F)^* = \overline{\alpha} F^*$
- $(F^*)^* = F$
- $I^* = I$
- $(FT)^* = T^* F^*$

المؤثر القرين لنفسه

تعريف 8.6.1

يقال أن المؤثر F قرينا لنفسه إذا إنطبق على قرينه، أي $F = F^*$، عندها يكون:

$$\forall x, y \in H, \langle Fx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle$$

بالإضافة إلى تعريف النظيم (التعريف (2،6،1)) للمؤثر القرين لنفسه، يعرف النظيم كالتالي:

$$\|F\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle Fx, x\rangle|$$

4،6،1 نظرية الأطياف

مفهوم الطيف والحالة

ليكن F مؤثرًا من $L(X)$، حيث X فراغ بناخ مركب $(\mathbb{K} \equiv \mathbb{C})$.

مفهوم الطيف والحالة للمؤثر F له علاقة بقابلية الحل للمعادلة الدالية التالية:

$$Fx - \lambda x = y$$

إختصارا نكتب:

$$F_\lambda x = y \;/\; F_\lambda = F - \lambda I$$

حيث I المؤثر الحيادي من X في نفسه و x مجهول من $D(F)$، و y معطى من X و λ وسيط مركب في حالة $y = 0$ المعادلة تسمى معادلة متجانسة .

تعريف 9.6.1

العدد المركب λ، يقال أنه نقطة نظامية للمؤثر F، إذا كان المؤثر F_λ قابلا للقلب باستمرار، أي $\exists F_\lambda^{-1} \in l(X)$.

يرمز لمجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالرمز $\rho(F)$، وتسمى مجموعة الحالة، ونكتب:

$$\rho(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; \exists F_\lambda^{-1} \in l(X)\}$$

تعريف 10.6.1

يعرف طيف المؤثر F ويرمز له بالرمز $\sigma(F)$، بأنه متمم مجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالنسبة للمستوي المركب، أي: $\sigma(F) = \mathbb{C} \setminus \rho(F)$

ينقسم الطيف إلى ثلاثة أقسام، وهي:

① مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ لا يقبل مؤثرًا عكسيًا (أي مجموعة القيم الذاتية للمؤثر F)، تسمى هذه المجموعة بالطيف النقطي، ويرمز له بالرمز $P_\sigma(F)$، ونكتب:

$$P_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ KerF_\lambda \neq 0\}$$

② مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرًا عكسيًا مجموعة تعريفه، أي المجموعة $E(F_\lambda)$ كثيفة في X، لكنه غير محدود (F_λ^{-1} غير محدود)، تسمى هذه المجموعة بالطيف المستمر، ويرمز له بالرمز $C_\sigma(F)$، ونكتب:

$$C_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \overline{E(F_\lambda)} = X\}$$

③ مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا (محدود أو غير محدود)، مجموعة تعريفه، أي المجموعة $E(F_\lambda)$ ليست كثيفة في X، تسمى هذه المجموعة بالطيف الباقي، ويرمز له بالرمز $R_\sigma(F)$، ونكتب:

$$R_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \overline{E(F_\lambda)} \neq X\}$$

قضية 1.6.1

مجموعة الحالة $\rho(F)$ للمؤثر F مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$.

البرهان [2]

■

نتائج

- ❖ $\sigma(F)$ مجموعة متراصة في $\mathbb{C}$.
- ❖ $\{\forall\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > \|F\|\} \subset \rho(F)$.
- ❖ $\{\forall\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leqslant \|F\|\} \supset \sigma(F)$.

نصف القطر الطيفي

تعريف 11.6.1

يعرف نصف القطر الطيفي للمؤثر F، ويرمز له بالرمز $r_\sigma(F)$، بأنه نصف قطر أصغر دائرة مركزها الصفر وحاوية للطيف، ويعطى بالعلاقة التالية

$$r_\sigma(F) = \lim_{n\to\infty}(\|F^n\|)^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geqslant 1}(\|F^n\|)^{\frac{1}{n}}$$

مؤثر الحالة

تعريف 12.6.1

من أجل كل λ من $\rho(F)$، يرمز للمؤثر F_λ^{-1} بالرمز $R_\lambda(F)$ ويسمى مؤثر الحالة
أسرة المؤثرات $\{R_\lambda(F) \ / \ \lambda \in \rho(F)\}$ تسمى حالة المؤثر F.

دالة المؤثر

ليكن F مؤثرًا من $l(X)$.

معلوم أنه إذا كانت f دالة كثير حدود، أي $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k$، فإن دالة المؤثر $f(F)$، تعرف كالتالي:

$$f(F)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k F^k$$

يمكن تعميم التعريف السابق على الدوال الصحيحة (التحليلية على $\mathbb{C}$)، أي إذا كانت $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k$، فإن:

$$f(F)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k F^k$$

عندها يكون $f(F)\in l(X)$.

ويمكن تعميم التعريف إلى صنف الدوال التحليلية في جوار ما للطيف، هذا الصنف يرمز له بالرمز $A(F)$، تعرف دالة المؤثر F لدوال الصنف $A(F)$، بالصيغة التالية :

$$f(F)=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega} f(\lambda)R_\lambda(F)d\lambda$$

حيث Ω جوار مفتوح للطيف، $\overline{\Omega}=\partial\Omega\cup\Omega$ واقع في نطاق تحليلية f .

طيف المؤثر العكسي

قضية 2.6.1

ليكن المؤثر F من $l(H)$،إذا كان F تقابلا، فإن:

$$\sigma(F^{-1})=\{\frac{1}{\lambda}\ /\ \lambda\in\sigma(F)\}$$

البرهان [4]

■

طيف المؤثر القرين

قضية 3.6.1

ليكن المؤثر F من $l(H)$.

① إذا كان المؤثر F قابلا للقلب باستمرار، فإن المؤثر F^* أيضا قابلا للقلب باستمرار، عندها يكون:

$$(F^*)^{-1}=(F^{-1})^*$$

② $\sigma(F^*)=\{\overline{\lambda}\ /\ \lambda\in\sigma(F)\}$

البرهان [4]

■

7.1 المؤثر المتراص وطيفه

المؤثر المتراص

ليكن X وY فراغين شعاعين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$، و F مؤثر من $L(X,Y)$،

تعريف 1.7.1

يقال أن المؤثر F متراص، إذا حول كل مجموعة محدودة في X إلى مجموعة شبه متراصة في Y .

تعريف 2.7.1

يقال أن المؤثر F متراص، إذا كان

① المؤثر F يحول كرة الوحدة المغلقة في X إلى مجموعة شبه متراصة في Y .

② المؤثر F يحول كل متتالية غير منتهية و محدودة في X، إلى متتالية في Y يمكن إستخراج منها متتالية أساسية .

❑ يرمز لمجموعة المؤثرات المتراصة من X في Y بالرمز $l_\infty(X,Y)$

قضية 1.7.1

① $\forall F,T \in l_\infty(X,Y), \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K} \Longrightarrow \alpha F+\beta T \in l_\infty(X,Y)$

② $l_\infty(X,Y) \subset l(X,Y)$

③ $l_\infty(X,Y) = \overline{l_\infty(X,Y)}$

البرهان [4]

■

نتيجة

❖ $l_\infty(X,Y)$ فراغ شعاعي نظيمي مغلق من $l(X,Y)$.

❖ إذا كان Y بناخ، يكون $l_\infty(X,Y)$ بناخ.

قضية 2.7.1

ليكن F مؤثر من $l(X,Y)$ و T مؤثر من $l(Y,Z)$، حيث Z ف.ش.ن.

إذا كان أحد المؤثرين F أو T متراصا، فإن المؤثر TF متراصا أيضا .

البرهان [4]

نفرض أن T متراص، و B كرة الوحدة المغلقة في X

من الواضح أن $F(B)$ محدودة، بما أن T متراص، فإن $T(F(B))$ شبه متراصة في Z، ومنه TF متراص

نفرض أن F متراص، إذن $F(B)$ شبه متراصة، بما أن T محدود، فإن $T(F(B))$ شبه متراصة في Z،

هذا يعني أن TF متراص . ■

نظرية 1.7.1 (شودر)

المؤثر F من $l(X,Y)$، حيث (Y,X بناخ) يكون تراصًا، إذا وفقط إذا كان قرينه F^* متراصا

البرهان [12]

■

طيف المؤثر المتراص

نظرية 2.7.1

إذا كان المؤثر F من $l_\infty(X)$، حيث (X بناخ غير منته)، فإن:

① $0 \in \sigma(F)$

② $\sigma(F) \setminus \{0\} \subset P_\sigma(F)$

③ $\sigma(F)$ مجموعة على الأكثر قابلة للعد، إذا كانت غير منتهية، فإنها تملك نقطة تراكم واحدة وهي الصفر.

البرهان [4]

■

نتيجة

① نقاط المجموعة $\sigma(F) \setminus \{0\}$ يمكن ترتيبها حسب تناقص طويلتها

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant .... \geqslant |\lambda_n| \geqslant .... \geqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} |\lambda_n| = 0$$

② كل نقاط المجموعة $\sigma(F) \setminus \{0\}$ نقاط معزولة .

③ الصفر قد يكون وقد لا يكون قيمة ذاتية .

قضية 3.7.1

كل مؤثر F $(F \neq 0)$ متراص وقرين لنفسه، يملك على الأقل قيمة ذاتية مخالفة لصفر.

البرهان [4]

■

الفصل

2

التمديد التام لمؤثر فولتيرا

1.2 الفراغ الثابت و الفرغ الذاتي و الفراغ الجذري

ليكن F مؤثر من $l(H)$، حيث H فراغ هيلبار .

تعريف 1.1.2

الفراغ الجزئي M، يقال أنه ثابت بالنسبة للمؤثرF، إذا كان من أجل كل عنصر f من M يكون Ff من M، عندها نكتب: $F(M) \subseteq M$

نتيجة

ليكن P مؤثر إسقاط كيفي $(P = P^2)$.

❖ يكون الفراغ الجزئي PH ثابت بالنسبة للمؤثر F،إذا وفقط إذا:

$$PFP = FP \tag{1.2}$$

❖ يكون الفراغ الجزئي QH حيث $(Q = P - I)$ ثابت بالنسبة للمؤثرF،إذا وفقط إذا:

$$PF = FP \tag{2.2}$$

إذا كان F قرينًا لنفسه و P إسقاطًا عموديًا، فإن الشرطين (1.2)و(2.2) متكافئان .

❖ إذا كان M فراغًا جزئيًا ثابتًا بالنسبة للمؤثر F، فإن المتمم العمودي $M^{\perp} = H \ominus M$ يكون فراغًا جزئيًا ثابتًا بالنسبة للمؤثر F^*

تعريف 2.1.2

العدد λ من $\mathbb{C}$، يقال أنه قيمة ذاتية للمؤثر F، إذا كان للمعادلة $Ff = \lambda f$ حلا غير معدوم، عندها الحل غير المعدوم يسمى الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F .

تعريف 3.1.2

يعرف الفراغ الجزئي الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F، بأنه الفراغ المولد بالأشعة الذاتية مضافًا إليه الشعاع الصفري، ويرمز له بالرمز V_λ .

$$V_\lambda = Ker(F - \lambda I)$$

بعد الفراغ V_λ يسمى التضعيف الذاتي للقيمة الذاتية λ .

تعريف 4.1.2

العنصر f $(f \neq 0)$ من H يسمى شعاعًا جذريًا للمؤثر F، مرفقا بالقيمة الذاتية λ، إذا وجد عدد طبيعي n من أجله يكون:

$$(F - \lambda I)^n f = 0 \tag{3.2}$$

أصغر الأعداد n الذي من أجله الصيغة (3.2) محققة، يسمى تضاعف الشعاع الجذري f .

تعريف 5.1.2

يعرف الفراغ الجزئي الجذري المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F، بأنه الفراغ المولد بالأشعة الجذرية مضافا إليه الشعاع الصفري، ويرمز له بالرمز M_λ .

$$M_\lambda = \cup_{n=1}^{\infty} Ker(F - \lambda I)^n$$

بعد الفراغ M_λ يسمى التضعيف الجبري للقيمة الذاتية λ .

2.2 المسقط الطيفي (مسقط ريس)

ليكن F من $l(H)$ طيفه $\sigma(F)$ مكون من مجموعتين غير خاليتين منفصلتين ومغلقتين σ_1, σ_2، تسمى كل من σ_1, σ_2 مجموعة معزولة من الطيف .

ليكن V_1, V_2 جوارين منفصلين مفتوحين للمجموعتين σ_1, σ_2 على التوالي، حدودهما مكونة من عدد منتهي من منحنيات جوردان القابلة لتقويم .

نعرف دالة h كالتالي:

$$h(\lambda) = \begin{cases} 1 \ ; & \lambda \in V_1 \\ 0 \ ; & \lambda \in V_2 \end{cases}$$

دالة h تحليلية ومنه نكتب:

$$h(F) = \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial V_1} R_\lambda(F) d\lambda \tag{4.2}$$

تعريف 1.2.2

يعرف المسقط الطيفي أو مسقط ريس للمؤثر F، بالنسبة للجزء المعزول σ_1 من الطيف $\sigma(F)$، بأنه المؤثر $h(F)$ المعرف في الصيغة (4.2)، ويرمز له بالرمز P_{σ_1} .

$$P_{\sigma_1} = \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial V_1} R_\lambda(F) d\lambda$$

نتيجة

إذا كانت λ_0 قيمة ذاتية معزولة من الطيف $\sigma(F)$، فإن المؤثر المعرف في الصيغة التالية :

$$P_{\lambda_0} = \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} R_\lambda(F) d\lambda$$

هو مسقط ريس المرفق للنقطة λ_0، حيث $R_\lambda(F)$ هو مؤثر الحالة و ε هو نصف قطر الدائرة المحيطة بالنقطة λ_0 والتي تقع في مجموعة الحالة $\rho(F)$.

قضية 1.2.2

المؤثر P_{σ_1} هو مؤثر إسقاط، أي:

$$P_{\sigma_1}^2 = P_{\sigma_1}$$

البرهان [4]

ليكن Γ_1 منحنى جوردان مغلق قابل للتقويم حاوي σ_1 ويقع داخل V_1

$$P_{\sigma_1}^2 = \left(-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial V_1} R_\lambda(F) d\lambda\right)\left(-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_1} R_\xi(F) d\xi\right) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{\partial V_1}\oint\limits_{\Gamma_1} R_\lambda(F) R_\xi(F) d\xi d\lambda$$

بما أن $\lambda_1, \xi \in \rho(F)$، فإن

$$P_{\sigma_1}^2 = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{\partial V_1}\oint\limits_{\Gamma_1} \frac{R_\lambda(F) - R_\xi(F)}{\lambda - \xi} d\xi d\lambda$$

$$P_{\sigma_1}^2 = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{\partial V_1}\oint\limits_{\Gamma_1} \frac{R_\lambda(F)}{\lambda - \xi} d\xi d\lambda + \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{\partial V_1}\oint\limits_{\Gamma_1} \frac{R_\xi(F)}{\xi - \lambda} d\xi d\lambda$$

بما أن

$$\oint\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{\xi-\lambda} d\lambda = -2\pi i \quad \text{و} \quad \oint\limits_{\partial V_1} \frac{1}{\xi-\lambda} d\xi = 0$$

فإن

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{\partial V_1}\oint\limits_{\Gamma_1} \frac{R_\lambda(F)}{\lambda - \xi} d\xi d\lambda = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{\partial V_1} R_\lambda(F) \oint\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{\lambda-\xi} d\xi d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial V_1} R_\lambda(F) d\lambda = P_{\sigma_1}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\partial V_1} \oint_{\Gamma_1} \frac{R_\xi(F)}{\xi-\lambda} d\xi d\lambda = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma_1} R_\xi(F) \oint_{\partial V_1} \frac{1}{\xi-\lambda} d\lambda d\xi = 0$$

ومنه

$$P_{\sigma_1}^2 = P_{\sigma_1}$$

■

3.2 النقط الناظيمية للمؤثر المحدود

تعريف 1.3.2

بعد المؤثر F هو العدد $r(F)$ ويساوي بعد الفراغ الجزئي $\overline{E(F)}$

نتيجة

يقال أن المؤثر بعده منته، إذا كان $r(F) < \infty$

تعريف 2.3.2

القيمة الذاتية λ_0 للمؤثر F تسمى قيمة ذاتية ناظيمية (عدد ذاتي ناظيمي) للمؤثر F، إذا تحقق:

① التضعيف الجبري للعدد λ_0 منته .

② الفراغ H يحلل بشكل وحيد كالتالي :

$$H = X_{\lambda_0} \oplus Y_{\lambda_0}$$

حيث X_{λ_0} الفراغ الجذري للمؤثر F المرفق بالقيمة الذاتية λ_0، و Y_{λ_0} فراغ ثابت بالنسبة للمؤثر F يكون عليه المؤثر $F - \lambda_0 I$ قابلاً للقلب باستمرار .

نظرية 1.3.2

النقطة λ_0 من طيف المؤثر F تكون قيمة ذاتية ناظيمية، إذا وفقط إذا كانت تمثل نقطة معزولة من الطيف ومسقط ريس بالنسبة لها، أي المؤثر

$$P_{\lambda_0} = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta} R_\lambda(F) d\lambda$$

بعده منته، حيث δ هو نصف قطر دائرة مركزها λ_0 واقعة في $\rho(F)$.

البرهان [5]

(الاستلزام الأول): نفرض أن λ_0 قيمة ذاتية ناظيمية للمؤثر F، نرمز بالرمز F_2, F_1 إلى إقتصار المؤثر F على $Y_{\lambda_0}, X_{\lambda_0}$ على التوالي، إذا كان $\dim X_{\lambda_0} = k$، فإن:

$$(F_1 - \lambda_0 I)^k = 0$$

ليكن n أصغر عدد صحيح بحيث:

$$(F_1-\lambda_0 I)^n=0$$

ومنه بوضع $T_1=F_1-\lambda_0 I$ يكون

$$-(\lambda-\lambda_0)^n I=T_1^n-(\lambda-\lambda_0)^n I$$

$$=(F_1-\lambda I)[(\lambda-\lambda_0)^{n-1}I+(\lambda-\lambda_0)^{n-2}T_1+......+T_1^{n-1}]$$

وبالتالي

$$-(F_1-\lambda I)^{-1}=(\lambda-\lambda_0)^{-1}I+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda-\lambda_0)^{-j-1}T_1^j$$

من جهة أخرى المؤثر $F_2-\lambda_0 I$ قابل للقلب بإستمرار على الفراغ Y_{λ_0}، و بالتالي من أجل كل λ حيث:

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{|(F_2-\lambda_0 I)^{-1}|}$$

يوجد مؤثر الحالة

$$(F_2-\lambda I)^{-1}=R_{\lambda_0}(F_2)+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}^2(F_2)+......+(\lambda-\lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}(F_2)+....$$

ومنه نستنتج أن كل النقاط λ، حيث $0<|\lambda-\lambda_0|<|R_{\lambda_0}(F_2)|^{-1}$ تكون من $\rho(F)$، عندها مؤثر الحالة في هذه النقاط تحدده العبارة

$$\begin{aligned}R(\lambda)=(F-\lambda I)^{-1}&=-((\lambda-\lambda_0)^{-n}T_1^{n-1}+...+(\lambda-\lambda_0)^{-2}T_1\\&+(\lambda-\lambda_0)^{-1}I)P+\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^i R_{\lambda_0}^{i-1}(F_2)(I-P)\end{aligned}\tag{5.2}$$

حيث P الإسقاط على X_{λ_0} الموازي للفراغ Y_{λ_0}، أي

$$PH=X_{\lambda_0},PY_{\lambda_0}=0$$

نكامل العبارة (5.2) نجد

$$P=P_{\lambda_0}=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta}R(\lambda)d\lambda$$

(الاستلزام العكسي): نفرض أن λ_0 نقطة معزولة من الطيف للمؤثر F، حيث مؤثر الإسقاط P_{λ_0} المرفق بها بعده منته.

الفراغ H يمكن كتابته على شكل جمع مباشر للفراغات الجزئية $P_{\lambda_0}H,(I-P_{\lambda_0})H$، التي هي ثابتة بالنسبة للمؤثر F

$$H=P_{\lambda_0}H\oplus(I-P_{\lambda_0})H$$

إقتصار F على الفراغ $P_{\lambda_0}H$ هو مؤثر لديه نقطة طيفية وحيدة $\lambda = \lambda_0$، ومنه يكون:

$$(F - \lambda_0 I)^k P_{\lambda_0}H = 0, (k = \dim P_{\lambda_0}H) \tag{6.2}$$

λ_0 تعتبر نقطة نظامية لإقتصار F على الفراغ $(I - P_{\lambda_0})H$، ونستنتج من (6.2) أن $P_{\lambda_0}H$ يكون هو الفراغ الجذري للمؤثر F المرفق بالقيمة λ_0، بما أن $H = P_{\lambda_0}H \oplus (I - P_{\lambda_0})H$، فإن λ_0 تكون قيمة ذاتية ناظيمية . ■

4.2 المؤثر التام والمؤثر الدوري ومؤثر فولتيرا

ليكن F مؤثرا من $l(X)$، حيث X فراغ بناخ .

1.4.2 المؤثر التام

تعريف 1.4.2

يقال عن F أنه مؤثر تام، إذا كانت جملة فراغاته الجزئية الجذرية المرفقة بقيمه الذاتية غير الصفرية تامة

2.4.2 المؤثر الدوري

تعريف 2.4.2

يقال عن F أنه مؤثر دوري، إذا كانت الجملة $\{F^n f\}_{n=1}^{\infty}$ تامة في X، ويسمى f شعاع دوري للمؤثر F .

3.4.2 مؤثر فولتيرا

تعريف 3.4.2

يقال عن F أنه مؤثر فولتيرا، إذا كان متراص وطيفه متكون من نقطة واحدة وهي الصفر .

قضية 1.4.2

إذا كان F مؤثر فولتيرا، فإنه لا يكون قرينا لنفسه .

البرهان

من برهان القضية (3.7.1) ■

5.2 التمديد التام لمؤثر فولتيرا

تعريف 1.5.2

المؤثر $F : Y \to Y$ يسمى تمديد للمؤثر $T : X \to X$، إذا كان X فراغًا جزئيًا من Y و $FX \subset X$, $F|_X = T$.

قضية 1.5.2

إذا كانت Φ دالة متزايدة تماما معرفة على المجال $]0,\infty[$، حيث $\lim\limits_{r\to\infty}\Phi(r)=\infty$، وليكن E_Φ فراغ كل الدوال الصحيحة f، التي تحقق :

$$f(0)=0 \quad \text{و} \quad |f(z)|\leqslant C_f\Phi(|z|)$$

من أجل كل عدد مركب z و C_f(ثابت متعلق بالدالة f).

فإنه يوجد متتاليتان رتيبتان $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$و $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ من الأعداد المركبة، $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|^2<\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\infty$، حيث:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|^2|f(z_n)|^2<\infty \Rightarrow f\equiv 0 \quad \text{و} \quad f\in E_\Phi$$

البرهان [14]

ليكن $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتاليتين رتيبتين من الأعداد الموجبة، وليكن $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\infty$

حيث العددان $(n\geqslant 1)$ $2\pi r_n$ و $\frac{1}{\xi_n}$ صحيحان موجبان.

نقسم الدوائر $\{z:|z|=r_n\}$ في المستوي المركب عند النقاط $z_1^{(n)},z_2^{(n)},....,z_{P_n}^{(n)}$ إلى $P_n=\frac{2\pi r_n}{\xi_n}$ أجزاءًا متساويةً.

مجموعة كل النقاط $z_1^{(n)},z_2^{(n)},....,z_{P_n}^{(n)},(n\geqslant 1)$ تشكل متتالية $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ مرتبة حسب تزايد الطويلة $|z_k|$ و تزايد العمدة على كل دائرة .

إذا $|z_k|=r_n$ نعرف المتتالية $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ بالمعادلة $\gamma_k=\xi_n$، أي تكون حدودها كالتالي:

$$\gamma_1=\xi_1,...,\gamma_{p_1}=\xi_1,\gamma_{p_1+1}=\xi_2,...,\gamma_{p_2}=\xi_2,....$$

الأعداد $(n\geqslant 1)$, ξ_n يمكن إختيارها صغيرة جدًا، نشكل المعادلة التالية:

$$\sum_{i=1}^{P_n}\xi_n|f(z_i^{(n)})|^2-\int\limits_{|z|=r_n}|f(z)|^2|dz|=\circ(1) \qquad (7.2)$$

لما $n\to\infty$ من أجل كل f $(f\in E_\Phi)$

لدينا التقديرات $\triangle_i$، هوالقوس من الدائرة الذي يربط بين النقطتين $z_{i+1}^{(n)},z_i^{(n)}$.

$$|\sum_{i=1}^{P_n}\xi_n|f(z_i^{(n)})|^2-\int_{|z|=r_n}|f(z)|^2|dz||\leqslant\sum_{i=1}^{P_n}|\int_{\Delta_i}(|f(z_i^{(n)})|^2-|f(z)|^2)dz|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{P_n}\xi_n.\max_{z\in\Delta_i}||f(z_i^{(n)})|^2-|f(z)|^2|\leqslant 2C_f\Phi(r_n).\sum_{i=1}^{P_n}\xi_n.\max_{z\in\Delta_i}|f(z_i^{(n)})-f(z)|$$
$$\leqslant 2C_f\Phi(r_n).\sum_{i=1}^{P_n}\xi_nC_f\Phi(r_n+1)(r_n+1)\xi_n=2C_f^2\Phi(r_n)\Phi(r_n+1)(r_n+1)2\pi r_n\xi_n$$

وبالتالي (7.2) تتحقق إذا كان

$$\Phi^2(r_n+1)(r_n+1)^2\xi_n=\circ(1),\ n\to\infty$$

بإستعمال (7.2) نحصل على

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^2|f(z_k)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\sum_{i=1}^{P_n}\xi_n|f(z_i^{(n)})|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(\int_{|z|=r_n}|f(z)|^2|dz|=\circ(1))$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(r_n\int_0^{2\pi}|f(r_ne^{i\Theta})|^2d\Theta+\circ(1))\geqslant K.\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nr_n^3$$

لأنّ

$$\int_0^{2\pi}|f(r_ne^{i\Theta})|^2d\Theta=r_n^2\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(r_ne^{i\Theta})}{r_ne^{i\Theta}}\right|^2d\Theta$$

والتكامل $\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(r_ne^{i\Theta})}{r_ne^{i\Theta}}\right|^2d\Theta$ غير متزايد لما $r_n\to\infty$ (نعتبر أن $f\neq 0$).

وعليه نكون برهنا القضية، إذا وجدنا متتاليتين $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$،يحققان :

① $\lim_{n\to\infty}r_n=\infty$

② $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nr_n<\infty$

③ $\Phi^2(r_n+1)(r_n+1)^2\xi_n=\circ(1),\ n\to\infty$

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nr_n^3=\infty$

نكتب الشرط ③ في الشكل $\xi_n=\frac{\delta_n}{r_n^2\Phi^2(r_n+1)}$ ، حيث $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$

بوضع $\psi=\Phi_0^{-1},\Phi_0(r)=r\Phi^2(r+1),\ (r\geqslant 0)$ و $x_n=\Phi_0(r_n),\ (n\geqslant 1)$ يمكن إعادة كتابة الشروط الأربعة كالتالي :

① $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n}{x_n}<\infty$

③ $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$

④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\delta_n \psi^2(x_n)}{x_n} = \infty$

من الواضح أنه يكفي إيجاد متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$، بحيث:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} < \infty \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi^2(x_n)}{x_n} = \infty$$

فعلا إذا فرضنا أن مثل هذه المتتالية غير موجود، فإن من تقارب السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x_n} < \infty$ نستنتج أن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\psi(x_n)}{x_n} < \infty$ (لأن الحد العام متناقص)

$$\frac{\psi(x_n)}{x_n} = \frac{r_n}{\Phi_0(r_n)} = \frac{r_n}{r_n \Phi^2(r_n+1)} = \frac{1}{\Phi^2(r_n+1)}$$

■

نظرية 1.5.2

إذا كان X فراغ بناخ قابل للفصل و T مؤثر فولتيرا من X في X، فإنه يوجد فراغ Y و مؤثر F من Y في Y، حيث:

① $H,\ Y = H \oplus X$ فراغ هيلبار

② $FX \subset X, F|_X = T$

③ F مؤثر تام، $F \in l_\infty(Y)$

④ $\bigcap\limits_{0 \neq \lambda \in \sigma(F)} (I - P_\lambda) Y = X$ ، حيث P_λ هو المسقط الطيفي المرفق للقيمة الذاتية λ .

البرهان [14]

ليكن $Y = H \oplus X$ و H فراغ هيلبار بعده غير منتهي، و $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساس متعامد ومتجانسة في H .

يتم البرهان حسب حالتين:

الحالة الأولى: لما T مؤثر فولتيرا دوري

نبحث عن المؤثر F والشروط المطلوبة في الشكل التالي:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, "A"'] \arrow[drr, "B"] & \oplus & X \arrow[d, "T"] \\ H & \oplus & X \end{tikzcd}$$

حيث $F|_X = T$ ، $P_H F|_H = A$ و $P_X F|_H = B$، P_H و P_X هما الإسقاط من الفراغ Y على الفراغين H و X على الترتيب.

نعرف المؤثر A بالمعادلة $Ae_n = \lambda_n e_n \ , \ n = 1, 2, ...$، حيث :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0 \tag{8.2}$$

يكون المؤثر F مؤثرًا تامًا مع تحقق الشروط ② و ④، إذا تحققت الشروط التالية:

① $F\phi_n = \lambda_n \phi_n \ , \ n \geqslant 1$

② $\phi_n = e_n + f_n \ , \ f_n \in X \ , \ n \geqslant 1$

③ الجملة $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ تامة في Y

من الشرط ① و ② يكون

$$F\phi_n = \lambda_n \phi_n \ , \ n \geqslant 1$$

$$F(e_n + f_n) = \lambda_n(e_n + f_n) \ , \ n \geqslant 1$$

$$Fe_n + Tf_n = \lambda_n e_n + \lambda_n f_n \ , \ n \geqslant 1$$

$$Ae_n + Be_n + Tf_n = \lambda_n e_n + \lambda_n f_n \ , \ n \geqslant 1$$

$$\lambda_n e_n + Be_n + Tf_n = \lambda_n e_n + \lambda_n f_n \ , \ n \geqslant 1$$

أي:

$$Be_n = (\lambda_n I - T)f_n \ , \ n \geqslant 1$$

وبضع $f_n = \gamma_n(\lambda_n I - T)^{-1} g \ , \ (n \geqslant 1)$، حيث g شعاع دوري للمؤثر T و $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أعداد مركبة، يكون $Be_n = \gamma_n g$.

نستنتج شرط الإستمرارية للمؤثر B من العبارة

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 < \infty \tag{9.2}$$

لأن

$$\|B\|^2 = (\sup_{\|x\|_H \leqslant 1} \|Bx\|_X)^2 = (\sup_{\|x\|_H \leqslant 1} \|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_n g\|_X)^2 \leqslant C. \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 < \infty$$

من شرط التعامد نقوم بكتابة شرط لكي تكون الجملة $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ تامة.

$x\perp\phi_n \ , \ (n \geqslant 1)$, $x \in Y^*$, $x = x_0 + h$ الكتابة تكون وحيدة، حيث $x_0 \in H$, $h \in X^*$ وشرط التعامد يتحول إلى المعادلة : $\langle x_0, e_n\rangle = -\langle h, f_n\rangle \ , \ (n \geqslant 1)$

$$Y^* = H^* \oplus X^* = H \oplus X^* = H^\perp \oplus X^\perp \backslash H = X^\perp, X^* = H^\perp$$

$$x\perp\phi_n \Leftrightarrow \langle x, \phi_n\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x_0 + h, e_n + f_n\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x_0, e_n\rangle + \langle x_0, f_n\rangle +$$

$$\langle h, e_n\rangle + \langle h, f_n\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x_0, e_n\rangle = -\langle h, f_n\rangle$$

إنّ $x=0$ إذا وفقط إذا

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle h,f_n\rangle|^2=\infty \quad (h\in X^*\ ,\ h\neq 0 \text{ من أجل}) \tag{10.2}$$

$[\Rightarrow]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle h,f_n\rangle|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x_0,e_n\rangle|^2=\|x_0\|^2 (\text{مساوات بارسيفل})$$

نفرض أن $\|x_0\|<\infty$

إذا كان $\|x_0\|=0$، فإن: $x=h\neq 0$

إذا كان $\|x_0\|=C$، فإن: $x=h+x_0\neq 0$

ومنه

$$x=0\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|\langle h,f_n\rangle|^2=\infty$$

$[\Leftarrow]$

إذا كان $x\neq 0$ فإن: $x_0=x-h\neq 0$

من أجل كل $x_0\in H$

x_0 يكتب في الشكل $x_0=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n, (n\geqslant 1)$، حيث $\alpha_n=\langle x_0,e_n\rangle, (n\geqslant 1)$ حسب نظرية ريس فيشر(1.5.1) $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x_0,e_n\rangle|^2<\infty$ ومنه

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle h,f_n\rangle|^2=\infty\Rightarrow x=0$$

وهكذا من أجل إثبات وجود المؤثر F ننشئ المتتاليات $\{f_n\}_{n=1}^{\infty},\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty},\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ مع تحقق الشروط(8.2)، (9.2) و(10.2).

نضع $R_{\frac{1}{z}}(T)=(\frac{1}{z}I-T)^{-1}$، حيث z عدد مركب و $\Phi(r)=\max_{|z|=r}\|R_{\frac{1}{z}}(T)\|$، و الدالة F_h، حيث: $F_h(z)=\langle h,R_{\frac{1}{z}}(T)g\rangle$ ، واضح أنها دالة صحيحة وتحقق:

$$F_h(0)=\lim_{z\to 0}\langle h,R_{\frac{1}{z}}(T)g\rangle=\langle h,\lim_{z\to 0}R_{\frac{1}{z}}(T)g\rangle=0$$

$$|F_h(z)|=|\langle h,R_{\frac{1}{z}}(T)g\rangle|\leqslant C.\max_{|z|}\|R_{\frac{1}{z}}(T)\|=C.\Phi(|z|)$$

ومنه F_h تنتمي إلى الفراغ E_Φ، المعرف في القضية (1.5.2)، وعليه يوجد متتاليتين $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث: $\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|^2<\infty$, $\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$ و

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|^2|F_h(z_n)|^2<\infty\Rightarrow F_h=0 \tag{11.2}$$

بما أن g شعاع دوري فإن المعادلتين $F_h = 0$ و $h = 0$ متكافئتان .

بوضع $(n \geqslant 1)$, $\lambda_n = \frac{1}{z_n}$ ، يكون $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

بإستخدام تعريف المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ يمكن كتابة الشرط (10.2) في الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 |\langle h, (\lambda_n I - T)^{-1} g\rangle|^2 < \infty \Rightarrow h = 0 \ , \ h \in X^*$$

المؤثر F تام، لأن جملة فراغاته الجذرية المرفقة بقيمه الذاتية غير الصفرية، تكون متولدة عن عناصر الجملة $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$، وبالتالي تكون تامة.

الحالة الثانية: لما T مؤثر فولتيرا كيفي

نختار الجملة $\{g_j\}_{j\in J}$ تامة في X، حيث J مجموعة دلائل على الأكثر قابلة للعد (لتكن متتالية الأعداد الطبيعية أو جزءًا منها)، نقسم مجموعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعات جزئية غير منتهية $N_j, (j \in J)$.

نرمز بالرمز $\mathfrak{L}(e_k^{(j)})_{k\in N_j}$ للغلاف الخطي المغلق من الأشعة $\{e_k^{(j)}\}_{k\in N_j}$ و g_j شعاع من X، ننشئ على إثر ما سبق المؤثرين A_j و B_j مع المتتاليتين $\{\lambda_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\gamma_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ ، بحيث يتحقق الشرطين (8.2)، (9.2)، وينتج من المتراجحة في الشرط (11.2)، أن $F_h(z) = \langle h, R_{\frac{1}{z}}(T) g_j\rangle \equiv 0$، أي :

$$h \perp T^n g_j \ , \ n \geqslant 0 \tag{12.2}$$

دون فقدان العمومية، يمكننا إعتبار الشرطين التاليين:

$$\sup_n |\lambda_n^{(j)}| < \frac{1}{j} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n^{(j)}|^2 \leqslant 2^{-j} \ , \ j \in J$$

بوضع $A = \sum_{j\in J} \oplus A_j$, $B = \sum_{j\in J} \oplus B_j$، يكون A و B مؤثرين متراصين، وشرط تمام الجملة $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (التي نحصل عليها من إتحاد الجمل $(j \in J)$, $\{\phi_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$) ينتج من (12.2) وتمام الجملة $\{g_j\}_{j\in J}$،ذلك لأن الإستلزام

$$\sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n^{(j)}|^2 |\langle h, (\lambda_n^{(j)} I - T)^{-1} g_j\rangle|^2 < \infty \Rightarrow h = 0 \ , \ h \in X^*$$

يكون محقق. ومنه المؤثر F يكتب كالتالي:

$$Fx = \begin{cases} Tx & , x \in X \\ (A+B)x & , x \in H \end{cases}$$

$$Fx = \begin{cases} Tx & , x \in X \\ (A+B)\sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(j)} e_n^{(j)} & , x \in H \end{cases}$$

$$Fx = \begin{cases} Tx & , x \in X \\ \sum_{j\in J}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^{(j)}\lambda_n^{(j)}e_n^{(j)} + \gamma_n^{(j)}g_j) & , x \in H \end{cases}$$

■

6.2 تطبيق حول التمديد التام لمؤثر فولتيرا

ليكن الفراغ l^2 فراغ المتتاليات $(x_n)_{n\geqslant 1}$، حيث:

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \ / \ x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty\}$$

مزود بالنظيم $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}$، وليكن X فراغًا جزئيًا مغلقًا من l^2 $(X \subsetneq l^2)$ ، و T مؤثرًا خطيًا من X في نفسه

$$Tx = (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, ..., \frac{x_n}{2^n}, ...) \ / \ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

نبرهن أن المؤثر T مؤثر متراص

لتبين أن T متراص، نبين أن صورة كرة الوحدة المغلقة، أي المجموعة

$$\Gamma = \{y = Tx \ / \ \|x\|_2 \leqslant 1\}$$

شبه متراصة، يكفي أن نبين أنها محدودة كليا

لتكن y من Γ، إذن

$$y = (y_1, y_1, y_3, ..., y_n, ...) = (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, ..., \frac{x_n}{2^n}, ...)$$

بما أن $\|x\|_2 \leqslant 1$، فإن $(n \geqslant 1)$, $|x_n| \leqslant 1$، وبالتالي

$$|y_1| \leqslant 1, \quad |y_2| \leqslant \frac{1}{2}, \quad |y_3| \leqslant \frac{1}{2^2}, ..., |y_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}........$$

ليكن $\varepsilon > 0$، نختار n، بحيث $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$، نرفق بكل عنصر $y = (y_1, y_1, y_3, ..., y_n, ...)$، العنصر $y^* = (y_1, y_1, y_3, ..., y_n, 0, 0, ...)$ من نفس المجموعة، عندئذ يكون

$$d(y, y^*) = \|y - y^*\|_2 = (\sum_{k=n+1}^{\infty}|y_k|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{4^k})^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

ومنه المجموعة Γ^* المؤلفة من العناصر من الشكل y^* المنتمية إلى المجموعة Γ، تكون مجموعة محدودة كليًا(لأنها مجموعة محدودة في فضاء بعده n) ، ومنه Γ^* تشكل$-\varepsilon$شبكة منتهية للمجموعة Γ، إذن Γ تكون محدودة كليا، ومنه تكون شبه متراصة، وبالتالي المؤثر T متراص .

نبرهن أن المؤثر T مؤثر فواتيرا

نحسب نصف القطر الطيفي $r_\sigma(T)$ $\left(r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}(\|T^n\|_2)^{\frac{1}{n}}\right)$

لاحظ أن:

$$Tx=(0,\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{2^2},....,\frac{x_n}{2^n},\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}},.....)$$

$$T^2x=(0,0,\frac{x_1}{2^{1+2}},....,\frac{x_n}{2^{2n+1}},\frac{x_{n+1}}{2^{2(n+1)+1}},.....)$$

$$T^nx=(0,0,0,....,\frac{x_1}{2^{1+2+...+n}},\frac{x_2}{2^{1+2+...+(n+1)}},.....)$$

$$T^nx=(0,0,0,....,\frac{x_1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}},\frac{x_2}{2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}},.....)$$

$$\|T^nx\|_2=(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}\|x\|_2$$

إذن

$$\|T^n\|\leqslant\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}\qquad(13.2)$$

من جهة أخرى بأخذ $x_0=(1,0,0,.........)$، يكون

$$\|T^n\|\geqslant\frac{\|T^nx_0\|_2}{\|x_0\|_2}=\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}\qquad(14.2)$$

من (13.2) و (14.2) نستنتج أن $\|T^n\|=\dfrac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

$$r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}(\|T^n\|_2)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{(n+1)}{2}}}=0$$

ينتج أن $\sigma(T)=\{0\}$، بما أن T متراص وطيفه مكون من نقطة واحدة وهي الصفر، إذن هو مؤثر فولتيرا، بتطبيق النظرية (1.5.2)، يوجد فراغ Y ومؤثر F معرف من Y في نفسه، بحيث يكون $Y=X^\perp\oplus X=l^2$ و $F|_X=T$، والفراغ الجزئي $X^\perp$ مزود بالجداء السلمي $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n.\overline{y}_n$، فراغ هلبار بعده غير منته، الجملة $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$، حيث

$$e_1=(1,0,0,...)\ ,\ e_2=(0,1,0,...)\ ,...\ ,\ e_n=(0,0,..,1,0,...)\ ,....$$

تشكل أساس متعامد ومتجانس له

بوضع

$$P_{X^\perp}F|_{X^\perp}=A \quad \text{و} \quad P_XF|_{X^\perp}=B$$

حيث $P_{X^\perp}$ و P_X هما الإسقاط من Y على الفرغين $X^\perp$ و X على الترتيب، يكون A معرف من $X^\perp$ في نفسه، و B معرف من $X^\perp$ في X.

نعرف المؤثر A بالمعادلة

$$Ae_n = \lambda_n e_n \ , \ (n \geqslant 1)$$

حيث $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أعداد مركبة $(\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0)$
في حالة T مؤثر دوري، نعرف المؤثر B كالتالي

$$Be_n = \gamma_n g \ , \ (n \geqslant 1)$$

حيث $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أعداد مركبة، تحقق $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 < \infty$ ، وg شعاع دوري للمؤثر T، المؤثران B, A يكونان متراصان
ومنه المؤثر F يكتب كالتالي:

$$Fx = \begin{cases} Tx & , x \in X \\ (A+B)x & , x \in X^{\perp} \end{cases}$$

$$Fx = \begin{cases} (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, ..., \frac{x_n}{2^n}, ...) & , x \in X \\ (A+B)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n & , x \in X^{\perp} \end{cases}$$

$$Fx = \begin{cases} (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, ..., \frac{x_n}{2^n}, ...) & , x \in X \\ (\alpha_1\lambda_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_n g_1, \alpha_2\lambda_2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_n g_2, ...) & , x \in X^{\perp} \end{cases}$$

في حالة T مؤثر فولتيرا كيفي
نختار الجملة $\{g_j\}_{j\in J}$ تامة في X، حيث J مجموعة دلائل على الأكثر قابلة للعد (لتكن متتالية الأعداد الطبيعية أو جزءًا منها)، نقسم مجموعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعات جزئية غير منتهية $N_j, (j \in J)$.
$\mathfrak{L}(e_k^{(j)})_{k\in N_j}$ غلاف خطي مغلق من الأشعة $\{e_k^{(j)}\}_{k\in N_j}$ و g_j شعاع من X نعرف المؤثرين A_j و B_j مع المتتاليتين $\{\lambda_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\gamma_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ كالتالي

$$A_j e_n^{(j)} = \lambda_n^{(j)} e_n^{(j)} \ , \ (n \geqslant 1)$$

حيث $\{\lambda_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أعداد مركبة $(\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^{(j)} = 0)$

$$Be_n^{(j)} = \gamma_n^{(j)} g_j \ , \ (n \geqslant 1)$$

حيث $\{\gamma_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أعداد مركبة، تحقق $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\gamma_n^{(j)}|^2 < \infty$
بوضع $A = \sum\limits_{j\in J} \oplus A_j$, $B = \sum\limits_{j\in J} \oplus B_j$، يكون A و B مؤثرين متراصين، ومنه المؤثر F يكتب كالتالي:

$$Fx = \begin{cases} Tx & , x \in X \\ (A+B)x & , x \in X^{\perp} \end{cases}$$

$$Fx = \begin{cases} (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, ..., \frac{x_n}{2^n}, ...) & , x \in X \\ (A+B) \sum_{j \in J} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(j)} e_n^{(j)} & , x \in X^{\perp} \end{cases}$$

$$Fx = \begin{cases} (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, ..., \frac{x_n}{2^n}, ...) & , x \in X \\ \sum_{j \in J} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{(j)} \lambda_n^{(j)} e_n^{(j)} + \gamma_n^{(j)} g_j) & , x \in X^{\perp} \end{cases}$$

خـــــاتمة

يندرج محتوى هذه المذكرة، في العمل على توضيح شروط تمديد صنف من أصناف المؤثرات المتراصة وهو مؤثر فولتيرا إلى فراغ أوسع من الفراغ المعرف عليه، ومن ثمّ إعطاء تطبيقًا عمليًا على هذا التمديد .

لهذا الغرض جمعنا أهم المقالات التي تناولت هذا الموضوع وبعض المراجع من التحليل الدالي ونظرية المؤثرات، وتبقى الدراسة مفتوحة لأصناف أخرى من المؤثرات .

دليـــل المصطلحـــات			
اللغة العربية	اللغة العربية	اللغة الإنجليزية	اللغة العربية
Spectrum	طيف	Basis	أساس
Monotonic	رتيبة	Projector	إسقاط
Inverse	عكسي	Restriction	إقتصار
Orthogonal	عمودي	Resolvent	الحالة
Unbounded	غير محدود	Graph	بيان
rootspace	فراغ جذري	Complete	تام
Coutable	قابل للعد	Topology	تبولوجيا
Separable	قابل للفصل	extension	تمديد
Invertible	قابل للقلب	Dual	ثنوي
Sefl-adjoint	قرين لنفسه	scalar Product	جداء سلمي
Compact	متراص	Algebraic	جبري
Orthonormal	متعامد ومتجانس	Direct sum	جمع مباشر
Isolated	معزولة	linear	خطي
Operator	مؤثر	Cyclic	دوري
Norm	نظيم	Eigenvector	شعاع ذاتي

قائمة المراجع

[1] إيروين. كريز يك ، المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته-ترجمة د.خضر حامد الأحمد-، الطبعة الرابعة -دمشق-2004-2005 م.

[2] د.أ.كولموغوروف، س. فومين، مبادئ في نظرية التوابع و في التحليل التابعي - تعريب أبو بكر خالد سعد الله -،د.م.ج. 19

[3] مصطفى. عسيلة، دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي، د.م.ج-الجزائر-2009

[4] مصطفى. عسيلة، دروس في المؤثرات ونظريةالأطياف، الجزءالأول، المؤثرات المحدودة، UKMO , 2013.

[5] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in a Hilbert Space*. Vol. 18. American Mathematical Soc., 1969.

[6] I. C. Gokhberg and M. G. Krein, *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*. Vol. 24. American Mathematical Soc., 1970.

[7] I. Gokhberg, S. Gokhberg, M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Oparators*, Part I, Birkhauser Verlag, 1990.

[8] I. Gokhberg, S. Gokhberg, M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Oparators*, Part II, Birkhauser Verlag, 1990.

[9] J. R. Retherford, *Hilbert space: compact operators and the trace theorem*. Vol. 27. Cambridge University Press, .1993

[10] L. A. Rubel and A. L. Shields, *The space of bounded analytic functions on a region*, Ann. Inst.Fourier (Grenoble) 16 (1966), fasc. 1, 235-277.

[11] L. Brown, A. Shields and K. Zeller, *On absolutely convergent exponential sums*, Trans. Amer. Math. Soc. 96 (I960), 162-183.

[12] N. Dunford,J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, General Theory, Wiley- Interscience, New York,1957.

[13] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *The Theory of Linear Operators in a Hilbert Space*, Moscow, 1966.

[14] N.K. Nikol'skii, *Complete extensions of Volterra operators*, Izvestiya: Mathematics 3.6 (1969): 1271-1276.

التمديد التام لمؤثر فولتيرا

ملخص

يهدف هذا العمل في مجمله إلى توضيح من الناحية النظرية والعملية الشروط الكافية، من أجل تمديد مؤثر فولتيرا، الذي هو صنف من أصناف المؤثرات المتراصة إلى مؤثر متراص و تام أعتمد في الدراسة على المؤثرات المتراصة والتامة .

الكلمات المفتاحية :

المؤثر الخطي - المؤثر المتراص - مؤثر فولتيرا - المؤثر التام - تمديد المؤثر .

Complete extension of Volterra operator

Abstract

This work, as a whole, aims at clarfiying in theory and practice the adequate conditions, inorder to extend volteraa operator, which is a compact operators class to compact and complete operator

This study is based on compact and complete operators .

key words:

linear operator - compact operator - Volterra operator - complet operator - extension of operator.