UNIVERSITÉ KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :Toubakh Sara

Thème

Résolutions des équations différentielles fractionnaires avec conditions intégrales aux limites

Version de : /05/2018

Devant le jury composé de :

M. Meflah Mabrouk	MCA. UKMO université-Ouargla	Président
M. Tellab Brahim	MCB. UKMO université-Ouargla	Rapporteur
M. Badidja Salim	MCB. UKMO université-Ouargla	Examinateur
M. Mammeri Mohamed	MCB. UKMO université-Ouargla	Examinateur

Dédicace

Je dédie ce modeste travail:
À mes très chers, respectueux et magnifiques parents, ma mère et mon père,
Qui m'ont soutenu tout au long de ma vie, Par leur patience, leur amour et leur conseils.
À mes soeurs et mon frère.
À tous mes amis.
À mon encadreur Dr. Tellab Brahim qui m'a guidé durant toute ma recherche.
Enfin, je dédie ce travail à tous les étudiants du département de mathématiques de l'université Khasdi merbah ouargla.

Remerciements

Mon premier remerciement va à Allah soubhanahou wa tahala.
Nos plus vifs remerciements vont aussi à mon encadreur : **Dr. Tellab Brahim**, pour ses précieux conseils, son aide et son encouragement.
Je remercie également tous les membres du jury : **Dr. Meflah Mabrouk, Dr. Badidja Salim, Dr. Mammeri Mohamed** pour leurs conseils, leurs suggestions et leurs remarques judicieuses.
Je ne pourrais terminer sans remercier mes parents et ma famille qui m'ont soutenu et encouragé pour terminer ce travail
Il est important pour moi de remercier tous les enseignants de L'université de KASDI MERBAH OUARGLA.

Table des matières

Introduction générale

Les calculs fractionnaires sont des outils précieux dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines de l'ingénierie, de la physique et de l'économie. De nombreux livres et articles sur le fractionnaire calcul, équations différentielles fractionnaires et équations intégrales fractionnaires sont apparus [3, 16, 17, 18, 21].

Récemment, la théorie sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles fractionnaires ont été étudiés par de nombreux auteurs (voir par exemple [21, 12, 15, 20, 22].

Les équations différentielles fractionnaires avec conditions intégrales aux limites constituent un trés intèressant et une classe importante de problèmes. Plusieurs applications de conditions intégrales aux limites ont souvent été rencontré. Ils ont été mentionnés par exemple dans l'étude de la dynamique des populations [23] et systèmes cellulaires [24].

De plus, un certain nombre d'auteurs ont discuté des problèmes aux limites avec des limites intégrales telles que, Infante [10] , Peciutyle et al. [19], Benchohra et ses collaborateurs [13, 14], Arara et Benchohra [9].

Les conditions non locales ont été initiées par Bitsadze [25]. Byszewski à remarquer que la condition non locale peut être plus utile que la condition initiale standard pour décrire certains phénomènes physiques. Comme exemples sur des travaux récents sur les équations fractionnaires avec conditions non locales , le lecteur intéressé se réfère à [26, 27, 28, 29].

Le travail effectué dans le présent mémoire se décompose en trois chapitres organisé de la façon suivante :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, nous présentons quelques outils de base sur les dérivées et les intégrales fractionnaires et quelques fonctions spéciales utiles à la suite de ce travail ainsi que quelques définitions et propriétés de la mesure de non compacité de Kuratowski.

Chapitre 2 : Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad J = [0, T], \\ \\ D^{\alpha-2}u(0) - D^{\alpha-1}u(0) = \int_0^T g(s, u(s))ds, \\ \\ D^{\alpha-2}u(T) + D^{\alpha-1}u(T) = \int_0^T h(s, u(s))ds \end{cases}$$

où D^α désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α, $f, g, h : J \times E \longrightarrow E$ sont trois fonctions données qui satisfont quelques hypothèses qui seront donnée après et E est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$.

Chapitre 3 : Ce chapitre à pour but, l'étude de l'existence et l'unicité de solution du problème :

$$\begin{cases} {}^C D^q x(t) = f(t, x(t)), \quad 1 < q \leq 2, \quad t \in J = [0, 1], \\ \\ x(0) = g(x) + \alpha \displaystyle\int_0^\xi x(s)ds, \quad 0 < \xi < 1, \\ \\ x(1) = h(x) + \beta \displaystyle\int_0^\eta x(s)ds, \quad 0 < \eta < 1. \end{cases}$$

avec ${}^C D^q$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre q, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée, $g, h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions données vérifiant quelques hypothèses qui seront définies par la suite.

Phrases et mots clés : Dérivées fractionnaires, intégrales fractionnaires, Riemann-Liouville, Caputo, espace de Banach, équation intégrale, mesure de non compacité, condition intégrale, condition non locale.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Fonctions utiles pour le calcul fractionnaire

Définition 1.1.1 *[3] On appelle fonction Gamma d'Euler la fonction notée Γ définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

où z est un nombre complexe tel que $R_e(z) > 0$.
Cette intégrale est absolument convergente dans le demi-plan complexe où la partie réelle de z est strictement positive.
Des intégrations par parties donne :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad R_e(\alpha) > 0.$$

En particulier,

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.1.2 *[3] La fonction Bêta est définie par :*

$$B(z, w) = \int_0^{+\infty} \tau^{z-1}(1 - \tau)^{w-1} d\tau, \quad R_e(z) > 0, \ R_e(w) > 0.$$

Une relation entre les fonctions Gamma et Bêta est la suivante :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}, \quad R_e(z) > 0, \ R_e(w) > 0.$$

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et lemmes utiles pour la suite de nos résultats.

Définition 1.2.1 *[3] L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction $h \in C([a, b])$ est définie par :*

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Lorsque $a = 0$, *on écrit* $I^{\alpha}h(t) = h(t) * \phi_{\alpha}(t)$,
où $\phi_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, *pour* $t > 0$, $\phi_{\alpha}(t) = 0$, *pour* $t \leq 0$ *et* $\phi_{\alpha} \longrightarrow \delta$, *quand* $\alpha \longrightarrow 0$.

Exemple 1.2.1 *Soit* $f(t) = (t-a)^{\mu}, \quad \mu > -1$.

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\mu} ds. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $s = a + (t-a)x$, *nous obtenons :*

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(t) &= \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (1-x)^{\alpha-1} x^{\mu} dx \\ &= \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \mu+1) \\ &= \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

C'est-à-dire :

$$I_a^{\alpha}(t-a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}(t-a)^{\mu+\alpha}.$$

1.2.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2 *[3] La dérivée fractionnaire d'ordre* α *au sens de Riemman-Liouville d'une fonction continue* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \\ &= \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha} f(t), \end{aligned}$$

où $n = [\alpha] + 1$.

Exemple 1.2.2 *Soit* α *un nombre non entier tel que* $0 \leq n-1 < \alpha < n$, *alors on a :*

$${}^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\mu} d\tau.$$

Un changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, *donne :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\mu-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\mu} ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\mu-\alpha+1) B(n-\alpha, \mu+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\mu-\alpha+1)} (t-a)^{\mu-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+\mu-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\mu-\alpha+1)\Gamma(n+\mu-\alpha+1)} (t-a)^{\mu-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} (t-a)^{\mu-\alpha}. \end{aligned}$$

Propriétés[17]

1. **Composition avec les intégrales fractionnaires**

• L'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemman-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, autrement dit :

$$^{RL}D^{\alpha}(I^{\alpha}f(t)) = f(t),$$

et d'une manière générale, nous avons :

$$^{RL}D^{\alpha}(I^{\beta}f(t)) = {}^{RL}D^{\alpha-\beta}f(t)$$

• Dans le cas général, la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas, et on a :

$$^{RL}D^{-\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big) = {}^{RL}D^{\beta-\alpha}f(t) - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\Big[{}^{RL}D^{\beta-k}f(t)\Big]_{t=a}.$$

avec $m-1 \leq \beta < m$.

2. **Composition avec les dérivées d'ordre entier**

Soit α nombre non entier, pour tout entier positif n tel que $n-1 < p < n$, on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big) = {}^{RL}D^{n+\alpha}f(t),$$

et

$$^{RL}D^{\alpha}\Big(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\Big) = {}^{RL}D^{n+\alpha}f(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n-1)}.$$

Alors, on en déduit que la dérivation d'ordre fractionnaire et La dérivation conventionnelle ne commutent que si :

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{pour tout } k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

3. **Composition avec les dérivées fractionnaires**

Soient $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta < m$, alors, on a :

$$^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big) = {}^{RL}D^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)}\Big[{}^{RL}D^{\beta-k}f(t)\Big]_{t=a}.$$

et

$$^{RL}D^{\beta}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big) = {}^{RL}D^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)}\Big[{}^{RL}D^{\alpha-k}f(t)\Big]_{t=a}.$$

Par conséquent, deux opérateurs de dérivation fractionnaire $^{RL}D^{\alpha}$ et $^{RL}D^{\beta}$, ne commmutent que si $\Big[{}^{RL}D^{\beta-k}f(t)\Big]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, ..., n$, et $\Big[{}^{RL}D^{\alpha-k}f(t)\Big]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, ..., m$.

4. **La dérivée d'ordre non entier d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, en effet :**

$$^{RL}D^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

1.2.2 Approche de Caputo

Définition 1.2.3 *[3] La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Caputo d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est donnée par :*

$$^{C}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

avec $n = [\alpha] + 1$.

Exemple 1.2.3 *Soient $f(t) = (t-a)^{\alpha}$, p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors, on a :*

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau - a)^{(\alpha-n)} d\tau,$$

donc

$$^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau$$

en effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, on obtient :

$$\begin{aligned} ^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1) B(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

Propriétés[17]

1. **Relation avec la dérivée fractionnaire de Riemman-Liouville**
Soit $p \geq 0$ et $n-1 \leq p < n$ $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Supposons que $^{C}D^{p}(t-a)^{p} f(t)$ et $^{RL}D^{p}(t-a)^{p} f(t)$ existent, alors on a :

$$^{C}D^{p} f(t) = {}^{RL}D^{p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}.$$

On en déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$ alors $^{C}D^{p} f(t) = {}^{RL}D^{p} f(t)$.

2. **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire**
Pour une fonction continue f, on a :

$$^{C}D^{p} I^{p} f(t) = f(t)$$

et

$$I^{p\,C}D^{p} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!},$$

donc l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, mais il n'est pas un inverse à droite.

3. **La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle, c'est-à-dire :**

$$^{C}D^{\alpha}C = 0.$$

Remarque 1.2.1 *Un avantage principal de la dérivée fractionnaire de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec les dérivées de Caputo acceptent la même forme que pour les équations différentielles d'ordre entier des fonctions inconnues en la borne inférieure $x = a$.*

1.2.3 Propriétés des dérivés fractionnaires

1. **Linéarité**

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} f(t),$$

où D^{α} désigne n'importe quelle approche de dérivation fractionnaire considérée dans ce mémoire.

2. **Règle de Leibniz**

Pour n entier, on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)$$

Cette formule se généralise en remplaçant l'entier n par un paramètre réel p

Lemme 1.2.1 *[1] Pour $\alpha > 0$, la solution générale de l'équation homogène $D^{\alpha}u(t) = 0$ est donnée par :*

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

où c_i sont des constantes réelles $(i = 1, 2, ..., n-1)$, $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.2.2 *[1] Soit $u \in C([0, T])$ telle que $D^{\alpha}u \in C([0, T])$. Alors :*

$$I^{\alpha} D^{\alpha} u(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour un certain $c_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, ..., n-1)$ $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.2.3 *[1] Soient $\alpha, \beta \geq 0$ et $u \in L_1([0, T])$. Alors :*

$$I^{\alpha} I^{\beta} u(t) = I^{\alpha+\beta} u(t) = I^{\beta} I^{\alpha} u(t),$$

$$D^{\alpha} I^{\alpha} u(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

et

$$I^{0} u(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemme 1.2.4 *[1] Soit $\beta > \alpha > 0$ et $u \in L_1([0,T])$. Alors, pour tout $t \in [0,T]$, on a :*

$$D^\alpha I^\beta u(t) = I^{\beta-\alpha} u(t).$$

$L_1([0,T],\mathbb{R})$ est l'espace de Banach de fonctions Lebesgue intégrables de $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Lemme 1.2.5 *[1] Soit $\alpha > 0$, $\lambda > -1$ et $n = [\alpha]$. Alors, on a les relations suivantes :*

$$D^\alpha t^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}$$

et

$$D^\alpha t^{\alpha-k} = 0, \quad k = 1,2,...,n.$$

Dans un cas particulier, on a :

$$D^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \quad \alpha \notin \mathbb{N}$$

et

$$D^\alpha 1 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

1.3 Définitions et notations

Dans cette section, nous introduisons quelques définitions, notations et théorèmes nécessaires à la suite de ce chapitre.
Soit $J = [0,T]$, $T > 0$ et E un espace de Banach, muni de la norme $\|.\|$. On note par $C(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions continues u définies sur J à valeurs dans E, muni de la norme :

$$\|u\|_\infty = \sup\{\|u(t)\|,\ t \in J\}.$$

Pour $t \in J$, on définit : $u_r(t) = t^r u(t),\ r \geq 0$.
Soit $C_r(J,E)$ l'espace des fonctions u tel que, $u_r \in C_r(J,E)$ qui est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_r = \sup\{t^r \|u(t)\|,\ t \in J\}.$$

Définition 1.3.1 *[4] Une fonction $u : J \longrightarrow E$ est dite intégrable au sens de Bochner si il existe une suite $\{u_n\}$ de fonctions en escalier qui converge vers u presque par tout et telle que :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^T \|u_n(s) - u(s)\| ds = 0,$$

Si u est intégrable au sens de Bochner, alors on a :

$$\int_0^T u(s) ds = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^T u_n(s) ds.$$

L'espace de Banach des fonctions mesurables $u : J \longrightarrow E$ qui sont Bochner intégrables est noté $L^1(J, E)$, il est muni de la norme :

$$\|u\|_{L^1} = \int_0^T \|u(s)\| ds.$$

On note $L^\infty(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $u : J \longrightarrow E$ qui sont essentiellement bornées, muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0, \quad \|u(t)\| \leq c, \quad p.p.\, t \in J\}.$$

Proposition 1.3.1 *[4] Soit $u : J \longrightarrow E$ une fonction mesurable. u est Bochner intégrable si et seulement si, la fonction scalaire $t \longmapsto \|u(t)\|$ est Lebesgue intégrable.*

Définition 1.3.2 *[3] Une application $f : J \times E \longrightarrow E$ est dite de Carathéodory si :*
1) $t \longrightarrow f(t, u)$ est mesurable pour tout $u \in E$,
2) $t \longrightarrow f(t, u)$ est continue pour tout $t \in J$,
De plus, si :
3) pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $\phi_\epsilon \in L^1(J, \mathbb{R}_+^\star)$ telle que pour tout $u \in E$ avec $\|u\| \leq \epsilon$:

$$\|f(t, u)\| \leq \phi_\epsilon(t);$$

alors l'application f est dite L^1- Carathéodory

Théorème 1.3.1 *(Ascoli-Arzelà)[7] Soit A un sous-ensemble de $C(J, E)$. A est relativement compact dans $C(J, E)$ si et seulement si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*
1) L'ensemble A est borné. C'est-à-dire, il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\|f(x)\| \leq K, \text{ pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in A,$$

2) L'ensemble A est équicontinu. C'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A,$$

3) Pour tout $x \in J$, l'ensemble $\{f(x),\ f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

1.4 Mesure de non compacité de Kuratowski

Dans cette section, nous rappelons la définitions et quelques propriétés fondamentales de la mesure de non compacité au sens de Kuratowski.

Définition 1.4.1 *[5] La mesure de non compacité au sens de Kuratowski est l'application $\alpha : \Omega_E \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star$ définie par :*

$$\alpha(B) = \inf\{\varepsilon > 0,\ B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i,\ diam(B_i) \leq \varepsilon\},$$

où Ω_E est la famille des sous espaces bornés de E avec $B \in \Omega_E$.

Proposition 1.4.1 *[5] La mesure de non compacité α au sens de Kuratowski vérifie les propriétés suivantes :*
a) $\alpha(B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{B}$ *est compact (B est relativement compact).*
b) $\alpha(B) = \alpha(\overline{B})$.
c) $A \subseteq B \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$.
d) $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$.
e) $\alpha(cB) = |c|\alpha(B), c \in \mathbb{R}$
f) $\alpha(conv(B)) = \alpha(B)$.
g) $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.
h) $\alpha(A \cap B) = \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

Lemme 1.4.1 *[6] Soit D un sous espace fermée, borné et convexe d'un espace de Banach $C(J, E)$, Soient G une fonction continue sur $J \times J$, et $f : J \times E \longrightarrow E$ une fonction qui satisfait les conditions de Carathéodory, et il existe $p_f \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $t \in J$, et tout sous ensemble borné $B \subset E$, on a :*

$$\lim_{k \to 0^+} \gamma\Big(f(J_{t,k} \times B)\Big) \leq p_f(t)\gamma(B); \quad \textit{où} \quad J_{t,k} = [t - k, t] \cap J. \tag{1.2}$$

Si V un sous ensemble équicontinu de D, alors :

$$\alpha\Big(\int_J G(t,s)f(s,u(s))ds, \ u \in V\Big) \leq \int_J \|G(t,s)\|p_f(s)\alpha(f(s,V(s)))ds.$$

Théorème 1.4.1 *(Mönch, [4, 8]) Soit D un sous ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach tel que $0 \in D$ et soit N une application continue dans D à valeur dans D. Si l'application*

$$V = \overline{conv}N(V), \quad \textit{ou} \quad V = N(V) \cup \{0\} \Longrightarrow \alpha(V) = 0.$$

à lieu pour tout sous ensemble V de D, alors N admet un point fixe.

Chapitre 2

problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire avec conditions intégrodifférentielles

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de solution du problème aux limites avec des conditions intégrodifférentielles suivant :

$$D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad t \in [0, T] \tag{2.1}$$

$$D^{\alpha-2}u(0) - D^{\alpha-1}u(0) = \int_0^T g(s, u(s))ds \tag{2.2}$$

$$D^{\alpha-2}u(T) + D^{\alpha-1}u(T) = \int_0^T h(s, u(s))ds, \tag{2.3}$$

où D^{α} est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f, g, h : J \times E \longrightarrow E$ sont trois fonctions données vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et E est un espace de Banach pour la norme $\|.\|$.

2.1 Existence et unicité de solution

Lemme 2.1.1 *Soit $1 < \alpha \leq 2$ et σ, ρ_1, $\rho_2 : J \longrightarrow E$ des fonctions continues. Alors, le problème aux limites linéaire :*

$$D^{\alpha}u(t) = \sigma(t), \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad t \in [0, T] \tag{2.4}$$

$$D^{\alpha-2}u(0) - D^{\alpha-1}u(0) = \int_0^T \rho_1(s)ds \tag{2.5}$$

$$D^{\alpha-2}u(T) + D^{\alpha-1}u(T) = \int_0^T \rho_2(s))ds \tag{2.6}$$

admet une solutions unique donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{(\alpha-1)(T+1)t^{\alpha-2}-t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \rho_1(s)ds + \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \rho_2(s)ds \\ &+ \int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds, \end{aligned} \tag{2.7}$$

où,

$$G(t,s) = \frac{1}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\begin{cases} (T+2)(t-s)^{\alpha-1} + (s-T-1)\big[(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t^{\alpha-1}\big], & 0 \le s \le t, \\ (s-T-1)\big[(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t^{\alpha-1}\big], & t \le s \le T. \end{cases} \tag{2.8}$$

Preuve :

Pour $t \in [0,T]$ et $1 < \alpha \le 2$, on a :

$$\begin{aligned} D^\alpha u(t) = \sigma(t) &\iff D^\alpha u(t) = D^\alpha I^\alpha \sigma(t) \\ &\iff D^\alpha u(t) - D^\alpha I^\alpha \sigma(t) = 0 \\ &\iff D^\alpha[u(t) - I^\alpha \sigma(t)] = 0. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.2.1, nous obtenons :

$$u(t) - I^\alpha\sigma(t) = c_0 t^{\alpha-2} + c_1 t^{\alpha-1}$$

c'est-à-dire :

$$u(t) = c_0 t^{\alpha-2} + c_1 t^{\alpha-1} + I^\alpha \sigma(t). \tag{2.9}$$

En exploitant l'expression (2.9) et le lemme 1.2.5, nous obtenons :

$$D^{\alpha-1}u(t) = c_1\Gamma(\alpha) + I^1\sigma(t). \tag{2.10}$$

Ce qui donne :

$$D^{\alpha-1}u(0) = c_1\Gamma(\alpha). \tag{2.11}$$

et

$$D^{\alpha-1}u(T) = c_1\Gamma(\alpha) + \int_0^T \sigma(s)ds. \tag{2.12}$$

Maintenant, appliquons l'opérateur $D^{\alpha-2}$ à (2.9), nous trouvons :

$$D^{\alpha-2}u(t) = c_0 D^{\alpha-2}(t^{\alpha-2}) + c_1 D^{\alpha-2}(t^{\alpha-1}) + I^2\sigma(t). \tag{2.13}$$

On a :

$$D^{\alpha-2}(t^{\alpha-1}) = \Gamma(\alpha)t$$

et

$$D^{\alpha-2}(t^{\alpha-2}) = \Gamma(\alpha-1),$$

alors,

$$D^{\alpha-2}u(t) = c_0\Gamma(\alpha-1) + c_1\Gamma(\alpha)t + I^2\sigma(t).$$

c'est-à-dire :

$$D^{\alpha-2}u(t) = c_0\Gamma(\alpha-1) + c_1\Gamma(\alpha)t + \int_0^t (t-s)\sigma(s)ds \tag{2.14}$$

Ceci donne :

$$D^{\alpha-2}u(0) = c_0\Gamma(\alpha-1) \tag{2.15}$$

et

$$D^{\alpha-2}u(T) = c_0\Gamma(\alpha-1) + c_1\Gamma(\alpha)T + \int_0^T (T-s)\sigma(s)ds. \tag{2.16}$$

En exploitant les conditions aux limites (2.5) et (2.6), nous arrivons à :

$$c_0\Gamma(\alpha-1) - c_1\Gamma(\alpha) = \int_0^T \rho_1(s)ds. \tag{2.17}$$

et

$$c_1\Gamma(\alpha)T + c_0\Gamma(\alpha-1) + \int_0^T (T-s)\sigma(s) + c_1\Gamma(\alpha) + \int_0^T \sigma(s)ds = \int_0^T \rho_2(s)ds. \tag{2.18}$$

Donc, de (2.17) et (2.18), on tire :

$$c_1\Gamma(\alpha)(T+2) + \int_0^T (T-s)\sigma(s)ds + \int_0^T \rho_1(s)ds + \int_0^T \sigma(s)ds = \int_0^T \rho_2(s)ds.$$

Par conséquent,

$$c_1 = \frac{1}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \rho_2(s)ds - \frac{1}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \rho_1(s) - \frac{1}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (1+T-s)\sigma(s)ds,$$

et

$$\begin{aligned} c_0\Gamma(\alpha-1) &= \frac{1}{T+2}\int_0^T \rho_2(s)ds - \frac{1}{T+2}\int_0^T \rho_1(s) - \frac{1}{T+2}\int_0^T (1+T-s)\sigma(s)ds \\ &+ \int_0^T \rho_1(s)ds \\ &= \frac{1}{T+2}\int_0^T \rho_2(s)ds + \frac{T+1}{T+2}\int_0^T \rho_1(s)ds - \frac{1}{T+2}\int_0^T (1+T-s)\sigma(s)ds, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T \rho_2(s)ds + \frac{T+1}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T \rho_1(s)ds \\ &- \frac{1}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T (1+T-s)\sigma(s)ds. \end{aligned}$$

Par substitution dans (2.9), on arrive à :

$$\begin{aligned} u(t) = \quad & \frac{t^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T \rho_2(s)ds + \frac{(T+1)t^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T \rho_1(s)ds - \frac{t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \rho_1(s)ds \\ - \quad & \frac{t^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T (1+T-s)\sigma(s)ds + \frac{t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \rho_2(s)ds \\ - \quad & \frac{t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (1+T-s)\sigma(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sigma(s)ds, \end{aligned}$$

autrement écrit :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{(\alpha-1)(T+1)t^{\alpha-2}-t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \rho_1(s)ds + \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \rho_2(s)ds \\ &+ \int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds, \end{aligned}$$

avec,

$$G(t,s) = \frac{1}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\begin{cases} (T+2)(t-s)^{\alpha-1} + (s-T-1)\big[(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t^{\alpha-1}\big], & 0 \le s \le t, \\ (s-T-1)\big[(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t^{\alpha-1}\big], & t \le s \le T. \end{cases}$$

■

Lemme 2.1.2 *Si $u \in C_{2-\alpha}(J,E)$ est solution du problème aux limites (2.1)-(2.3), alors u satisfait l'équation intégrale*

$$u(t) = P_u(t) + \int_0^T G(t,s)f(s,u(s))ds,$$

où

$$P_u(t) = \frac{(\alpha-1)(T+1)t^{\alpha-2}-t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T g(s,u(s))ds + \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T h(s,u(s))ds$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\begin{cases} (T+2)(t-s)^{\alpha-1} + (s-T-1)\big[(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t^{\alpha-1}\big], & 0 \le s \le t, \\ (s-T-1)\big[(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t^{\alpha-1}\big], & t \le s \le T. \end{cases}$$

Remarque 2.1.1 *La fonction $(t,s) \longmapsto G(t,s)$ est continue sur $[0,T]\times[0,T]$, alors elle est bornée. Soit*

$$G^\star = \sup\Big\{t^{2-\alpha}\|G(t,s)\|, \quad (t,s) \in J \times J\Big\}.$$

Notre premier résultat est une application du théorème de point fixe de Banach :

Théorème 2.1.1 *Supposons que l'hypothèse* $(H1)$ *Soit satisfaite. Si :*
$(H1)$ *Il existe trois constantes* M_1, M_2, M_3 *telles que :*

$$\begin{aligned} \|f(t,u) - f(t,v)\| &\leq M_1\|u-v\|, \quad \textit{pour tout} \quad t \in J \quad \textit{et} \quad u, v \in E, \\ \|g(t,u) - g(t,v)\| &\leq M_2\|u-v\|, \quad \textit{pour tout} \quad t \in J \quad \textit{et} \quad u, v \in E, \\ \|h(t,u) - h(t,v)\| &\leq M_3\|u-v\|, \quad \textit{pour tout} \quad t \in J \quad \textit{et} \quad u, v \in E. \end{aligned}$$

si

$$\frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left[\frac{(\alpha-1)(T+1)M_2}{(T+2)\Gamma(\alpha)} + \frac{(\alpha-1+T)M_3}{(T+2)\Gamma(\alpha)} + M_1 G^{\star}\right] < 1, \tag{2.19}$$

alors, le problème aux limites (2.1)-(2.3) admet une seule solution dans $C_{2-\alpha}(J,E)$.

Preuve :
Premièrement, nous considérons l'opérateur $N : C_{2-\alpha}(J,E) \longrightarrow C_{2-\alpha}(J,E)$ *defini par :*

$$(Nu)(t) = P_u(t) + \int_0^T G(t,s) f(s,u(s))ds,$$

avec

$$P_u(t) = \frac{(\alpha-1)(T+2)t^{\alpha-2} - t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T g(s,u(s))ds + \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2} + t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T h(s,u(s))ds,$$

et $G(t,s)$ *est la fonction définie par (2.8).*
Pour tout $t \in J$ *et* $(u,v) \in E^2$ *:*

$$\begin{aligned} t^{2-\alpha}\|(Nu)(t) - (Nv)(t)\| \quad &\leq \quad \frac{(\alpha-1)(T+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \|g(s,u(s)) - g(s,v(s))\|ds \\ &+ \quad \frac{\alpha-1+T}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \|h(s,u(s)) - h(s,v(s))\|ds \\ &+ \quad \int_0^T t^{2-\alpha}\|G(t,s)\|\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds. \end{aligned}$$

En utilisant la condition $(H1)$ *et la définition de la norme* $\|.\|_{2-\alpha}$, *nous obtenons :*

$$\begin{aligned} &\|(Nu)(t) - (Nv)(t)\|_{2-\alpha} \leq \\ &\left[\frac{(\alpha-1)(T+1)M_2}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\|u-v\|_{2-\alpha} + \frac{(\alpha-1+T)M_3}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\|u-v\|_{2-\alpha} + M_1 G^{*}\|u-v\|_{2-\alpha}\right]\int_0^T s^{\alpha-2}ds, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &\|(Nu)(t) - (Nv)(t)\|_{2-\alpha} \leq \\ &\frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left[\frac{(\alpha-1)(T+1)M_2}{(T+2)\Gamma(\alpha)} + \frac{(\alpha-1+T)M_3}{(T+2)\Gamma(\alpha)} + M_1 G^{*}\right]\|u-v\|_{2-\alpha}, \end{aligned}$$

De la dernière estimation et (2.19), le suit que l'opérateur N *est une contraction. Donc, par le théorème du point fixe de Banach, on déduit que* N *admet un unique point fixe, ce qui implique que (2.1)-(2.3) admet une seule solution dans* $C_{2-\alpha}(J,E)$.

$\blacksquare$

Exemple 2.1.1 *Considérons le problèmes aux limites suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}u(t) = 1 + \cos t - \frac{1}{25}\arctan u(t), \quad J = [0,1], \\ \\ D^{\frac{-1}{2}}u(0) - D^{\frac{1}{2}}u(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+u(s)}{1+e^{2s}}ds, \\ \\ D^{\frac{-1}{2}}u(1) + D^{\frac{1}{2}}u(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+u(s)\cos s}{3+e^{4s}}ds. \end{cases} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} f(t,u) &= 1 + \cos t - \frac{1}{25}\arctan u, \quad (t,u) \in [0,1] \times \mathbb{R} \\ g(t,u) &= \frac{1+u}{1+e^{2t}}, \quad (t,u) \in [0,1] \times \mathbb{R} \\ h(t,u) &= \frac{1+u\cos t}{3+e^{4t}}, \quad (t,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$T = 1, \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad M_1 = \frac{1}{25}, \quad M_2 = \frac{1}{2}, \quad M_3 = \frac{1}{4}.$$

$$\widetilde{G}(t,s) = \sqrt{t}G(t,s) = \frac{1}{3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \begin{cases} 3\sqrt{t^2 - st} + (s-2)(\frac{1}{2}+t), & 0 \le s \le t, \\ \\ (s-2)(\frac{1}{2}+t), & t \le s \le 1. \end{cases}$$

Un simple calcul donne :
Pour $0 \le s \le t \le 1$,

$$|\widetilde{G}(t,s)| < \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}, \tag{2.21}$$

et pour $0 \le t \le s \le 1$,

$$|\widetilde{G}(t,s)| < \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}. \tag{2.22}$$

Donc, (2.21) et (2.22) implique que :

$$G^\star < \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}.$$

Maintenant, il reste à vérifier la condition (2.19). Avec les valeurs numériques de T, α, M_1, M_2 *et* M_3, *nous avons :*

$$\begin{aligned} \frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left[\frac{(\alpha-1)(T+1)M_2}{(T+2)\Gamma(\alpha)} + \frac{(\alpha-1+T)M_3}{(T+2)\Gamma(\alpha)} + M_1G^\star\right] &= 2\left[\frac{1}{6\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{8\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{25}G^\star\right] \\ &< \frac{2}{3\sqrt{\pi}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} + \frac{8}{25\sqrt{\pi}} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Alors par le Théorème 2.1.1 le problème (2.20) a une solution unique $C_{\frac{1}{2}}([0,1],\mathbb{R})$.

Maintenant, pour plus de commodité nous introduisons les hypothèses suivantes :
$(H2)$ *Les fonctions* $f, g, h : J \times E \longrightarrow E$ *satisfont aux conditions de Carathéodory .*
$(H3)$ *Il existe des fonctions* $p_f, p_g, p_h \in L^{\infty}(J, \mathbb{R}_+)$, *telles que :*

$$\begin{aligned} \|f(t,u)\| &\leq p_f(t)\|u\|, \quad p.p.\ t \in J \quad \textit{et tout} \quad u \in E, \\ \|g(t,u)\| &\leq p_g(t)\|u\|, \quad p.p.\ t \in J \quad \textit{et tout} \quad u \in E, \\ \|h(t,u)\| &\leq p_h(t)\|u\|, \quad p.p.\ t \in J \quad \textit{et tout} \quad u \in E. \end{aligned} \tag{2.23}$$

$(H4)$ *Pour p.p* $t \in J$ *et tout ensemble borné* $B \in E$, *nous avons :*

$$\begin{aligned} \lim_{k \to 0^+} \gamma\Big(f(J_{t,k} \times B)\Big) &\leq p_f(t)\gamma(B), \\ \lim_{k \to 0^+} \gamma\Big(g(J_{t,k} \times B)\Big) &\leq p_g(t)\gamma(B), \\ \lim_{k \to 0^+} \gamma\Big(h(J_{t,k} \times B)\Big) &\leq p_h(t)\gamma(B). \end{aligned} \tag{2.24}$$

où $J_{t,k} = [t-k, t] \cap J$.

Théorème 2.1.2 *On suppose que les hypothèses* $(H2)-(H4)$ *sont vérifiées. Si :*

$$\frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left[\frac{(\alpha-1)(T+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\|p_g\|_{L^\infty} + \frac{(\alpha-1+T)}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\|p_h\|_{L^\infty} + G^*\|p_f\|_{L^\infty}\right] \leq 1 \tag{2.25}$$

Alors le problème aux limite (2.1)-(2.3) admet au moins une solution des $C_{2-\alpha}(J, E)$. *On a vu que les point fixes de l'opérateur* N *sont les solutions du problème (2.1)-(2.3) .*
Pour $R > 0$, *on définit l'ensemble* D_R *par :*

$$D_R = \{u \in C_{2-\alpha}(J, E), \quad \|u\|_{2-\alpha} \leq R\}.$$

Nous allons montrer donc que N *satisfait les hypothèses du théorème et la preuve sera fait en trois étapes.*
Étape 1 : *On montre que* N *est continue. Soit* $\{u_n\}$ *une suite qui converge vers* u *dans* $C_{2-\alpha}(J, E)$.
Alors, pour tout $t \in J$, *on a :*

$$\begin{aligned} t^{2-\alpha}\|(Nu_n)(t) - (Nu)(t)\| \quad \leq \quad & \frac{(\alpha-1)(T+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \|g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))\|ds \\ & + \frac{\alpha-1+T}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \|h(s, u_n(s)) - h(s, u(s))\|ds \\ & + \int_0^T t^{2-\alpha}\|G(t,s)\|\|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|ds \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \|(Nu_n)(t) - (Nu)(t)\|_{2-\alpha} \quad \leq \quad & \frac{(\alpha-1)(T+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \|g(s, u_n(s)) - g(s, u(s))\|ds \\ & + \frac{\alpha-1+T}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\int_0^T \|h(s, u_n(s)) - h(s, u(s))\|ds \\ & + G^*\int_0^T \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|ds \end{aligned}$$

Soit $\rho > 0$,*tel que :*

$$\|u_n\|_\infty \leq \rho \quad et \quad \|u\|_\infty \leq \rho.$$

En utilisant la condition $(H3)$, *on trouve :*

$$\begin{aligned}
\|g(s,u_n(s)) - g(s,u(s))\| &\leq \|g(s,u_n(s))\| + \|g(s,u(s))\| \\
&\leq p_g\|u_n(s)\| + p_g\|u(s)\| \\
&\leq 2\rho p_g(s) = \varphi_1(s).
\end{aligned}$$

D'une manière analogue :

$$\|h(s,u_n(s)) - h(s,u(s))\| \leq 2\rho p_h(s) = \varphi_2(s).$$

$$\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\| \leq 2\rho p_f(s) = \varphi_3(s).$$

Clairement, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$
Comme f, g *et* h *sont des fonctions Carathéodory , alors* f, g, h *sont mesurables par rapport à* u, *donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, ce qui nous donne :*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|(Nu_n)(t) - (Nu)(t)\|_{2-\alpha} &\leq \frac{(\alpha-1)(T+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \int_0^T \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|g(s,u_n(s)) - g(s,u(s))\|ds \\
&+ \frac{\alpha-1+T}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \int_0^T \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|h(s,u_n(s)) - h(s,u(s))\|ds \\
&+ G^* \int_0^T \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|ds \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\|(Nu_n)(t) - (Nu)(t)\|_{2-\alpha} \longrightarrow 0, \quad quand \quad n \longrightarrow +\infty.$$

D'où la continuité de l'opérateur N.

Étape 2 : *On montre que* N *applique* D_R *dans* D_R, *c'est-à-dire que* $ND_R \subset D_R$. *Par l'hypothèse* $(H3)$ *et la condition (2.25), on a pour tout* $u \in D_R$ *et* $t \in J$:

$$\begin{aligned}
t^{2-\alpha}\|(Nu)(t)\| \leq\ & \frac{(\alpha-1)(T+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \int_0^T \|g(s,u(s))\|ds \\
&+ \frac{(\alpha-1+T)}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \int_0^T \|h(s,u(s))\|ds \\
&+ \int_0^T |\widetilde{G}(t,s)|\|f(s,u(s))\|ds
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\|N(u)\|_{2-\alpha} \leq\ & R\frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left[\frac{(\alpha-1)(T+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\|p_g\|_{L^\infty} + \frac{\alpha-1+T}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\|p_h\|_{L^\infty} + G^\star\|p_f\|_{L^\infty}\right]. \\
&\leq R.
\end{aligned}$$

Ceci implique que $N(D_R) \subset D_R$.

Étape 3 :
On montre que $N(D_R)$ est borné et équicontinu.
• *Nous avons $N(D_R) = \big\{N(u) : u \in D_R\big\}$, alors $\forall u \in D_R$: $\|N(u)\|_{2-\alpha} \leq R$. Par consééquent, $N(D_R)$ est borné dans $C_{2-\alpha}(J, E)$.*
• *Soient $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$ et $u \in D_R$, donc nous avons :*

$$\begin{aligned}
\|t_2^{2-\alpha}(Nu)(t_2) - t_1^{2-\alpha}(Nu)(t_1)\| &= \Bigg\| \frac{t_1 - t_2}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \int_0^T g(s, u(s))ds + \frac{t_2 - t_1}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \int_0^T h(s, u(s))ds \\
&\quad + \int_0^T \big[\widetilde{G}(t_2, s) - \widetilde{G}(t_1, s)\big] f(s, u(s))ds \Bigg\|.
\end{aligned}$$

Par la condition $(H3)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|t_2^{2-\alpha}(Nu)(t_2) - t_1^{2-\alpha}(Nu)(t_1)\| &\leq \frac{t_2 - t_1}{(T+2)\Gamma(\alpha)} TR\|p_g\|_{L^\infty} + \frac{t_2 - t_1}{(T+2)\Gamma(\alpha)} TR\|p_h\|_{L^\infty} \\
&\quad + R\|p_f\|_{L^\infty} \int_0^T \big|\widetilde{G}(t_2, s) - \widetilde{G}(t_1, s)\big| ds. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Comme $(t, s) \longrightarrow \widetilde{G}(t, s)$ est continue, alors le membre à droite de l'inégalité (2.26) tend vers zéro, quand $t_1 \longrightarrow t_2$. Par conséquent, $N(D_R)$ est équicontinu.
Maintenant, soit V un sous ensemble de D_R tel que

$$V \subset \overline{conv}\big(N(V) \cup \{0\}\big).$$

L'ensemble V est borné et équicontinu et la fonction $v \longrightarrow v(t) = \gamma(V(t))$ est continue sur J. En utilisant
$(H4)$, lemme 1.4.1 et quelques propriétés de la mesure γ, on trouve pour tout $t \in J$:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \gamma(V(t)) \\
&\quad \gamma\big(N(V)(t) \cup \{0\}\big) \\
&\quad \leq \gamma(N(V)(t)).
\end{aligned}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned}
t^{2-\alpha} v(t) &\leq \int_0^T \left| \frac{(\alpha-1)(T+1) - t}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \right| p_g(s)\gamma(V(s))ds + \int_0^T \left| \frac{\alpha - 1 + t}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \right| p_h(s)\gamma(V(s))ds \\
&\quad + \int_0^T t^{2-\alpha} |G(t, s)| |p_f(s)\gamma(V(s))ds,
\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\|v\|_{2-\alpha} \leq \frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1} \left[\frac{(\alpha-1)(T+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \|p_g\|_{L^\infty} + \frac{\alpha - 1 + T}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \|p_h\|_{L^\infty} + G^\star \|p_f\|_{L^\infty} \right] \|v\|_{2-\alpha},$$

ceci veut dire que :

$$\|v\|_{2-\alpha}\left(1-\frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left[\frac{(\alpha-1)(T+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\|p_g\|_{L^\infty}+\frac{\alpha-1+T}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\|p_h\|_{L^\infty}+G^\star\|p_f\|_{L^\infty}\right]\right)\leq 0.$$

En exploitant (2.25), on en déduit que $\|v\|_{2-\alpha}=0$, c'est-à-dire que $v(t)=0$, pour tout $t\in J$. Donc $V(t)$ est relativement compact dans E. En utilisant le théoréme d'Ascoli-Arzela , V est relativement compact dans D_R. En appliquant le théorème 1.4.1, on conclut que N admet un point fixe qui est une solution du problème aux limites (2.1)-(2.3).

■

Maintenant, nous illustrons l'utilité de nos principaux résultats par un exemple :

2.2 Exemple

Nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{5}{3}}u(t)=\dfrac{3}{20+e^t}|u(t)|, \quad J=[0,1],\\[2ex] D^{\frac{-1}{3}}u(0)-D^{\frac{2}{3}}u(0)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{6+e^{6s}}|u(s)|ds,\\[2ex] D^{\frac{-1}{3}}u(1)+D^{\frac{2}{3}}u(1)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2+e^{2s}}|u(s)|ds.\end{cases} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \frac{3}{20+e^t}x, \quad (t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}_+\\ g(t,x) &= \frac{1}{6+e^{6t}}x, \quad (t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}_+\\ h(t,x) &= \frac{1}{2+e^{2t}}x, \quad (t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

$$p_f(t)=\frac{3}{20+e^t}, \quad p_g(t)=\frac{1}{6+e^{6t}}, \quad p_h(t)=\frac{1}{2+e^{2t}}.$$

Il est clair que f,g et h satisfont $(H2)$, et l'hypotnèse $(H3)$ est vérifiée avec p_f,p_g et p_h.
Pour $\alpha=\frac{5}{3}$ et $T=1$, nous avons :

$$\widetilde{G}(t,s)=t^{\frac{1}{3}}G(t,s)=\frac{1}{3\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}\begin{cases}3t^{\frac{1}{3}}(t-s)^{\frac{2}{3}}+(s-2)(t-\frac{1}{3}), & 0\leq s\leq t,\\[2ex] (s-2)(t-\frac{1}{3}), & t\leq s\leq 1.\end{cases}$$

Pour $0\leq s\leq t\leq 1$,

$$|\widetilde{G}(t,s)|<\frac{13}{9\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \tag{2.28}$$

et pour $0 \leq t \leq s \leq 1$,

$$|\widetilde{G}(t,s)| < \frac{2}{9\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}. \tag{2.29}$$

Alors, (2.28) et (2.28) impliquent que :

$$G^{\star} < \frac{13}{9\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}.$$

Ensuite, nous vérifions la condition (2.25). Nous avons :

$$\|p_f\|_{L^\infty} = \frac{1}{7}, \quad \|p_g\|_{L^\infty} = \frac{1}{7}, \quad \|p_h\|_{L^\infty} = \frac{1}{3},$$

alors,

$$\begin{aligned}
&\frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left[\frac{(\alpha-1)(T+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\|p_g\|_{L^\infty} + \frac{(\alpha-1+T)}{(T+2)\Gamma(\alpha)}\|p_h\|_{L^\infty} + G^{*}\|p_f\|_{L^\infty}\right]\\
&< \frac{3}{2}\left[\frac{17}{63\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} + \frac{5}{27\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}\right]\\
&< 1.
\end{aligned}$$

Maintenant, toutes les hypothèses du théorème 1.4.1 sont satisfaites, donc notre problème aux limites (2.27) admet une solution dans $C_{\frac{1}{3}}([0,1],\mathbb{R}_+)$.

Chapitre 3

Problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire avec conditions intégrales non locales

Le but de ce chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de solution du problème :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{q}x(t) = f(t, x(t)), \quad 1 < q \leq 2, \quad t \in J = [0, 1], \\ x(0) = g(x) + \alpha \displaystyle\int_0^{\xi} x(s)ds, \quad 0 < \xi < 1, \\ x(1) = h(x) + \beta \displaystyle\int_0^{\eta} x(s)ds, \quad 0 < \eta < 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

avec ${}^{C}D^{q}$ *est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre* q, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue donnée,* $g, h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont deux fonctions données vérifiant quelques hypothèses qui seront définies par la suite.*

3.1 Existence et unicité de solution

Dans le contexte de l'étude de nos résultats d'existence et d'unicité, nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

Lemme 3.1.1 *Soit* $\sigma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue donnée. La solution* $x(t)$ *du problème aux limites :*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{q}x(t) = \sigma(t), \quad 1 < q \leq 2, \quad t \in J = [0, 1], \\ x(0) = g(x) + \alpha \displaystyle\int_0^{\xi} x(s)ds, \quad 0 < \xi < 1, \\ x(1) = h(x) + \beta \displaystyle\int_0^{\eta} x(s)ds, \quad 0 < \eta < 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

est donnée par l'équation intégrale :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\sigma(s)ds \\
&-\frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\int_0^{\xi}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds \\
&+\frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\int_0^{\eta}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds \\
&-\frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\int_0^1 (1-s)^{q-1}\sigma(s)ds \\
&-\frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]g(x)+\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]h(x),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

où

$$\gamma = \frac{1}{2}\big[(1-\alpha\xi)(2-\beta\eta^2)+\alpha\xi^2(1-\beta\eta)\big] \neq 0.$$

Preuve :
Par le lemme 1.2.3 , nous pouvons écrire :

$$
\begin{aligned}
{}^C D^q x(t) = \sigma(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad {}^C D^q x(t) = {}^C D^q I^q \sigma(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad {}^C D^q (x(t) - I^q\sigma(t)) = 0,
\end{aligned}
$$

puis, en vue du lemme 1.2.1, nous avons :

$$x(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\sigma(s)ds. \tag{3.4}$$

En intégrant l'expression (3.4) sur $[0,\xi]$, et en ajoutant $g(x)$ aux deux côtés après l'avoir multipliée par α, on trouve que :

$$g(x)+\alpha\int_0^{\xi} x(s)ds = g(x)+\alpha c_0\xi+\alpha c_1\frac{\xi^2}{2}+\frac{\alpha}{\Gamma(q)}\int_0^{\xi}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds.$$

De la même manière, nous obtenons :

$$h(x)+\beta\int_0^{\eta} x(s)ds = h(x)+\beta c_0\eta+\beta c_1\frac{\eta^2}{2}+\frac{\beta}{\Gamma(q)}\int_0^{\eta}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds.$$

En utilisant les conditions aux limites du problème (3.2), on obtient :

$$(1-\alpha\xi)c_0 - \alpha\frac{\xi^2}{2}c_1 = g(x)+\alpha A \tag{3.5}$$

$$(1-\beta\eta)c_0 + \left(1-\beta\frac{\eta^2}{2}\right)c_1 = h(x)+\beta B - C, \tag{3.6}$$

où,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{\xi}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds, \\ B &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{\eta}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds, \\ C &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{1}(1-s)^{q-1}\sigma(s)ds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La résolution du système (3.5)-(3.6), donne :

$$c_0 = \frac{1}{\gamma}\left[\alpha\beta\frac{\xi^2}{2}B - \alpha\frac{\xi^2}{2}C - \alpha\Big(1-\beta\frac{\eta^2}{2}\Big)A + \alpha\frac{\xi^2}{2}h(x) - \Big(1-\beta\frac{\eta}{2}\Big)g(x)\right],$$

et

$$c_1 = \frac{1}{\gamma}\Big[\beta(1-\alpha\xi)B - (1-\alpha\xi)C - \alpha(1-\beta\eta)A + (1-\alpha\xi)h(x) - (1-\beta\eta)g(x)\Big].$$

En substituant les valeurs de c_0 et c_1 dans (3.4), on obtient (3.3).

■

Maintenant, nous équipons l'espace de Banach $C([0,1],\mathbb{R})$ de toutes les fonctions continues de $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ doté d'une topologie de convergence uniforme avec la norme définie par $\|x\| = \sup\{|x(t)|, \quad t \in [0,1]\}$, et avant d'annoncer nos théorèmes, nous avons besoin des hypothèses suivantes :

$(H1):\ |f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|,\ \forall t \in [0,1],\ L > 0,\ x,y \in \mathbb{R},$

$(H2):\ |g(x) - g(y)| \leq l_1|x-y|,\ l_1 > 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R},$

$(H3):\ |h(x) - h(y)| \leq l_2|x-y|,\ l_2 > 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R},$

$(H4):\ |f(t,x)| \leq \mu(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R}$ *and* $\mu \in C([0,1],\mathbb{R}_+).$

Maintenant, pour plus de commodité, nous utilisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{A_1 + A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right) + \frac{A_3 + A_4}{2|\gamma|} \\ A_1 &= |\alpha|\big(|2-\beta\eta^2| + 2|1-\beta\eta|\big)\xi^{q+1}, \\ A_2 &= \big(|\alpha|\xi^2 + 2|1-\alpha\xi|\big)\big(|\beta|\eta^{q+1} + q + 1\big), \\ A_3 &= |2-\beta\eta^2| + 2|1-\beta\eta|, \\ A_4 &= |\alpha|\xi^2 + 2|1-\alpha\xi|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Théorème 3.1.1 *Supposons que* $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue qui satisfait l'hypothèse* $(H1)$ *et* $g, h : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont deux fonctions qui satisfont respectivement les hypothèses* $(H2)$ *et* $(H3)$. *Si* $L^\star A_0 < 1$, *où* $L^\star = \max\{L, l_1, l_2\}$ *et* A_0 *est donné par (3.8). Alors le problème aux limites (3.1) a une solution unique.*

Preuve :
Pour la preuve du theorème 3.1.1 et en vue du lemme 3.1.1, nous définissons l'opérateur :
$N : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1],\mathbb{R})$ *par :*

$$\begin{aligned}
(Nx)(t) \;=\; & \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\
& -\frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right)ds \\
& +\frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right)ds \\
& -\frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\
& -\frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]g(x)+\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]h(x)., \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Posons

$$M = \sup_{t\in[0,1]} |f(t,0)|, \;\; M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|, \;\; M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|,$$

et choisissons $\rho \geq \dfrac{A_0 M^\star}{1-L^\star A_0}$, *où* $M^\star = \max\{M, M_1, M_2\}$.
Premièrement, on montre que $NB_\rho \subset B_\rho$, *où* $B_\rho = \big\{x \in C([0,1],\mathbb{R}) : \;\; \|x\| \leq \rho\big\}$. *Pour tout* $x \in B_\rho$, *nous avons :*

$$\begin{aligned}
|(Nx)(t)| \;\leq\; & \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} |f(s,x(s))|ds \\
& +\left|\frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\right|\int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} |f(m,x(m))|dm\right)ds \\
& +\left|\frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\right|\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} |f(m,x(m))|dm\right)ds \\
& +\left|\frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\right|\int_0^1 (1-s)^{q-1} |f(s,x(s))|ds \\
& +\left|\frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\right||g(x)|+\left|\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\right||h(x)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\Big(|f(s,x(s))-f(s,0)|+|f(s,0)|\Big)ds \\
&+\left|\frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\right|\int_0^{\xi}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\Big(|f(m,x(m))-f(m,0)|\right. \\
&\left.+|f(m,0)|\Big)dm\right)ds \\
&+\left|\frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\right|\int_0^{\eta}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\Big(|f(m,x(m))-f(m,0)|\right. \\
&\left.+|f(m,0)|\Big)dm\right)ds \\
&+\left|\frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\right|\int_0^1 (1-s)^{q-1}\Big(|f(s,x(s))-f(s,0)|+|f(s,0)|\Big)ds \\
&+\left|\frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\right|\Big(|g(x)-g(0)|+|g(0)|\Big) \\
&+\left|\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\right|\Big(|h(x)-h(0)|+|h(0)|\Big) \\
&\leq \Big(L\rho+M\Big)\left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}ds\right. \\
&+\frac{|\alpha|}{|\gamma|\Gamma(q)}\left(\frac{|2-\beta\eta^2|}{2}+|1-\beta\eta|\right)\int_0^{\xi}\Big(\int_0^s (s-m)^{q-1}dm\Big)ds \\
&+\frac{|\beta|}{|\gamma|\Gamma(q)}\left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right)\int_0^{\eta}\Big(\int_0^s (s-m)^{q-1}dm\Big)ds \\
&\left.+\frac{1}{|\gamma|\Gamma(q)}\left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right)\int_0^1 (1-s)^{q-1}ds\right] \\
&+\frac{1}{|\gamma|}\left(\frac{|2-\beta\eta^2|}{2}+|1-\beta\eta|\right)(l_1\rho+M_1) \\
&+\frac{1}{|\gamma|}\left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right)(l_2\rho+M_2) \\
&\leq (L^\star\rho+M^\star)\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{A_1+A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right)+\frac{A_3+A_4}{2|\gamma|}\right] \\
&= (L^\star\rho+M^\star)A_0 \leq \rho,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que $\|Nx\| \leq \rho$.
De plus pour tout $t \in [0,1]$ et $x, y \in C([0,1],\mathbb{R})$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&|(Nx)(t) - (Ny)(t)| \leq \\
&\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&+ \left| \frac{\alpha}{\gamma \Gamma(q)} \left[\frac{2-\beta\eta^2}{2} + (1-\beta\eta)t \right] \right| \int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} |f(m,x(m)) - f(m,y(m))| dm \right) ds \\
&+ \left| \frac{\beta}{\gamma \Gamma(q)} \left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t \right] \right| \int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} |f(m,x(m)) - f(m,y(m))| dm \right) ds \\
&+ \left| \frac{1}{\gamma \Gamma(q)} \left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t \right] \right| \int_0^1 (1-s)^{q-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&+ \left| \frac{1}{\gamma} \left[\frac{2-\beta\eta^2}{2} + (1-\beta\eta)t \right] \right| |g(x) - g(y)| + \left| \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t \right] \right| |h(x) - h(y)| \\
&\leq L|x-y| \left[\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds \right. \\
&+ \frac{|\alpha|}{|\gamma|\Gamma(q)} \left(\frac{|2-\beta\eta^2|}{2} + |1-\beta\eta| \right) \int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} dm \right) ds \\
&+ \frac{|\beta|}{|\gamma|\Gamma(q)} \left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2} + |1-\alpha\xi| \right) \int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} dm \right) ds \\
&\left. + \frac{1}{|\gamma|\Gamma(q)} \left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2} + |1-\alpha\xi| \right) \int_0^1 (1-s)^{q-1} ds \right] \\
&+ l_1 |x-y| \frac{1}{|\gamma|} \left(\frac{|2-\beta\eta^2|}{2} + |1-\beta\eta| \right) \\
&+ l_2 |x-y| \frac{1}{|\gamma|} \left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2} + |1-\alpha\xi| \right) \\
&\leq L^\star |x-y| \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} \left(1 + \frac{A_1 + A_2}{2|\gamma|(q+1)} \right) + \frac{A_3 + A_4}{2|\gamma|} \right] \\
&= L^\star A_0 |x-y|.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|Nx - Ny\| \leq L^\star A_0 \|x-y\|.$$

Le nombre $L^\star$ ne dépend que des paramètres indiqués dans notre problème. Puisque $L^\star A_0 < 1$, alors N est une contraction. Ainsi, par le théorème du point fixe de Banach, il s'ensuit que notre problème aux limites (3.1) a une solution unique.

■

3.2 Exemple

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\frac{3}{2}}x(t) = \dfrac{1}{(t+4)^2}\dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} + 1 + \cos^2 t, \quad t \in J = [0,1], \\[2ex] x(0) = \dfrac{1}{16}x(\mu) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} x(s)ds, \quad \mu \in [0,1], \\[2ex] x(1) = \dfrac{1}{12}x(\nu) + \displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} x(s)ds, \quad \nu \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.10}$$

Dans cet exemple, nous avons :

$$q = \frac{3}{2},\;\; \alpha = \frac{1}{2},\;\; \beta = 1,\;\; \xi = \frac{1}{4},\;\; \eta = \frac{3}{4},$$

et

$$f(t,x) = \frac{1}{(t+4)^2}\frac{\|x\|}{1+\|x\|} + 1 + \cos^2 t,\;\; g(x) = \frac{1}{16}x(\mu),\;\; h(x) = \frac{1}{12}x(\nu).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(t,y)\| &\le \frac{1}{16}\|x-y\|, \quad L = \frac{1}{16}, \\ \|g(x) - g(y)\| &\le \frac{1}{16}\|x-y\|, \quad l_1 = \frac{1}{16}, \\ \|h(x) - h(y)\| &\le \frac{1}{12}\|x-y\|, \quad l_2 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

En outre,

$$L^\star = \frac{1}{12},\;\; \gamma = \frac{81}{128},\;\; A_1 = \frac{31}{1024},\;\; A_2 = \frac{513\sqrt{3}+4560}{1024},\;\; A_3 = \frac{31}{16},\;\; A_4 = \frac{57}{32},$$

$$2|\gamma|(q+1) = \frac{405}{128},\;\; 2|\gamma| = \frac{162}{128},$$

par suite,

$$L^\star A_0 = \frac{1}{9\sqrt{\pi}}\Big(\frac{19\sqrt{3}}{120} + \frac{7831}{3240}\Big) + \frac{119}{1944} \approx 0.337498344 < 1.$$

Donc, toutes les hypothèses du théorème 3.1.1 sont satisfaites et par conséquent le problème aux limites (3.10) a une solution unique.

Notre deuxième résultat est basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Théorème 3.2.1 *[24](théorème du point fixe de Krasnoselskii) Soit M un sous-ensemble non vide convexe et fermé d'un espace de Banach X. Soient A, B deux opérateurs tels que :*
(i) $Ax + By \in M$ pour tout $x, y \in M$,
(ii) A est compact et continu,
(iii) B est une contraction.

Alors, il existe $z \in M$ tel que $z = Az + Bz$.

Théorème 3.2.2 *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue joignant les sous-ensembles bornés de $[0,1] \times \mathbb{R}$ en sous-ensembles relativement compact de $\mathbb{R}$, et soient les hypothèses $(H1) - (H4)$ ont lieu. Si*

$$L^{\star}\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(\frac{A_1 + A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right) + \frac{A_3 + A_4}{2|\gamma|}\right] < 1, \tag{3.11}$$

alors, le problème aux limites (3.1) admet une solution unique dans $[0,1]$.

Preuve :
Posons $M_3 = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\mu(t)|$, et fixons :

$$\overline{\rho} \geq \widetilde{M}\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{A_1 + A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right) + \frac{A_3 + A_4}{2|\gamma|}\right]$$

avec $\widetilde{M} = \max\{M_1, M_2, M_3\}$ et considérons $B_{\overline{\rho}} = \{x \in C([0,1],\mathbb{R}) : \quad \|x\| \leq \overline{\rho}\}$. Pour appliquer le théorème 3.2.1, nous déffinissons deux opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ par :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}x)(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds,\\
(\mathcal{Q}x)(t) &= -\frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2} + (1-\beta\eta)t\right]\int_0^{\xi}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right)ds\\
&\quad + \frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t\right]\int_0^{\eta}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right)ds\\
&\quad - \frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t\right]\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds\\
&\quad - \frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2} + (1-\beta\eta)t\right]g(x) + \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t\right]h(x),
\end{aligned}$$

- *Pour $x, y \in B_{\overline{\rho}}$, nous trouvons que :*

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}x + \mathcal{Q}y\| &\leq \frac{M_3}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{A_1 + A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right) + \frac{M_1 A_3 + M_2 A_4}{2|\gamma|}\\
&\leq \widetilde{M}\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{A_1 + A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right) + \frac{A_3 + A_4}{2|\gamma|}\right]\\
&\leq \overline{\rho}.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{P}x + \mathcal{Q}y \in B_{\overline{\rho}}$.

- *Pour $x, y \in C([0,1],\mathbb{R})$ et tout $t \in [0,1]$, nous avons :*

$$|(\mathcal{Q}x)(t) - (\mathcal{Q}y)(t)| \leq L^{\star}\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(\frac{A_1 + A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right) + \frac{A_3 + A_4}{2|\gamma|}\right]|x - y|.$$

ce qui implique que :

$$\|(\mathcal{Q}x)-(\mathcal{Q}y)\| \leq L^{\star}\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(\frac{A_1+A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right)+\frac{A_3+A_4}{2|\gamma|}\right]\|x-y\|.$$

Alors, il en résulte par la condition (3.11) que $\mathcal{Q}$ est une contraction.

• *La continuité de f implique que l'opérateur $\mathcal{P}$ est continu. En outre, nous avons :*

$$\|\mathcal{P}x\| \leq \frac{M_3}{\Gamma(q+1)},$$

ce qui signifie que $\mathcal{P}$ est uniformément borné dans $B_{\overline{\rho}}$.

• *Maintenant, nous prouvons que l'opérateur $\mathcal{P}$ est compact.*

En tenant compte de la condition $(H1)$, nous définissons $f^{\star} = \sup_{(t,x)\in[0,1]\times B_{\overline{\rho}}} |f(t,x)|$, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}x)(t_1)-(\mathcal{P}x)(t_2)| &= \frac{1}{\Gamma(q)}\Bigg|\int_0^{t_1}\Big[(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\Big]f(s,x(s))ds \\ &\quad -\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}f(s,x(s))ds\Bigg| \\ &\leq \frac{f^{\star}}{\Gamma(q+1)}\Big|2(t_2-t_1)^q+t_1^q-t_2^q\Big|. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Le second membre de (3.12) est indépendant de x et tend vers zéro quand $t_2-t_1 \longrightarrow 0$, alors $\mathcal{P}$ est équicontinu. En utilisant le fait que f joignant des sous-ensembles bornés en sous-ensembles relativement compacts, on obtient $\mathcal{P}(\mathbf{B})(t)$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$ pour chaque t, (où $\mathbf{B}$ est un sous-ensemble de $C([0,1]\times\mathbb{R})$). Donc $\mathcal{P}$ est relativement compact dans $B_{\overline{\rho}}$. Par conséquent, par le théorème d'Ascoli-Arzela, nous concluons que $\mathcal{P}$ est compact dans $B_{\overline{\rho}}$. Ainsi, toutes les hypothèses de Théorème 3.2.1 sont satisfaites. Donc le problème aux limites (3.1) admet une solution unique dans $[0,1]$.

■

Notre prochain résultat principal est basé sur le lemme suivant établi par O'Regan dans [9].

Lemme 3.2.1 *Notons U un ensemble ouvert dans un ensemble convexe fermé C d'un espace de Banach E. Supposons $0 \in U$. Supposons aussi que $F(\overline{U})$ soit borné et que $F : \overline{U} \longrightarrow C$ est donné par $F = F_1 + F_2$, dans lequel $F_1 : \overline{U} \longrightarrow E$ est continu et complètement continu et $F_2 : \overline{U} \longrightarrow E$ est une contraction non linéaire (i.e. il existe une fonction non décroissante non négative $\phi : [0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ satisfaisant $\phi(z) < z$ for $z > 0$, telle que $\|F_2(x)-F_2(y)\| \leq \phi(\|x-y\|)$ pour tous $x, y \in \overline{U}$). Alors soit*
(C_1) F a un point fixe $x \in \overline{U}$; ou
(C_2) il existe un point $u \in \partial U$ et $\lambda \in (0,1)$ avec $u = \lambda F(u)$, où $\overline{U}$ et ∂U, représentent respectivement la fermeture et le bord de U.

Maintenant, pour plus de commodité, nous définissons :

$$\Omega_r = \{x \in C([0,1], \mathbb{R}) : \ \|x\| < r\},$$

et

$$M_r = \max\{|f(t,x)| : \ (t,x) \in [0,1] \times [-r,r]\}.$$

Théorème 3.2.3 *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que $(H1)$ a lieu. En outre, nous supposons que :*

$(H5)$ *il existe deux constantes positives ρ_1, ρ_2 et deux fonctions continues $\phi_1, \phi_2 : [0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ telles que :*
- $\phi_1(z) \leq \rho_1 z$, *et* $|g(u) - g(v)| \leq \phi_1(|u-v|)$, *pour tous* $u, v \in \mathbb{R}$.
- $\phi_2(z) \leq \rho_2 z$, *et* $|h(u) - h(v)| \leq \phi_2(|u-v|)$, *pour tous* $u, v \in \mathbb{R}$.

$(H6)$ $g(0) = 0$ *et* $h(0) = 0$.

$(H7)$ *Il existe une fonction non-négative $p \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et une fonction non décroissante $\psi : [0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ telles que :*

$$|f(t,u)| \leq p(t)\psi(|u|), \ \ \textit{pour tous } (t,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

$(H8)$ $\sup_{r \in \mathbb{R}_+} \dfrac{r}{p_0 \psi(r)} > \dfrac{|\gamma|}{|\gamma| - \rho_1 A_3 - \rho_2 A_4}$, *avec*

$$\begin{aligned} p_0 \ &= \ \frac{1}{\Gamma(q)}\bigg[\int_0^t (t-s)^{q-1} p(s)ds + \frac{A_1}{2|\gamma|}\int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} p(m)dm\right)ds \\ &+ \frac{|\beta|(|\alpha|\xi^2 + 2|1-\alpha\xi|)}{2|\gamma|}\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} p(m)dm\right)ds \\ &+ \frac{|\alpha|\xi^2 + 2|1-\alpha\xi|}{2|\gamma|}\int_0^1 (1-s)^{q-1} p(s)ds\bigg]. \end{aligned}$$

Alors, le problème aux limites (3.1) a au moins une solution sur $[0,1]$.

Preuve :
En premier lieu, nous considérons l'opérateur $N : C([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1], \mathbb{R})$ défini par (3.9) et nous posons :

$$(Nx)(t) = (N_1 x)(t) + (N_2 x)(t), \quad t \in [0,1],$$

où,

$$\begin{aligned} (N_1 x)(t) \ &= \ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\ &- \frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2} + (1-\beta\eta)t\right]\int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right)ds \\ &+ \frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t\right]\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right)ds \\ &- \frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t\right]\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \end{aligned}$$

et

$$(N_2x)(t) \quad = \quad -\frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]g(x)+\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]h(x),$$

De $(H8)$ *il existe un nombre strictement positif* r_0 $(r_0 > 0)$ *tel que :*

$$\frac{r_0}{p_0\psi(r_0)} > \frac{|\gamma|}{|\gamma|-\rho_1A_3-\rho_2A_4} \tag{3.13}$$

Maintenant, pour la preuve de notre théorème, nous allons prouver que les opérateurs N_1 *et* N_2 *satisfont toutes les hypothèses du lemme3.2.1. Donc, la preuve est faite en quatre étapes.*

étape 1 : *L'opérator* N_1 *est continu et complètement continu.*
Nous montrons que $N_1(\overline{\Omega}_{r_0})$ *est borné. pour tout* $x \in \overline{\Omega}_{r_0}$*, nous avons :*

$$\begin{aligned} |(N_1x)(t)| \quad \leq \quad & \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}|f(s,x(s))|ds \\ & +\frac{|\alpha|}{|\gamma|\Gamma(q)}\left[\frac{|2-\beta\eta^2|}{2}+|1-\beta\eta|\right]\int_0^\xi\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}|f(m,x(m))|dm\right)ds \\ & +\frac{|\beta|}{|\gamma|\Gamma(q)}\left[\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right]\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}|f(m,x(m))|dm\right)ds \\ & +\frac{1}{|\gamma|\Gamma(q)}\left[\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right]\int_0^1 (1-s)^{q-1}|f(s,x(s))|ds \\ & \leq \frac{M_r}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{A_1+A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Donc,

$$\|N_1x\| \leq \frac{M_r}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{A_1+A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right).$$

Cela signifie que $N_1(\overline{\Omega}_{r_0})$ *est uniformément borné. De plus, pour chaque* $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$, *nous* *avons :*

$$\begin{aligned}
|(N_1x)(t_1)-(N_1x)(t_2)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}\Big[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\Big]|f(s,x(s))|ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}|f(s,x(s))|ds\\
&+\frac{|\alpha|}{|\gamma|\Gamma(q)}|1-\beta\eta|(t_2-t_1)\int_0^{\xi}\left(\int_0^s(s-m)^{q-1}|f(m,x(m))|dm\right)ds\\
&+\frac{|\beta|}{|\gamma|\Gamma(q)}|1-\alpha\xi|(t_2-t_1)\int_0^{\eta}\left(\int_0^s(s-m)^{q-1}|f(m,x(m))|dm\right)ds\\
&+\frac{|1}{|\gamma|\Gamma(q)}|1-\alpha\xi|(t_2-t_1)\int_0^1(1-s)^{q-1}|f(s,x(s))|ds\\
&\leq \frac{M_r}{\Gamma(q)}\Big\{\int_0^{t_1}\Big[(t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\Big]ds+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}ds\\
&+\frac{|\alpha||1-\beta\eta|(t_2-t_1)}{|\gamma|}\int_0^{\xi}\left(\int_0^s(s-m)^{q-1}dm\right)ds\\
&+\frac{|\beta||1-\alpha\xi|(t_2-t_1)}{|\gamma|}\int_0^{\eta}\left(\int_0^s(s-m)^{q-1}dm\right)ds\\
&+\frac{|1-\alpha\xi|(t_2-t_1)}{|\gamma|}\int_0^1(1-s)^{q-1}ds\Big\},
\end{aligned}$$

qui est indépendant de x et tend vers zéro quand $t_2-t_1\longrightarrow 0$. Alors N_1 est équicontinu. Par conséquent, par le théorème d'Ascoli-Arzela, nous concluons que
$N_1(\overline{\Omega}_{r_0})$ est un ensemble relativement compact.

Soit $\{x_n\}\subset\overline{\Omega}_{r_0}$ où $\|x_n-x\|\longrightarrow 0$. Donc $|x_n(t)-x(t)|\longrightarrow 0$ sur $[0,1]$. De la continuité uniforme de $(t,x)\mapsto f(t,x)$ sur l'ensemble compact $[0,1]\times\overline{\Omega}_{r_0}$ il s'ensuit que
$|f(t,x_n(t))-f(t,x(t))|\longrightarrow 0$ uniformément sur $[0,1]$. Par conséquent $\|N_1x_n-N_1x\|\longrightarrow 0$ lorsque $n\longrightarrow+\infty$, ce qui signifie que N_1 est complètement continu.

Étape 2 : *L'opérateur $N_2:\overline{\Omega}_{r_0}\longrightarrow C([0,1],\mathbb{R})$ est une contraction. Ceci est déduit directement de la condition $(H5)$.*

Étape 3 : *L'ensemble $N(\overline{\Omega}_{r_0})$ est borné.*
De l'hypothèse $(H5)$, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
\|N_2x\| &\leq \frac{2}{|\gamma|}\left[\frac{|2-\beta\eta^2|}{2}+|1-\beta\eta|\right]\rho_1r_0+\frac{2}{|\gamma|}\left[\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right]\rho_2r_0\\
&= \frac{\rho_1A_3+\rho_2A_4}{|\gamma|}r_0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

pour chaque $x\in\overline{\Omega}_{r_0}$. Comme l'ensemble $N_1(\overline{\Omega}_{r_0})$ est borné, alors l'ensemble $N(\overline{\Omega}_{r_0})$ est aussi borné.

Étape 4 : *Enfin, il suffit simplement de montrer que la condition (C_2) dans le lemme 3.2.1, ne se produit pas. Pour ce faire, nous procédons par contradiction. Nous supposons que (C_2) a lieu. Alors, il* *existe* $\lambda \in (0,1)$ *et* $x \in \partial\overline{\Omega}_{r_0}$ *telles que* $x = \lambda N x$. *Donc nous avons* $\|x\| = r_0$ *et*

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda\Bigg\{ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\ &\quad - \frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2} + (1-\beta\eta)t\right] \int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm \right) ds \\ &\quad + \frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t\right] \int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm \right) ds \\ &\quad - \frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t\right] \int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\ &\quad - \frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2} + (1-\beta\eta)t\right] g(x) + \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2} + (1-\alpha\xi)t\right] h(x) \Bigg\},\ t \in [0,1]. \end{aligned}$$

avec les hypothèses $(H6)-(H8)$, *nous avons :*

$$\begin{aligned} r_0 &\leq \frac{\psi(r_0)}{\Gamma(q)} \Bigg[\int_0^t (t-s)^{q-1} p(s)ds + \frac{A_1}{2|\gamma|} \int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} p(m)dm \right) ds \\ &\quad + \frac{|\beta|(|\alpha|\xi^2 + 2|1-\alpha\xi|)}{2|\gamma|} \int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} p(m)dm \right) ds \\ &\quad + \frac{|\alpha|\xi^2 + 2|1-\alpha\xi|}{2|\gamma|} \int_0^1 (1-s)^{q-1} p(s)ds \Bigg]. \\ &\quad + \frac{\rho_1 A_3 + \rho_2 A_4}{|\gamma|} r_0. \end{aligned}$$

Cela signifie que :

$$r_0 \leq p_0\psi(r_0) + \frac{\rho_1 A_3 + \rho_2 A_4}{|\gamma|} r_0.$$

Ainsi,

$$\frac{r_0}{p_0\psi(r_0)} \leq \frac{|\gamma|}{|\gamma| - \rho_1 A_3 - \rho_2 A_4},$$

c'est une contradiction avec (3.13). par conséquent, les opérateur N_1 *et* N_2 *satisfont toutes les hypothèses du lemme 3.2.1. D'où l'opérateur* N *a au moins un point fixe* x *dans* $\overline{\Omega}_{r_0}$, *qui est la solution du problème aux limites (3.1).*

■

Conclusion générale

L'objectif de ce travail consiste à présenter plusieurs résultats d'existence et d'unicité pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire aux sens de Riemann-Liouville et de Caputo dans des espaces de Banach de dimension fini ou infinie. Ces résultats ont été obtenus en utilisant les théorèmes de point fixe de Banach, de Krasnoselskii et de Mönch combiné avec la mesure de noncompacité de Kuratowskii. Pour cela, nous avons commencé par des préliminaires où nous avons rappelé quelques définitions des dérivées fractionnaires telles que, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo, et quelques outils de base du calcul fractionnaire, ainsi que les démonstrations détaillées, qui nous ont permis de prouver l'existence et l'unicité de solutions

Bibliographie

[1] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam, 2006.

[2] A.A. Stanislavsky, Hamiltonian formalism of fractional systems, Eur. Phys. J. B, 49(2006), 93-101.

[3] I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/Londin/Toronto, 1999.

[4] K.Yosida, Functional Analysis, 6 th edn. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[5] J.Banas and M.Mursaleen, Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential Equations. Springer, New Delhi, 2014.

[6] S.Szufla, On the Application of Measure of Noncompactness to Existence Theorems, Rendiconti del Seminario Matematico della UniversitÃă di Padova, vol.75,pp.1-14,1986.

[7] D.R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[8] H. Mönch,"Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces," Nonlinear Analysis : Theory, Methods Applications, vol. 4, no. 5, pp. 985-999, 1980.

[9] A. Arara and M. Benchohra,"Fuzzy solutions for boundary value problems with integral boundary conditions," Acta Mathematica Universitatis Comenianae, vol. 75, no. 1, pp. 119-126, 2006.

[10] G. Infante, "Eigenvalues and positive solutions of ODEs involving integral boundary conditions," Discrete and Continuous Dynamical Systems, pp. 436-442, 2005.

[11] R. P. Agrawal, M. Benchohra, S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations, Georgian Mathematical Journal, 2009, vol. 16, 3, pp. 401-411.

[12] R. W. Ibrahim, s. Momani, On existence and uniqueness of solutions of a class of fractional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3334(2007), pp. 1-10.

[13] M. Benchohra, S. Hamani, and J. Henderson, "Functional differential inclusions with integral boundary conditions," Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, vol. 2007, no. 15, pp. 1-13, 2007.

[14] M. Benchohra, S. Hamani, and J. J. Nieto, "The method of upper and lower solutions for second order differential inclusions with integral boundary conditions," to appear in The Rocky Mountain Journal of Mathematics.

[15] S. Abbas, M. Benchohra, Existence for impulsive partial hperbolic differential equations of fractional order at variable times, Fixed Point Theory, 12(2011), 3-16.

[16] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications). Gordon and Breach, Switzerland, 1993.

[17] S. Q. Zhang, *The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000), 804-812.*

[18] S. Q. Zhang, *Existence of a positive solution for some class of nonlinear fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 278 (2003), 136-148.*

[19] S. Peciulyte, O. Stikoniene, and A. Stikonas, *"Sturm-Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition," Mathematical Modelling and Analysis, vol. 10, no. 4, pp. 377-392, 2005.*

[20] S. Xinwei, L. Landong, *Existence of solution for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 2007, 223, 3, pp. 291-298.*

[21] Z. Bai, H. Lü, *Positive solutions for boundary-value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), 495-505.*

[22] Z. Shuqin, *Existence of solution for boundary value problem of fractional order, Acta Mathematica Scentia, 2006, 26 B, 2, pp. 220-228.*

[23] K. W. Blayneh, *"Analysis of age-structured host-parasitoid model," Far East Journal of Dynamical Systems, vol. 4, no. 2, pp. 125-145, 2002.*

[24] G. Adomian and G. E. Adomian, *"Cellular systems and aging models," Computers Mathematics with Applications, vol. 11, no. 1-3, pp. 283-291, 1985.*

[25] A.V. Bitsadze, *On the theory of nonlocal boundary value problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR 277 (1984), 17-19.*

[26] M. Benchohra, S. Hamani, S.K. Ntouyas, *Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Anal. 71 (2009), 2391-2396.*

[27] B. Ahmad, S.K. Ntouyas, A. Alsaedi, *New existence results for nonlinear fractional differential equations with three-point integral boundary conditions, Adv. Differ. Equ., Volume 2011, Article ID 107 384, 11 pp.*

[28] M. Benchohra, S. Hamani, S.K. Ntouyas, *Boundary value problems for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.*

[29] W. Zhong, W. Lin, *Nonlocal and multiple-point boundary value problem for fractional differential equations, Comput. Math. Appl. 39 (2010), 1345-1351.*

ملخص

في هذه العمل درسنا الوجود و الوحدانية لحلول بعض المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية بمفهوم ريمان- ليوفيل و كابيتو. بشروط حدية تكاملية و غير محلية و ذلك باستعمال نظرية النقطة الثابتة لبناخ ونظرية مونش و كراسنوسلسكي.

Abstract

In this work, we studied the existence and uniqueness of solutions of some Riemann-Liouville and Caputo fractional differential equations with integral and non-local boundary conditions using fixed point theorem of Banach, Mönch and Krasnoselskii.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié l'existence et l'unicité de solutions de quelques équations différentielles fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville et de Caputo avec conditions aux limites intégrales et non locales en utilisant les théorèmes du point fixe de Banach, Mönch et Krasnoselskii.