

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Sciences Appliquées

Département de Génie Mécanique



Mémoire

MASTER ACADEMIE

Domaine : Sciences Techniques

Filière : Génie mécanique

Spécialité : Maintenance Industrielle

Présenté par : - Rachedi Tarek
- Houloua Nouh

Thème

Problème d'interaction entre une poutre et un milieu élastique de type Boussinesq

Soutenu le : 10/06/2018

Devant le jury

Guebailia Moussa	MCB	Université Kasdi Merbah Ouargla	Président
Bouhemame Nacer	MCA	Université Kasdi Merbah Ouargla	Encadreur
Issasfa Brahim	MAA	Université Kasdi Merbah Ouargla	Examineur

Année Universitaire : 2017/2018

Remercient

Tout d'abord, nous remercions le dieu nos créateur.

Nous tiens à exprimer toute nos gratitude et reconnaissance à notre encadreur Dr. Bouhemame nacer qui d'avoir accepté de diriger ce travail et d'avoir mis à nos disposition tous les moyens qui permis de mener à terme cette étude et aussi pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Nous tiens aussi à remercier Dr. Guebailia.M pour l'intérêt qu'IL a bien voulu porter à ce travail ainsi que pour l'honneur qu'il n'a fait en présidant le jury.

Nous tiens aussi à remercier Dr.Issasfa.B pour l'intérêt qu'IL a bien voulu porter à ce travail ainsi que pour l'honneur de leur présence dans ce jury.

Mes remerciements s'adressent également à tous ce qui nous avons aidé faire aboutir ce travail.

Enfin, à tous les étudiants de notre promotion et nous souhaitons le bon courage à tous les étudiants pour finir ces études, et à tous les enseignants de L'université KASDI MERBAH de l'OUARGLA.

Dédicace

Nous tient à dédier ce modeste travail

à :

À nos parents.

À nos frères,

À nos sœurs,

À nos familles,

À tous nos amis et nos collègues.

Table des matières

Introduction générale.....	3
----------------------------	---

Chapitre I : Généralité sur les vibrations des poutres

I.1	Définition d'une poutre.....	5
I.2	Vibrations longitudinales.....	8
I.2.1	Champ de déplacement.....	8
I.2.2	Fonctionnelle de Hamilton	8
I.3	Vibrations de flexion	13
I.3.1	Champ de déplacement.....	13
I.3.2	Fonctionnelle de Hamilton	14
I.4	Vibrations de torsion	19
I.4.1	Champ de déplacement.....	19
I.4.2	Fonctionnelle de Hamilton	19

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

II.1	Formulation de l'approche	24
II.2	Détermination des déformées propres de la poutre reposant sur sol élastique :.....	32
II.3	Détermination de la réponse de la poutre due aux charges dynamiques extérieures.....	37
II.3.1	Excitation harmonique extérieures	37
II.3.2	Vérification de la résonance	39
	Conclusion générale.....	41

Liste des figures

Chapitre I :: Généralité sur les vibrations des poutres

Figure I.1 : Représentation d'une poutre droite dans le repère (0; 1; 2; 3).....	5
Figure I.2 : Déplacement d'une poutre droite dans chaque direction	7
Figure I.3 : sollicitation simple d'une poutre droite.....	7
Figure I.4 : champ de déplacement pour la flexion des poutres	14
Figure I.5 : Représentation d'une poutre de section circulaire en torsion.....	19
Figure I.6 : champ de de contraintes pour une section droite circulaire en torsion.....	22

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

Figure II.1 : Poutre en contact avec un semi infini élastique.....	24
Figure II.2 : Poutre en contact avec un milieu élastique de type Boussinesq discrétisée en un nombre d'éléments.....	25
Figure II.3 : Discrétisation du système poutre-semi infini élastique.....	25
Figure II.4 : Poutre discrétisée en 10 éléments identiques reposant sur semi-infini Elastique.....	28
Figure II.5 : les racines de déterminant de la matrice du système d'équation (II.10).....	30
Figure II.6 : les valeurs de frequences propres graphiquement.....	32
Fig. II.7 : Réponse de la poutre au point 4.....	37
Fig. II.8 : Réponse de la poutre aux points 3 et 8.....	38
Figure. II.9 : Réponse de la poutre aux points 2 et 7 avec deux forces dynamique Différentes.....	39

Liste des tableaux

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

Tableau II.1 Résultats des termes y_{ik} de déflexions de la poutre	29
Tableau II.2 les valeurs de F_{ik}	29
Tableau II.3 les formes propres de la poutre reposant sur un milieu élastique de type Boussinesq....	33

Introduction générale

Introduction générale

Les problèmes de contact définis par l'interaction de deux milieux de caractéristiques physiques différentes nécessitent une étude particulière en statique comme en dynamique.

Les méthodes de calcul de ces problèmes sont compliquées vu leur liaison à des difficultés mathématiques majeures. Ces méthodes de calcul se basent sur la fonction de Green afin d'étudier l'interaction, et cette dernière aboutit au calcul global. Les différentes études faites dans ce domaine se basent sur les méthodes numériques avec l'introduction de beaucoup d'hypothèses simplifiées et l'arrivée à l'élaboration d'une méthode de calcul précise et universelle n'est pas atteinte à nos jours.

Le calcul statique ou dynamique de la poutre reposant sur milieu élastique, faisant partie des problèmes de contact, intéressa beaucoup de spécialistes du domaine. Dans ce contexte, la fonction de Green, représentant l'interaction entre deux milieux différents, se formule sur la base du type du milieu élastique considéré. Le type ou le modèle du milieu élastique le plus simplifié a été considéré par Winkler, dans lequel la rigidité du milieu élastique définie par K est identique à celle d'un ressort, en outre la surface du milieu élastique se déforme uniquement au niveau du point d'application de la charge extérieure. Boussinesq proposa son modèle après, et dans lequel le milieu élastique est considéré comme étant un semi-infini élastique de module d'élasticité E_0 et de coefficient de Poisson ν_0 et la déformation de la surface du semi-infini élastique est inversement proportionnelle avec l'éloignement du point d'application de la charge extérieure.

Ceci n'implique que la nécessité de développer et d'améliorer les méthodes de calcul existantes de telles structures ou de proposer de nouvelles méthodes de calcul plus efficace.

On présente dans ce travail une approche pour le calcul dynamique d'une poutre reposant sur milieu élastique. L'approche proposée, permet de déterminer les forces de réaction dans la zone de contact, les fréquences et déformées propres de la poutre, sa réponse à des charges dynamiques harmoniques. On néglige l'inertie du milieu élastique, l'amortissement et les forces de frottement dans la zone de contact poutre -milieu élastique.

Le système étudié se discrétise par la division de la poutre en un nombre d'éléments, et au centre de chaque élément on met des liaisons rigides, à travers lesquelles le contact poutre milieu élastique s'accomplit, cela veut dire que le contact continu de la poutre avec le milieu élastique est remplacé par un contact partiel au niveau des points situés aux centres des

éléments. L'approche formulée basant sur la méthode de semi analytique et introduisant la fonction de Green pour l'interaction, est présentée sous une forme matricielle

Chapitre I :
généralité sur
les vibrations
des poutres

Introduction

Ce chapitre présente les vibrations longitudinales, de flexion et de torsion des poutres. Il décrit également de façon plus rigoureuse la mise en œuvre de l'approche variationnelle pour le cas de matériaux continus (1D).

I.1 Définition d'une poutre

On nomme poutre un milieu continu ayant une dimension très grande par rapport aux deux autres. [1]

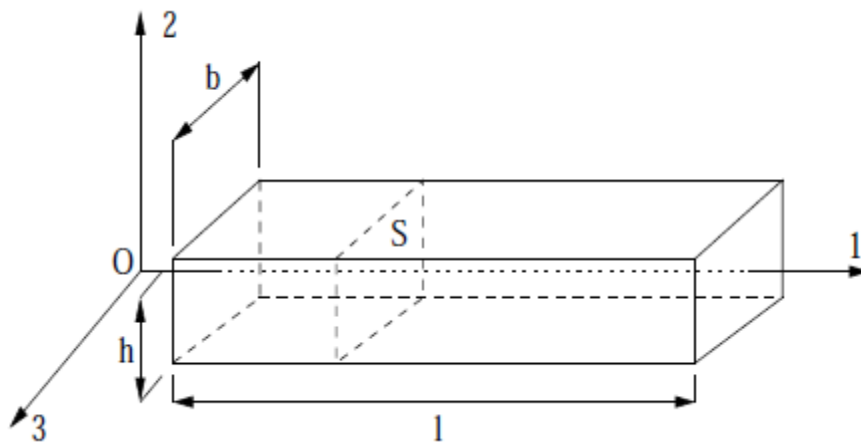


Figure I.1 Représentation d'une poutre droite dans le repère (0; 1; 2; 3)

On note (x_1, x_2, x_3) les coordonnées, dans le repère (0; 1; 2; 3), d'un point M de la poutre dont on cherche à exprimer le champ de déplacement $u_i(M, t)$: [1]

$$u_i(M, t) \begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

La géométrie particulière qui a été définie va permettre de simplifier le champ de déplacement $u_i(M, t)$ qui dépend par ailleurs du type de matériau, de l'excitation et des

conditions limites. Ces simplifications ou hypothèses sur le champ de déplacement sont aussi appelées hypothèses de condensation. D'autres hypothèses simplificatrices apparaîtront plus tard. Liées au type d'excitation elles impliqueront des études séparées pour les vibrations longitudinales, de torsion ou de flexion des poutres.

Les hypothèses de condensation pour les poutres consistent à effectuer un développement en série de Taylor de $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ par rapport à x_2 et x_3 :

$$\begin{aligned}
 u_i(x_1, x_2, x_3, t) &= u_i(x_1, 0, 0, t) + x_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_1, 0, 0, t) + x_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}(x_1, 0, 0, t) \\
 &+ \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}(x_1, 0, 0, t) + \frac{x_3^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}(x_1, 0, 0, t) \\
 &+ x_2 x_3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, 0, 0, t) + \dots
 \end{aligned} \tag{I.2}$$

La théorie des poutres minces consiste à négliger les termes du 2^{ème} ordre et d'ordres supérieurs dans ce développement : [1]

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \approx u_i(x_1, 0, 0, t) + x_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2}(x_1, 0, 0, t) + x_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}(x_1, 0, 0, t) \tag{I.3}$$

On notera par la suite :

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \approx u_i^0(x_1, t) + x_2 u_i^2(x_1, t) + x_3 u_i^3(x_1, t) \tag{I.4}$$

Soit :

$$\begin{cases}
 u_1(x_1, x_2, x_3, t) \approx u_1^0(x_1, t) + x_2 u_1^2(x_1, t) + x_3 u_1^3(x_1, t) \\
 u_2(x_1, x_2, x_3, t) \approx u_2^0(x_1, t) + x_2 u_2^2(x_1, t) + x_3 u_2^3(x_1, t) \\
 u_3(x_1, x_2, x_3, t) \approx u_3^0(x_1, t) + \underbrace{x_2 u_3^2(x_1, t) + x_3 u_3^3(x_1, t)}_{\text{rotations}}
 \end{cases} \tag{I.5}$$

Physiquement, le déplacement dans chaque direction 1; 2 ou 3 se compose d'un mouvement d'ensemble (u_i^0) et de deux rotations ($x_2 u_i^2 + x_3 u_i^3$)

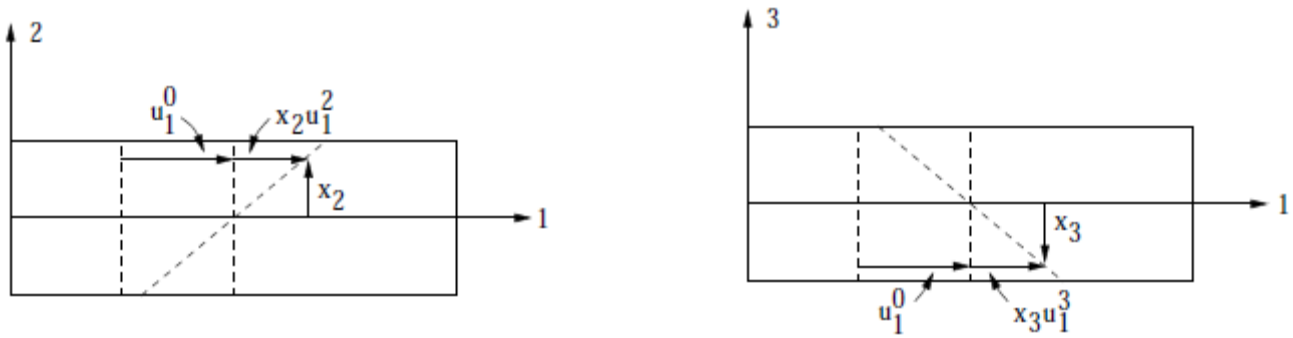


Figure I.2. Déplacement d'une poutre droite dans chaque direction

La théorie des poutres minces suppose que les sections droites restent planes après la déformation : c'est l'hypothèse de Bernoulli. L'ensemble du champ de déplacement est connu si les déplacements et les rotations sont connus le long d'un axe moyen de la poutre : cet axe est appelé axe neutre, ou fibre neutre. L'hypothèse de condensation, pour une poutre mince consiste à réduire le milieu tridimensionnel en un milieu unidimensionnel équivalent. Les inconnues du problème après condensation sont les neuf fonctions $u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_1^2, u_2^2, u_3^2, u_1^3, u_2^3, u_3^3$.

Ces neuf fonctions ne dépendent que d'une seule variable d'espace x_1 et du temps t .

A ce stade, pour résoudre un problème de vibrations de poutre mince, on peut utiliser le champ de déplacement donné par l'expression (I.5), l'injecter dans la fonctionnelle de Hamilton et trouver l'extremum de cette fonctionnelle par rapport aux 9 fonctions inconnues. Une telle démarche est encore compliquée, on préfère réduire encore le nombre de fonctions inconnues pour décrire le déplacement. Ces simplifications supplémentaires sont possibles si l'on étudie séparément les vibrations longitudinales (en traction-compression) des vibrations de flexion ou de torsion.

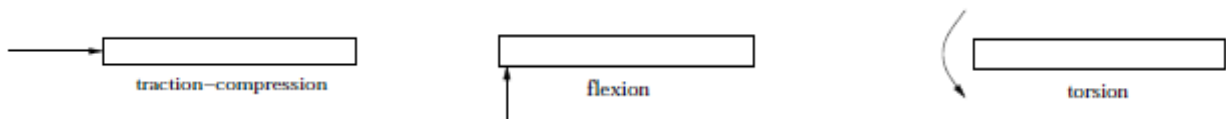


Figure I.3 sollicitation simple d'une poutre droite

I.2 Vibrations longitudinales

I.2.1 Champ de déplacement

Pour les vibrations longitudinales, on suppose que les déplacements se font de façon privilégiée le long de l'axe neutre de la poutre, ce qui correspond à une excitation dans l'axe de la poutre. On peut alors simplifier le champ de déplacement général (I.5) en imposant [1]

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \approx u_1^0(x_1, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \approx 0 \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \approx 0 \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

La seule fonction inconnue $u_1^0(x_1, t)$ correspond au déplacement d'ensemble dans la direction 1 de chaque section droite.

Nota Bene : on a, ici, négligé l'effet de Poisson (contraction de la section droite) consécutif à la déformation axiale. L'effet de Poisson correspond aux termes $x_2 u_2^2(x_1, t)$ et $x_3 u_3^3(x_1, t)$ de (I.5). Il faut garder en tête qu'il s'agit d'une hypothèse de simplification du problème par rapport à la théorie des milieux continus 3D dont il faudra vérifier le bienfondé par rapport aux observations expérimentales.

I.2.2 Fonctionnelle de Hamilton

Les hypothèses cinématiques (champ de déplacement) étant définies pour la géométrie et le type d'excitation étudiés, l'approche variationnelle comprend systématiquement les points suivants [1]

1. Calculs des déformations
2. Construction de la fonctionnelle de Hamilton
3. Externalisation de la fonctionnelle de Hamilton

I.2.2.1 Calculs des déformations

Par définition :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[u_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) + u_{j,i}(x_1, x_2, x_3, t) \right] \quad (\text{I.7})$$

Ce qui donne pour le cas présent (I.6)

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(x,t) = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(x,t) \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

I.2.2.2 Construction de la fonctionnelle de Hamilton

Pour un matériau isotrope sous état de contrainte unidimensionnelle, le tenseur d'élasticité est [2]

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} E & \nu E & \nu E & & & \\ \nu E & E & \nu E & & & 0 \\ \nu E & \nu E & E & & & \\ & & & \frac{E}{2(1-\nu)} & & \\ & 0 & & & \frac{E}{2(1-\nu)} & \\ & & & & & \frac{E}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

Pour rappel, l'expression de la fonctionnelle de Hamilton est [1] :

$$H(u_i) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt \quad (\text{I.10})$$

Avec :

$$T = \int_v \frac{L}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dv \quad (\text{I.11})$$

$$V = \int_v \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dv \quad (\text{I.12})$$

$$W = \int_v f_i u_i dv \quad (\text{I.13})$$

Où

T- énergie cinétique

V- énergie potentielle

W- énergie potentielle

Compte tenu de (I.6), (I.8) et(I.9) on obtient :

$$T = \int_0^L \frac{\rho s}{2} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial t} \right)^2 dx_1 \quad (\text{I.14})$$

$$V = \int_0^L \frac{L}{2} ES \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial t} \right)^2 dx_1 \quad (\text{I.15})$$

$$W = \int_0^L f_1 s u_1^0 dx_1 \quad (\text{I.16})$$

Avec

L : longueur de la poutre.

S : surface de la section de la poutre.

f_1 : force axiale à l'abscisse x_1 , par unité de longueur.

En résumé, la fonctionnelle de Hamilton pour les vibrations longitudinales de poutres droites minces est :

$$H(u_1^0) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho s \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} ES \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial t} \right)^2 + f_1 s u_1^0 \right] dx_1 dt \quad (\text{I.17})$$

La fonctionnelle de Hamilton ne dépend que d'une seule fonction u_1^0 . L'étape suivante consiste à chercher l'extremum de H par rapport à cette fonction. Cet extremum est le déplacement qui vérifie les équations de vibrations longitudinales de la poutre.

L'approche variation elle de Hamilton ne nécessite pas le calcul explicite des contraintes dans la poutre.

Dans l'approche cinématique, le calcul des contraintes peut poser problème.

Intéressons-nous par exemple à la contrainte $\sigma_{22} : [1]$

On a $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \nu E & \nu E & & & \\ \nu E & E & \nu E & & & \\ \nu E & \nu E & E & & & \\ & & & \frac{E}{2(1-\nu)} & & \\ & & & & \frac{E}{2(1-\nu)} & \\ & 0 & & & & \frac{E}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{I.18})$$

Comme seul ε_{11} est non nul, on obtient $\sigma_{22} = \nu E \varepsilon_{11}$. La contrainte σ_{22} calculée à partir du champ de déplacement (1.6) est donc non nulle. En particulier, σ_{22} est non nulle sur la surface de la poutre, ce qui est incompatible avec la physique du problème. On doit donc être prudent et retenir que la formulation variationnelle de Hamilton peut mener à des résultats faux pour les contraintes dans le système. Pour remédier à ces incompatibilités sur les contraintes, on introduit parfois des modifications artificielles de la loi de comportement (donnée par le tenseur élastique C_{ijkl}). On peut également utiliser d'autres formulations vibrationnelles comme celle de REISSNER.

I.2.2.3 Externalisation de la fonctionnelle de Hamilton

On utilise, ici, directement les résultats liés aux équations d'Euler pour la fonctionnelle (1.17).

Dans le cas de vibrations longitudinales des poutres, on a : [1]

$$\alpha = \frac{1}{2} \rho s (u_{1,t}^0)^2 - \frac{1}{2} ES (u_{1,x_1}^0)^2 + f_1 s u_1^0 \quad (\text{I.19})$$

L'équation du mouvement et les conditions aux limites générales sont :

Equation de mouvement :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u_1^0} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,t}^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0} \right) = 0 \quad (\text{I.20})$$

$$\text{Condition aux limites : } \left\{ \begin{array}{l} u_1^0(0,t) = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0}(0,t) = 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} u_1^0(l,t) = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0}(l,t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.21})$$

En exprimant les fonctions de α :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u_1^0} = f_1 s \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0} = \rho s u_{1,t}^0 \frac{\partial \alpha}{\partial u_{1,x_1}^0} = -ES u_{1,x_1}^0 \quad (\text{I.22})$$

L'équation du mouvement devient :

$$\rho s \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(ES \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right) = f_1 s \quad \forall x_1 \in]0, l[\quad \forall t \quad (\text{I.23})$$

Soit si E et S sont indépendants de la variable x_1 :

$$\rho s \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} = f_1 s \quad \forall x_1 \in]0, l[\quad \forall t \quad (\text{I.24})$$

Les conditions limites, s'expriment quant à elles, comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^0(0,t) = 0 \\ \text{ou} \\ ES \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(0,t) = 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} u_1^0(l,t) = 0 \\ \text{ou} \\ ES \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(l,t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.25})$$

Les relations (I.25) signifient que le problème, tel qu'il est modélisé (en 1D), n'a de solutions que si certaines conditions aux extrémités sont satisfaites. Les deux premières conditions signifient physiquement que les extrémités sont encastées (déplacement longitudinal imposé

nul). Les deux dernières conditions représentent des extrémités libres : l'effet normal à une extrémité est imposé à zéro $ES \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} = S \sigma_{11} = 0$

I.3 Vibrations de flexion

I.3.1 Champ de déplacement

Pour l'étude du rayonnement acoustique de structures vibrantes, les vibrations de flexion sont généralement les plus importantes, ce sont elles qui, dans la plupart des cas, « font du bruit » (les vibrations longitudinales peuvent également produire un rayonnement acoustique par le biais de l'effet de Poisson - il faut alors le prendre en compte dans la modélisation).

En repartant de l'expression générale du champ de déplacement linéaire (sans les termes d'ordre strictement supérieurs à 1), (I.5), on émet de nouvelles hypothèses en considérant l'excitation. L'excitation est maintenant une force agissant dans le plan (1,2) qui va induire un déplacement privilégié suivant l'axe 2. Le champ de déplacement pour la flexion des poutres est [3] :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \approx x_2 u_1^2(x_1, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \approx u_2^0(x_1, t) = w(x_1, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \approx 0 \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

Ce champ de déplacement (I.26) correspond aux hypothèses de Timoshenko. Deux fonctions cinématiques sont inconnues : la flèche w et les rotations des sections droites u_1^2 . Plus simplement, la description de Bernoulli fait l'hypothèse supplémentaire que les sections droites restent perpendiculaires à l'axe neutre après la déformation, ce qui impose [3] :

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, t) = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, t) \quad (\text{I.27})$$

Les hypothèses de Bernoulli conduisent au champ de déplacement :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \approx x_2 \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \approx w(x_1, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \approx 0 \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

L'hypothèse de Bernoulli (dont le champ de déplacement ne possède plus qu'une fonction inconnue : w) revient à négliger le cisaillement transversal ε_{12} des sections droites. Cette hypothèse est légitime pour un matériau homogène et pour les premiers modes de vibration.

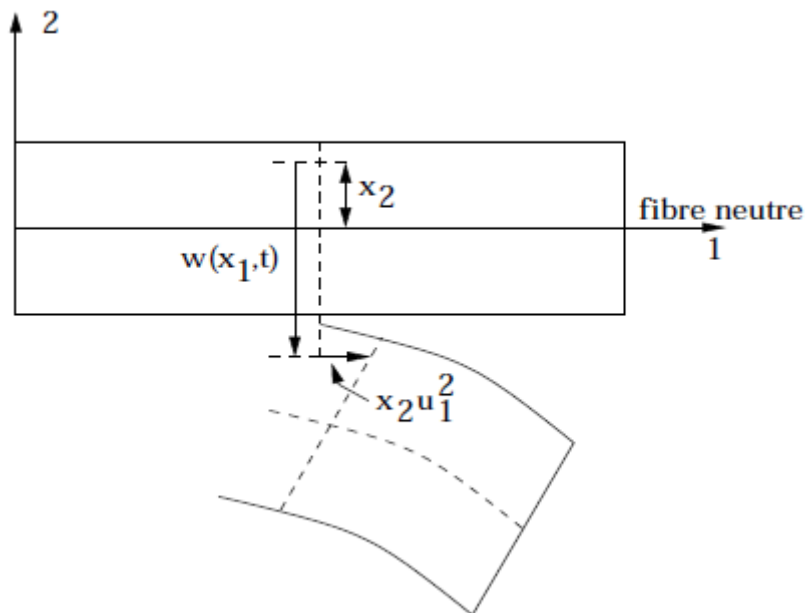


Figure I.4 champ de déplacement pour la flexion des poutres

I.3.2 Fonctionnelle de Hamilton

I.3.2.1 Calculs des déformations

A partir du champ de déplacement (I.28) et de la relation [3] :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j}(x_1, x_2, x_3, t) + u_{j,i}(x_1, x_2, x_3, t)] \quad (\text{I.29})$$

On calcule le champ de déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_2 \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, t) \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

I.3.2.2 Construction de la fonctionnelle de Hamilton

$$H(u_i) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt \quad (\text{I.30})$$

Avec

$$T = \int_v \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dv \quad (\text{I.31})$$

$$V = \int_v \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dv \quad (\text{I.32})$$

$$W = \int_v f_i u_i dv \quad (\text{I.33})$$

Dans le cas de la flexion, ces expressions deviennent :

$$T = \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{2} \rho \left[x_2^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx_3 dx_2 dx_1 = \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho I_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho s \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx_1 \quad (\text{I.34})$$

Ou

$$I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} x_2^2 dx_2 dx_3 \quad (\text{I.35})$$

I_3 Est le moment quadratique de section de la poutre par rapport à l'axe 3. Le premier terme de (I.34) représente donc l'énergie cinétique due à la rotation des sections droites par rapport à

l'axe neutre. Le deuxième terme représente, quant à lui, l'énergie cinétique due au déplacement transversal des sections.

$$V = \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{2} E \varepsilon_{11}^2(x, t) dx_3 dx_2 dx_1 = \int_0^l \frac{1}{2} EI_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 \quad (I.36)$$

$$w = \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(f_2 w + m_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) dx_3 dx_2 dx_1 = \int_0^l \left(F_2 w + M_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) dx_1 \quad (I.37)$$

Avec : $m_3 = -f_1 x_2$

f_1, f_2 : Forces par unité de volume

$M_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} -f_1 x_2 dx_3 dx_2$: Moment par unité de longueur

$F_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} f_1 x_2 dx_3 dx_2$: Force par unité de longueur

F_2 Et la résultante de la force suivant l'axe 2, sur la section droite. M_3 Est le moment résultant sur la section droite par rapport à l'axe 3.

En résumé, la fonctionnelle de Hamilton pour la flexion de poutres droites minces (hypothèses de Bernoulli) est :

$$H(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho I_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EI_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + F_2 w + M_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] dx_1 dt \quad (I.38)$$

On fait généralement une hypothèse supplémentaire [3], pour les poutres minces, qui consiste à négliger l'énergie cinétique due à la rotation des sections droites devant l'énergie cinétique due au mouvement de déplacement transversal : le terme d'inertie I_3 est en effet proportionnel à h_3 , alors que la surface S est proportionnelle à h.

Cette hypothèse est surtout valable pour les premiers modes de flexion. On peut donc retenir :

$$H(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{L}{2} \rho S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{L}{2} EI_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + F_2 w + M_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] dx_1 dt \quad (I.39)$$

I.3.2.3 Externalisation de la fonctionnelle de Hamilton

Pour cette étape du calcul, on remarque que la fonctionnelle est de la forme :[3]

$$H(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \alpha(w, w_{,t}, w_{,x}, w_{,xt}, w_{,xx}, w_{,tt}) dx dt \quad (I.40)$$

Les termes $w_{,xt}$ et $w_{,tt}$ n'apparaissant pas dans l'expression simplifiée de la fonctionnelle. Les équations du mouvement et les conditions aux limites fournies par les équations d'Euler dans le cas présent s'écrivent [2] :

Equation de mouvement :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial w_{,t}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial w_{,xx}} \right) = 0 \quad (I.41)$$

Conditions aux limites pour $x = 0$ et $x = L$:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,x}} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial w_{,xx}} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \text{Et} \quad \left\{ \begin{array}{l} w_{,x} = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial w_{,xx}} = 0 \end{array} \right. \quad (I.42)$$

Ce qui nous donne :

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_1^2} \left(EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = F_2 - \frac{\partial M_3}{\partial x_1} \quad (I.43)$$

Et les conditions limites pour $x_1 = 0$ et $x_1 = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \text{ou} \\ M_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \text{ou} \\ EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.44})$$

Comme dans le cas des vibrations longitudinales, les conditions aux limites signifient que le problème possède n'a de solutions analytiques qu'à certaines conditions. Nous pouvons interpréter physiquement ces conditions comme [2] :

$w = 0$ Et $\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$: condition d'encastrement.

$w = 0$ Et $EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$: condition d'appui simple.

En effet, $EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = M_3$ est moment de flexion de la section.

$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = 0$ Et $EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$: extrémité libre.

En effet, $\frac{\partial}{\partial x_1} \left(EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = F_2$ représente l'effort tranchant appliqué à la section.

$M_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$: extrémité guidée.

Cette condition n'a pas vraiment de réalité physique.

Les conditions $w = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$ sont des conditions aux limites cinématiques (en déplacement).

Les conditions $EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x_1} \left(EI_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = 0$ sont des conditions aux limites dynamiques (en contraintes).

I.4 Vibrations de torsion

I.4.1 Champ de déplacement

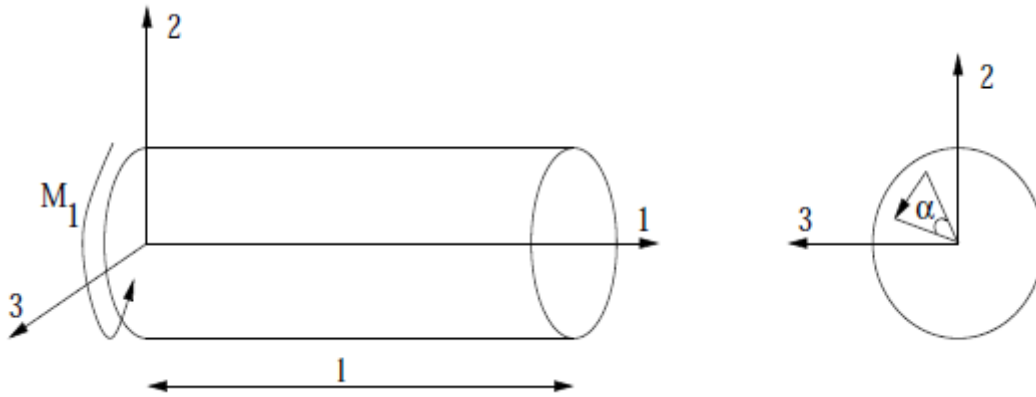


Figure I.5 Représentation d'une poutre de section circulaire en torsion

On traite ici la torsion dans le cas simple d'une section droite circulaire. On suppose que l'excitation est un moment autour de l'axe 1 qui est aussi l'axe neutre de la poutre. Le déplacement dominant dans la torsion est la rotation des sections droites. Si $\alpha(x_1, t)$ est le déplacement angulaire de la section droite d'abscisse x_1 , on utilise le champ de déplacement simplifié (hypothèse de St Venant) suivant [2] :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \approx 0 \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \approx -x_3 \alpha(x_1, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \approx x_2 \alpha(x_1, t) \end{cases} \quad (\text{I.45})$$

La seule fonction cinématique inconnue est l'angle $\alpha(x_1, t)$.

I.4.2 Fonctionnelle de Hamilton

I.4.2.1 Calculs des déformations

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} = -\frac{1}{2} x_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \end{cases} \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \quad (\text{I.46})$$

I.4.2.2 Construction de la fonctionnelle de Hamilton

$$H(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho I_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} G I_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 + M_1 \alpha \right] dx_1 dt \quad (\text{I.47})$$

Où

$$I_1 = \int_s (x_2^2 + x_3^2) dx_2 dx_3 \quad (\text{I.48})$$

I_1 _ Désigne le moment quadratique de la section circulaire par rapport à l'axe 1

I.4.2.3 Externalisation de la fonctionnelle de Hamilton

La fonctionnelle de Hamilton pour les vibrations de torsion a la même forme générale que la fonctionnelle de Hamilton pour les vibrations longitudinales. L'équation du mouvement et les conditions limites doivent donc avoir les mêmes formes dans les deux cas.

Equation du mouvement [1] :

$$\rho I_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G I_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right) = M_1 \quad \forall x_1 \in]0, l[\quad \forall t \quad (\text{I.49})$$

Où $G = \frac{E}{2(1-\nu)}$ est le module de cisaillement du matériau.

Conditions limites en $x_1 = 0$ et $x_1 = l$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(0, t) = 0 \\ \text{ou} \\ G I_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(l, t) = 0 \\ \text{ou} \\ G I_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(l, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.50})$$

La condition $\alpha = 0$ est une condition d'encastrement, la condition $G I_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = 0$ (moment de torsion nul) est une condition d'extrémité libre.

Nota Bene : Si on s'intéresse à la contrainte sur la surface de la poutre, on a [2] :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \nu E & \nu E & & & \\ \nu E & E & \nu E & & & \\ \nu E & \nu E & E & & & \\ & & & \frac{E}{2(1-\nu)} & & \\ & & & & \frac{E}{2(1-\nu)} & \\ & & & & & \frac{E}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -x_3 \alpha_{,x1} \\ -x_2 \alpha_{,x1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (I.51)$$

Les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont :

$$\sigma_{21} = G x_3 \alpha_{,x1} \quad \sigma_{31} = G x_2 \alpha_{,x1}$$

On constate facilement qu'en tout point M de la section droite, la contrainte résultante est perpendiculaire au rayon OM (et proportionnelle à la distance OM). En particulier, pour un point P à la surface libre de la poutre, la contrainte est purement tangentielle. La contrainte normale est nulle à la surface du corps, ce qui est compatible avec la physique du problème. Or, pour une section droite circulaire, le champ de déplacement viole la condition de contrainte normale nulle à la surface du matériau. Pour les situations où la section droite n'est pas circulaire ou annulaire, il faut utiliser un champ de déplacement différent pour la torsion le problème devient alors beaucoup plus compliqué, faisant apparaître un terme de déplacement longitudinal u_1 qui représente le gauchissement de la section droite (ex : gomme à effacer).

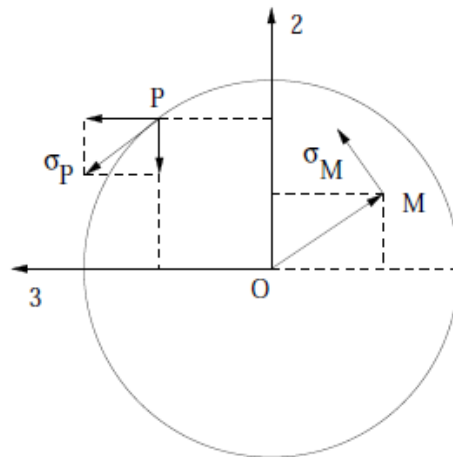


Figure I.6 champ de de contraintes pour une section droite circulaire en torsion

Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre une recherche bibliographique concernant les vibrations longitudinales des poutres continues en flexion et en torsion, nous avons exposé l'approche variationnelle pour le cas de matériaux continus homogène et isotrope.

Chapitre II :
Calcul dynamique
d'une poutre
déformable reposant
sur milieu élastique
de type Boussinesq

Introduction

L'étude de la dynamique des poutres reposant sur milieux élastiques a une importante signification dans la conception et le calcul des constructions modernes. Ce problème intéressa beaucoup de spécialistes du domaine [4], [5], [6]... et puisque il est lié aux grandes difficultés mathématiques, l'arrivée à l'élaboration d'une méthode de calcul précise et universelle n'est pas atteinte à nos jours.

L'objectif du travail est de présenter une approche basant sur une méthode semi-analytique permettant le calcul des poutres en contact avec un milieu élastique de n'importe quelle forme en dynamique. L'inertie du milieu élastique, les forces de frottement dans la zone de contact et l'amortissement de la structure ne sont pas prises en compte. Le problème posé est de déterminer les fréquences et modes propres de la poutre reposant sur milieu élastique de type Boussinesq, ainsi que sa réponse à l'action des excitations extérieures.

II.1 Formulation de l'approche

Soit une poutre déformable de masse M et de rigidité EI reposant sur semi-infini élastique, Figure II.1, caractérisé par le module d'élasticité E_0 et le coefficient Poisson ν_0 .

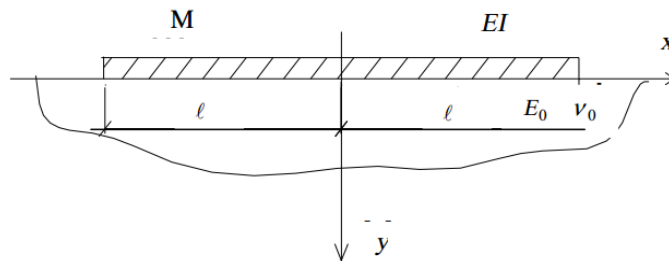


Figure II.1 Poutre en contact avec un semi infini élastique.

Divisons la poutre en un nombre d'éléments identiques n de longueur c et au centre de chaque élément on met une liaison rigide à travers laquelle se réalise le contact de la poutre avec le semi-infini élastique. C'est à dire le contact continu de la poutre avec le milieu élastique est remplacé par un contact partiel au niveau des liaisons. Admettons que la masse de chaque élément est concentrée en son centre Figure II.2.

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

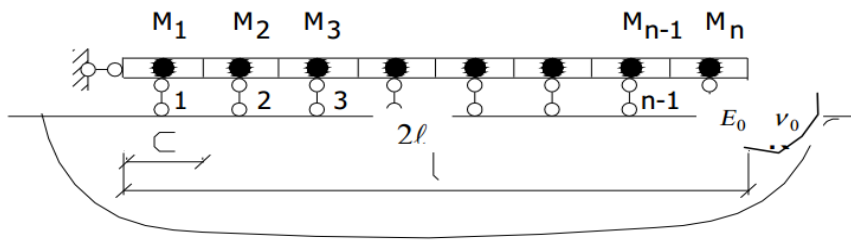


Figure II.2 Poutre en contact avec un milieu élastique de type Boussinesq discrétisée en un nombre d'éléments.

Le principe de la méthode de [4] est illustré sur Figure II.3. En outre, les forces d'inertie $J(t)$ vibrant les masses sont appliquées uniquement sur la poutre puisque la masse du semi-fini élastique n'est pas tenue en compte, tant que les efforts de liaisons $X_i(t)$ sont appliqués sur la poutre et sur le semi-infini élastique.

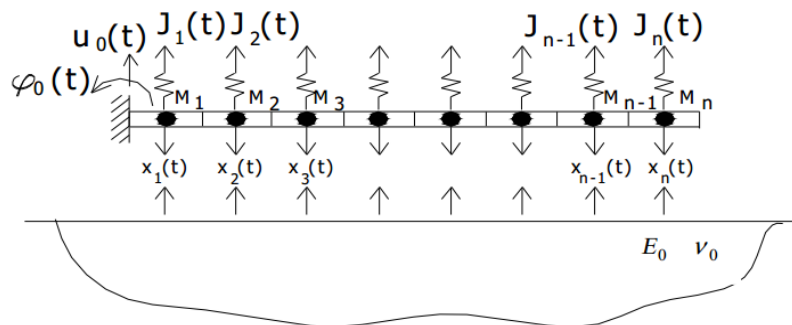


Figure II.3 Discrétisation du système poutre-semi infini élastique.

Le système d'équations canoniques permettant l'étude des vibrations de la poutre reposant sur semi-infini élastique est [7] :

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{k=1}^n (v_{1k} + y_{1k}) X_k(t) - \sum_{k=1}^n y_{1k} J_k(t) + \frac{c}{2} \varphi_0(t) + u_0(t) + \Delta_{1p} = 0; \\
 \vdots \\
 \sum_{k=1}^n (v_{ik} + y_{ik}) X_k(t) - \sum_{k=1}^n y_{ik} J_k(t) + 3 \frac{c}{2} \varphi_0(t) + u_0(t) + \Delta_{ip} = 0; \\
 \vdots \\
 \sum_{k=1}^n (v_{nk} + y_{nk}) X_k(t) - \sum_{k=1}^n y_{nk} J_k(t) + \frac{2n-1}{2} \varphi_0(t) + u_0(t) + \Delta_{np} = 0; \\
 \\
 \sum_{k=1}^n [X_k(t) - J_k(t)] \frac{2k-1}{2} c = I_y \ddot{\varphi}_0(t); \\
 \sum_{k=1}^n [X_k(t) - J_k(t)] = M \ddot{u}_0(t); \\
 \\
 k=1
 \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

Où

v_{ik} : Le déplacement vertical de la surface du semi-infini élastique au point i du à la force unitaire $R_k = 1$ appliquée au pointe la même surface ;

$y_{ik}(t)$: La déflexion de la poutre au point i due à la force unitaire $R_k = 1$ appliquée au point k de la poutre ;

$X_k(t)$: L'effort de liaison appliqué sur la poutre et sur le semi-infini élastique (inconnue) ;

J_k : La force d'inertie appliquée uniquement sur la poutre ;

C : la distance entre les centres de gravité des éléments, supposée constante ;

$\varphi_0(t); u_0(t)$: L'angle de rotation et le déplacement vertical initial de la poutre au niveau de l'encastrement (inconnues) ;

Δ_{ip} : Fonction caractérisant les déflexions de la poutre dues aux charges extérieures P

M : la masse totale de la poutre

I_y : Le moment d'inertie de la poutre par rapport à l'axe y

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

$$\ddot{\varphi}_0 = \frac{d^2 \varphi_0}{dt^2}; \ddot{u}_0(t) = \frac{d^2 u_0}{dt^2} \quad (\text{II.2})$$

La vibration libre de la poutre est supposée sous forme harmonique, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} X_k(t) &= X_k e^{i\alpha t}; X_k(t) = X_k e^{i\alpha t}; u_0(t) = u_0 e^{i\alpha t} \\ v_k(t) &= v_k e^{i\alpha t}; J_k(t) = J_k e^{i\alpha t} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Reportons (II.3) dans le système (II.1), dans ce cas $\Delta_{ip} = 0$ puisque il s'agit de la vibration libre de la poutre, on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n (v_{ik} + y_{ik}) X_k - \sum_{k=1}^n y_{ik} J_k(t) + \frac{2i-1}{2} c \varphi_0 + u_0 = 0, i = 1, \dots, n \\ \sum_{k=1}^n [X_k - J_k] \frac{2k-1}{2} c = I_y \ddot{\varphi}_0 \\ \sum_{k=1}^n [X_k - J_k] = M \ddot{u}_0 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Si le milieu élastique est considéré comme étant semi-infini élastique (principe de Boussinesq), alors l'expression de v_{ik} prend la forme suivante [8] :

$$v_{ik} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{\Omega} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (\text{II.5})$$

Avec $\Omega = b c$, c et b : longueur et largeur de l'élément respectivement.

Après intégration, l'expression (II.5) devient :

$$v_{ik} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{c} F_{ik}, \quad (\text{II.6})$$

Avec

$$\begin{aligned} F_{ik} = 2 & \left\{ \frac{b-2y}{b} \ln \frac{-c+2x + \sqrt{(c-2x)^2 + (b-2y)^2}}{2x + \sqrt{4x^2 + (b-2y)^2}} + \frac{c-2x}{b} \ln \frac{\frac{1}{2}(-b + \sqrt{(c-2x)^2 + (b-2y)^2} 2y)}{y + \sqrt{y^2 + (\frac{c}{2} + x)^2}} \right. \\ & \left. + \frac{2x}{b} \ln \frac{-b + \sqrt{4x^2 + (b-2y)^2} + 2y}{2(y + \sqrt{x^2 + y^2})} + \frac{2y}{b} \ln \frac{\frac{-c}{2} + x + \sqrt{y^2 + (\frac{c}{2} + x)^2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \quad (\text{II.7}) \end{aligned}$$

La force d'inertie k est donnée par l'expression suivante :

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

$$J_k = -M_k \frac{d^2 y_K(t)}{dt^2} = -M_k \frac{d^2 v_K(t)}{dt^2} = M_k \omega^2 v_k \quad (\text{II.8})$$

Le déplacement global au point k est donné par l'expression suivante [7] :

$$v_{ik} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 c} \sum_{i=1}^n X_i F_{ik} \quad (\text{II.9})$$

Tenons compte de toutes ces expressions, le système (II.3) prend la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} & \ell_1 \lambda & \lambda \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} & \ell_n \lambda & \lambda \\ k_{n+1,1} & \cdots & k_{n+1,n} & 33Mc^2\omega^2/4 & 0 \\ k_{n+2,1} & \cdots & k_{n+2,n} & 0 & M\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \varphi_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.10})$$

$$\text{Avec } \lambda = \frac{\pi E_0 c}{1-\nu_0^2};$$

ℓ_i : Bras de levier des masses par rapport au point d'encastrement Figure II.4 ;

k_{jk} : Termes issus des transformations mathématiques après introduction des différentes expressions dans le système (II.3).

Application numérique : Considérons une poutre de rigidité finie $EI = 945000 \text{ kgm}^2$, de longueur $2\ell = 4\text{m}$, de largeur $b = 2.0 \text{ m}$ reposant sur semi-infini élastique de module d'élasticité $E_0 = 7 \times 10^6 \text{ kg/m}^2$ et de coefficient de Poisson $\nu_0 = 1/3$. La poutre est discrétisée en 10 éléments identiques de longueur $c = \ell/5$ et de masse $M_i = 150 \text{ kg}$.

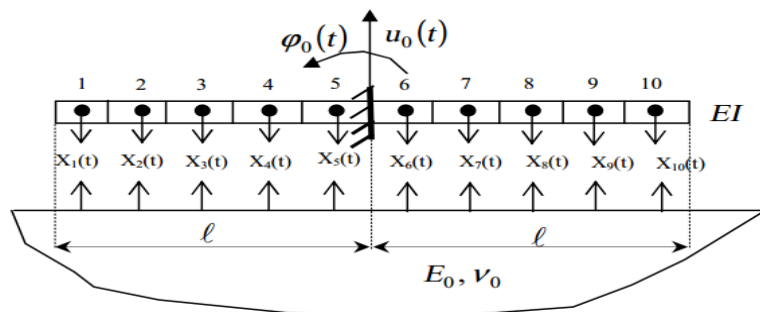


Figure II.4 Poutre discrétisée en 10 éléments identiques reposant sur semi-infini élastique.

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

Les déflexions $y_{ik} \frac{c^2}{EI}$ de la poutre dues aux charges unitaires sont données par le tableau

II .1 suivant :

Tableau II.1 Résultats des termes y_{ik} de déflexions de la poutre

Y1=243/8	Y12=245/12	Y13=275/24	Y14=9/2	Y15=13/24	Y16=0	Y17=0	Y18=0	Y19=0	Y110=0
	Y22=243/24	Y23=25/3	Y24=27/8	Y25=5/12	Y26=0	Y27=0	Y28=0	Y29=0	Y210=0
		Y33=125/24	Y34=9/4	Y35=7/24	Y36=0	Y37=0	Y38=0	Y39=0	Y310=0
			Y44=9/8	Y45=1/6	Y46=0	Y47=0	Y48=0	Y49=0	Y410=0
				Y55=1/24	Y56=0	Y57=0	Y58=0	Y59=0	Y510=0
					Y66=Y55	Y67=Y45	Y68=Y35	Y69=Y25	Y610=Y15
						Y77=Y44	Y78=Y34	Y79=Y24	Y710=Y14
							Y88=Y33	Y89=Y23	Y810=Y13
								Y99=Y22	Y910=Y12
									Y1010=Y11

Les termes du second membre des deux dernière équations du système (II.3) sont obtenus par:

$$I_y \ddot{\varphi}_0 = -2 \left[M_1 \left(-\frac{9c}{2} \right)^2 + M_2 \left(-\frac{7c}{2} \right)^2 + M_3 \left(-\frac{5c}{2} \right)^2 + M_4 \left(-\frac{3c}{2} \right)^2 + M_5 \left(-\frac{c}{2} \right)^2 \right] \varphi_0 \omega^2 e^{i\alpha t} = -\frac{33}{4} M c^2 \varphi_0 \omega^2 e^{i\alpha t} ;$$

$$M \ddot{u}_0 = -M \times \omega^2 u_0 e^{i\alpha t} \quad (\text{II.11})$$

Les valeurs de F_{ik} sont données dans le tableau II.2 ci-dessous :

Tableau II.2 les valeurs de F_{ik}

F11=4.812	F11=F22=F33=F44=F55=F66=F77=F88=F99=F1010
F12=1.081	F12=F23=F34=F45=F56=F67=F78=F89=F910
F13=0.509	F13=F24=F35=F46=F57=F68=F79=F810
F14=0.336	F14=F25=F36=F47=F58=F69=710
F15=0.251	F15=F26=F37=F48=F59=F610
F16=0.200	F16=F27=F38=F49=F510
F17=0.167	F17=F28=F39=F410
F18=0.143	F18=F29=F310
F19=0.125	F19=F210
F110=0.111	F110

Pour déterminer les fréquences propres de la poutre en égalant l'expression du déterminant de la matrice au zéro. En suit on détermine ses racines, l'expression du déterminant et tellement

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

compliquée ce que nous oblige à localiser ses racines graphiquement à l'aide de « Mathematica » l'opération a donné les résultats graphique suivant :

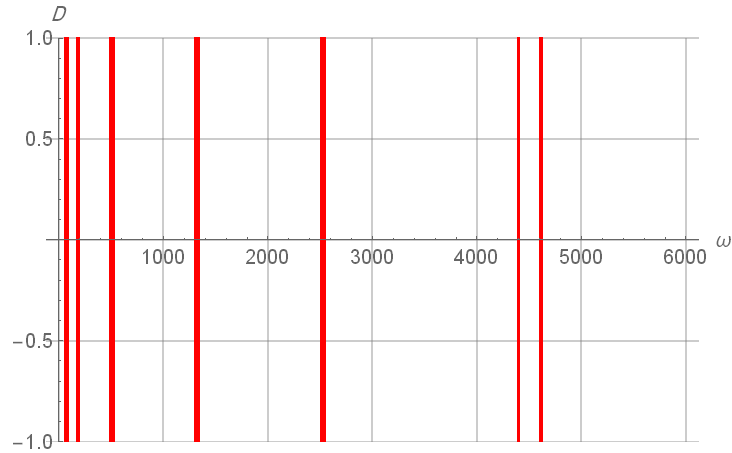
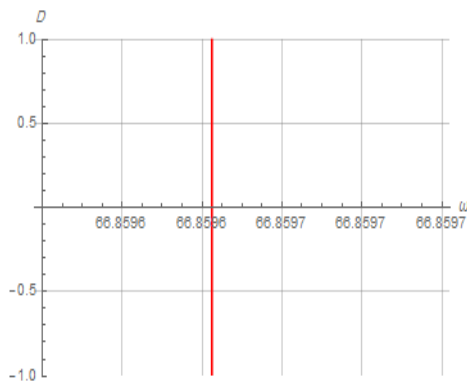
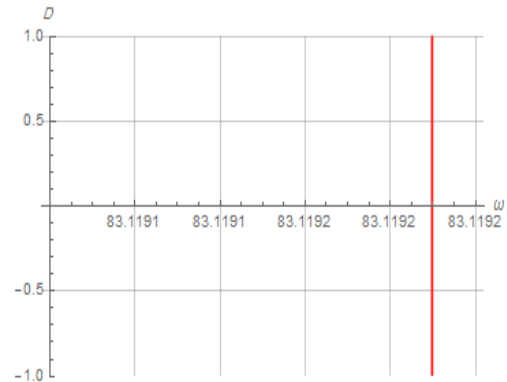


Fig.II.5 les racines de déterminant de la matrice du système d'équation (II.10)

L'aide de logiciel **Mathematica** on peut déterminer les racines qui représentent les fréquences propres de la matrice du système (II.10) graphiquement et on trouve les valeurs suivantes.

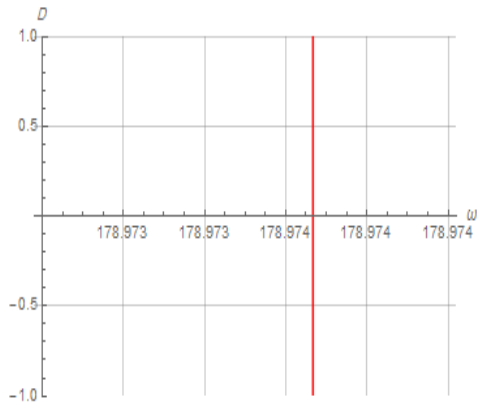


$\omega_1 = 66.85965$

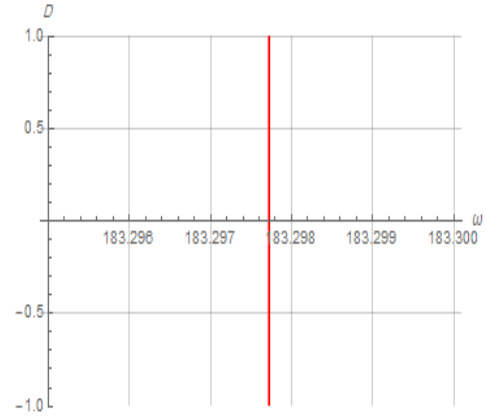


$\omega_2 = 83.11915$

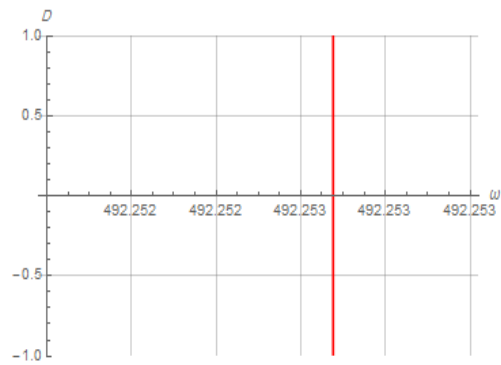
Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq



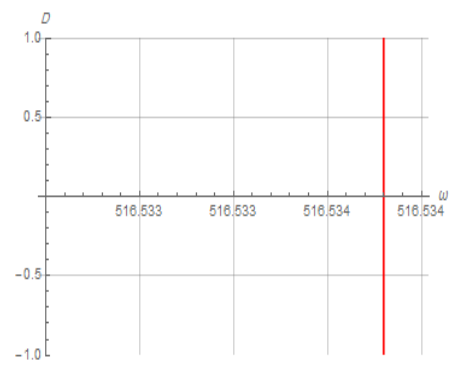
$\omega_3 = 178.97$



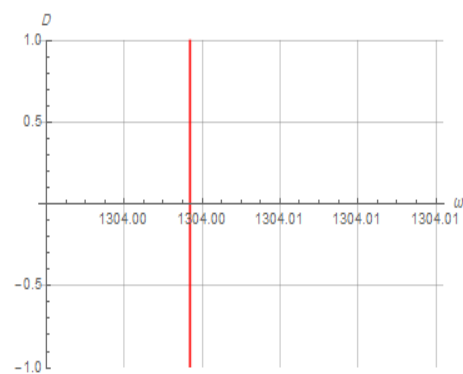
$\omega_4 = 183.3$



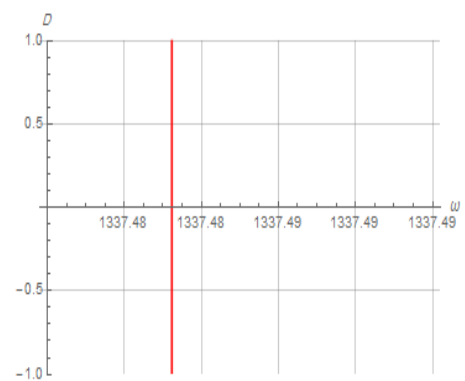
$\omega_5 = 492.25$



$\omega_6 = 516.53$



$\omega_7 = 1304.00$



$\omega_8 = 1337.48$

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

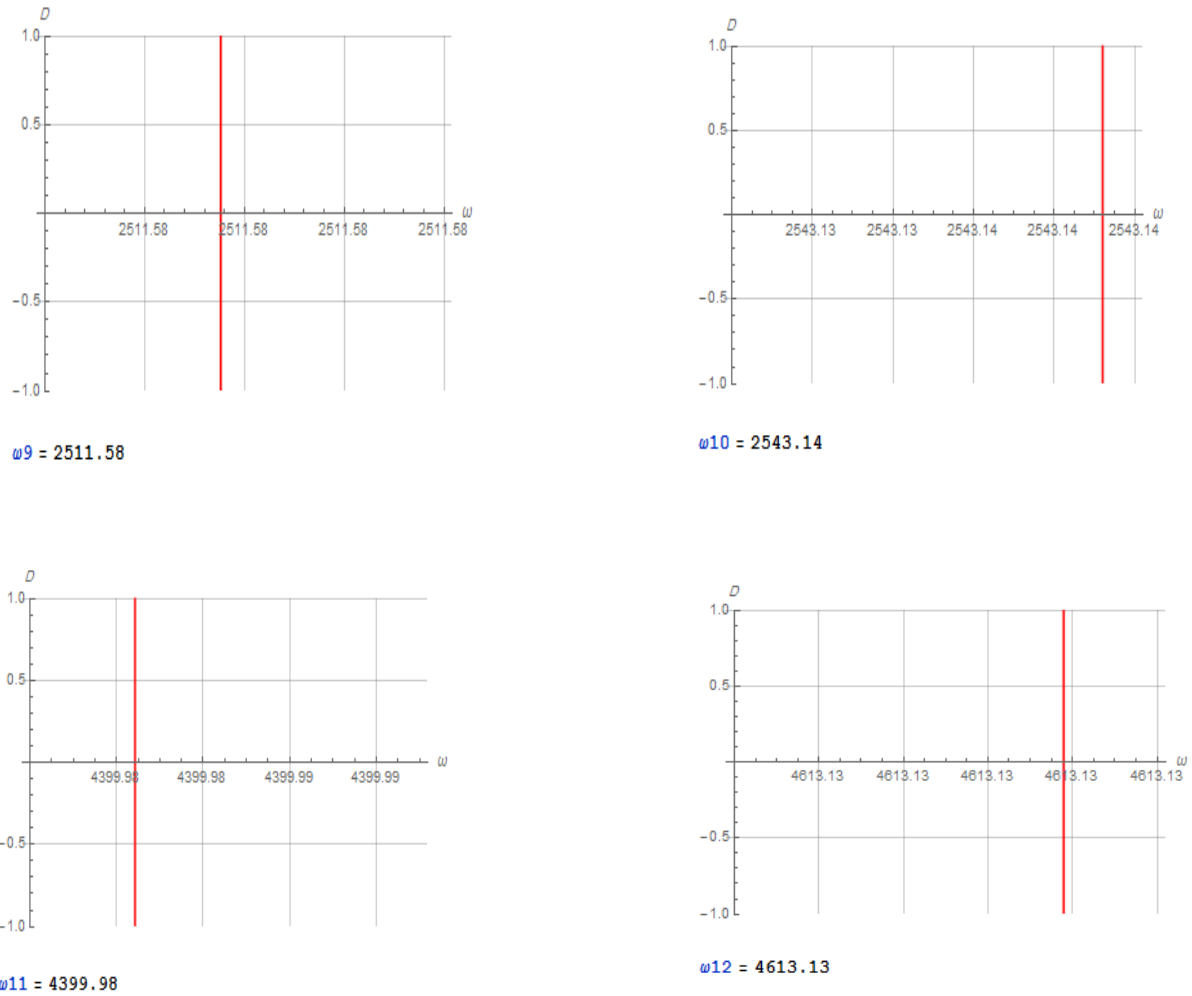


Figure II.6 les valeurs de fréquences propres graphiquement

II.2 Détermination des déformées propres de la poutre reposant sur sol élastique :

Examinons maintenant le problème de la détermination des déformées propre de la poutre reposant sur milieu élastique de type de Boussinesq, pour déterminer la déformée propre relative à la fréquence propre, on fixe l'une des variable du système à un et on supprime l'équation correspondante.

Le système résultant devient de taille $(n+1) \times (n+1)$ et la colonne correspondante à la variable exclue devient vecteur libre. La procédure de détermination des déformées propre. À l'aide de « Mathematica », a donné les formes des déformées propres suivantes tableau II.3

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

Tableau II.3 les formes propres de la poutre reposant sur un milieu élastique de type Boussinesq

ω_i (Hz)	y_i (mm)	Déformées propre
$\omega_1 = 66.86$	1.258	
	1.533	
	1.570	
	0.908	
	-0.910	
	-1.571	
	-1.530	
	-1.249	
	-1.011	
	0.002	
$\omega_2 = 83.12$	7.779	
	13.664	
	19.502	
	24.116	
	24.122	
	19.508	
	13.657	
	7.7342	
	1.068	
	-0.008	
$\omega_3 = 178.97$	0.558	
	0.2003	
	-0.083	
	-0.278	
	-0.183	
	-0.104	
	0.213	
	0.566	
	1.169	

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

$\omega_4 = 183.30$	0.0019	
	0.523	
	0.257	
	0.0533	
	-0.0368	
	0.0365	
	-0.0534	
	-0.256	
	-0.522	
	-0.999	
	-0.00005	
$\omega_5 = 492.25$	-0.384	
	-0.916	
	-0.628	
	-0.022	
	0.022	
	0.628	
	0.915	
	0.383	
	-0.999	
	0.00003	
$\omega_6 = 516.53$	-0.389	
	-0.876	
	-0.490	
	0.245	
	0.232	
	-0.345	
	-0.639	
	-0.281	
	0.747	
	0.00003	

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

$\omega_7 = 1304.00$	-1,641	
	-0,185	
	1,682	
	0,357	
	0,357	
	-1,682	
	0,185	
	1,640	
	-0,999	
	-2,17E-05	
	$\omega_8 = 1337.48$	
-0.164		
1.689		
-0.106		
-0.106		
1.689		
-0.164		
-1.783		
1.0001		
2.149		
$\omega_9 = 2511.58$		-2.785
	3.524	
	-1.915	
	-1.309	
	1.309	
	1.915	
	-3.524	
	2.785	
	-0.999	
	0.00001	

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

$\omega_{10} = 2543.14$	3.552	
	-1.941	
	-0.526	
	-0.526	
	-1.941	
	3.552	
	-2.658	
	0.999	
	4.335	
	$\omega_{11} = 4399.98$	
9,759		
-21,9		
49,537		
-49,537		
21,938		
-9,760		
4,335		
-1,0002		
-0,0002		
$\omega_{12} = 4613.13$	63,763	
	-94,753	
	307,265	
	-457,114	
	-457,087	
	307,249	
	-94,739	
	63,324	
	1,005	
	6,173	

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

A noter que les deux premiers modes propres relatifs aux fréquences propres ω_1 et ω_2 représentent les phénomènes du pompage du tangage de la poutre tableaux II.3

II.3 Détermination de la réponse de la poutre due aux charges dynamiques extérieures

Dans cette partie on va examiner le problème lié à la réponse de la poutre d'une charge dynamique extérieure. On sait que les charges dynamiques engendrent dans les structures des contraintes, des déformations et des déplacements qui varient dans le temps. Afin de s'assurer de la fiabilité de l'approche pour traiter les divers cas de chargements dynamiques, on utilise trois cas ainsi que la vérification de résonance.

II.3.1 Excitation harmonique extérieures

Premier cas

La poutre est soumise à une charge dynamique sinusoïdale appliquée aux points 4 présentés par l'expression suivante Annexe 1:

$$P_4 = F_0 \cos(2\pi\omega t)$$

Où :

F_0 est l'amplitude en kg, ω est la fréquence d'excitation en Hz, t est le temps. La réponse de la poutre (c.à.d. ses déformées dans le temps de son excitation par la charge dynamique), avec $F_0=100$ kg et $\omega = 200$ Hz.

La réponse de la poutre est illustrée sur la Figure II.6

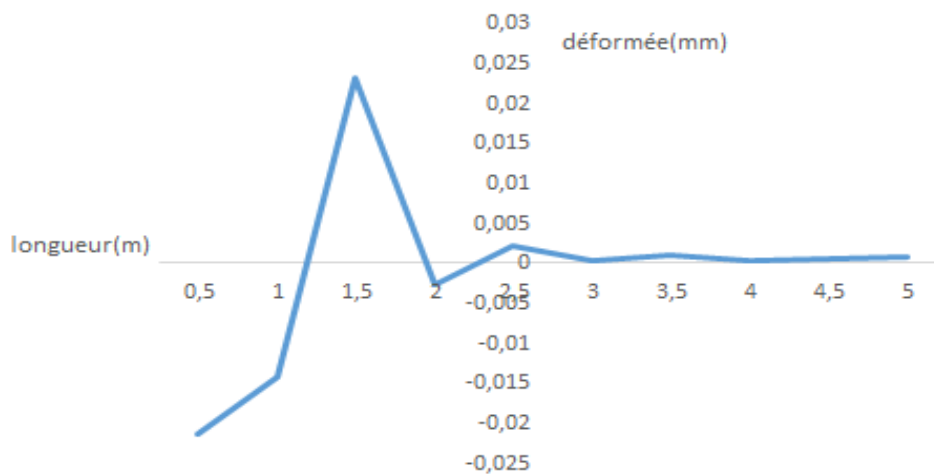


Figure II.7 Réponse de la poutre au point 4

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

Deuxième cas

La poutre est soumise à une charge dynamique sinusoïdale appliquée aux points 3 et 8 représenté par l'expression suivante Annexe 2:

$$P_3 = P_8 = F_0 \cos(2\pi\omega t)$$

Avec $F_0 = 100 \text{ kg}$ $\omega = 200 \text{ Hz}$

La figure ci-dessous montre les déformées de la poutre en chaque instant de temps aux points 3 et 8.

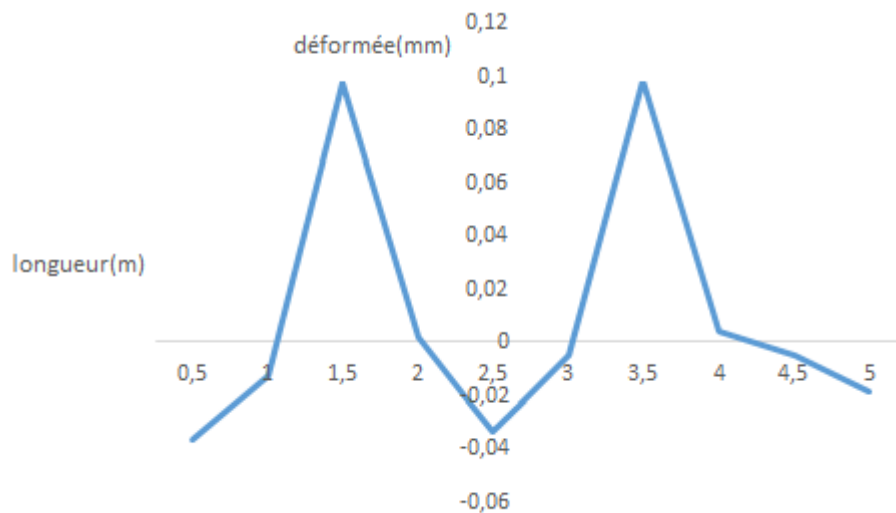


Figure II.8 Réponse de la poutre aux points 3 et 8

Troisième cas

La poutre est soumise à deux charges dynamiques sinusoïdales appliquées aux points 2 et 7 avec la même amplitude et fréquences d'excitations différentes sont présentées par l'expression suivante Annexe 3:

$$P_2 = F_0 \cos(2\pi\omega_1 t)$$

$$P_7 = F_0 \cos(2\pi\omega_2 t)$$

La réponse de la poutre pour ce cas de chargement se détermine de la même manière que précédemment ajoutons que l'expression de la fréquence d'excitation à introduire dans la matrice du système d'équation (II.3) est donnée par :

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

Chapitre II : Calcul dynamique d'une poutre déformable reposant sur milieu élastique de type Boussinesq

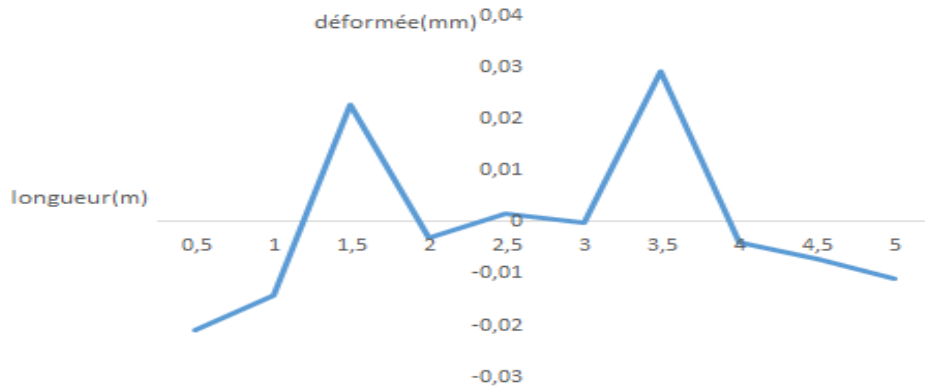


Figure II.9 Réponse de la poutre aux points 2 et 7 avec deux forces dynamique différentes

II.3.2 Vérification de la résonance

Vérification de la résonance a été fait et dans laquelle on a remarqué que si la poutre est existée à l'une des fréquences propres, sa réponse prendra des valeurs énormes ce qui entrain sa destruction.

Cette vérification de la résonance renforce l'idée de l'efficacité et la fiabilité de l'approche utilisée pour traiter un problème dynamique d'une poutre en contact avec un milieu élastique de type Boussinesq.

Conclusion

L'étude de apportée dans ce travail est accomplie par une approche semi analytique basant sur la méthode de Gemochkin. Cette approche permet de déterminer les fréquences et modes propres d'une poutre reposant sur semi infini élastique, ainsi que les déplacements de la poutre dues aux excitations harmoniques extérieures, la vérification de résonance toutes ces déterminations et vérification montrent l'efficacité de cette approche et la certitude de résultats obtenus.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'étude apportée dans ce travail concernant le calcul dynamique d'une poutre de dimension et de rigidité finies reposant sur un milieu élastique de type Boussinesq et faite par une approche semi-analytique.

Le système poutre milieu élastique, est discrétisé en un système d'élément dont le nombre est proportionnel au degré de précision désirée.

Le contact parfait poutre milieu élastique est remplacé par un contact partiel aux points déterminée (nœuds).

La solution du problème à modèle mathématique formé par des expressions analytique et algorithmes numérique est accomplie à l'aide des programmes Mathematica et Fortran.

L'étude fait est un peu compliquée du fait que nous avons pris comme milieu élastique un type de Boussinesq où la déformation est inversement proportionnelle avec l'éloignement du point d'application de la charge extérieure.

En compte de certains considérations comme les caractéristiques mécaniques de la poutre et du milieu élastique, les forces de frottement dans la zone de contact. Cette approche permet de déterminer les fréquences et modes propres d'une poutre reposant sur semi infini élastique (type de Boussinesq), les déplacements de la poutre dues aux excitations harmoniques extérieures, ainsi que la vérification de résonance, mais l'analyse des résultats de calcul obtenus, ainsi que la vérification faites nous laissent aucun doute sur sa fiabilité et son importance.

Enfin cette approche permettrait l'étude élargie et approfondie de ce problème (étude dynamique d'une poutre en contact avec un milieu élastique) en tenant compte de la masse du milieu élastique, de l'amortissement et des forces de frottements dans la zone de contact poutre milieu élastique des déplacements horizontaux du caractère ondulatoire de vitesse...etc

Annexe 1

Les éléments de la matrice A sont

-46.236579	-44.541964	-31.562332	-19.092973	-10.681531	-7.092915	-5.454428	-4.475504	-3.806082	-3.315352	-17812.830842	9896.017134
-33.665115	-26.941448	-21.702198	-13.418395	-7.442212	-4.891081	-3.747396	-3.070377	-2.609149	-2.271721	-13854.423988	9896.017134
-19.292882	-17.456390	-8.963086	-7.516373	-4.239333	-2.753406	-2.104831	-1.725052	-1.466748	-1.277760	-9896.017134	9896.017134
-7.566361	-7.049217	-4.753386	0.991510	-1.013117	-.815188	-0.662151	-0.560466	-0.485853	0-.428714	-5937.610281	9896.017134
-.715432	-.605721	.000000	.560298	4.512801	.901844	0.377487	0.02298	0.161749	0.123256	-1979.203427	9896.017134
.123256	.161749	.229827	.377487	.901844	4.512801	.560298	-.242500	-0.605721	-0.715432	1979.203427	9896.017134
-.428714	-.485853	-.560466	-.662151	-.815188	-1.013117	.991510	-4.753386	-7.049217	-7.566361	5937.610281	9896.017134
-1.277760	-1.466748	-1.725052	-2.104831	-2.753406	-4.239333	-7.516373	-8.963086	-17.456390	-19.292882	9896.017134	9896.017134
-2.271721	-2.609149	-3.070377	-3.747396	-4.891081	-7.442212	-13.418395	-21.702198	-26.941448	-33.665115	13854.423988	9896.017134
-3.315352	-3.806082	-4.475504	-5.454428	-7.092915	-10.681531	-19.092973	-31.562332	-44.541964	-46.236579	17812.830842	9896.017134
4.431522	4.283417	3.294641	2.047476	.692757	-.692757	-2.047476	-3.294641	-4.283417	-4.431522	79199.999571	.000000
-3.690887	-4.278964	-4.511915	-4.628929	-4.679944	-4.679944	-4.628929	-4.511915	-4.278964	-3.690887	.000000	60000.002384

Les éléments du vecteur b à chaque instant du temps

.000000 .000000 -.040422 .000000 .000000 .000000 -.040422 .000000 .000000 .000000 .000000 .000000

1 les valeurs des efforts de liaison sont

X(1)= .00375715
X(2)= .00239709
X(3)= -.00982149
X(4)= .00150157
X(5)= .00176365
X(6)= .00233379
X(7)= -.00962085
X(8)= .00130570
X(9)= .00061188
X(10)= .00189910
X(11)= -.00000002
X(12)= -.00000038

Annexe 2

Les éléments de la matrice A sont

-28.236579	-39.541964	-45.562332	-30.092973	-15.681531	-7.092915	-6.454428	-5.475504	-3.806082	-3.315352	7812.830842	896.017134
-23.665115	-22.941448	-26.702198	-18.418395	-10.442212	-4.891081	-4.747396	-3.070377	-2.609149	-2.271721	-3854.423988	896.017134
-19.292882	-17.456390	-8.963086	-5.16373	6.239333	-2.753406	-1.104831	-1.725052	-1.466748	-1.277760	-896.017134	896.017134
-5.566361	-7.049217	-4.753386	0.991510	-5.013117	-815188	-0.662151	-0.560466	-0.485853	0-428714	-937.610281	896.017134
-.715432	-.605721	.000000	.560298	4.512801	.901844	0.377487	0.02298	0.161749	0.123256	-979.203427	896.017134
.123256	.161749	.229827	.377487	.901844	4.512801	.560298	-.242500	-0.605721	-0.7154	979.203427	896.017134
-.428714	-.485853	-.560466	-.662151	-.815188	-1.013117	.991510	-4.753386	-7.049217	-7.566361	5937.610281	896.017134
-1.277760	-1.466748	-1.725052	-2.104831	-2.753406	-4.239333	-7.516373	-8.963086	-17.456390	-19.292882	9896.017134	996.017134
-0.271721	-2.609149	-3.070377	-3.747396	-4.891081	-7.442212	-13.418395	-21.702198	-26.941448	-33.665115	3854.423988	996.017134
-5.315352	-3.806082	-4.475504	-5.454428	-7.092915	-10.681531	-19.092973	-31.562332	-44.541964	-46.236579	7812.830842	896.017134
4.431522	4.283417	3.294641	2.047476	.692757	-.692757	-2.047476	-3.294641	-4.283417	-4.431522	9199.999571	.000000
-3.690887	-5.278964	-2.511915	-7.628929	-5.679944	-4.679944	-4.628929	-4.511915	-4.278964	-3.690887	.000000	50000.002384

Les éléments du vecteur b à chaque instant du temps

-.56608	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	-.06548	.000000	000000
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	--------

1 les valeurs des efforts de liaison sont

X(1)= .00375715
X(2)= .00239709
X(3)= -.00982149
X(4)= .00150157
X(5)= .00176365
X(6)= .00233379
X(7)= -.00962085
X(8)= .00130570
X(9)= .00061188
X(10)= .00189910
X(11)= -.00000002
X(12)= -.00000038

Annexe 3

Les éléments de la matrice A sont

-40.428714	-485853	-.560466	-.662151	-.81518	-1.013117	.991510	-4.753386	-7.049217	-7.566361	5937.610281	9896.017134	
-31.277760	-1.466748	-1.725052	-2.104831	-2.753406	-4.239333	-7.516373	-8.963086	-17.456390	-19.292882	9896.017134	9896.017134	
-29.271721	-2.609149	-3.070377	-3.747396	-4.891081	-7.442212	-13.418395	-21.702198	-26.941448	-33.665115	13854.423988	9896.017134	
-13.315352	-3.806082	-4.475504	-5.454428	-7.092915	-10.681531	-19.092973	-31.562332	-44.541964	-46.236579	17812.830842	9896.017134	
4.431522	4.283417	3.294641	2.047476	.692757	-.692757	-2.047476	-3.294641	-4.283417	-4.431522	79199.999571	.000000	
-3.690887	-4.278964	-4.511915	-4.628929	-4.679944	-4.679944	-4.628929	-4.511915	-4.2789	-3.690887	.000000	.002384	
-76.236579	-44.541964	-31.562332	-19.092973	-10.681531	-7.092915	-5.454428	-4.475504	-3.806082	-3.315352	-17812.830842	9896.017134	
-73.665115	-26.941448	-21.702198	-13.418395	-7.442212	-4.891081	-3.747396	-3.070377	-2.609149	-2.271721	-13854.423988	9896.017134	
-69.292882	-17.456390	-8.963086	-7.516373	-4.239333	-2.753406	-2.104831	-1.725052	-1.466748	-1.277760	-9896.017134	9896.017134	
-66.566361	-7.049217	-4.753386	0.991510	-1.013117	-.815188	-0.662151	-0.560466	-0.485853	0-.428714	-5937.610281	9896.017134	
-50.715432	-.605721	7.000012	.560298	4.512801	.901844	0.377487	0.02298	0.161749	0.123256	-1979.203427	9896.017134	
45.123256	.161749	.229827	.377487	.901844	4.51280	.560298	-.242500	-0.605721	-0.715432	1979.203427	9896.017134	

Les éléments du vecteur b à chaque instant du temps

.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	-.002246	-.01112
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	----------	---------

1 les valeurs des efforts de liaison sont

X(1)=	.00375715
X(2)=	.00239709
X(3)=	-.00982149
X(4)=	.00150157
X(5)=	.00176365
X(6)=	.00233379
X(7)=	-.00962085
X(8)=	.00130570
X(9)=	.00061188
X(10)=	.00189910
X(11)=	-.00000002
X(12)=	-.00000038

Références

- [1] M. Géradin, D. Rixen, Théorie des vibrations, Masson, 1996
- [2] D.J. Inman, Engineering vibration, Prentice-Hall, 1996
- [3] S.S. Rao, Mechanical vibration, Addison-Wesley, 1995
- [4] B.N. Gemochkin, A.P. Sinitsein (1962), Les methods pratiques du calcul des poutres de fondations et plaques reposant sur milieux élastiques, Moscou : Stroiizdat, 240 pages.
- [5] M.I. Gourbonov-Posadov, T.A. Malikova, V.I. Solomin (1984), Calcul des structures reposant sur milieux élastiques, Moscou : Stroiizdat, 699 pages.
- [6] S. Timoshenko, S Woinovsky (1959), Theory of plates and shells, Moscou : Kreiger, 632 pages. S.V. Bosakov (2002), Calcul statique des plaques reposant sur milieu élastique, Minsk : BNTU, 127 pages.
- [7] S.V. Bosakov (2002), Calcul statique des plaques reposant sur milieu élastique, Minsk : BNTU, 127 pages.
- [8] L.A. Galin (1976), Développement de la théorie des problèmes de contact en U.R.S.S., Moscou: Nayka, 496 pages

Les calculs des problèmes de contact à la dynamique sont employés dans l'étude des poutres et des plaques reposons sur milieu élastique, celle des constructions hydraulique et de certaines pièces de machines soumises aux efforts dynamiques. On présente dans ce sujet une qui sert au calcule dynamique d'une poutre reposons sur milieu élastique, car ce type de structures est largement utilisé dans les constructions. En outre, le développement technologique augmente les effets dynamiques sur les constructions, ce qui exige une protection antivibratoire. D'où le besoin d'améliorer les méthodes de calcul existantes de telles structures ou de proposée de nouvelles méthode de calcul plus efficace. C'est pourquoi l'approche proposée permet de déterminer simultanément les fréquences et forme propre d'une poutre reposant sur milieu élastique de type de Boussinesq ainsi que sa réponse à des charge dynamique sinusoïdales fixes

Mot clés : poutre, milieu élastique, fréquence et formes propres

Calculations of the problems of contact with the dynamics are used in the study of the beams and plates rest on elastic medium, that of the hydraulic constructions and some parts of machines subjected to the dynamic forces. We present in this subject one that serves the dynamic calculation of a beam rest on elastic medium, because this type of structures is widely used in constructions. In addition, the technological development increases the dynamic effects on the constructions, which requires an anti-vibratory protection. Hence the need to improve the existing calculation methods of such structures or to propose new, more efficient calculation methods. This is why the proposed approach makes it possible to simultaneously determine the frequencies and natural form of a Boussinesq type elastic spring-based beam as well as its response to fixed sinusoidal dynamic loads.

Key words:

Beames, elastic medium, frequencies and eigen modes