UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilité et Statistique

Par : Benkhellouf Asmaa

Théme

Etude de la convergence de la solution des equations différentielles stochastiques multidimensionnelles

Soutenu publiquement le : 11 /06 /2018

devant le jury composé de :

Amara Abdelkader	proof. université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Arbia Hanane	proof . université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Baheddi Aissa	proof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents :

ma mère HASSIBA et mon père AHMED , pour tout les sacrifices consentis et précieux conseils.

Mes sœurs :

FATIMA et Ses enfants ,Ma petite sœur CHAIMAA HANAA

Mon frère :ABOUBAKRE SADIK

et à tous ma famille et mes amis

et à tous ceux qui ont contribue de prés ou de loin pour ce travail soit possible.

Remerciement

.

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail. En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Mr : (Baheddi Aissa), son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédication **i**

Remerciement **ii**

Introduction **1**

1 Revue de Littérature **3**

1.1 Convergence des variables aléatoires 3

1.2 Intoduction aux équations différentielles stochastiques 3

1.3 Discrétisation des équations différentielles stochastiques 4

1.4 synthése 4

2 Outils Théorique **5**

2.1 Convergence des Suites de Variables Aléatoires 5

2.1.1 Convergence en Probabilité 5

2.1.2 Convergence Presque sûr 6

2.1.3 Convergences en moyennes d'ordre 6

2.1.4 Convergence en Loi 6

2.1.5 Liens entre les convergences . . . 7

2.2 Applications Matricielle

Les Normes . . . 9

2.2.1 Type de Matrice . . . 9

2.2.2 Diagonalisation des Matrices : . . . 11

2.2.3 Matrice aléatoire : . . . 11

2.2.4 La trace d'une matrice . . . 12

2.2.5 Déterminant d'une matrice . . . 12

2.2.6 Les valeurs propres . . . 12

2.2.7 Matrice Exponentielle : . . . 14

2.2.8 Les Normes Matricielles . . . 15

2.3 Filtration . . . 16

2.3.1 Filtration naturelle . . . 17

2.4 Mouvement Brownien . . . 17

2.5 Martingales . . . 17

2.5.1 Les Semi-Martingales : . . . 18

2.6 Les Processus Aléatoires . . . 18

2.6.1 Processus Aléatoire . . . 18

2.6.2 Processus Markoviens . . . 18

2.6.3 Processus Stationnaire . . . 19

2.6.4 Processus de Poisson . . . 19

2.6.5 Processus de Levy . . . 19

2.7 intégrale et Processus d'itô . . . 20

2.7.1 Processus d'itô . . . 20

2.8 Formule d'itô . . . 21

2.8.1 formule d'Itô vectorielle . . . 21

2.9 équation Différentielle Stochastique unidimensionnelles . . . 21

2.9.1 Solutions fortes et solutions faibles . . . 22

2.9.2 Existence et Unicité Fortes . . . 23

2.9.3 Bruit Aditif et Bruit Multiplicatif 23

3 équation différentielle stochastique multidimensionnelle , Schéma d'Euler 26

3.1 équation Différentielle Stochastique Multidimensionnelle 26

3.1.1 Existence et Unicité Fortes 27

3.2 Modèle Black Scholes 29

3.2.1 Schéma d'Euler 31

3.2.2 Convergence L^p 31

3.2.3 Convergence faible 32

3.2.4 Convergence fort 32

4 Exemples 33

4.1 Exemple (bruit multiplicatif) 33

4.2 Exemple (bruit additif) 35

4.3 Conclusion 37

Introduction

Dans la théorie des probabilités le concept de convergence de variables aléatoires est très important .Il existe différente notions de convergence de variables aléatoires utilisées dans plusieurs études comme les études du processus stochastique et en différentes domaines.

L'objectif principal de ce travail est l'application de le schéma d'Euler dans la résolution numérique des équations différentielles stochastiques multidimensionnelles linéaires bruit aditif et bruit multiplicatif.

La nature des sujets traites pour atteindre cette objectif passe par les problèmes d'existence et d'unicité , et parmi les caractères aléatoires il ya plusieurs notions de ces dernières , dans cette recherche on se concentré sur la l'existence d'une unique solution forte ce qui est une condition de base à l'étude de convergence.

Problématique comment on étudié la convergence aléatoire dans la résolution numérique des équations différentielles stochastiques multidimensionnelles ?

Les Problèmes locaux :

1. Comment peut on vérifier l'existence d'un solution forte pour L'équation différentielle stochastique ?

2. Est ce que L'équation différentielle stochastique admet une unique solution forte ?

3. Est ce que la solution exacte converge vers la solution approchée ?

Les hypothèses du Problèmes locaux :

1. L'équation différentielle stochastique admet une solution forte si l'équation est vérifier les conditions de lipschitz et de croissance

2. L'équation différentielle stochastique admet une unique solution forte si $\{x\}_{t\in[0,T]}$ et $\{y\}_{t\in[0,T]}$ sont deux solution presque sûrement continue de ce équation

3. la solution exacte X_t et converge vers la solution approchée Y_t si

$$\mathbb{E}[|X_t - Y_t|] \leq \epsilon$$

Chapitre 1

Revue de Littérature

1.1 Convergence des variables aléatoires

Le théme : convergence des variables aléatoires (Saint-Etienne).

L'auteur : Julian Tugaut.

Résumé : ce document introduit une revue de les différentes types de convergence des suites de variables aléatoires réelles, en ce qui concerne les convergences de type spatial qui font référence à la réalisation des variables aléatoires sur un même espace de probabilité et pas seulement à leur lois comme la convergence en loi .

Mots Clés : *convergence aléatoire,convergence en loi, convergence simple , types de convergence.*

1.2 Intoduction aux équations différentielles stochastiques

Le théme : Intoduction aux équations différentielles stochastiques(page 11 - page 37)

.

L'auteur : Thierry Chonavel.

Résumé : l'objectif de ce travail est Connaitre la formule d'Itô et l'isométrie d'Itô et Posséder des notions sur les méthodes numériques de résolution des équation différentielles stochastique , Où il a présenté deux méthodes sont méthode de Milstein et méthode d'Euler .

Mots Clés : *Mouvement brownien,processus de wiener, Filtration , Equation stochastique.*

1.3 Discrétisation des équations différentielles stochastiques

Le théme : discrétisation des équations différentielles stochastiques .

L'auteur : Benjamin Jourdain.

Résumé : cette étude à présenté l'application de la formule et l'intégrale d'itô pour résoudre les équations différentielles stochastique simple (chapitre 1 et 2) .

Mots Clés : *Mouvement brownien,Calcule stochastique, processus stochastique , Formule d'itô.*

1.4 synthése

on remarque qui les documents on générales introduit la résolution des équations différentielles stochastiques unidimensionnelles et présenté aussi des notions sur les méthodes numériques de cette résolution comme méthode de Milstein et méthode d'Euler ,mais ne traités pas la convergence de ces équations. Mon mémoire peut être considère comme une étude complémentaire à les études précédentes dans ce sujet.

Chapitre 2

Outils Théorique

2.1 Convergence des Suites de Variables Aléatoires

Dans cette partie nous présenterions les différentes notions de convergence des suites de variables aléatoires réelles.

2.1.1 Convergence en Probabilité

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ et soit X une autre variable aléatoire définie sur le même espace ,on dit que la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

D'une autre façon :

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \longrightarrow 0 \ .$$

2.1.2 Convergence Presque sûr

On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers une autre variable aléatoire X si

1. $X_n \xrightarrow{p.s} X \Leftrightarrow P(\lim_{n\to+\infty} X_n = X) = 1$.
2. $X_n \xrightarrow{p.s} X \Leftrightarrow P(\{\omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$.
3. $X_n \xrightarrow{p.s} X \Leftrightarrow \{\omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} = 0$.
4. $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge $\Longrightarrow X_n \xrightarrow{p.s} X$.

2.1.3 Convergences en moyennes d'ordre

Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P})$, On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge vers X dans L^p $(\Omega, \mathcal{P})$ si :$\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ et $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ et si l'on a de plus :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$$

On dit aussi que X_n converge en moyenne d'ordre p vers X.Les convergences qui nous intéressent le plus sont :

- pour $P = 1$ $X_n \xrightarrow{L^1} X \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$ convergence dans L^1 (en moyenne) .
- pour $P = 2$ $X_n \xrightarrow{L^2} X \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^2) = 0$ convergence dans L^2 (en moyenne quadratique) .

2.1.4 Convergence en Loi

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$. soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$ on dit que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$,

$\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$ et on a la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)] \tag{2.1}$$

Remarque 2.1.1

On voit que la convergence en loi ne fait référence qu'à la loi des v.a. (contrairement aux convergences p.s., en probabilité , et $L^p(\Omega, \mathcal{P})$ .On peut très bien définir la convergence en loi d'une suite de v.a. qui ne seraient pas définies sur le même espace de probabilité

La convergence en loi est donc la plus faible des convergences qu'on a vues, elle est impliquée par toutes les autres, la convergence p.s., $L^p(\Omega, \mathcal{P})$ et en probabilité.

Théorème 2.1.2 (Paul Levy) *Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ .On note φ_n la fonction caractéristique de X_n*

$$X_n \xrightarrow{\ell} X \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

2.1.5 Liens entre les convergences

Le lien entre ces différentes convergence est donné par la proposition et les théorèmes suivante :

Théorème 2.1.3

- *On suppose que X_n converge en probabilité vers X. alors , on peut extraire une sous-suite qui converge presque sûrement .*
- *On suppose que la suite de variables aléatoires X_n converge en probabilité vers X. On suppose de plus que X_n est uniformément bornée par une variable $Y \in L^p(\Omega, \mathcal{P})$ avec $p \in [1, \infty[$. Alors, $X \in L^p(\Omega, \mathcal{P})$ et X_n converge vers X dans $L^p(\Omega, \mathcal{P})$.*

Théorème 2.1.4 *On suppose que X_n converge en probabilité vers X . Alors X_n converge en loi vers X.*

Preuve. *supposons que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilités vers X_∞ Soit f une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$ est alors uniformément continue sur $\mathbb{R}$: pour $\epsilon > 0$ donnée , il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. On a alors*

$$|\mathbb{E}(f(X_n) - f(X_\infty)| \leq \mathbb{E}(|f(X_n) - f(X_\infty|) \tag{2.2}$$

$$= \mathbb{E}(|f(X_n) - f(X_\infty|)1_{|X_n - X_\infty| < \alpha}) + \mathbb{E}(|f(X_n) - f(X_\infty|)1_{|X_n - X_\infty| \geq \alpha}) \leq \epsilon$$
$$+2\|f\|_\infty P(|X_n - X_\infty| \geq \alpha) \leq 2\epsilon$$

pour n assez grand. On a donc $\mathbb{E}(f(X_n)) \longrightarrow \mathbb{E}(f(X_\infty))$ ■

Théorème 2.1.5 *On suppose que X_n converge vers une variable aléatoire X dans $L^p(\Omega, \mathcal{P})$ où $p \in [1, \infty[$ Alors X_n converge en probabilité vers X*

Preuve. [1]

$$P(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbb{E}(1_{\{|X_n - X| > \epsilon\}}).$$

Or, sur l'évènement $\{|X_n - X| > \epsilon\}$, on a $\dfrac{|X_n - X|^p}{\epsilon^p} > 1$, il vient ainsi

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \leq \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|^p}{\epsilon^p} 1_{|X_n - X| > \epsilon}\right)$$

Puis, comme $1_{\{|X_n - X| > \epsilon\}} \leq 1$, on trouve

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p}\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \longrightarrow 0.$$

■

Remarque 2.1.6 *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires .Alors X_n converge vers X en probabilité si et seulement si*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right)$$

Théorème 2.1.7 *On suppose que $X_n$converge presque sûrement vers une variable aléatoire X. Alors X_n converge en probabilité vers X.*

Preuve. *Il suffit de prouver la convergence vers 0 de $\mathbb{E}\left(\dfrac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right)$.Pour cela, on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue qui nous donne*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{n \to \infty} \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) = \mathbb{E}(0) = 0$$

■

[1] Julian Tugaut . Convergences des variables aléatoires.Télécom Saint-Etienne. Page 13

2.2 Applications Matricielle Les Normes

Dans cette section on présenter quelques applications du calcul matriciel .

Définition 2.2.1 *Soit m et n deux entiers . Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau de nombres avec m lignes et n colonnes de la formes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

les a_{ij} sont des réels appelés coefficients de A . On notera aussi $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m 1 \leq n}$ ou $A = (a_{ij})$

Exemple :

La matrice A

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A est de taille $n \times m$

Remarque 2.2.2 *L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ sera noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.*

2.2.1 Type de Matrice

Définition 2.2.3 (Matrice Carrée) *Une matrice de taille $n \times n$ est dite carrée. L'ensemble de toutes ces matrices est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les coefficients $a_{ij}, 1 \leq i \leq n$ sont appéles les coefficients diagonaux de A.*

Définition 2.2.4 (Matrice Diagonale) *On appelle matrice diagonale une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 2.2.5 (Matrice Identité) *La matrice identité de taille n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres coefficients valent 0. On la noté In , Idn*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 2.2.6 (Matrice Triangulaire) *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

- *si $a_{ij} = 0$ dés que $i > j$ alors la matrice A est dite triangulaire supérieure.*
- *si $a_{ij} = 0$ dés que $i < j$ alors la matrice A est dite triangulaire inférieure.*
- *si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $1 < i, j < n$ (autrement dit si$A^t = A$) alors A est dite symétrique .*
- *si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tous $1 < i, j < n$ (autrement dit si$A^t = -A$) alors A est dite antisymétrique*

  En particulier les coefficients diagonaux de A sont nuls.

Définition 2.2.7 (Matrice Inverse) *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que*

$$AB = BA = In$$

Dans ce cas , B est appelé inverse de A et noté A^{-1}. L'ensemble des matrices inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est désigné par $GIn((R))$.

Remarque 2.2.8 *Si A et B sont dans $GIn((R))$ alors l'inverse de le produit AB est :*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2.2.2 Diagonalisation des Matrices :

Nous allons étudier le cas special des matrices diagonales :

Soit $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension. Rappelons q'une matrice $D \in M(n, n, \mathbb{F})$ est diagonale s'il existe $d_1, ..., d_n \in \mathbb{F}$ tq :

$$\begin{cases} (D)_{i,j} = d_i & si \quad i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Proposition

Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que la conjugaison de A par P est une matrice diagonale , c'est-à-dire :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & & & & . \\ . & & . & . & & & . \\ . & & & . & . & & \\ . & & & & . & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & & & & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Matrice aléatoire :

Un matrice aléatoire est une matrice dont les entrées sont des variables aléatoires.

Définition 2.2.9 (Matrice de Wigner) [2] *Soit $W_{ij,1 \leq i \leq j}$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}(W_{ij}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq j$ et $\mathbb{E}(|W_{ij}|^2) = 1$ pour tout$1 \leq i \leq j$ On suppose de plus que*

$$\forall k, \sup_{i,j} \mathbb{E}(|W_{ij}|^k) = C(k) < +\infty$$

La matrice W_N est une matrice $N \times N$ symétrique telle que $(W_N)_{ij} = W_{ij}$ est définit par

$$W_N = \begin{cases} W_{i,i} & si \quad i = j \\ W_{i,j} & si \quad i \neq j \end{cases}$$

[2]Introduction aux grandes matrices aléatoires .cours M2R.CNRS.Institut de Mathématique de toulouse .(2012).Page2

2.2.4 La trace d'une matrice

On rappelle que la trace d'une matrice carrée

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est la somme de ces coefficients diagonaux :

$$trA = a_{1,1} + a_{2,2} + ... + a_{n,n}.$$

Proposition :

Pour tout paire A,B de matrice carrée de même taille.

2.2.5 Déterminant d'une matrice

Le Déterminant d'une matrice de taille 1×1 est :

$$det(a) = |a| = a$$

la déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ se ramène aux calculs de déterminant de matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ par le développement par rapport a la première colonne

$$detA = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} +$$

$$... + (-1)^{n+1} a_{n,1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

2.2.6 Les valeurs propres

[3]

[3]Vincent Nozick . Vecteurs propres, valeurs propres.Université paris-Est Marne La Vallée. Page 3,12-16

Définition 2.2.10 *λ est une valeur propre de $A_{n,n}$ si et seulement si il existe un vecteur $\vec{x}$ non nul tq :*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{2.3}$$

On dit alors que $\vec{x}$ est le vecteur propre de A associé à la valeur propreλ Le systéme (2.3) sécrit en encore $A\vec{x} = \lambda Id\vec{x} = 0$ Alors on'a

$$(A\vec{x} = \lambda Id)\vec{x} = 0 \Longrightarrow det(A - \lambda Id) = 0$$

- *s'il existe $\vec{x} \neq 0$ tel que $M\vec{x} = 0$, alors M est singulière et $detM = 0$.*
- *En développant le déterminant, on obtient le polynôme caractéristique de A dont les racines sont ses valeurs propres.*

Exemple :

Soient la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda Id = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda Id) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda^2) - 2) + 2(1-\lambda) \\ &= 4 - 8\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

Alors on a :

$$det(A - \lambda Id) = 4 - 8\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3$$

Les trois racines de ce polynôme sont :

- $\lambda = 1$.
- $\lambda = 2$ $(racine\ double)$.

Pour $\lambda = 1$:

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x}Id = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution pour $\lambda = 1$ est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour$\lambda = 2$:

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x}Id = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution pour $\lambda = 2$ est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2.7 Matrice Exponentielle :

$$\text{Soit A une matrice carée } I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n t^n$$

Cette série converge normalement pour tout A et pour chaque t.

2.2.8 Les Normes Matricielles

[4] **Notation :** $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 2.2.11 *Une norme sur E un $\mathbb{K}_-$espace vectoriel est une application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

1. $\forall (a,b) \in E \times E, \varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ *[inégalité triangulaire] .*
2. $\forall a \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda a) = |\lambda| \varphi(a)$ *[homogénéité] .*
3. $\forall a \in E, \varphi(a) = 0 \Longrightarrow a = 0_E$ *.*

Norme Matricielle

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectorielle , une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^{n^2}$ qui est continue pour le produit matricielle , en ce sens qu'elle vérifie la condition supplémentaire suivante :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Norme Subordonnée

Définition 2.2.12 *Soit $\|.\|$ une norme vectorielle pour $\mathbb{K}^n$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose :*

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v \in \mathbb{K}^n - \{0\}, \|v\| \leq 1} \|Av\| = \sup_{v \in \mathbb{K}^n - \{0\}, \|v\| = 1} \|Av\|.$$ *cette égalité définit une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on appelle norme subordonnée à $\|.\|$*

Propriétés 2.2.13 *Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme subordonnée $\|.\|$, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a*

1. $\|Ax\| =\leq \|A\| \|x\|; \forall x \in \mathbb{K}^n.$
2. $\|A\| = \max\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{K}^n\}$ *.*

[4] Analyse numérique matricielle. Cours .Année 2013-2014

3. $\|.\|$ est une norme matricielle.

Définition 2.2.14 (Rayon Spectral) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible on appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) = \max\{|A|; A \in \mathbb{C}, \lambda valeur\ propre\ de\ A\}$.*

Norme Subordonnée à $\|.\|_1$ ***et*** $\|.\|_\infty, \|.\|_2$

1. On muni $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme subordonnée correspondante , alors
$$\|A\|_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
2. On muni $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|.\|_1$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme subordonnée correspondante , alors
$$\|A\|_1 = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
3. On muni $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|.\|_2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme subordonnée correspondante , alors
$$\|A\|_2 = (\rho(A^t A))^{\frac{1}{2}}$$
et si A symétrique on a $\|A\|_2 = (\rho(A)$

2.3 Filtration

Soients (Ω, F, P) un espace probabilisé , une filtration dans (Ω, F, P) est une collection de $\sigma - algebre$ $\{F_t\}_{t\geq 0}$ si :

- pour tout $t \in T; F_t \subseteq F$
- $s \leq t, F_s \subset F_t$

(Ω, F, P) espace probabilité doté avec une filtration $\{F_t\}_{t\geq 0}$ s'appelle espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$

2.3.1 Filtration naturelle

[5]

Définition 2.3.1 *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires. La filtration naturelle de* $X := (X_n)_n$ *est définie par*

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, ..., X_n)$$

La tribu $\mathcal{F}_n$ *contient toute l'histoire de* X *jusqu'au temps* n*.*

Définition 2.3.2 *On dit que* $X := (X_n)_n$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_n$ *si* X_j *est mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_n$ *pour tout* n*, pour tout* $j \in [0; n]$.

2.4 Mouvement Brownien

On appelle mouvement brownien le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ a trajectoires continues tel que $B_0 = 0$ avec $P(B_0 = 0) = 1$ et pour tout $0 \leq s \leq t$:

$$B_t - B_s N(0, t - s)$$

$$B_t - B_s \text{ est indépendant de } B_r \text{ , } r \leq s$$

avec $\forall n; \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes. Pour tout (t, s) la variable $B_{t+s} - B_t$ est indépendante de la tribu du passé avant t.

2.5 Martingales

$M = (M_t)_{t>0}$ est une $F\_martingale$ si $\forall t \geq 0$:

- M_t est $F_t\_mesurable$ (M est $F_$adapté).
- $E[M_t|F_t] < \infty$.
- $E[M_t|F_s] = M_s$ pour $s \leq t$.

[5]Julian Tugaut.Probabilités Approfondies.Télécom Saint-Etienne(2005).Page 10

2.5.1 Les Semi-Martingales :

- M Martingale et Φ convexe $s \leq t \Longrightarrow \Phi(M_s) = \Phi(E[M_t|M_s]) \leq E([\Phi(M_t)|Ms]$.
- M est sous martingale (Resp :sur martingale) si $E[M_t|M_t] < \infty$ et $E[M_t|M_s] > M_s$ (Resp :$E[M_t|M_s] \leq M_s$) $\forall s \leq t$.

2.6 Les Processus Aléatoires

[6]

2.6.1 Processus Aléatoire

Définition 2.6.1 *Un processus aléatoire est un ensemble de variables aléatoires , toutes définies sur le même espace de probabilité , et indexée par un paramètre réel.On note un tel processus* $\{X(t); t \in \wp\}$

- *t est le paramètre du processus.*
- *$\wp$ est l'ensemble des paramètres .*
- *S est l'espace des états des (X(t)).*

Définition 2.6.2 *On appelle processus aléatoire (stochastique) à valeurs dans un espace* $\mathbb{E}$ *munie d'une tribu* ϵ *une famille* $X = \{x(t); 0 \leq t \leq \infty\}$ *de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans l'espace mesurable* $(\mathbb{E}, \epsilon)$.

2.6.2 Processus Markoviens

Un processus aléatoire $\{X(t); t \in \wp\}$ est un processus de markov si $\forall n; \forall t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1} \in \wp$ et pour tout ensemble d'états S :

[6] Amélie Lambert. Rappels sur les probabilités, les processus aléatoires et les chaînes de Markov. Cnam.MPRO 2016-2017. page (52,54,58,59)

$$P\{X(t_{n+1}) \in s|X(t_1), ..., X(t_n)\} = P\{X(t_{n+1}) \in S|X(t_n)\}$$

Remarque 2.6.3 *On dit que cette processus est homogéne si* $P\{X(t+s) \in S|X(t_n)\} = P\{X(s) \in S|X(0)\}$ *, avec* $P\{X(t+s) \in S|X(t_n)\}$ *ne depend pas de t.*

2.6.3 Processus Stationnaire

Un processus aléatoire $\{X(t); t \in \wp\}$ est un processus statonnaire si $t_i \in \wp, t_i + S \in \wp$ $i = 1, 2, ...;$ (n un nombre entier) alors :

$$P\{X(t_1) < x_1, ..., X(t_n) < x_n\} = P\{X(t_1 + s) < x_1, ..., X(t_n + s) < x_n\} \forall s \ .$$

2.6.4 Processus de Poisson

Un processus de poisson est un processus de markov homogéne , dont l'espace des états est discret $S = \{1, 2, ...\}$, et l'ensemble des paramètres est continu $\{X(t); t \in [0, +\infty]\}$.

2.6.5 Processus de Levy

Soit $X = X_t; t \geq 0$ un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ On dit que X est à accroissements indépendants si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq \infty$, les variables aléatoires $\{X_{t_{j+1}} - X_{t_j}; 1 \leq j \leq n-1\}$ sont indépendantes. On dit que X est à accroissements stationnaires si, pour tous $t, s > 0$ la va $X_{t+s} - X_s$ a même loi que $X_t - X_0$.

Définition 2.6.4 *On dit que X est un processus de Lévy (issu de* 0*) si :*

1. $X_0 = 0$ *preque sûrement.*

2. *X est à accroissements indépendants et stationnaires .*

3. *X est stochastiquement continu : pour tout* $\epsilon > 0$ *et* $t \geq 0$ *:*

$$\lim_{h \to 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0.$$

On peut remarquer que 1) et 2) implique qu'il suffit de vérifier 3) pour $t = 0$

2.7 INTÉGRALE ET PROCESSUS D'ITÔ

Commençons par L'intégrale d'itô :

Théorème 2.7.1 (L'intégrale d'itô) *Pour tout processus $(X_t)_{t\geq 0}$ de $V([a,b])$ il existe une suite $(\Phi_t^n)_{t\geq 0}$ de fonctionsélémentaires de $V([a,b])$ pour laquelle $\lim_{n\to 0} \mathbb{E}[\int_a^b |X_t - \Phi_t^{(n)}|^2 dt] =$* 0

On définit alors :

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_i^{(n)} dB_t \text{ , dans l'espace } L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}).$$

Remarque 2.7.2 *On d´efinit la famille $V([a,b])$ des processus aléatoires $X = (X_t)_{t\geq 0}$ qui vérifient*

1. *Les trajectoires de X sont p.s mesurables sur la tribu borélienne $\mathcal{B}([a,b])$ de $[a,b]$.*
2. *X est $F_$adapté .*
3. *$E[\int_a^b X_t^2 dt] < \infty$.*

2.7.1 Processus d'itô

$$X_t = X_0 \int_0^t b_s(X_s) d_s + \int_0^t \sigma_s(X_s) dB_s.$$

où $\sigma \in V$ et b est $F_$adapté , avec $\int_0^t |b_s| ds < \infty$

On écrira encore $dX_t = b_t dt + \sigma dB_t$.

2.8 Formule d'itô

X processus d'itô , avec $dX_t = b_t dt + \sigma dB_t$, et $g \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ .Alors $Y_t = g(t, X_t)$ est un processus d'itô

$$dY_t = \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X_t^2} (dX_t)^2 \tag{2.4}$$

avec $(dX_t)^2 + dX_t.dX_t, dt.dt = 0, dt.dB_t = dB_t dt = 0, dB_t dB_t = 0$.

On peut encore écrire

$$dY_t = \left(\frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} b_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} dX_t \sigma_t dB_t. \tag{2.5}$$

2.8.1 formule d'Itô vectorielle

[7] $B_t = [B_{1,t}, ..., B_{m,t}]^T$ mouvement brownien de dimension m et $X_t = [X_{1,t}, ..., X_{n,t}]^T$ processus d'itô de dimension n :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = \begin{bmatrix} b_{1,t} \\ \vdots \\ b_{n,t} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \cdots & \sigma_{1m,t} \\ \vdots \ddots & \vdots & \\ \sigma_{1n,t} & \cdots & \sigma_{nm,t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dB_{1,t} \\ \vdots \\ dB_{m,t} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

et Soit $F(t, X)$ une fonction de t et X avec $F \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $Y_t = F(t, X)$.

Alors , Y_t est un processus d'itô et

$$dF(t, X) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i x_j} g_{ik} g_{jk} \right) dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} g_{ij} dB_j(t) \tag{2.7}$$

2.9 Équation Différentielle Stochastique unidimensionnelles

Le concept d'équation différentielle stochastique généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastique .

[7]E. Allen. Modeling with Itˆo Stochastic Differential Equations. P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands.Page 90

Définition 2.9.1 *Soit $T > 0$ un horizon de temps . Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(F_t)_{t\geq 0}$, on considère un F_{t-}mouvement brownien B_t à valeurs $\mathbb{R}^d$ et x une variable aléatoire F_{0-}mesurable à valeurs $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse à l'équation différentielles stochastique :*

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.8}$$

avec les coefficients :

- $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$ *,C'est la matrice de diffusion.*
- $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *, C'est la vitesse ou drift.*

Définition 2.9.2 *On appelle solution de l'équation différentielle stochastique (2.8) un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ F_{t-}adapté à valeurs $\mathbb{R}^n$ tel que*

$\int_0^T |b(s, X_s)| + |\sigma(s, X_s)|^2 ds < +\infty.$

$\forall t \in [0, T], X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds.$

2.9.1 Solutions fortes et solutions faibles

On se donne$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec $\mathcal{F}_t$ est une filtration de cet espace , et (B_t) un mouvement brownien en dimension m tel que (B_t) et une martingale

Définition 2.9.3 (solution forte) *Le processus (X_t) est solution forte de(2.8) si (X_t) est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t) \vee \sigma(x)$ et si , pour tout $t \in [0, T]$, on a presque sûrement :*

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

Définition 2.9.4 (solution faible) *Une solution faible de(2.8) est la donnée d'un triplet (X, B) , $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_t)$ et si , pour tout $t \in [0, T]$, on a presque sûrement :*

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

Définition 2.9.5 (unicité faible en loi) *On dit que qu'il y a unicité faible en loi pour l'équation (2.8) si deux solution faibles ont toujours même loi.*

2.9.2 Existence et Unicité Fortes

Théorème 2.9.6 (Unicité Forte) *On suppose que les coefficients f et g sont localement lipschitzien en x et y, c'est ta dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe K_n tel que pour tout $t \in [O,T]$ pour tout (x,y) vérifiant $|x| \leq n$ et $|y| \leq n$ on a*

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |(g(t,x) - g(t,y)| \leq K_n|x-y| \tag{2.9}$$

Alors, si (2.3) admet une solution continue par rapport à la variable t, elle est unique .

On remarque que si $T = +\infty$, on a encore unicité forte puisqu'il suffit d'appliquer ce théorème sur tout intervalle $[0;T]$.

Théorème 2.9.7 (Existence Forte) *Supposons que les fonctions b et σ satisfont les deux conditions suivantes :*

Condition de Lipschitz locale : *Pour tout compact $K \in \mathbb{R}$, il existe une constante $K = K(\mathcal{K})$ telle que :*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |(\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K_n|x-y| \tag{2.10}$$

pour $x, yett \in [0;T]$.

Condition de croissance : *Il existe une constante L telle que :*

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq L^2(1 + |x|^2) \tag{2.11}$$

pour tous x,t.

Alors l'équation différentielle stochastique (2.8) admet, pour toute condition initiale, une solution forte x_t p.s continue.

2.9.3 Bruit Aditif et Bruit Multiplicatif

les équations différentielles stochastiques sont utilisée dans différentes branches des sciences pour modéliser dans processus familiers , qui sont bruités

Définition 2.9.8 (Bruit Aditif) *Une équation différentielle stochastique(2.8) est dite avec bruit additif si le coefficient de diffusion s'écrit sous la forme :* $b(t,x) \equiv b(t)$

Equation homogène avec coefficient constant

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t \tag{2.12}$$

La solution générale de cette équation s'écrit sous la forme

$$X_t = \exp^{-\alpha t}\left(X_0 + \int_0^t \exp^{\alpha s} dB_s\right) \tag{2.13}$$

Equation non homogène avec coefficient constant

$$dX_t = (aX_t + b)dt + cdB_t \tag{2.14}$$

La solution générale s'écrit sous la forme :

$$X_t = \exp^{\alpha t}\left(X_0 + \frac{b}{a}(1 - \exp^{-\alpha t}\right) + c\int_0^t \exp^{-\alpha s} dB_s) \tag{2.15}$$

Equation à coefficients variables

$$dX_t = (a(t)X_t + b(t)dt + c(t)dB_t \tag{2.16}$$

La solution générale s'écrit sous la forme :

$$X(t) = \Phi_{t,t_0}\left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} b(s)ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} c(s)dB_s\right) \tag{2.17}$$

avec la solution fondamentale

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \tag{2.18}$$

Définition 2.9.9 *Equations différentielles stochastiques linéaires (bruit multiplicatif)* **Equation homogène avec coefficient constant**

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dB_t \tag{2.19}$$

La solution générale s'écrit sous la forme :

$$X_t = X_0 \exp((a - \frac{1}{2}b^2)t + bB_t) \tag{2.20}$$

Equation non homogène avec coefficient constant

Cette équation s'écrit sous la forme :

$$dX_t = (aX_t + c)dt + (bX_t + d)dB_t \tag{2.21}$$

La solution de cette équation est

$$X(t) = \Phi_t\Big(X_0 + (c - bd)\int_0^t \Phi_s^{-1}ds + \int_0^t \Phi_s^{-1}dB_s\Big) \tag{2.22}$$

avec la solution fondamentale

$$\Phi_t = \exp((a - \frac{1}{2}b^2)t + dB_t) \tag{2.23}$$

Equation homogène à coefficients variables

$$dX_t = a(t)X_tdt + b(t)dB_t \tag{2.24}$$

La solution :

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t (a(s) - \frac{1}{2}b^2(s))ds + \int_0^t b(s)dB_s\right) \tag{2.25}$$

Equation non homogène à coefficients variables

$$dX_t = (a(t)X_t + c(t))dt + (b(t)X_t + d(t))dB_t \tag{2.26}$$

la solution est de la forme

$$X(t) = \Phi_{t,t_0}\Big(X_{t_0}\int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1}(c(s) - b(s)d(s))ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1}d(s)dB_s\Big) \tag{2.27}$$

avec La solution fondamentale

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t \Big(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)\Big)ds + \int_{t_0}^t b(s)dB_s\right) \tag{2.28}$$

Chapitre 3

Équation différentielle stochastique multidimensionnelle , Schéma d'Euler

Dans ce Chapitre on va introduit la présentation de l'équation différentielle stochastique au cas multidimensionnelle et la formule de schéma d'Euler .

3.1 équation Différentielle Stochastique Multidimensionnelle

Définition 3.1.1 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *.Soit* $(X_i(t))_{t\in[0,T]}$ *un processus n_dimensionnel , l'équation différentielle stochastique au cas multidimensionnelle est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} dX_{1,t} \\ \vdots \\ dX_{n,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_n(t) \end{pmatrix}$$

et pour $1 \leq i \leq n$ *on a :*

$$dX_i(t) = a_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)dB_j(t) \tag{3.1}$$

Où :

- B_t *: un mouvement Brownien standard.*
- $a_i(t) : [0,T] \times \mathbb{R}^{\ltimes} \longrightarrow \mathbb{R}^{\ltimes}$ *, C'est le vecteur de la vitesse ou drift.*
- $b_{ij}(t) : [0,T] \times \mathbb{R}^{\ltimes\gtrdot} \longrightarrow \mathbb{R}^{\ltimes\gtrdot}$ *, C'est la matrice de diffusion .*

Définition 3.1.2 *On appelle solution de l'équation différentielle stochastique (3.1) un processus* $(X_{i,t})_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{F}_{t-}$*adapté à valeurs* $\mathbb{R}^n$ *tel que :*

$$\forall t \in [0,T] \qquad X_{i,t} = X_i + \int_0^t a_i(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)dB_j(t) \tag{3.2}$$

3.1.1 Existence et Unicité Fortes

Théorème 3.1.3 *Supposons que les coefficients f et g satisfont les deux conditions suivant :*

Condition de Lipschitz locale : $\forall K \in \mathbb{R}$ *il existe une constante* $K = (\mathcal{K})$ *telle que :*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| + \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq K\|x - y\|$$

avec x *,* $y \in [0,T]$

Condition de croissance : $\forall x, y \in [0,T]$ *il existe une constante L telle que :*

$$\|f(t,x)\| + \|g(t,x)\| \leq L(1 + \|x\|)$$

ou

$$\|f(t,x)\| \leq L(1 + \|x\|)$$
$$\|g(t,x)\| \leq L'(1 + \|x\|)$$

Preuve.

bruit multiplicatif

On a :

$$dX_t = (A(t)X_t + C(t)dt) + (B(t)X_t + D(t))dB_t \tag{3.3}$$

est une équation différentielle stochastique linéaire (bruit multiplicatif).

Alors on a $f(t,x) = A(t)X_t + C(t)$ et $g(t,x) = B(t)X_t + D(t)$

1. condition de Lipschitz locale

   $\|f(t,x) - f(t,y)\| + \|g(t,x) - g(t,y)$

   $= \|A(t)x_t - A(t)y_t\| + \|B(t)x_t - B(t)y_t\|$

   $= \|A(t)(x_t - y_t)\| + \|B(t)(x_t - y_t)\|$

   $\leq \|A(t)\|\|x_t - y_t\| + \|B(t)\|\|x_t - y_t\|$

   $\leq \sup\limits_{t\in[0,T]} (\|A(t)\|, \|B(t)\|)\|x_t - y_t\|$

   $\exists K \in \mathbb{R}/\|A(t)\|, \|B(t)\| < K.$

   Alors $\leq K\|x_t - y_t\|$.

2. condition de croissance

   $\|f(t,x)\| \leq L(1 + \|x\|)$ $\|g(t,x)\| \leq L^{'}(1 + \|x\|)$

   $\|A(t)x_t + C(t)\| \leq \|A(t)\|\|x_t\| + \|C(t)\|$

   $\leq \sup\limits_{t\in[0,T]} (\|A(t)\|, \|C(t)\|)(1 + \|x_t\|)$

   $\leq L(1 + \|x_t\|)$.

Donc l'équation différentielle stochastique (3.3) est admet une unique solution forte

bruit additif

On a :

$$dX_t = (E(t)x_t + F(t))dt + D(t)dB_t \tag{3.4}$$

est une équation différentielle stochastique à bruit additif.

Alors on a $f(t,x) = E(t)x_t + F(t)$

1. condition de Lipschitz locale

   $\|f(t,x) - f(t,y)\|_F = \|E(t)x_t - E(t)y_t\|_F$

$= \|E(t)(x_t - y_t)\|_F \leq \|E(t)\|_2 \|x_t - y_t\|_F$

$\exists K \in \mathbb{R} / \|E(t)\|_2 < K$ avec $\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \sup_{t\in[0,T]} |e_{ij}(t)|^2} \leq K$.

Alors $\leq K\|x_t - y_t\|$.

2. condition de croissance

   $\|f(t,x)\| \leq L(1 + \|x\|)$

   $\|g(t,x)\| \leq L^{'}(1 + \|x\|)$ $\|E(t)x_t + F(t)\| \leq \|E(t)\|\|x_t\| + \|F(t)\|$

   $\leq \sup_{t\in[0,T]} (\|E(t)\|, \|F(t)\|)(1 + \|x_t\|)$

   $\leq L(1 + \|x_t\|)$.

Alors on conclut que l'équation (3.4) admet une unique solution forte $\blacksquare$

3.2 Modèle Black Scholes

Définition 3.2.1 *Le modèle de Black Scholes est un modèle à temps continu avec un actif risqué (resp :sans risque). On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique simple*

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t \\ x(0) = x \end{cases} \quad \forall r, \sigma \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Sur l'espace probabilisé filtré$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ où $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration brownienne , B_t est un $\mathcal{F}_{t-}$mouvement brownien standard avec les coefficients :

- σ :est un coefficient de volatilité.
- r :est un coefficient de croissance.

la solution exacte s'écrit à la forme

$$X_t = X_0 \bigg(\exp(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t \bigg) \tag{3.6}$$

Cas Multidimensionnelle

Le modèle Black Scholes multidimensionnelle s'écrit sous la forme :

pour $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{cases} dX_i(t) = r_i X_{i,t} dt + X_{i,t} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dB_{j,t} \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.7}$$

pour atteindre à une solution de (3.7) on cherche un processus adapté vérifier :

$$X_{i,t} = x + \int_0^t r_i X_{i,t} ds + \int_0^t X_{i,t} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dB_s \tag{3.8}$$

on utilisant la formule d'itô vectorielle (2.7) avec

$$F(t,X) = \ln(X_{i,t}) \qquad \text{et} \qquad f_i = r_i X_i \qquad g_{ij} = X_i \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}$$

Alors on a :

$$dF(t,X) = \left(\frac{1}{X_{i,t}} r_i X_i - \frac{1}{2X_i^2} X_i^2 \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{ij}|^2 \right) dt + \frac{1}{X_i} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_i dB_{jt} \tag{3.9}$$

$$dF(t,X) = \left(r_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{ij}|^2 \right) dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dB_{jt} \tag{3.10}$$

donc $\forall t \in [0,T]$ on a

$$\int_o^t dF(s,X) = \int_o^t \left(r_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{ij}|^2 \right) ds + \int_o^t \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dB_{js} \tag{3.11}$$

c'est à dire le processus $F(t,X)$ est un solution de l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle (3.7) alors

$$\ln(X_i) = \ln(x_{i,0}) + \int_o^t \left(r_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{ij}|^2 \right) s + \int_o^t \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dB_{js} \tag{3.12}$$

la solution est

$$\ln(X_{i,t}) = \ln(x_{i,0}) + \left(r_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{ij}|^2 \right) t + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} B_{jt} \tag{3.13}$$

Alors la solution exacte est

$$X_{i,t} = X_{i,0} \exp\left(r_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{ij}|^2 \right) t + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} B_{jt} \tag{3.14}$$

3.2.1 Schéma d'Euler

Définition 3.2.2 *Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on se donne une subdivision ici $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{T}{N}, ..., t_N = T\}$, alors le schéma d'Euler est défini par la récurrence*

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_{k+1}} = \bar{X}_{t_k} + a(\bar{X}_{t_k})(t_{k+1} - t_k) + b(\bar{X}_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \\ \bar{X}_0 = X_0 \end{cases} \tag{3.15}$$

On considère souvent le schéma de pas $h = \frac{T}{N}$ i.e $t_k = kh$.
Alors on a

$$\bar{X}_{t_{k+1}} = \bar{X}_{t_k} + \frac{T}{N} a(\bar{X}_{t_k}) - t_k) + b(\bar{X}_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \tag{3.16}$$

On approxime la solution sur $[0, T]$ par processus linéaire par morceaux passant par les points $(t_k, \bar{X}_{t_k})_{0 \leq k \leq N}$:

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}] \bar{X}_N(t) = \bar{X}_N(t_k) + (t - t_k) a(t_k) + b(t_k)(B_t - B_{t_k}) \tag{3.17}$$

Proposition 3.2.3 *Soit $t_0, ..., t_n$ une partition de $[0, T]$ alors*

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(X_s) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(X_s) dB_s \tag{3.18}$$

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} + a(X_{t_k})(t_{k+1} - t_k) + b(X_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \tag{3.19}$$

3.2.2 Convergence L^p

Pour n fixé , on montre en utilisant les conditions de Lipchitz, pour a et b de la relation (3.19) que $X_{t_k} \in L^p$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $p \geq 1$

Théorème 3.2.4 *Supposons que a et b des fonctions continues et Lipchitziennes .Alors $\forall p \geq 1$*

$$\mathbb{E}[(\sup_{t \in [0,T]} \|X_{N,t} - X_t\|^p)^{\frac{1}{p}}] \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$$

3.2.3 Convergence faible

Dans le domaine financier ,on s'intéresse surtout à la convergence du prix approché vers le prix réel , en terme mathématique cela veut dire qu'on cherche la convergence de $\mathbb{E}_g(X_{N,t}) - \mathbb{E}_g(X_t)$ vers 0 , c'est la convergence faible

Théorème 3.2.5 *Si $a, b \in C_b^4, g \in C_p^4$ alors*

$$\|\mathbb{E}[g(X_{N,t}) - g(X_t)]\| \leq \frac{C}{\sqrt{N}} \tag{3.20}$$

3.2.4 Convergence fort

Supposons que a et b des fonctions continues et Lipchitziennes .Pour $\beta = \min(\alpha, \frac{1}{2})$, et $\forall p \geq 1$, $\exists C_p > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,T]} |X_N(t) - X_t|^{2p})] \leq \frac{C_p}{\sqrt{N^{2\beta p}}} \tag{3.21}$$

Chapitre 4

Exemples

On a choisi deux exemples des équations différentielles stochastique multidimensionnelles avec bruit additif et multiplicatif est étudier leur convergence .

4.1 Exemple (bruit multiplicatif)

$$\begin{pmatrix} dX_{1,t} \\ dX_{2,t} \\ dX_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{pmatrix} dB_t$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
est une équation différentielle homogène

$$dX_t = AX_t dt + FX_t dB_t \tag{4.1}$$

La solution exacte de (4.1) est sous la forme :

$$X_t = \exp((A - \frac{1}{2}F^2)t + FB_t)X_0 \tag{4.2}$$

On pose $C = A - \frac{1}{2}F^2$ Alors

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5/2 \\ -6 & -3/2 & -6 \\ -6 & 0 & 15/2 \end{pmatrix}$$

$$E = \exp(c.t) = \exp\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 15/2 \\ -6 & -3/2t & -6 \\ -6 & 0 & 15/2 \end{pmatrix}.t\right) = \begin{pmatrix} 5-4e^{-3/2t} & 0 & 5-5e^{-3/2t} \\ -4+4e^{-3/2t} & e^{-3/2t} & -4+4e^{-3/2t} \\ -4+4e^{-3/2t} & 0 & -4+5e^{-3/2t} \end{pmatrix}$$

et on a $K = \exp(F.B_t) = \exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.t\right) = \begin{pmatrix} e^{2B_t} & 0 & -e^{B_t}+2e^{2B_t} \\ -e^{B_t}+e^{2B_t} & e^{B_t} & -e^{B_t}+e^{2B_t} \\ 0 & 0 & e^{B_t} \end{pmatrix}$

la solution exacte est :

$$\begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5e^{2B_t}-4e^{-3/2t+2B_t})x_{1,0}+(-8e^{-3/2t+2B_t}-e^{-3/2+B_t}+10e^{2B_t})x_{3,0} \\ (-4e^{2B_t}+6e^{-3/2t+2B_t}-e^{-3/2t+B_t})x_{1,0}+(e^{-3/2t+B_t})x_{2,0}+(9e^{-3/2t+2B_t}-8e^{2B_t})x_{3,0} \\ (-4e^{2B_t}-4e^{-3/2t+2B_t})x_{1,0}+(8e^{-3/2t+2B_t}+e^{-3/2t+B_t}-8e^{2B_t})x_{3,0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{pmatrix} &= \exp((A-\tfrac{1}{2}F^2)t+FB_T)X_0 \\ &= \exp((A-\tfrac{1}{2}F^2)t)\exp(FB_T)X_0 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{pmatrix} = (E.K)X_0$$

La solution approchée de (4.1) :

Soient $\{t_0 = 0, t_1 \leq t_2, \leq ... \leq t_k \leq ... \leq t_n\} \in T$ vérifiant $]t_{k-1}, t_k[\subset T$ avec $\{]t_{k-1}, t_k[, k = 1, 2, ...n\}$ des subdivisions de $[0, T]$ alors on a

$\forall[0, T]$ il existe un voisinage de t $v(t) \subset [0, T]$ et il existe $]t_{k-1}, t_k[$ vérifiant $v(t) \cap]t_{k-1}, t_k[\neq \emptyset$; $t \in v(t) \cap]t_{k-1}, t_k[$

$$\begin{pmatrix} X_{1,t_k} \\ X_{2,t_k} \\ X_{3,t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{1,t_{k-1}} \\ X_{2,t_{k-1}} \\ X_{3,t_{k-1}} \end{pmatrix} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} AX_s ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} FX_s dB_s$$

$A(X_{t_{k-1}}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_{1,t_{k-1}} \\ X_{2,t_{k-1}} \\ X_{3,t_{k-1}} \end{pmatrix}$ et $F(X_{t_{k-1}}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_{1,t_{k-1}} \\ X_{2,t_{k-1}} \\ X_{3,t_{k-1}} \end{pmatrix}$

Alors

$$\begin{pmatrix} X_{1,t_k} \\ X_{2,t_k} \\ X_{3,t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{1,t_{k-1}} \\ X_{2,t_{k-1}} \\ X_{3,t_{k-1}} \end{pmatrix} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} A(X_s)ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(X_s)dB_s$$

On approxime la solution sur $[0, T]$ par le processus linéaire par morceaux passant par les points $(t_{k-1}, X(t_{k-1}))_{0\leq k\leq N}$ et $\forall t_k \in [t_{k-1}, t_k]$,

$Y_{t_k} = X_{t_K} = X_{t_{k-1}} + A(X_{i,s})(t_k - t_{k-1}) + F(X_{t_{k-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$

Calcule de $\mathbb{E}(\|X_t - Y_{t_k}\|)$:

on a $\Delta_t = t_{k+1} - t_{k-1}$, $t_k \in [t_{k-1}, t_k]$

$\forall\epsilon > 0; \exists N_0 \forall k > N_0$ alors $\Delta_t < \epsilon$ et $\mathbb{E}(\|X_t - Y_{t_k}\| < \epsilon$

$\mathbb{E}(\|X_t - Y_{t_k}\|) = \mathbb{E}(\|E.K.X_0 - X_{t_{k-1}} - A(X_{t_{k-1}})(t_k - t_{k-1}) - F(X_{t_{k-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\|)$

$\leq \mathbb{E}(\|E.K.X_0 - X_{t_{k-1}}\|) + \mathbb{E}(\|A(X_{t_{k-1}})\|)|(t_k - t_{k-1})| + \mathbb{E}(\|F(X_{t_{k-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\|)$

avec $\mathbb{E}(\|F(X_{t_{k-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\|) = 0$ et$\mathbb{E}(\|K\|) = 1$

si $\Delta_t \longrightarrow 0$ donc $t_{k-1} \longrightarrow t_k$ on déduit que $\mathbb{E}(\|A(X_{t_{k-1}})\|)|(t_k - t_{k-1})| = 0$

Alors $\mathbb{E}(\|X_t - Y_{t_k}\|) \leq \mathbb{E}(\|E.X_0\|) - \mathbb{E}(\|X_{t_{k-1}}\|)$

$k \longrightarrow +\infty$ on a $X_{t_{k-1}} \longrightarrow X_t$

c'est a dire

$\mathbb{E}(\|X_t - Y_{t_k}\|) \leq \mathbb{E}(\|E.X_0\|) - \mathbb{E}(\|X_t\|) = \mathbb{E}(\|E.X_0\|) - \mathbb{E}(\|E.K.X_0\|)$

$\leq \mathbb{E}(\|E.X_0\|) - \mathbb{E}(\|E.X_0\|) - \mathbb{E}(\|K\|) = 0$

Alors $\mathbb{E}(\|X_t - Y_{t_k}\|) \leq 0$ alors $\exists\epsilon\,;\, \epsilon > 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\|x_t - y_{t_k}\|) \leq \epsilon$

On déduit que la solution exacte de l'équation (4.1) et converge fortement vers la solution approchée.

4.2 Exemple (bruit additif)

$$\begin{pmatrix} dX_{1,t} \\ dX_{2,t} \\ dX_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dB_t$$

est une équation différentielle homogène

$$dX_t = FX_t dt + KdB_t \tag{4.3}$$

La solution exacte de (4.3) est sous la forme :

$$\begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2e^{-t} + 3e^{2t})x_{1,0} + (-3e^{-t} + 3e^{2t})x_{2,0} \\ (e^{-t} - e^{2t})x_{1,0} + e^{-t}x_{2,0} + (e^{-t} - e^{2t})x_{3,0} \\ (-2e^{-t} - 2e^{2t})x_{1,0} + (-3e^{-t} - 2e^{2t})x_{3,0} \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-(t-s)} dB_s. \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $\begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t}+3e^{2t} & -3e^{-t}+3e^{2t} & 0 \\ e^{-t}-e^{2t} & e^{-t} & e^{-t}-e^{2t} \\ -2e^{-t}-2e^{2t} & 0 & -3e^{-t}-2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,0} \\ X_{2,0} \\ X_{3,0} \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-(t-s)} dB_s.$
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2e^{-t}+3e^{2t} & -3e^{-t}+3e^{2t} & 0 \\ e^{-t}-e^{2t} & e^{-t} & e^{-t}-e^{2t} \\ -2e^{-t}-2e^{2t} & 0 & -3e^{-t}-2e^{2t} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Donc la solution exacte
$\begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_{1,0} \\ X_{2,0} \\ X_{3,0} \end{pmatrix} + C \int_0^t e^{-(t-s)} dB_s.$

Solution approchée :

Soient $\{t_0 = 0, t_1 \leq t_2, \leq ... \leq t_k \leq ... \leq t_n\} \in T$ vérifiant $]t_{k-1}, t_k[\subset T$ avec $\{]t_{k-1}, t_k[, k = 1, 2, ...n\}$ des subdivisions de $[0, T]$ alors on a

$\forall [0, T]$ il existe un voisinage de t $v(t) \subset [0, T]$ et il existe $]t_{k-1}, t_k[$ vérifiant $v(t) \cap]t_{k-1}, t_k[\neq \emptyset$; $t \in v(t) \cap]t_{k-1}, t_k[$

$$\begin{pmatrix} X_{1,t_k} \\ X_{2,t_k} \\ X_{3,t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{1,t_{k-1}} \\ X_{2,t_{k-1}} \\ X_{3,t_{k-1}} \end{pmatrix} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} F X_s ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} K dB_s$$

On approxime la solution aux points de la subdivision par :

$$y_{t_k} = X_{t_{k-1}} + F(X_{t_k})(t_{k-1} - t_{k+1}) + K(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \qquad \forall t_k \in [t_{k-1}, t_{k+1}] \tag{4.4}$$

calcule de $\mathbb{E}(\|x_t - y_{t_k}\|)$:

$\forall \epsilon > 0$, $\exists N_0$; $\forall k > N_0$ on a $\Delta_t < \epsilon$ et $\mathbb{E}(\|x_t - y_{t_k}\|) < \epsilon$, avec $\Delta_t = t_k - t_{k-1}$

alors

$\mathbb{E}(\|x_t - y_{t_k}\|) = \mathbb{E}(AX_0 + \int_0^t C dB_s - X_{t_{k-1}} - F(X_{t_k})(t_k - t_{k-1}) - K(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\|)$

$\leq \mathbb{E}(\|AX_0 - X_{t_{k-1}}) + \|F(X_{t_k})\||(t_{k-1} - t_{k+1})| + \mathbb{E}(\|C \int_0^t dB_s\|) + \mathbb{E}(\|K(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\|))$

On a

$\mathbb{E}(\|C \int_0^t dB_s\|) = 0$ et $\mathbb{E}(\|K(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\|) = 0$

Alors

$\mathbb{E}(\|x_t - y_{t_k}\|) \leq \mathbb{E}(\|AX_0 - X_{t_{k-1}}) + \|F(X_{t_k})\||(t_{k-1} - t_{k+1})|$

et pour $\Delta_t \longrightarrow 0$ on a $\|F(X_{t_k})\||(t_{k-1} - t_{k+1})| = 0$

$\mathbb{E}(\|x_t - y_{t_k}\|) \leq \mathbb{E}(\|AX_0 - X_{t_{k-1}}\|)$

$k \longrightarrow +\infty$ on a $X_{t_{k-1}} \longrightarrow X_t$ donc

$\mathbb{E}(\|x_t - y_{t_k}\|) \leq \mathbb{E}(\|AX_0 - X_t\|) = \mathbb{E}(\|AX_0 - AX_0 + C\int_0^t e^{-(t-s)} dB_s\|)$

$\leq \mathbb{E}(\|AX_0 - AX_0\|) + \mathbb{E}(\|C\int_0^t e^{-(t-s)} dB_s\|)$

$\leq \mathbb{E}(\|AX_0 - AX_0\|) \leq 0$

Donc $\mathbb{E}(\|x_t - y_{t_k}\|) \leq 0$ alors $\exists\epsilon\,;\, \epsilon > 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\|x_t - y_{t_k}\|) \leq \epsilon$

Alors la solution exacte de cette équation différentielle stochastique multidimensionnelle est converge fortement vers la solution approchée.

4.3 Conclusion

On conclut que les équations différentielles stochastiques multidimensionnelles linéaire (bruit additif et multiplicatif) admet une solution exacte unique et forte converge fortement vers la solution approchée .

Bibliographie

[1] Nils Berglund . Introduction aux equations différentielles stochastiques :page 12 Janvier 2005.

[2] V.Bénézech, P.Bouafia : Equations différentielles stochastiques en dimension finie et infinie , page12.

[3] Julian Tugaut . Convergences des variables aléatoires.Saint- Etienne (2014)

[4] Vincent Lemaire . Discrétisation d'équations différentielles stochastiques.Chapitre 3 (11 mai 2009)

[5] Christophe Chorro.Schéma d'Euler pour les EDS.(Décembre 2008) Page (18, 19 , 21)

[6] Khadidja Abdelhak .Quelques Applications du modèle de Black-Scholes. Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master Académique.Université Dr Tahar Moulay - Saïda. (21 mai 2017)

[7] E. Allen .Modeling with Itˆo Stochastic Differential Equations. .P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands.

[8] Bruno Vallette .Algèbre linéaire pour tous .page 130-131-136

[9] Fabien Margairaz et Noé Cuneo.Algèbre linéaire I et II linéaire .D'après le cours d'algèbre linéaire du Prof. K. Hess Bellwald EPFL .Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne . page 103.

[10] Souheil Halabi.Filtrage robuste pour les systèmes stochastiques incertains. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2005. Français.

[11] Safia Leumi .Inférence statistique dans les modèles linéaires a temps continue application aux modèle CARMA.Mémoire de Magistère.page 15.

[12] Christophe Chorro.Schéma d'Euler pour les EDS . ENSA AGADIR. Décembre 2008. Page 16,18.

[13] Vincent Lemaire .Discrétisation d'équations différentielles stochastiques. (LPMA - UPMC) .11 mai 2009. page 16.

[14] Zitouni Mahieddine.Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogradés. Mémoire de Magistère.Université M'hamed Bougara boumardes.2009/2010.chapitre 3 page 50 , 51.