



UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA  
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière  
Département de Physique

---

## Mémoire

MASTER / ACADEMIQUE

Domaine: Science de la Matière

Filière: Physique

Spécialité: Physique de Rayonnement spectroscopie et optoélectronique

Présenté par: Meriem BENAMOR et Kaoutar GHETTAS

Thème:

# Distribution des microchamps électriques de $Li^+$ Plasma avec tenir compte de la structure ionique.

Thèse soutenue le 05/06/2018 devant le jury composé de:

Mr: T.Chohra	MAA, UKM Ouargla	Président
Mr: H.Ababsa	MAB, UKM Ouargla	Examineur
Mr: S. Douis	MAA, UKM Ouargla	Directeur De mémoire

Année Universitaire: 2017/2018



# Distribution des microchamps électriques de $Li^+$ Plasma avec tenir compte de la structure ionique.

Présenté par: Meriem BENAMOR et Kaoutar GHETTAS

Directeur De mémoire: Said DOUIS

2017/2018

## ملخص

يؤثر توزيع الحقول الكهربائية المجهرية على العديد من مجالات البلازما (التأين، إعادة التركيب والتفكك...). الهدف من هذا العمل هو حساب توزيع الحقول الكهربائية المجهرية بأخذ بعين الاعتبار تأثير البنية الأيونية. سنأخذ كمون Hellmann-Gurskii-Krasko للتفاعل بين الإلكترون والأيون المركزي أو الشائبة، ثم سنحل عددياً المعادلة التكاملية الغير خطية للطاقة الكامنة لبلازما  $Li^+$ ، بواسطة طريقة النقطة الثابتة، لإيجاد الطاقة الكامنة التي تمكننا من حساب توزيع الحقول الكهربائية المجهرية.

## Résumé

*La distribution des micro-champs électriques influe sur de nombreux processus élémentaires du plasma (ionisation, recombinaison et dissociation). L'objectif visé dans ce sujet est le calcul de micro-champs électriques en tenant compte de la structure ionique. Nous prendrons le Pseudo-potentiel de Hellmann-Gurskii-Krasko comme une interaction entre l'électron et l'ion, ensuite nous résoudrons numériquement l'équation intégrale de l'énergie potentielle de  $Li^+$  Plasma par la méthode de point fixe, pour déterminer l'énergie potentielle qui permettant de calculer la distribution du micro-champ électrique.*

## Abstract:

*The electric micro fields distribution influence on many elementary plasma processes (ionization, recombination and dissociation). Our aim in this work is the calculation of the electric micro-fields taking into account the ionic structure. We will take the Hellmann-Gurskii-Krasko Pseudo-potential as an interaction between the electron and the ion, then we will numerically solve the non linear integral equation of the potential energy of  $Li^+$  Plasma by the fixed point method, to determine the potential energy, that allows to calculate the electric micro field distribution.*

# Dédicace

A ma mère

A mon père

## Remerciements

*Tout d'abord; je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donnée la patience et l'énergie pour poursuivre ce travail. Je tiens en premier lieu à remercier monsieur: SAID DOUIS de m'avoir fait l'honneur d'examiner ce mémoire et d'en être rapporteur. Je tiens à le remercier aussi pour la pertinence de ses remarques et sa patience pendant ce travail. J'adresse également de vifs remerciements à Mademoiselle Thoria CHOIRA d'avoir présidé le jury de soutenance. J'adresse mes remerciements à Mademoiselle Hakima ABABSA qui m'a fait l'honneur de juger ce travail. Je ne pourrais terminer sans remercier ma mère et mon père mon frère et ma sœur et toute ma famille qui m'ont soutenue et encouragée pour terminer ce travail. Enfin, Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire*

# Table des matières

<b>Liste des Figures</b>	<b>3</b>
<b>1 introduction générale</b>	<b>4</b>
<b>2 Définitions Générales</b>	<b>6</b>
2.1 Définition du plasma physique . . . . .	6
2.2 Modèle du plasma à une composante (OCP) . . . . .	6
2.3 Paramètres importants dans le modèle du plasma à une composante (OCP)	7
2.3.1 Le rayon de la sphère ionique $a$ (Rayon de Wigner-Seitz) . . . . .	7
2.3.2 Longueur de Landau (longueur critique d'interaction binaire) . . . . .	8
2.3.3 Longueur d'écrantage de Debye . . . . .	8
2.3.4 Le couplage $\Gamma$ . . . . .	9
2.3.5 Sphère de Debye . . . . .	9
2.3.6 Le degré de quantité $\eta$ . . . . .	10
2.3.7 Fréquence de plasma . . . . .	10
2.3.8 Théorie du champ moyen . . . . .	11
2.4 Facteur de structure statique: . . . . .	12
<b>3 Résolution numérique de l'équation intégrale de l'énergie potentielle</b>	<b>13</b>
3.1 Etablissement de l'équation intégrale d'un plasma contenant une impureté:	13
3.1.1 Adimensionnement de l'équation intégrale de l'énergie potentielle: .	18
3.2 Résolution numérique de l'équation intégrale d'un plasma contenant une im-	
pureté: . . . . .	19
3.2.1 Résolution avec La méthode du point fixe (MPF): . . . . .	19
3.3 La fonction radiale: . . . . .	23
3.3.1 Résultats numérique . . . . .	24
<b>4 Distribution du microchamp électrique</b>	<b>26</b>
4.1 Distribution de Holtmark: . . . . .	26
4.2 Distribution de Barange et Moser: . . . . .	27
4.2.1 Application de la Distribution de Baranger Moser : . . . . .	29

	2
<b>5 Conclusion générale</b>	<b>31</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>33</b>
<b>A Loi de distribution des vitesses de Maxwell:</b>	<b>35</b>
<b>B Etablissement de l'équation intégrale pour l'énergie potentielle</b>	<b>37</b>



# Liste des Figures

2.1	Modèle du plasma à une composante (OCP) . . . . .	7
2.2	Calcul de la force électrique par l'application de la théorie du champ moyen . . . . .	11
3.1	L'interaction de l'électron situé à la position $\vec{r}$ avec le plasma . . . . .	14
3.2	Organigramme de la résolution avec la méthode de point fixe (MPF) . . . . .	23
3.3	Comparaison entre le pseudo-potentiel de Hellmann-Gurskii-Krasko (HGK) et le pseudo-potentiel de Deutsch écranté . . . . .	24
3.4	Energie Potentielle $Y(x)$ de $Li^+$ Pour quelques valeurs de la température et de la densité électronique . . . . .	25
3.5	Fonction Radiale $g_{11}(x)$ de $Li^+$ Pour quelques valeurs de la température et de la densité électronique . . . . .	25
4.1	La distribution du microchamp électrique de Barange Moser pour $Z = 1$ , $T = 502.5K$ et $n_e = 8.12 \times 10^{11}cm^{-3}$ . . . . .	30
4.2	La distribution du microchamp électrique de Barange et Moser pour différentes valeurs de $n_e$ et $T$ . . . . .	30
B.1	Représentation de l'angle $\psi$ . . . . .	39

# Chapitre 1

## introduction générale

Le plasma est un objet relativement récent. Il entre dans le domaine physique dès XXe siècle, le plasma ne traite pas oculaire par ce qu'il leur phénomènes entraîne dans un petite taille qui absorbe un grand nombre des particules par conséquence en peut traiter statistique [1].

Le terme plasma a été introduit en physique en 1928 par le physicien américain I. Langmuir pour de signe, dans le tube à décharge, certaines région équipotentielle contenant un gaz ionisé électriquement neutre. Par la suite, ce mot a été utilisé, surtout en astrophysique pour désigner un état dilué de la matière [2].

Ce mémoire constitue un travail théorique et numérique, concernait la détermination des propriétés statique d'un plasma, contient une impureté. Pour déterminer l'énergie potentielle, qui permettant de calculer la distribution des micro-champs électrique, en basant le traitement sur l'approximation du champ moyen, au sein de modèle de plasma à une composante (OCP). L'objectif visé dans ce sujet, est l'étude de l'effet de la structure

ionique sur la distribution de micro-champs électrique. Nous prendrons le Pseudo potentiel de Hellmann-curskii-krasko comme interaction entre l'électron et l'ion.

D'abord, en va rappeler en premier chapitre les différents paramètres nécessaires, pour décrire un plasma à une composante (OCP). Ensuite, nous expliquons la théorie du champ moyen.

Aussi, dans le deuxième chapitre nous allons établie l'équation intégrale d'un plasma, contenant une impéritie et nous résoudre numériquement cette équation intégrale par la méthode du point fixe.

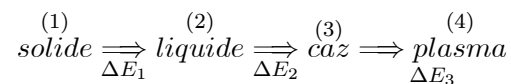
En fin, nous calculerons les distributions des micro-champs électriques sur l'impureté dans  $Li^+$  plasma.

## Chapitre 2

# Définitions Générales

### 2.1 Définition du plasma physique

Un plasma est un gaz ionisé. Comme tel, il est donc constitué en général d'électrons, d'ions, d'espèces atomiques ou moléculaires neutres et de photons. Un gaz ionisé étant obtenu par apport d'énergie à un gaz, les plasmas sont souvent présentes comme un "4ème état" de la matière, faisant suite aux phases solide, liquide et gazeuse :



Le passage d'un état à l'autre étant réalisé par un certain apport d'énergie  $\Delta E$  [3].

### 2.2 Modèle du plasma à une composante (OCP)

Le plasma totalement ionisé et composé d'électrons et des ions positif, la fraction en masse de l'ion à celle de l'électron est de l'ordre de  $2 \times 10^3$  ou plus. Pour cette raison, nous

pouvons ne pas tenir compte des effets des mouvement des ions devant ceux des électrons. En effet d'exemple pour évaluer la conductivité électrique d'un plasma, il est d'usage de considérer que le courant est seulement transporté par les électrons. Dans nous pouvons considérer l'ensemble des ions comme un fond continu électriquement positif.

Ces considérations et hypothèses sont à la base de la construction du modèle de plasma à une composante (OCP)[4].

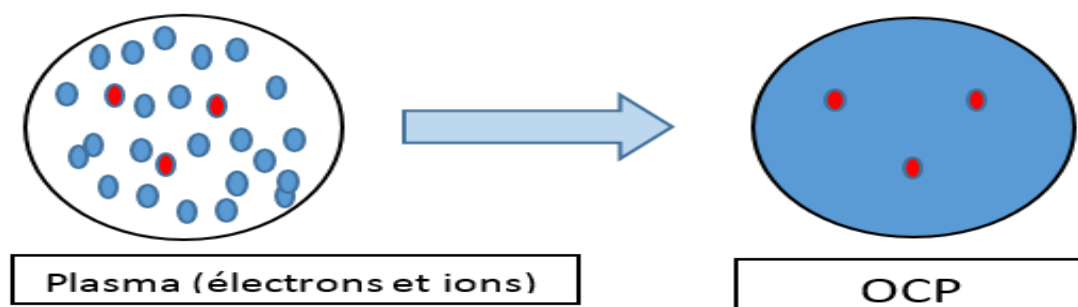


Figure 2.1: Modèle du plasma à une composante (OCP)

## 2.3 Paramètres importants dans le modèle du plasma à une composante (OCP)

### 2.3.1 Le rayon de la sphère ionique $a$ (Rayon de Wigner-Seitz)

le rayon de la sphère ionique  $a$  est de l'ordre de la distance moyenne inter-électronique:

$$a = \left( \frac{3}{4\pi n_i} \right)^{1/3} \quad (2.1)$$

ou  $n_e$  la densité des électrons que représente le nombre d'électron par unité de volume:  
 $n = N/\Omega$ , ou  $N$  est le nombre d'électrons et  $\Omega$  est le volume totale de plasma.[4].

### 2.3.2 Longueur de Landau (longueur critique d'interaction binaire)

la longueur de Landau  $l_L$  est la distance d'approche de deux électrons:

$$k_B T = \frac{e^2}{l_L} \implies l_L = \frac{e^2}{k_B T} \quad (2.2)$$

$T$  : la température

$K_B$  : la constante de Boltzman

$e$  : charge électrique

La longueur de Landau intervient dans l'analyse des phénomènes de collisions et des corrélations de position dans un plasma.[1].

### 2.3.3 Longueur d'écrantage de Debye

En Physique des plasmas, la longueur de Debye  $\lambda_D$  appelé aussi rayon de Debye ou longueur critique d'interaction collective, défini par la relation suivante [4].

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{K_B T}{4\pi n_e e^2}} \quad (2.3)$$

$K_B$  : constante de Boltzman

lors du traitement des ions plasmatique, en considérant aucun mouvement de l'ion, l'électron de plasma a créé un nuage net de charge opposée, autour de lui à distance égale à la longueur de Debye.[1].

### 2.3.4 Le couplage $\Gamma$

le couplage  $\Gamma$  est égal la longueur de Landau  $l_L$  sur la distance moyenne  $a$  [4].

$$\Gamma = \frac{l_L}{a} = \frac{e^2}{K_B T a} \quad (2.4)$$

- si  $\Gamma \ll 1$ , le couplage est faible, l'énergie cinétique est supérieure à l'énergie d'interaction coulombienne.
- si  $\Gamma > 1$ , le couplage est fort, l'énergie d'interaction coulombienne est supérieure à l'énergie cinétique.

### 2.3.5 Sphère de Debye

le nombre des électrons situés dans une sphère de rayon égale à la longueur de Debye est appelé le nombre de Debye  $N_D$  [4].

$$N_D = n_e \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 \quad (2.5)$$

- si  $N_D \ll 1$ , la sphère de Debye est faiblement peuplée, ce qui correspond à un plasma fortement couplé (régime de particules indépendantes).
- si  $N_D \gg 1$ , la sphère de Debye est très peuplée, ce qui correspond à un plasma faiblement couplé (régime du comportement collectif).

### 2.3.6 Le degré de quanticité $\eta$

Le degré de quanticité d'électron  $\eta$  est caractérisé par la fraction de l'onde thermique de Louis De broglie  $\lambda_T$  sur la distance moyenne  $a$  entre deux électrons. Donc:

$$\eta = \frac{\lambda_T}{a} = \frac{h}{a\sqrt{2\pi m_e k_B T}} \quad (2.6)$$

$h$  est la constante de planck, et  $m_e$  est la masse de l'électron[4].

-si  $\eta = \lambda_T/a \ll 1$  c'est à dire à température élevée, nous pouvons traiter le comportement des électrons classiquement.

-si  $\lambda_T/l_L \ll 1$  c'est à dire qu'à basse température, nous pouvons aussi faire un traitement classique puisque dans ces conditions les effets quantiques aux courtes distances, sont alors négligeables.

### 2.3.7 Fréquence de plasma

Le déplacement d'électrons peut perturber un plasma initialement neutre [2], A cause de ce déplacement un excès d'électrons apparaît sur une petite distance (par rapport à la longueur de Debye  $\lambda_D$ ). On peut dire que le mouvement des électrons se transforme en oscillations autour de la position d'équilibre. La fréquence de plasma  $\omega_p$  caractérise l'échelle temporelle, elle est donnée par la formule :

$$\omega_p = \left( \frac{4\pi n (Ze)^2}{m} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

A partir de  $\omega_p$  on peut définir, le temps caractéristique du plasma  $f_p$



$$f_p = 2\pi/\omega_p \quad (2.8)$$

Le temps de réponse d'un plasma soumis à une excitation correspond à un temps de l'ordre de  $\omega_p^{-1}$ .

### 2.3.8 Théorie du champ moyen

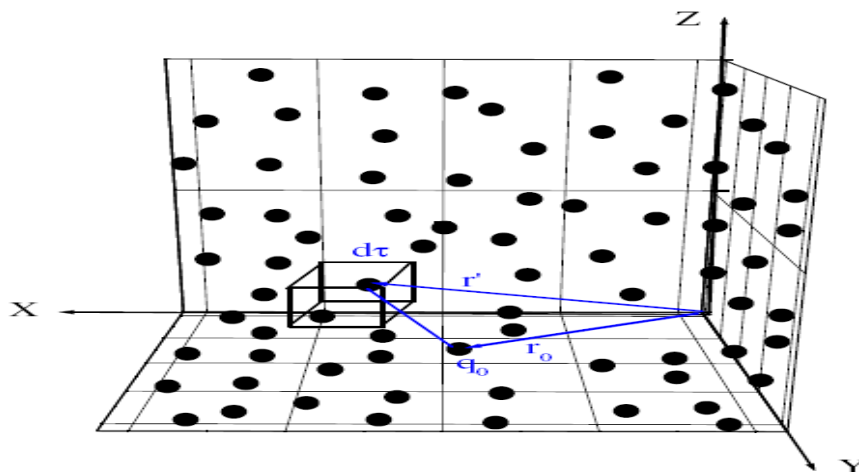


Figure 2.2: Calcul de la force électrique par l'application de la théorie du champ moyen

L'idée de la théorie du champ moyen et ses origines dans la littérature de physique est apparue dans le travail de P.Weiss dans les années 1900 et même plus tot dans l'ouvrage de P.Currie.

Le objectif de théorie du champ moyen est de simplifier l'analyse des problèmes à plusieurs corps en général et de transitions de phase en particulire en remplaçant la complexite des interaction entre les spins par moyenner les champs effectifs agissant sur les

spins individuels [4].

## 2.4 Facteur de structure statique:

Les Facteurs de structure statique (FSS) partielles du système sont définis comme les fonctions de corrélation statiques (à temps égal) des composantes de Fourier des densités partielles de charge microscopiques [5], Une combinaison linéaire des facteurs de structure partielle qui est d'une grande importance est le facteur de structure statique de charge-charge définie comme:

$$S_{zz}(k) = \frac{1}{N_e + zN_i} \langle \rho^z(\vec{k}) \rho^z(-\vec{k}) \rangle \geq \frac{S_{ee}(k) - 2\sqrt{z}S_{ei}(k) + zS_{ii}(k)}{z}$$

où  $\rho^z$  avec  $\rho^r$ ,  $Nr$ ,  $i$  nombre d'ions et d'électrons ( $e$ ). Dans l'équilibre thermodynamique (TE), les SSF partiels ( $k$ ) sont définis comme la transformée de Fourier des fonctions de répartition des paires  $hrs(r) = grs(r) - 1$ :

Le facteur de structure statique  $S(\vec{q})$  est ensuite introduit comme l'intégrale de  $S(\vec{q}, \omega)$  sur  $\omega$ .

$$S(\vec{q}) = \frac{1}{N} \int d\omega S(\vec{q}, \omega) \quad (2.9)$$

## Chapitre 3

# Résolution numérique de l'équation intégrale de l'énergie potentielle

### 3.1 Etablissement de l'équation intégrale d'un plasma contenant une impureté:

L'énergie potentielle  $V$  d'un électron situé à la distance ( $r$ ) de l'origine d'un plasma contenant une impureté (placée à l'origine de coordonnées) est constituée à partir de trois contributions: La première contribution  $V_{ab}(r)$  due à l'interaction de cet électron avec l'impureté de charge  $(+Ze^-)$ , la deuxième  $V_{ee}(r)$  concerne l'interaction de l'électron avec le reste des électrons de plasma, et en fin, la troisième contribution  $V_{ei}(r)$  concerne l'interaction de l'électron avec le fond continu des charges positives neutralisantes [6]

$$V(r) = V_{ab}^{HGK}(r) + V_{ee}(r) + V_{ei}(r) \quad (3.1)$$



valence peut être remplacé par un potentiel non classique (potentiel d'abstossungs) qui s'appelle maintenant le pseudo potentiel. L'idée de Hellmann était de remplacer l'exigence d'orthogonalité de valence orbitale par le noyau orbitales par le pseudo potentiel ce qui rendait les calculs mathématiques respectifs beaucoup plus simples.

Aux fins des calculs réels atomiques et moléculaires Hellmann a suggéré une formule simple analytique. Soit  $V$  la somme des potentiels électrostatiques, d'échange et de polarisation, représentant l'interaction entre un électron de valence et le noyau d'un atome. Soit  $V_p$  le potentiel de Abstossungs. Le potentiel  $V = V_H + V_p$  peut être exprimé [8]:

$$V_{ab}^{HGK}(r) = -\frac{Z_a Z_b}{r} \left(1 - e^{(-\alpha r)}\right) + \frac{|Z_a Z_b| A_{\text{exp}}}{R_{Cab}} e^{(-\alpha r)} \quad (3.2)$$

pour l'interaction électron-ion:  $Z_i = ze$ ,  $Z_e = -e$ :

$$V_{ei}^{HGK}(r) = -\frac{ze^2}{r} \left(1 - e^{(-\alpha r)}\right) + \frac{ze^2}{R_{Cei}} A_{\text{exp}} e^{(-\alpha r)} \quad (3.3)$$

où  $\alpha = \frac{1}{R_{Cei}}$  danc:

$$V_{ei}^{HGK}(r) = -\frac{ze^2}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{R_{Cei}}}\right) + \frac{ze^2 A_{\text{exp}}}{R_{Cei}} e^{-\frac{r}{R_{Cei}}} \quad (3.4)$$

ici  $z$  est la charge ionique du noyau, c'est-à-dire si le noyau contient des charges  $z$  positives et que le noyau contient  $N$  électrons alors  $z = Z - N$ . Les constantes  $A_{\text{exp}}$  et  $\alpha = \frac{1}{R_{Cei}}$  sont déterminées à partir de l'exigence que le potentiel  $V_H$  reproduise aussi précisément que possible le spectre d'énergie de l'électron de valence.

$R_{Cei} = r_{Cei} \times r_B$  où  $r_B$  est rayon de Bohr.

$r_{Cei}$  est défini comme un certain rayon caractérisant, la taille de la région de électron internes. est donné par le tableau[8]:

	<i>Li</i>	<i>Na</i>	<i>K</i>	<i>Rb</i>	<i>Cs</i>	<i>Be</i>	<i>Mg</i>	<i>Ca</i>	<i>Sr</i>	<i>Br</i>
<i>z</i>	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
<i>A<sub>exp</sub></i>	5.954	3.362	2.671	2.293	2.214	3.72	2.588	2.745	2.575	2.870
<i>r<sub>Cei</sub></i>	0.365	0.487	0.689	0.779	0.871	0.22	0.427	0.571	0.644	0.698
<i>r<sub>Cii</sub></i>	0.73	0.974	1.948	1.558	1.742	0.44	0.854	1.142	1.288	1.396

L'interaction électron-électron  $V_{ee}(r)$  est celui de coulomb, et s'écrit dans l'approximation du champ moyen comme:

$$V_{ee}(r) = e^2 \int \int f(\vec{r}, \vec{p}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{p}^3 d\vec{r}'^3 \quad (3.5)$$

telque:

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{N}{\Omega} \left( \frac{m_e \beta}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \right)} \quad (3.6)$$

est la distribution de Maxwell-Boltzmann (voir l'Appendice A) (qui est bien normalisée, c'est à dire que  $\int_{\mathbb{R}^3} f(v) dv = \left( \frac{m_e \beta}{2\pi} \right)^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\beta \left( \frac{m_e v^2}{2} \right)} dv = 1$ ) et  $N$  est le nombre totale d'électrons et  $\Omega$  est le volume du système et  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ .

alors l'énergie potentielle de l'électron avec le fond positif neutralisé la charge est donnée par:

$$V_{ei}(r) = -(n_i Z_i e) (e) \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'^3 = -n_i Z_i e^2 \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'^3 \quad (3.7)$$

ou  $n_i$  est la densité ionique (fond continu) et d'après la condition de neutralisante

on a:

$$n_e = Z_i \times n_i \quad (3.8)$$

telque  $Z_i$  représente le nombre de charge d'un ion du fond continu. Donc l'équation

3.7 devient:

$$V_{ei}(r) = -n_e e^2 \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'^3 \quad (3.9)$$

Donc l'expression de l'énergie potentielle d'un électron situé à la position  $r$  de l'origine est:

$$V(r) = V_{ei}^{HGK}(r) + e^2 \int \int \frac{f(\vec{r}, \vec{p})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{p}^3 d\vec{r}'^3 - n_e e^2 \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'^3 \quad (3.10)$$

Lorsque nous remplaçons l'équation 3.6 dans 3.10, et nous l'intégrons sur les impulsions, l'équation devient (voir l'Appendice A):

$$V(r) = V_{ei}^{HGK}(r) + n_e e^2 \int \frac{e^{-\beta V(\vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'^3 - n_e e^2 \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'^3 \quad (3.11)$$

et en fin lorsque nous remplaçons les équation 3.4 dans l'équation précédente 3.11

l'équation intégrale de l'énergie potentielle devient:

$$\begin{aligned} V(r) = & -\frac{ze^2}{r} (1 - e^{-\frac{r}{R_{Cei}}}) + \frac{ze^2 A_{\text{exp}} e^{-\frac{r}{R_{Cei}}}}{R_{Cei}} \\ & + n_e e^2 \int \frac{e^{-\beta V(r')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'^3 - n_e e^2 \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'^3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

et égale:

$$\begin{aligned} V(r) = & -\frac{ze^2}{r} (1 - e^{-\frac{r}{R_{Cei}}}) + \frac{ze^2 A_{\text{exp}} e^{-\frac{r}{R_{Cei}}}}{R_{Cei}} \\ & + n_e e^2 \int \frac{(e^{-\beta V(r')} - 1)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'^3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

En utilisant les coordonnées sphériques et après quelques simplification, nous trouvons l'équation suivante gouvernant ainsi l'énergie potentielle de l'électron à la distance  $r$

(voir l'Appendice B):

$$\begin{aligned}
V(r) = & -\frac{ze^2}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{R_{Cei}}}\right) + \frac{ze^2 A_{\text{exp}}}{R_{Cei}} e^{-\frac{r}{R_{Cei}}} \\
& + 4\pi n_e e^2 \int_0^\infty \frac{r'}{r} [(r+r') - |r-r'|] \left(e^{-\beta V(r')} - 1\right) dr' \quad (3.14)
\end{aligned}$$

donc l'énergie potentielle d'un électron situé à la distance  $r$  de l'origine est gouvernée par l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
V(r) = & -\frac{ze^2}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{R_{Cei}}}\right) + \frac{ze^2 A_{\text{exp}}}{R_{Cei}} e^{-\frac{r}{R_{Cei}}} \\
& + 4\pi n_e e^2 \int_0^\infty \frac{r'}{r} [(r+r') - |r-r'|] \left(e^{-\beta V(r')} - 1\right) dr' \quad (3.15)
\end{aligned}$$

### 3.1.1 Adimensionnement de l'équation intégrale de l'énergie potentielle:

pour éviter les problèmes rattachés aux unités des différents paramètres présents dans cette équation intégrale, il est commode d'exprimer l'équation 3.15 par une forme adimensionnée et ce, en adoptant les définitions et les changements suivants:  $Y_{ei}^{HGK}(x) = -\frac{aV_{ei}^{HGK}(r)}{Ze^2}$ ,  $x = r/a$ , telque  $a = (4\pi n_e/3)^{-1/3}$ ,  $\zeta = \frac{R_{Cei}}{a} = \frac{r_{Cei} \times a_B}{a}$ , où  $a_B = 0.529177249 \times 10^{-10} \text{ m}$  et  $\Gamma = \frac{\beta e^2}{a}$ .

alors le Pseudo-potentiel adimensionné de Hellmann-Gurski-Krasko (HGK) 3.4 est:

$$Y_{ei}^{HGK}(r) = \frac{1}{x} \left(1 - e^{-\frac{x}{\zeta}}\right) - \frac{A_{\text{exp}}}{\zeta} e^{-\frac{x}{\zeta}} \quad (3.16)$$

donc l'équation intégrale adimensionné devient:



$$\begin{aligned}
Y(x) = & \frac{1}{x}(1 - e^{-\frac{x}{\zeta}}) - \frac{A_{\text{exp}}}{\zeta} e^{-\frac{x}{\zeta}} \\
& - \frac{3}{2Z_i} \int_0^{\infty} \frac{t}{x} (x + x' - |x - x'|) \left( e^{Z_i \Gamma Y(x')} - 1 \right) dx' \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Cette équation 3.17 est représentée l'équation intégrale non linéaire (adimensionnée) d'un plasma contenant une impureté placée à l'origine.

## 3.2 Résolution numérique de l'équation intégrale d'un plasma contenant une impureté:

### 3.2.1 Résolution avec La méthode du point fixe (MPF):

La méthode point fixe [9, 10, 11], dite aussi la méthode des Substitutions Successives, est une méthode numérique qui est intéressante lorsque l'on dispose d'un ordinateur. Elle est parmi les méthodes indirectes qui exigent théoriquement un nombre infini d'opérations pour obtenir la solution exacte.

Elle est utilisable le plus souvent dans les problèmes où la convergence est censée être rapide, ou dans les problèmes à nombre élevé d'éléments de matrice nuls, ce qui occupe beaucoup moins de mémoire d'ordinateur.

#### **Théorème du point fixe:**

Soit  $F$  un espace de Banach,  $V$  une boule fermée dans  $F$ . Soit  $G$  une application de  $V$  dans  $V$ , telle que :

$$\|G(T_1) - G(T_2)\| \leq \alpha \|T_1 - T_2\| \quad (3.18)$$

Pour tout couple de points  $T_1, T_2$  de  $V$ ; où  $\alpha$  est une constante telle que:

$$0 < \alpha < 1$$

alors il existe:

$$G(T^{(*)}) = T^{(*)} \quad (3.19)$$

Le point  $T^{(*)}$  est la limite de la suite:

$$(T_0, T_1, T_2, \dots, T_i, \dots) \quad (3.20)$$

et les termes qui vont suivre  $T_0$  sont définis par le processus itératif suivant:

$$T_1 = G(T_0), T_2 = G(T_1), \dots, T_i = G(T_{i-1}), \dots \quad (3.21)$$

et

$$\|T_i - T^{(*)}\| \leq \frac{\alpha^j}{1 - \alpha} \|T_1 - T_2\| \quad (3.22)$$

$k = 1, 2, 3, \dots$  où  $i$  est le nombre d'itération.

Nous rappelons qu'un espace de Banach est un espace normé et complet.

**Principe de MPF:**

Une équation du type  $f(x) = 0$  peut toujours s'écrire sous la forme équivalente:

$$x = F(x) \quad (3.23)$$

où  $F$  est une nouvelle fonction de  $x$ . La méthode consiste à utiliser un estimé  $x^{(0)}$ , de la solution exacte  $x^{(*)}$  qui vérifie  $f(x^{(*)}) = 0$  et donc  $x^{(*)} = F(x^{(*)})$ , cette valeur estimée étant alors substituée à  $x$  dans le terme de droite de l'équation 3.23. On obtient ainsi une nouvelle approximation  $x^{(1)}$  de  $x^{(*)}$  :  $x^{(1)} = F(x^{(0)})$  de même on obtient:  $x^{(2)} = F(x^{(1)})$ ,  $x^{(3)} = F(x^{(2)})$  et de façon générale à la  $n$ -ième itération:

$$x^{(n)} = F(x^{(n-1)}) \quad (3.24)$$

le problème principal est de savoir si la suite générée  $\{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots\}$  converge vers la solution  $x^{(*)}$  de l'équation 3.23.

**Convergence du procédé itératif**

Théorème: Si  $F(x)$  de l'équation  $x = F(x)$  possède une dérivée qui vérifie:

$$|F'(x)| \leq m \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (3.25)$$

alors  $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}$  la suite  $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots\}$ : générée par  $x^{(i)} = F(x^{(i-1)})$

pour:  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . converge vers  $x^{(*)}$  solution de  $x = F(x)$  donc de l'équation

$f(x) = 0$ . De plus la racine  $x^{(*)}$  est unique.

**Arrêt des opérations:**

Théoriquement la solution n'est atteinte qu'après une infinité d'itérations (et si le processus converge). En pratique, on arrête les opérations par l'un des tests suivants :

1)- Si  $f(x^{(n)})$  est quasiment nulle:

$$\left| f(x^{(n)}) \right| < \varepsilon_1 \quad (3.26)$$

2)- Si Si l'amélioration de  $x^{(n)}$  d'une itération à la suivante ne justifie pas l'effort de calcul supplémentaire, soit si :

$$\left| \frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{x^{(n)}} \right| < \varepsilon_2 \text{ ou } \left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < \varepsilon_3 \quad (3.27)$$

3)- Si la convergence n'est pas obtenue avant un nombre d'itérations, soit si :

$$n > n_{\max} \quad (3.28)$$

Dans ce cas, si le seuil de précision  $\varepsilon_1$  (ou  $\varepsilon_2$ ) ne peut être atteint en un nombre raisonnable d'itérations  $n_{\max}$  fixé à l'avance, le processus est considéré comme non convergent pour l'estimation initiale  $x^{(0)}$  donnée.

Nous pouvons résoudre l'équation intégrale non linéaire 3.17 par la méthode du point fixe MPF (ou la méthode des substitutions successives) à partir d'une itération approximative initiale égale le Pseudo-potential de Hellmann-Gurskii-krastor (HGK).

$$Y_{ei}^{HGK}(x) = \frac{1}{x} (1 - e^{-\frac{x}{\zeta}}) - \frac{A_{\text{exp}}}{\zeta} e^{-\frac{x}{\zeta}} \quad (3.29)$$

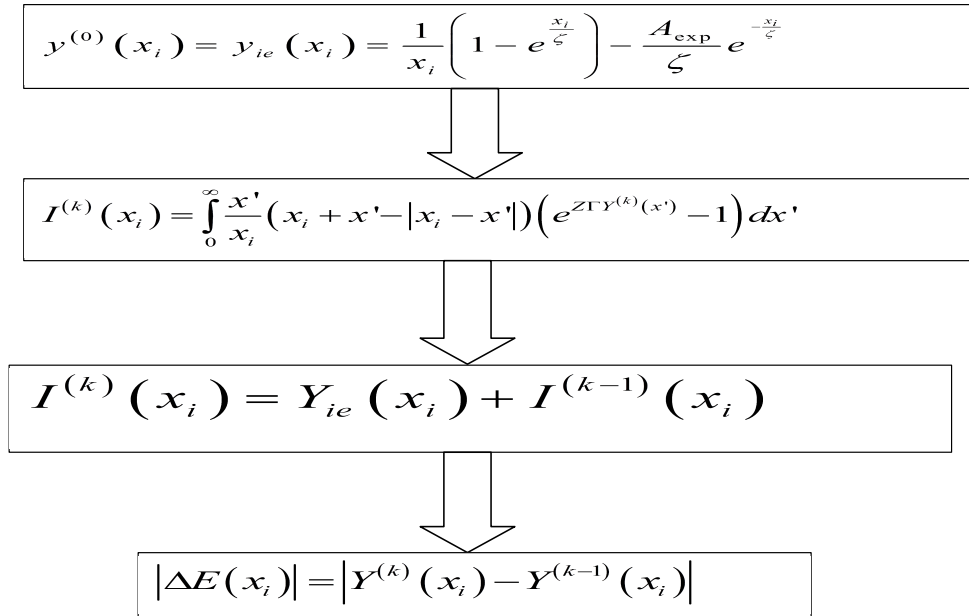


Figure 3.2: Organigramme de la résolution avec la méthode de point fixe (MPF)

### 3.3 La fonction radiale:

La fonction de distribution de paires,  $g(r)$ , décrit la probabilité de trouver une particule à une distance  $r$ , étant donné qu'il y en a une à  $r = 0$ .

Dans un plasma idéal (gaz), les ions sont répartis autour de l'ion test suivant la relation de Boltzmann (loi barométrique). et on peut écrire:

$$g(r) = \exp\left(-\frac{eV(r)}{K_B T}\right) \quad (3.30)$$

où  $V(r)$  est le potentiel.

### 3.3.1 Résultats numérique

Sur la figure 3.3 nous présentons les deux potentiels initiale effectifs électrique (Pseudo-potentiel de Hellmann-Gurskii-krastor (HGK) et le Pseudopotentiel de Deutsch écrané) calculés par la méthode de la méthode de point fixe (MPF) pour le nombre de charge d'ion  $Li^+$   $Z = 1$ , La température  $T = 502.5K$  et la densité électronique  $n_e = 8.12 \times 10^{11}$ .

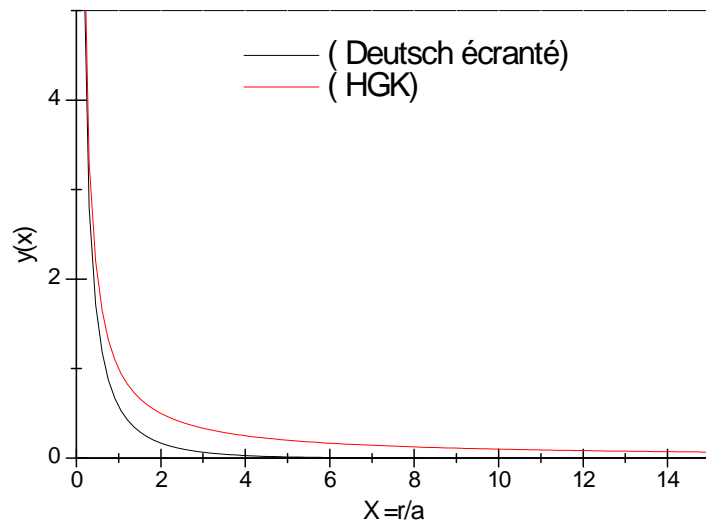


Figure 3.3: Comparaison entre le pseudo-potentiel de Hellmann-Gurskii-Krasko (HGK) et le pseudo-potentiel de Deutsch écrané

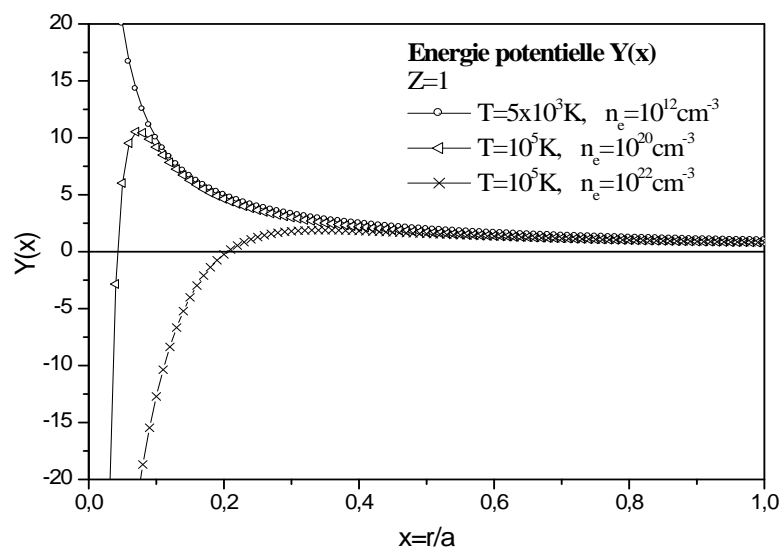


Figure 3.4: Energie Potentielle  $Y(x)$  de  $Li^+$  Pour quelques valeurs de la température et de la densité électronique

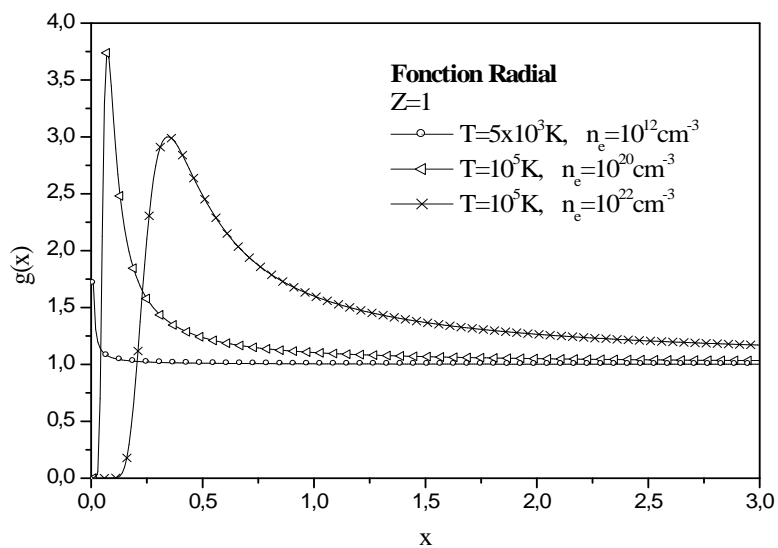


Figure 3.5: Fonction Radiale  $g_{11}(x)$  de  $Li^+$  Pour quelques valeurs de la température et de la densité électronique

## Chapitre 4

# Distribution du microchamp électrique

### 4.1 Distribution de Holtsmark:

La première étude du microchamp électrique de plasma a été réalisée en 1919 par J. Holtsmark. Il a calculé la distribution d'un microchamp électrique en un point neutre dans un plasma idéal [12], Dix ans plus tard, Tonks et Langmuir[13], ont introduit le terme "plasma" lui-même. Lorsqu'en 1930, Lanczos a trouvé que les raies de l'hydrogène atomique peuvent disparaître dans un champ électrique statique [14], les problèmes de l'astrophysique sont devenus l'objectif principal de plusieurs études scientifiques. Il est devenu clair que le microchamp électrique influence fortement sur les processus de rayonnement des étoiles dû à l'effet Stark. De cette façon, les astrophysiciens ont obtenu un nouvel outil puissant pour étudier les étoiles. La distribution de Holtsmark [15][12] donne la densité de probabilité pour



trouver une valeur déterminée  $E$  du champ électrique en un point donné dans un plasma idéal. Le microchamp électrique est déterminé par la somme des champs élémentaires créés par un très grand nombre de charges ponctuelles. La distribution Holtsmark  $W_H$  fournit la probabilité pour que la somme des champs électriques élémentaires  $\vec{E}_i$  générés par toutes les  $N$  particules dans le plasma à l'origine des coordonnées du système (ce qui est considéré comme un point neutre) :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{e\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (4.1)$$

La distribution de Holtsmark exprimée par les variable adimensionnelles est donnée par:

$$W_H(\beta) = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\infty x \sin(x\beta) e^{-x^{3/2}} dx \quad (4.2)$$

où:  $\beta = E/E_H$ ,  $E_H = 2\pi(4/15)^{2/3} en^{2/3}$  et  $e = e_i$  est la charge de la particule du plasma et  $n$  sa densité.

## 4.2 Distribution de Barange et Moser:

L'approche la plus fructueuse de la distribution de Holtsmark a été réalisée par Baranger et Moser[16], que nous pouvons définir ainsi: Considérons une collection de  $N$  électrons, immergés dans un fond uniforme d'ions positifs et neutralisant la totalité électrique, occupant le volume  $\Omega$  à la température  $T$ . On considère que l'interaction entre ces électrons est coulombienne. On définit  $\varphi(\vec{\varepsilon}) d\vec{\varepsilon}$  comme la probabilité de trouver le champ électrique  $\vec{\varepsilon}$  [17, 18] au point chargé localisé à l'origine du système de coordonnées :

$$\varphi(\vec{\varepsilon}) = \frac{1}{Z_N} \int \dots \int e^{-\beta \Phi_N(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)} \delta\left(\vec{\varepsilon} - \sum_i \vec{\varepsilon}_i\right) \prod_{j=1}^N d\vec{r}_j \quad (4.3)$$

où  $\beta = \frac{1}{K_B T}$ ,  $\Phi_N$  est le potentiel de  $N$  particule,  $Z_N$  est la fonction de partition et  $\vec{r}_j$  est la coordonnée de la  $j$ -ième particule.

On définit aussi l'intégrale de la distribution tridimensionnelle de Dirac  $\delta(\vec{x})$  par:

$$\delta(\vec{x}) = (2\pi)^3 \int \int \int e^{i\vec{\lambda} \cdot \vec{x}} d\vec{\lambda} \quad (4.4)$$

En introduisant l'expression 4.10, nous obtenons :

$$\varphi(\vec{\varepsilon}) = (2\pi)^{-3} \int \int \int T(\vec{\lambda}) e^{i\vec{\lambda} \cdot \vec{\varepsilon}} d\vec{\lambda} \quad (4.5)$$

où:

$$T(\vec{\lambda}) = \left\langle e^{-i(\vec{\lambda} \cdot \sum_j \vec{\varepsilon}_j)} \right\rangle = \frac{1}{Z_N} \int \dots \int e^{-\beta \Phi_N} e^{-i\vec{\lambda} \cdot \sum_j \vec{\varepsilon}_j} \prod_{j=1}^N d\vec{r}_j \quad (4.6)$$

Vue l'isotropie du problème, et faisant usage des coordonnées sphériques on obtient :

$$\varphi(\vec{\varepsilon}) = \frac{1}{2\pi^2 \varepsilon} \int_0^\infty T(\lambda) \sin(\varepsilon \lambda) \lambda d\lambda \quad (4.7)$$

Si on considère que le système est isotrope, on trouve :

$$4\pi \varphi(\vec{\varepsilon}) = P(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.8)$$

$P(\varepsilon)$ , est la probabilité de trouver le champ électrique  $\varepsilon$  à l'origine, que nous pouvons écrire:

$$P(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^\infty T(\lambda) \sin(\varepsilon\lambda) \lambda d\lambda \quad (4.9)$$

Et d'après l'approximation de Baranger-Moser[17, 18, 19]:

$$T(\lambda) = e^{G(\lambda)}$$

et

$$G(\lambda) = 4\pi n \int_0^\infty r^2 e^{-\beta\Phi(r)} \left[ \frac{1}{\lambda\varepsilon(r)} \sin(\lambda\varepsilon(r)) - 1 \right] dr \quad (4.10)$$

et après l'adimensionnement de 4.9 et 4.10 on trouve :

$$\bar{P}(\bar{\varepsilon}) = \varepsilon_0 P(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\lambda\bar{\varepsilon}) \sin(\lambda\bar{\varepsilon}) e^{G(\lambda/\varepsilon_0)} d\lambda \quad (4.11)$$

où

$$\bar{G}(\lambda) = G(\lambda/\varepsilon_0) = 3 \int_0^\infty x^2 e^{Z\Gamma Y(x)} \left[ \frac{1}{\lambda Y'_{ie}} \sin(\lambda Y'_{ie}(x)) - 1 \right] dx \quad (4.12)$$

tels que:  $\varepsilon_0 = e/a^2$  et  $Y'_{ie}(x) = \frac{\partial Y_{ie}(x)}{\partial x}$  Pour obtenir  $\bar{p}(\bar{\varepsilon})$ , nous faisons un programme

MATLAB et nous traçons les courbes représentatives.

Sur les figures suivantes nous donnons la distribution du microchamp électrique théorique  $\bar{p}(\bar{\varepsilon})$ , pour le cas  $Z = 1$ ,  $T = 502.5K$  et  $n_e = 8.12 \times 10^{11} cm^{-3}$ .

#### 4.2.1 Application de la Distribution de Baranger Mozer :

Sur la figure 4.2 on présente la distribution du microchamp électrique pour différentes valeurs de la densité  $n_e$  et de la température  $T$  dans le plasma  $Li^+$ .

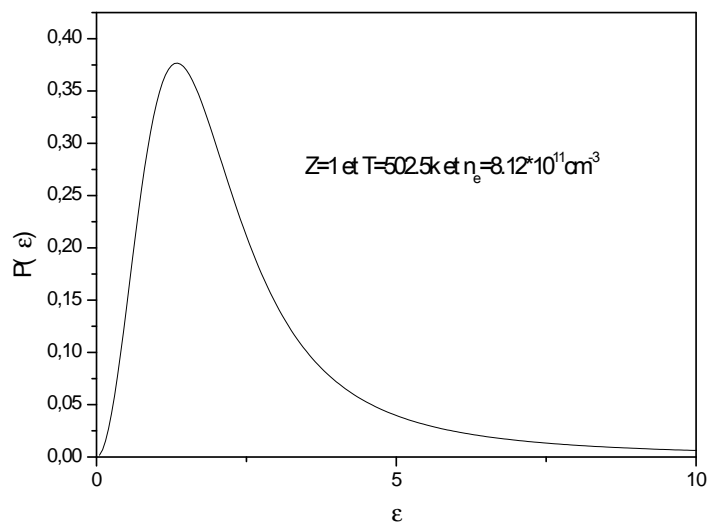


Figure 4.1: La distribution du microchamp électrique de Barange Moser pour  $Z = 1$ ,  $T = 502.5K$  et  $n_e = 8.12 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ .

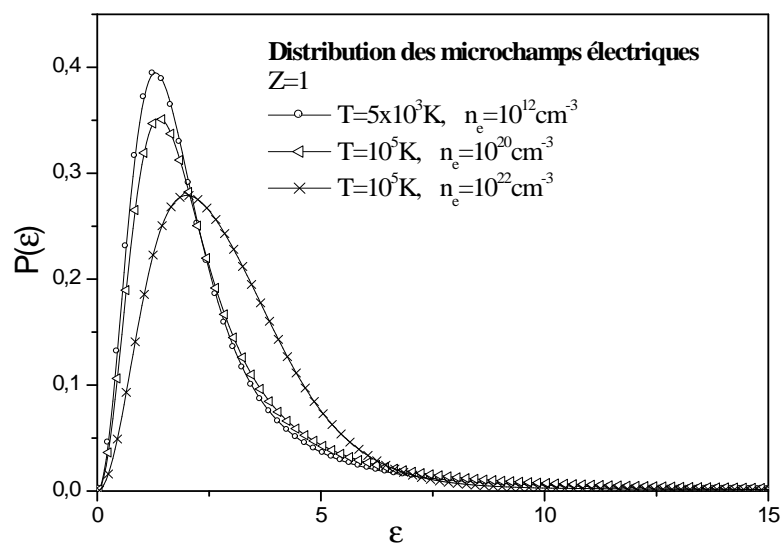


Figure 4.2: La distribution du microchamp électrique de Barange et Moser pour différentes valeurs de  $n_e$  et  $T$ .

## Chapitre 5

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons traité les propriétés statiques d'un plasma contient une impureté de charge positive fixée à l'origine au centre du système. Ce dernier (système) a été postulé dans le modèle classique basé sur la considération d'un milieu électriquement chargé constitué par des électrons et des ions positifs neutralisants.

En premier lieu nous avons établi l'équation intégrale non-linéaire 3.17 gouvernant l'énergie potentielle d'un électron situé à la distance  $r$  de l'impureté de charge  $(+Ze)$ , qui est une somme de trois contributions : la première est l'énergie d'interaction entre l'électron du plasma et l'impureté, et nous la prendrons comme le pseudo potentiel de Hellmann-Gorski-Krasko. La seconde est l'énergie d'interaction coulombienne entre l'électron en question et les autres électrons du plasma en utilisant une distribution de Maxwell-Boltzmann. La troisième est l'énergie d'interaction coulombienne entre l'électron et les ions répartis uniformément dans le plasma. Nous l'avons résoudrons l'équation intégrale par la méthode de point fixe (MPF).

En fin nous pouvons dire que la résolution numérique par la méthode de point fixe de l'équation intégrale non linéaire gouvernant l'énergie potentielle de plasma où en tenant compte de la structure ionique, nous a permis de calculer la distribution du micro champ électrique.

# Bibliographie

- [1] I. Chihi, thèse de Doctorat, Université de Constantine, Algérie, 2005.
- [2] J. L. Delcroix, physique des plasma 1, Université Paris-Sud, 1994.
- [3] J. L. Raimbault, Master 1 physique Appliquée et Mécanique, Université Paris-sud 11, 2010-2011.
- [4] S. Douis, thèse de Doctorat, Université de Ouargla, Algérie, 2013.
- [5] J. P. Hansen, Phys. Rev. A. (1981).
- [6] S. Douis and M.T.Meftah, A classical description of the electrons in plasma, Volume 5 numéro 1 AST 2013.
- [7] H. Hellmann, J. Chem. Phys. 3, 61 (1935), Acta Fizicochem. USSR 1, 913 (1935), Acta Fizicochem. USSR 4, 225 (1936), H. Hellmann and W. Kassatotschkin, Acta Fizicochem. USSR 5, 23 (1936).
- [8] S. P. Sadykova, W.Ebeling et I.M. Tkachenko. Eur.phys. J. 2011.
- [9] L. M. Deleves, J. Walsh, Numirical solution of integral equations, Clarendon Press OXFORD, 1974.

- [10] S. T. Karris, Numerical Analysis using MATLAB and Excel, Orchard Publications, 2007.
- [11] R. Ansoerge, Th. Meis, W. Tornig, Iterative Solution of Nonlinear Systems of Equation, Proceedings of a Meeting held at Oberwolfach, Germany, 1982.
- [12] J. Holtzmark, Ann. Physik 58, 577, 1919.
- [13] L. Tonks, I. Langmuir. Phys. Rev. 55, 195, 1929.
- [14] E. Lanczos. Zeitschrift für Physik, 62, 518 (1930), 65 431 (1930) .
- [15] M.Yu. Romanovsky, W. Ebeling, Contrib. Plasma Phys. 46, No. 3, 195, 2006.
- [16] M. Baranger, B. Mozer, Phys. Rev. 115, 521 (1959) ; 118, 626 (1960).
- [17] C. F. Hooper, Jr. Electric Microfield Distribution Functions: past and present. (Université de Florida, Gainesville, FL USA 32611).
- [18] M. Berkovsky, J.W. Dufty, A. Calisti, R. Stamm, B. Talin, Phys. Rev. E 51,4917–4929, 1995.
- [19] M. Yu. Romanovsky, W. Ebeling, Contrib. Plasma Phys. 46, No. 3, 2006.



## Appendice A

# Loi de distribution des vitesses de Maxwell:

Pour un gaz en état d'équilibre, posons la question suivante: quelle probabilité existe qu'une molécule ait ses composantes de vitesse comprise entre  $v_x$  et  $v_x + dv_x$ ,  $v_y$  et  $v_y + dv_y$ ,  $v_z$  et  $v_z + dv_z$  (repère cartésien habituel) ?.

Cette probabilité  $dp^3$  dépend de (c'est à dire  $v_x, v_y, v_z$ ) et de  $dv_x, dv_y, dv_z$ . Elle ne dépend pas de la position de la molécule puisque le gaz est en équilibre. L'intégrale la densité de distribution des vitesses vectorielles de Maxwell Boltzmann est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{v}) d\vec{v}^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N}{\Omega} \left(\frac{m_e \beta}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta \frac{m_e}{2} \vec{v}^2} d\vec{v}^3 \quad (\text{A.1})$$

où  $\frac{N}{\Omega} + n_e$  est la densité électronique.

Pour le changement vers la quantité du mouvement on écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{p}) d\vec{p}^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N}{\Omega} \left(\frac{m_e \beta}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \left(\frac{1}{m^3} d\vec{p}^3\right) \quad (\text{A.2})$$

En coordonnées sphériques le module :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{p}^3 &= \frac{1}{m^3} \int_0^{+\infty} \frac{N}{\Omega} \left(\frac{m_e \beta}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} (4\pi p) dp \\ &= \frac{1}{m^3} \frac{N}{\Omega} \left(\frac{m_e \beta}{2\pi}\right) (4\pi) \int_0^{+\infty} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} (p^2) dp \end{aligned}$$

et puisque on a  $I = \int_0^{+\infty} p^2 e^{-\frac{\beta}{2m} p^2} dp = \frac{m}{2\beta} \sqrt{\frac{2m\pi}{2}} = \frac{1}{4\pi} (2\pi m k T)^{3/2}$  donc:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{p}^3 &= \frac{1}{m^3} \int_0^{+\infty} \frac{N}{\Omega} \left(\frac{m_e \beta}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} (4\pi p^2) dp \\ &= \frac{1}{m^3} \frac{N}{\Omega} \left(\frac{m_e \beta}{2\pi}\right)^{3/2} (4\pi) \times \left(\frac{m}{2\beta} \sqrt{\frac{2m\pi}{2}}\right) = \frac{N}{\Omega} = n_e \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{p}^3 = n_e \quad (\text{A.4})$$

## Appendice B

# Etablissement de l'équation intégrale pour l'énergie potentielle

D'après l'équation 3.10 on a:

$$V(r) = V_{em}(r) + n_e e^2 \int \frac{(e^{-\beta v(r')} - 1)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'^3$$

Cette équation s'écrit en coordonnées sphériques:

$$V(r) = V_{em}(r) + n_e e^2 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (e^{-\beta v(r')} - 1) \frac{r'^2 \sin \theta' d\varphi' d\theta' dr'}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.1})$$

Où  $\psi$  est l'angle entre les deux vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{r}'$  (Voire la figure B.1) et égale:

$$\cos \psi = \sin \theta \sin \theta' \cos(\psi - \psi') + \cos \theta \cos \theta' \quad (\text{B.2})$$

Nous remplaçons la relation B.2 dans l'équation B.1 nous obtenons:

$$V(r) = V_{em}(r) + n_e e^2 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(e^{-\beta v(r')} - 1) r'^2 \sin \theta' d\varphi' d\theta' dr'}{[r^2 + r'^2 - 2rr' (\sin \theta \sin \theta' \cos(\psi - \psi') + \cos \theta \cos \theta')]^{\frac{1}{2}}}$$

Si on suppose que le vecteur  $\vec{r}$  est situé sur l'axe oz donc ( $\theta = 0$ ), alors l'équation B.2 devient  $\cos(\psi) = \cos(\theta')$ .

$$V(r) = V_{em}(r) + 2\pi n_e e^2 \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{(e^{-\beta v(r')} - 1) r'^2 \sin \theta' d\theta' dr'}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta']^{\frac{1}{2}}}$$

Après intégration sur l'angle  $\theta'$ , on aura:

$$\begin{aligned} V(r) &= V_{em}(r) + 2\pi n_e e^2 \int_0^\infty r'^2 (e^{-\beta v(r')} - 1) dr' \left[ \left( r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta' \right)^{\frac{1}{2}} \right]_0^\pi \times \frac{1}{rr'} \\ &= V_{em}(r) + 4\pi n_e e^2 \int_0^\infty \frac{r'}{r} (e^{-\beta v(r')} - 1) dr' \left[ \left( r^2 + r'^2 - 2rr' \right)^{\frac{1}{2}} - \left( r^2 + r'^2 - 2rr' \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

donc:

$$V(r) = V_{em}(r) + 4\pi n_e e^2 \int_0^\infty \frac{r'}{r} (e^{-\beta v(r')} - 1) [(r + r') - |r - r'|] dr' \quad (\text{B.3})$$

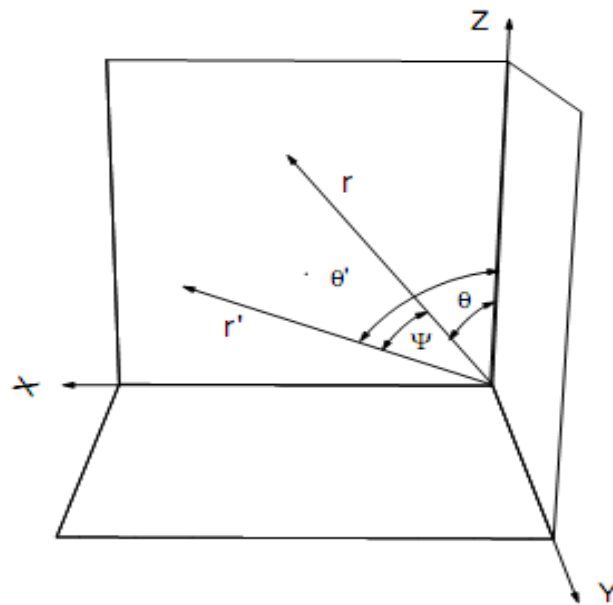


Figure B.1: Représentation de l'angle  $\psi$ .