



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : probabilité et statistique

Par : CHETTOUH AMIRA

Thème

TEST DE STATIONNARITE SUR LES DONNEES "ONAX"

Version de :/06/2018

Devant le jury composé de :

| | | |
|----------------|--|------------|
| Mr. Badidja. S | maître assistant .UKMO Université-Ouargla | Président |
| Mme. HALIL. R | maître assistante .UKMO Université Ouargla | Rapporteur |
| Mr. Bahadi. A | professeur .UKMO Université-Ouargla | Examineur |

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

****pour l'esprit de ma chère mère ****

et mon cher père

A mes chers frères :

Abd arahim , Ishak

A mes chers soeurs :

Mouna , Abir , Asma

A ma tante et mon oncle, sa femme

A toute ma famille

A mes collègues de la cité universitaire des filles "koraychi"

A toutes mes amis sans exception, et mes collègues de la promotion de master (2017/2018)

En fin je dédie ce travail à toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont apporté leurs aides

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie Dieu tout puissant de m'avoir accordé la force, le courage et les moyens afin de pouvoir accomplir ce travail.

Je remercie tout particulièrement mon promoteur Mme. HALIL RACHIDA , pour ces orientations, ces conseils très bénéfiques et encourageants et leur bon encadrement.

Je remercie également tous les membres du jury : Dr.Badidja salim , professeur Baheddé aïssa pour leurs conseils, leurs suggestions et leurs remarques judicieuses.

Je ne pourrais terminer sans remercier mes parents et ma famille qui m'ont soutenu et encouragé pour terminer ce travail.

Je remercie mes collègues de la promotion, de la cité universitaire qui ont rendu les années d'étude plus belles et plus bénéfiques.

Mes sincères remerciements à tous ceux et celles qui ont bien voulu m'aider de près ou de loin pour réaliser ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|-----------|
| Dédication | i |
| Remerciement | ii |
| Notations et Préliminaires | 1 |
| Introduction générale | 2 |
| 1 | 4 |
| 1.1 présentation de la station de l'epirateur | 4 |
| 1.1.1 Nature des eaux usées et charges à traiter : | 5 |
| 1.1.2 Objectifs d'épuration et niveau de rejet | 6 |
| 1.1.3 Caractéristiques du site d'implantation | 7 |
| 1.1.4 Dimensionnement | 8 |
| 1.2 Composantes d'une série chronologique. | 12 |
| 1.2.1 Les composantes : | 13 |
| 1.2.2 Les Opérateurs : | 13 |
| 1.3 Stasionarité des processus | 14 |
| 1.3.1 stasionarté large | 14 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.3.2 | stationnarité au second ordre | 14 |
| 1.4 | Les modèles Autorégressifs-moyenne mobile (ARMA) et leur stationnarité | 16 |
| 1.4.1 | processus purement aléatoire | 16 |
| 1.4.2 | Processus autorégressif | 17 |
| 1.4.3 | processus moyenne mobile (moving average process) | 18 |
| 1.4.4 | Processus mixte :autoregréssif-moyenne mobile : | 19 |
| 1.5 | Méthodes d'extraction de la tendance(stationarisation) | 20 |
| 1.5.1 | processus non stationnaire de type Déterministe(processus TS) | 20 |
| 1.5.2 | processus non stationnaire de type Stochastique (processus DS) | 21 |
| 2 | Méthodologies de test de la stationnarité | 24 |
| 2.1 | introduction | 24 |
| 2.2 | Tests avec H_0 la non stationnarité | 25 |
| 2.2.1 | Test de Dickey-Fuller : | 25 |
| 2.2.2 | test de Dickey-Fuller augmenté : | 26 |
| 2.3 | Tests avec H_0 la stationnarité | 30 |
| 2.3.1 | Test KPSS | 30 |
| 3 | Application du test de Dickey-Fuller augmenté au données "ONAX" | 31 |
| 3.1 | présentation des données utilisées | 31 |
| 3.2 | Étude de la stationnarité de la série : | 33 |
| 3.2.1 | le test de Dickey-Fuller augmentée | 34 |
| 3.3 | élimination de non stationnarité de la série : | 36 |
| | Conclusion générale | 40 |
| | Bibliographie | 41 |

NOTATIONS

► $\{Y_t\}$ Variable aléatoire

► $\{\epsilon_t\} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$

► $E(Y)$: Espérance mathématique de Y

► $V(Y)$: Variance de Y

► $\gamma_X(\cdot)$ Fonction d'autocovariance .

► $\rho_X(\cdot)$ Fonction d'autocorrélation

► $N(\mu, \sigma^2)$: loi normal de moyenne μ et de variance σ^2

► *i.i.d* indépendantes et identiquement distribuées.

► Données "ONAX" : Données présentant la quantité d'eau usées reçue par la station d'épuration de Sidi-Khouiled du 01/02/2018 au 10/04/2018.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le fait qu'un processus soit stationnaire ou non conditionne le choix de la modélisation que l'on doit adopter.

en régle générale, si la série étudiée est issue d'un processus stationnaire on cherche alors le meilleur modèle parmi la classe des processus stationnaires pour la représenter, puis on estime ce modèle.

en revanche si la série est issue d'un processus non stationnaire (Ce qui est la cas de la majorité des série chronologique) on doit avant toutes choses chercher à la stationnariser, c-à-d trouver une transformation stationnaire de ce processus puis on modélise et l'on estime les paramètres associés a la composante stationnaire .

l'objectif de ce travail étant justement de tester la stationnarité de ces dernières, puis de la stationnariser (si elles sont non stationnaires bien sur) afin de les préparer pour la modélisation et aussi pour la prévision.

ce mémoire se présente comme suite :

le premier chapitre est constitué de deux parties. La première partie est consacrée à la présentation de la station d'épuration des eaux usées de sidi khouiled, dans la deuxième partie nous présentons quelques définitions et propriétés des séries temporelles ainsi que quelques outils de base relatifs à la stationnarité des séries temporelles [1,2,3] qui sont nécessaires à la suite de ce travail.

Le deuxième chapitre présente un petit review sur les tests de stationnarité ou encore les tests de la racine unité présents dans la littérature. Pour le cas où H_0 présente la non stationnarité de la série nous avons abordé le test de Dickey Fuller (1979) [9,10,11] qui traite le cas d'un processus AR(1) nous avons également considéré le test de Dickey Fuller augmenté (1981) [6] qui traite le cas d'un AR(P). Pour le cas où H_0 présente la stationnarité nous avons abordé le test "KPSS" proposé par Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (1992) [12].

Dans le dernier chapitre nous avons fait une application du test de Dickey-Fuller augmenté sur des données réelles présentant la quantité d'eau reçue par la station d'épuration pendant une période de 68 jours.

Phrases et mots clés :

Séries Chronologiques - Non-Stationnarité - Racine Unitaire - Stratégie de Test - Dickey et Fuller
- Dickey et Fuller augmenté - KPSS - Unit Root.

———— CHAPITRE 1 ————

1.1 PRÉSENTATION DE LA STATION DE L'ÉPURATEUR

Introduction

La solution retenue pour l'épuration des effluents générés par la commune de Sidi Khouiled consiste à traiter l'ensemble des eaux usées à partir d'une station d'épuration de type lagunage aéré. La filière de traitement retenue est constituée :

- de prétraitements,
- d'un premier étage de traitement par lagunage aéré
- d'un second étage de traitement par lagunage aéré,
- d'un troisième étage de traitement par lagunage de finition,
- de lits de séchage des boues.

La station d'épuration est dimensionnée pour assurer le traitement des effluents jusqu'à l'horizon 2030. La configuration retenue consiste à réaliser trois étages en série (étage aéré 1, étage aéré 2 et étage de finition) comprenant chacun :

- 2 lagunes aérées étage 1
- 2 lagunes aérés étage 2
- 1 lagune de finition

les travaux consistent à réaliser l'ensemble des ouvrages de la station d'épuration ce qui correspond à un dimensionnement de la station d'épuration pour l'horizon 2030.

Le site retenu pour la mise en place de la future station d'épuration est situé a proximité du point de rejet actuel du réseau d'eaux usées de l'autre côté de la route de Sidi Khouiled vers Hassi Ben Abdallah. Les eaux traitées seront renvoyées vers Oum Erraneb.

1.1.1 Nature des eaux usées et charges à traiter :

Les caractéristiques des rejets sont typiquement celles d'un rejet domestique ; la part des rejets industriels reste limitée même à l'horizon du projet.

Le taux de raccordement au réseau d'assainissement collectif est actuellement de l'ordre de 70%. Les eaux usées collectées par le réseau sont acheminées sans traitement vers une zone dépressionnaire.

Ce point de rejet constitue une mare colonisée par des roseaux où l'autoépuration est réduite car le niveau de la nappe phréatique est proche de la surface. Les effluents transitant dans le réseau d'assainissement présentent les caractéristiques d'un effluent biodégradable. La fraction d'eaux parasites est de l'ordre de 25%.

Le tableau suivant rappelle les charges hydrauliques et polluantes à traiter aux différents horizons. A l'horizon 2030, la population totale raccordée au réseau d'assainissement collectif est de l'ordre

de 7 165 équivalents – habitants ; le taux de raccordement sera proche de 100%.

| HORIZON | | 2 005 | 2 015 | 2 030 |
|---|-------------------|-------|-------|-------|
| DEFINITION DE LA POPULATION RACCORDEE | | | | |
| Population totale | EH | 3 967 | 5 415 | 7 165 |
| % de raccordement au réseau | % | 80% | 90% | 100% |
| Population raccordée | EH | 3 174 | 4 874 | 7 165 |
| DEFINITION DU DEBIT TOTAL D'EAUX USEES | | | | |
| Débit d'eaux usées | m ³ /j | 441 | 677 | 995 |
| Débit d'eaux parasites | m ³ /j | 66 | 67 | 99 |
| Débit total | m ³ /j | 507 | 744 | 1 094 |
| DEFINITION DES FLUX DE POLLUTION | | | | |
| Flux DBO5 domestique | kg/jour | 127 | 195 | 287 |
| Concentration DBO5 | mg/l | 250 | 262 | 262 |
| Ratio DBO5 | g/EH.j | 40 | 40 | 40 |
| Flux DCO domestique | kg/jour | 254 | 390 | 573 |
| Concentration DCO | mg/l | 501 | 524 | 524 |
| Ratio DCO | g/EH | 80 | 80 | 80 |
| Flux MES domestique | kg/jour | 190 | 292 | 430 |
| Concentration MES | mg/l | 376 | 393 | 393 |
| Ratio MES | g/EH | 60 | 60 | 60 |

1.1.2 Objectifs d'épuration et niveau de rejet

Les objectifs de l'épuration de l'agglomération de Ouargla définis dans le Plan Directeur sont les suivants :

- Supprimer les nuisances et les risques actuels de contamination au niveau des zones urbanisées,
- Protéger le milieu récepteur
- Se garder la possibilité de réutiliser pour l'irrigation les effluents épurés.

Dans le cadre du traitement des eaux usées générées par la commune de Sidi Khouiled, le niveau d'épuration retenu permettra, d'une part, le rejet vers le milieu récepteur et d'autre part une

irrigation restrictive (niveau B suivant OMS).

Ce niveau d'épuration est caractérisé par les contraintes suivantes :

- Paramètres organiques :

$$DCO = 125mg/l$$

$$DBO5 = 40mg/l$$

$$MES = 35mg/l$$

- parasitologie : moins de 1 oeuf d'helminthes par litre

1.1.3 Caractéristiques du site d'implantation

a. Localisation et superficie disponible

Le site d'implantation de la station d'épuration a été retenu au cours de l'établissement du Schéma Directeur et de l'Avant Projet Sommaire.

Le site retenu pour la mise en place de la future station d'épuration est situé à proximité du point de rejet actuel du réseau d'eaux usées de l'autre côté de la route de Sidi Khouiled vers Hassi Ben Abdelah.

Ce site permet de répondre aux besoins fonciers et aux objectifs d'assainissement (proximité du réseau de transfert des eaux usées existant).

Le site d'implantation est limité :

- A l'est et au nord, par des dunes
- A l'ouest et au sud, par des palmeraies

La superficie disponible, de l'ordre de 3,5ha, est suffisante pour l'implantation de la station d'épuration.

La forme géométrique du site s'apparente à un rectangle dont les dimensions sont :

- Largeur : *environ 130m*
 - Longueur : *environ 300m*
-

Actuellement, le site est inoccupé. A l'avenir, il conviendra de veiller à ce qu'aucun développement de l'occupation du sol n'ait lieu sur cette zone compte tenu de leur utilisation ultérieure.

b. Topographie

L'altimétrie varie de $7mNGA$ à $10mNGA$.

Le site est caractérisé par une dénivelée orientée nord-ouest - sud-est. On note la présence de quelques dunes sur le site dont les hauteurs ne dépassent pas les $3m$.

Dans le but de concevoir une installation rustique et fiable dans le temps, le cheminement hydraulique des eaux usées depuis leur point d'entrée dans le réseau de collecte jusqu'à leur rejet après traitement est entièrement gravitaire et exige, compte tenu de la topographie, de minimiser les pertes de charge dans les ouvrages et conduites.

1.1.4 Dimensionnement

***Les prétraitements**

Les ouvrages de prétraitement prévus sont les suivants :

- 1 dégrilleur de type automatique (espaces inter barreaux de $25mm$) associé à une grille manuelle (espaces inter barreaux de $40mm$) de sécurité en cas de by-pass.
 - 2 ouvrages de dessablage statique de type chenal
-

****Lagunage**

Le tableau suivant conclut sur les caractéristiques des lagunes aérées :

| LAGUNE D'AERATION | | |
|----------------------------------|--------|----------------|
| Volume total | 11 000 | m ³ |
| Surface à mi hauteur total | 4 117 | m ² |
| Étage aéré 1 | | |
| Surface à demi hauteur étage 1 | 2 357 | m ² |
| Volume étage 1 | 6 600 | m ³ |
| Nombre de bassins | 2 | u |
| Volume par bassin | 3 300 | m ³ |
| surface mi-hauteur par bassin | 1 179 | m ² |
| hauteur d'eau | 2,8 | m |
| Nombre d'aérateurs par bassins | 2 | u |
| Puissance unitaire d'un aérateur | 5,5 | KW |
| Puissance total par bassin | 22,0 | KW |
| Étage aéré 2 | | |
| Surface à demi hauteur étage 2 | 1 760 | m ² |
| Volume étage 2 | 4 400 | m ³ |
| Nombre de bassins | 2 | u |
| Volume par bassin | 2 200 | m ³ |
| surface mi-hauteur par bassin | 880 | m ² |
| hauteur d'eau | 2,5 | m |
| Nombre d'aérateurs par bassins | 1 | u |
| Puissance unitaire d'un aérateur | 5,5 | KW |
| Puissance total par bassin | 11 | KW |

Le tableau suivant conclut sur les caractéristiques des lagunes de finition :

| LAGUNE FINITION | | |
|---------------------------------|-------|----------------|
| Profondeur | 1,5 | m |
| volume total | 3 282 | m ³ |
| Surface totale à mi hauteur | 2 188 | m ² |
| Nombre de bassins | 1 | u |
| Volume par lagune | 3 282 | m ³ |
| surface à mi-hauteur par lagune | 2 188 | m ² |

***Lits de séchage

Le tableau suivant conclut sur les caractéristiques des lits de séchage :

| LITS DE SECHAGE DES BOUES | | |
|--|-------|----------------|
| Critère de dimensionnement | | |
| Population raccordée | 7 165 | EH |
| Production totale de boues par EH | 120 | l/EH/an |
| Concentration en matières sèches dans les lagunes | 100 | g/l |
| Volume annuel total de boues produites | 860 | m ³ |
| Production annuelle totale de Matières sèches | 86 | tMS/an |
| Nombre total de lagunes | 2 | u |
| Volume annuel de boues par lagune | 430 | m ³ |
| Volume à partir duquel le curage d'une lagune est nécessaire | 825 | m ³ |
| Fréquence de curage 1 fois tous les ... | 1,9 | an |
| Concentration en matières sèches des boues curées | 80 | g/l |
| Quantité de matières sèches à curer par lagune | 82,5 | tMS |
| Volume de boues à curer par lagune | 1 031 | m ³ |
| Caractéristique des lits de séchage | | |
| Hauteur de remplissage des lits | 0,5 | m |
| Surface totale | 2 063 | m ² |
| Surface unitaire du lit de séchages | 525 | m ² |
| Nombre de lit à prévoir | 4 | u |

****Calendrier de curage

Le calendrier prévisionnel de curage présenté ci-dessous est le résultat d'une simulation de l'évolution de la quantité de boues qui s'accumule en fond de lagune que nous avons réalisé et qui prend en compte :

- L'évolution de la population raccordée à la station d'épuration
- Le phasage des réalisations
- Le volume de boues produit par habitant raccordé et par an
- La siccité des boues en fond de bassin et lors de l'extraction.

Le curage d'une lagune est nécessaire quand la tranche d'eau utile à l'épuration se réduit ou quand le temps de séjour des eaux usées dans la lagune s'approche de la limite inférieure tolérée. Pratiquement le curage de la lagune devient nécessaire quand le volume occupé par les boues s'approche de 25% du volume total de la lagune.

Lors de l'extraction des boues proprement dites, on assiste à un mélange des boues avec des eaux en cours de traitement ce qui se traduit par l'abaissement de la siccité des boues à épandre sur les lits à 80g/l.

De plus, pratiquement il est difficile d'extraire plus de 80% des boues d'une lagune à chaque opération de curage.

La prise en compte de tous ces éléments nous amène à proposer le calendrier de curage des lagunes du premier étage aéré suivant :

| Lagune | Aéré 1 | Aéré 2 | Volume annuel de boues à épandre sur les lits | Volume annuel de boues sèches obtenues |
|--------|--------|--------|---|--|
| 2005 | | | m3 | m3 |
| 2006 | | | 0 | 0 |
| 2007 | | | 925 | 185 |
| 2008 | | | 1 255 | 251 |
| 2009 | | | 0 | 0 |
| 2010 | | | 1 023 | 205 |
| 2011 | | | 1 056 | 211 |
| 2012 | | | 0 | 0 |
| 2013 | | | 1 121 | 224 |
| 2014 | | | 1 154 | 231 |
| 2015 | | | 0 | 0 |
| 2016 | | | 1 216 | 243 |
| 2017 | | | 1 245 | 249 |
| 2018 | | | 0 | 0 |
| 2019 | | | 1 297 | 259 |
| 2020 | | | 1 324 | 265 |
| 2021 | | | 0 | 0 |
| 2022 | | | 1 376 | 275 |
| 2023 | | | 1 403 | 281 |
| 2024 | | | 0 | 0 |
| 2025 | | | 1 455 | 291 |
| 2026 | | | 1 482 | 296 |
| 2027 | | | 0 | 0 |
| 2028 | | | 1 534 | 307 |
| 2029 | | | 1 561 | 312 |
| 2030 | | | 0 | 0 |

1.2 COMPOSANTES D'UNE SÉRIE CHRONOLOGIQUE.

dans ce partie, nous nous proposons de donner un aperçu sur la notion de stationnarité d'une série chronologique que l'on appelle encore série temporelle ou tout simplement chronique. rappelons que celle-ci est un ensemble de valeurs représentant l'évolution d'un phénomèn au cours du temps sur une période donnée. dans ce qui suit, nous utiliserons le terme "séries chronologiques" pour désigner à la fois les données et le processus dont elles sont les réalisations.

1.2.1 Les composantes :

la décomposition classique d'une série chronologique est :

$$Y_t = d_t + S_t + X_t$$

où

d_t est le mouvement de longue durée appel "tendance" (trend) qui est une fonction continue de temps.

S_t est la composante saisonnière qui correspond aux fluctuations saisonnières autour de la tendance.

X_t est la composante aléatoire.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux séries chronologiques corrigées des fluctuations saisonnières.

Beaucoup de méthodes d'analyse de séries chronologiques reposent sur l'hypothèse de stationnarité de cette dernière. si cette hypothèse n'est pas satisfaite, alors la série chronologique doit être stationnarisée avant de passer à une étape ultérieure d'analyse. nous donnons ci-après quelques éléments utiles à la compréhension de la notion de non stationnarité et de l'intérêt des tests de la racine unité.

1.2.2 Les Opérateurs :

1. Opérateur de retard :

L'opérateur de retard B se définit de la manière suivante :

$$B(Y_t) = Y_{t-1}$$

ona $B^n(Y_t) = Y_{t-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

2. Opérateur de différence d'ordre d

On définit l'opérateur Δ_d de différence d'ordre d comme l'opérateur linéaire tel que :

$$\Delta_d Y_t = Y_t - Y_{t-d} = (1 - B^d)Y_t$$

On peut aussi prendre l'opérateur d'ordre un et l'appliquer plusieurs fois :

$$\Delta^2(Y_t) = \Delta(\Delta(Y_t)) = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) = (1 - B)(Y_t - Y_{t-1}) = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Ces opérateurs peuvent être utilisés afin de transformer un processus de moyenne non nulle en un processus de moyenne nulle. On peut aussi s'en servir pour enlever la composante saisonnière de la série.

1.3 STATIONARITÉ DES PROCESSUS

1.3.1 stationnarité large

Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit strictement stationnaire si la distribution conjointe de la suite $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ est la même que celle de la suite $\{X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}\}$ pour tout $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

i.e :

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1+k, t_2+k, \dots, t_n+k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

On peut aussi dire que la structure probabiliste d'un processus strictement stationnaire est invariante en effectuant un changement d'origine.

1.3.2 stationnarité au second ordre

On dit que le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au second ordre si :

1. $E(X_t) = \mu$ avec μ une constante indépendante de t
-

2. $E(X_t^2) = \mu'$ avec μ' une constante indépendante de t

donc la variance $V(X_t) = \mu' - \mu^2 = \sigma^2$ est aussi une constante indépendante de t

3. $E(X_t X_s) = \gamma(t - s)$ est une fonction de $(t - s)$ seulement.

donc la covariance $cov(X_t, X_s)$ est aussi une fonction de $(t - s)$

Définition 1.3.1 (*Fonction d'autocovariance*)

Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus tel que $V(X_t) < +\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ la fonction d'autocovariance $\gamma_X(\cdot, \cdot)$ de X_t est définie par :

$$\gamma_X(r, s) = cov(X_r, X_s) = E[(X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))], r, s \in \mathbb{Z}$$

dans le cas d'un processus stationnaire, la fonction d'autocovariance sera une fonction d'une seule variable :

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(h, 0) = cov(X_t, X_{t+h}), \forall t, h \in \mathbb{Z}$$

Définition 1.3.2 (*Fonction d'autocorrélation*)

la fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est définie par :

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = corr(X_t, X_{t+h}) = \frac{cov(X_t, X_{t+h})}{[V(X_t)V(X_{t+h})]^{1/2}}, \forall t, h \in \mathbb{Z}$$

1.4 LES MODÈLES AUTORÉGRESSIFS-MOYENNE MOBILE (ARMA) ET LEUR STATIONNARITÉ

Les premiers processus autorégressifs ont été introduits par George Udny Yule dans [18]. Yule utilise le premier modèle autorégressif pour modéliser la série chronologique du nombre de taches solaires plutôt que la méthode du périodogramme de Schuster [19]. Un processus autorégressif est un processus où l'on écrit une observation au temps t comme une combinaison linéaire des observations passées plus un certain bruit blanc.

1.4.1 processus purement aléatoire

un processus $\{T_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit purement aléatoire s'il consiste en une suite de variables aléatoires non corrélées i.e pour tout $s \neq t$, $cov(Y_s, Y_t) = 0$

Alors la fonction d'autocorrélation est

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

Remarques 1.5.1 :

- le processus purment aléatoire est appelé aussi "bruit blanc".
- Le processus purement aléatoire paraît artificiel et très rare à observer en pratique. Mais ce modèle revêt une très grande importance du fait qu'il constitue la base de la construction d'autres modèles plus complexes.

Dans toute la suite de ce travail, en écrivant "processus purement aléatoire" ou "bruit blanc", nous sous-entendons "processus purement aléatoire stationnaire" où on suppose qu'on a toujours $E(Y_t) = \mu$ et $V(Y_t) = \sigma^2$ toutes les deux des constantes indépendantes de t . On le note souvent ϵ_t

1.4.2 Processus autorégressif

La suite $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus autoregressif d'ordre p , ($p > 0$) s'il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t \quad \text{ou} \quad \{\epsilon_t\} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

ou encore

$$Y_t = \sum_{k=1}^p \phi_k Y_{t-k} + \epsilon_t \quad \text{ou} \quad \{\epsilon_t\} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \tag{1.1}$$

Les $\phi_k (k = 1, 2, \dots, p)$ constituent les paramètres du modèle,

Dans ce cas, on note $\{Y_t\} \sim AR(p)$

Remarque 1.4.1 *On peut réécrire un processus $AR(p)$ avec un polynôme $\phi(B)$ qui multiplie Y_t cette fois ci :*

$$\phi(B)Y_t = \epsilon_t \quad \text{avec} \quad \phi(B) = 1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p.$$

Théorème 1.4.1 ⁽¹⁾ *Un processus autoregressif $AR(p)$ est stationnaire si et seulement si son polynôme $\phi(z)$ est tel que*

$$\phi(z) \neq 0 \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{telque} \quad |z| \leq 1.$$

c-à-d, toutes les racines de $\phi(z)$ sont de norme plus grande que 1. [2]

En d'autres termes un processus $AR(p)$ donné par (1.1) est stationnaire si toutes les racines du polynome caractéristique sont à l'intérieure du cercle unité ou encore $|\phi_i| < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, p$

cas particulier

Un processus $AR(1)$ prend la forme suivante :

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \quad \text{ou} \quad \{\epsilon_t\} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

²Peter J. Brockwell et Richard A. Davis : Time Series : Theory and Methods. Springer-2009-

D'après le théorème (1.5.1) ce processus est stationnaire si $|\phi| < 1$

Dans la pratique le test de la racine unitaire est souvent utilisé pour savoir si une série est stationnaire. En effet, ce test permet de vérifier que toutes les racines du polynome caractéristique sont à l'intérieur du cercle unité.

1.4.3 processus moyenne mobile (moving average process)

C'est Eugen Slutsky qui, en 1927, [2], a introduit pour la première fois les processus moyenne mobile. La définition suivante présente ce processus.

Définition 1.4.1 ⁽³⁾ *On dit que la suite : $\{Y_t : t \geq 0\}$ est un processus moyenne mobile d'ordre q ($q > 0$) si celui-ci peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$Y_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

ou encore

$$Y_t = \sum_{k=1}^q \theta_k \epsilon_{t-k} + \epsilon_t, \text{ ou } \{\epsilon_t\} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

où les θ_k ($k = 1, 2, \dots, q$) sont les paramètres du modèle.

Dans ce cas, on note $\{Y_t\} \sim MA(q)$. [4]

Remarque 1.4.2 *Il est facile de voir que $\{Y_t\}$ est toujours un processus stationnaire sans tenir compte des valeurs de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$*

En effet

$$E(Y_t) = \mu_\epsilon(\theta_0^2 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_\epsilon^2(\theta_0^2 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)$$

Supposons que $E(\epsilon_t) = 0$. Alors $E(Y_t) = 0$

⁴E. Slutsky : The summation of random causes as the source of cyclic processes. Econometrica-1927-page(105-146)

car particulier

Un processus $MA(1)$ prend la forme suivante :

$$Y_t = \theta\epsilon_{t-1} + \epsilon_t, \quad \text{ou } \{\epsilon_t\} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

On peut utiliser l'opérateur de retard B pour écrire ce processus sous une autre forme. On aura donc un polynôme en B qui multipliera ϵ_t :

$$Y_t = \theta(B)\epsilon_t \text{ avec } \theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$$

1.4.4 Processus mixte : autoregressif-moyenne mobile :

Les modèles AR et MA peuvent être parfaits dans certains cas, mais il peut arriver que l'on ait besoin d'estimer un grand nombre de paramètres pour ajuster le modèle. Si l'on dispose de peu d'observations, ces estimations auront tendance à être peu précises. De plus, si un modèle contenant p paramètres convient pour la situation, il n'est pas bon de tenter d'ajuster un modèle qui en contiendra plus que p paramètres . Les modèles $ARMA$ consistent à avoir une partie autorégressive et une partie à moyenne mobile. Herman Wold [3] a montré que les processus $ARMA$ pouvaient être utilisés pour modéliser n'importe quelle série stationnaire pour autant que les ordres p et q soient bien choisis. Box et Jenkins [4] ont travaillé pour développer une méthodologie pour l'estimation du modèle d'une série chronologique.

Définition 1.4.2 *Un processus est dit $ARMA(p, q)$ s'il existe des suites réelles $\{\phi_k\}$ et θ_k telles que :*

$$Y_t - \sum_{k=1}^p \phi_k Y_{t-k} = \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} \quad \text{avec } \{\epsilon_t\} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

On peut aussi utiliser les polynômes $\phi(B)$ et $\theta(B)$ pour réécrire ce modèle sous la forme :

$$\phi(B)Y_t = \theta(B)\epsilon_t$$

avec $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_P B^P$ et $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_P B^P$

On note $\{Y_t\} \sim ARMA(p, q)$.

1.5 MÉTHODES D'EXTRACTION DE LA TENDANCE(STATIONARISATION)

Une serie Y_t est stationnaire sa moyenne, sa variance et ses autocorvarionce sont indépendants du temps. On distingue alors 2 type de non stationnaire selon que c'est la condition qui porte sur le moment d'ordre 1 qui n'est pas verifiée (non stationnarité deterministe) on c'est la condition qui porte sur le moment d'ordre 2 qui n'est pas verifiée (non stationnarité stochastique)

1.5.1 processus non stationnaire de type Déterministe(processus TS)

[⁵] Ce type de processus est constitué de deux composantes : la première est une fonction lineaire du temps et la seconde un processus stochastique ARMA stationnaire.

La non stationnarité de ce processus est causé par la tendance déterministe, il devient donc stationnaire en écartant cette tendance déterministe.

Soit la série chronologique Y_t :

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + X_t$$

où

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\epsilon_t \text{ et } \{\epsilon_t\} \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$$

α_0 et α_1 sont des paramètres fixes, B l'opérateur de retard, et les polynômes $\phi(B)$ et $\theta(B)$ remplissent les conditions de stationnarité.

Si par exemple $\phi(B) = \theta(B) = 1$ i.e $X_t = \epsilon_t$, on aura :

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (1.2)$$

Les moments du premier et du second ordre de ce processus sont :

⁵Nelson C.R. et C.I. Plosser (1982) "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Soies : Some Evidence and Implications." Journal of Monetary Economics page139-162

$$\begin{cases} E(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 t \\ V(Y_t) = \sigma_\epsilon^2 \\ cov(Y_t, Y_s) = 0 \end{cases}$$

Ce processus est non stationnaire du fait que son espérance dépend de t , bien que sa variance soit constante et des covariances soient nulles. Cette non stationnarité est causée par la composante $\alpha_0 + \alpha_1 t$ qui est la tendance déterministe du processus.

On dit que ce processus exprime une non stationnarité de nature déterministe.

l'écart par rapport à la tendance est

$$Y_t - (\alpha_0 + \alpha_1 t) = X_t$$

qui est un processus stationnaire.

Essayons maintenant de stationnariser la série par différenciation :

$$\Delta Y_t = (1 - B)Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \alpha_1 + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$$

La série différenciée suit un processus moyenne mobile d'ordre 1 (MA(1)) avec une racine unité .

1.5.2 processus non stationnaire de type Stochastique (processus DS)

Ce sont les processus dont les différences d'ordre 1 ou plus sont stationnaires, c.a.d. des processus qui deviennent stationnaires par différenciation. Nous aborderons seulement les processus DS de première ordre, i.e les processus ne contenant qu'une seule racine unité.

L'exemple le plus simple de processus DS est le processus de marche aléatoire (Random Walk) :

$$Y_t = Y_{t-1} + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma_\epsilon^2)$$

En effet, il s'agit d'un processus dont le polynôme caractéristique $g(z) = z - 1$ admet une racine unité.

Les moments du premier et du second ordre de ce processus sous la condition initiale Y_0 fixé sont :

$$\begin{cases} E(Y_t) = Y_0 & \forall t \\ V(Y_t) = t & \sigma_\epsilon^2 \\ cov(Y_t, Y_s) = \sigma_\epsilon^2 & \min(t, s) \end{cases}$$

L'espérance mathématique de ce processus est constante. Mais sa variance et ses covariances dépendent de t , la non stationnarité de ce processus est causée par une tendance stochastique qui se caractérise par la présence d'une racine unité.

les différences premières de ce processus :

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \epsilon_t$$

constituent un processus stationnaire.

La non stationnarité de cette classe de processus peut aussi provenir d'une tendance mixte : déterministe et stochastique. Comme dans le cas de marche aléatoire avec un paramètre constant (intercept) défini par :

$$Y_t = \alpha + Y_{t-1} + \epsilon_t$$

où α est le paramètre réel constant, ϵ_t est un processus purement aléatoire moyenne nulle et de variance σ_t^2 .

Par substitutions successives, on obtient :

$$Y_t = Y_0 + \alpha t + \sum_{i=1}^t \epsilon_i$$

donc

$$Y_t = Y_0 + \alpha t + u_t \quad u_t = \sum_{i=1}^t \epsilon_i$$

u_t est un processus de marche aléatoire sans intercept.

Les moments du premier et du second ordre de ce processus sous la condition initial Y_0 fixée sont :

$$\begin{cases} E(Y_t) = Y_0 + \alpha t & \forall t \\ V(Y_t) = t & \sigma_\epsilon^2 \\ cov(Y_t, Y_s) = \sigma_\epsilon^2 & \min(t, s) \end{cases}$$

L'espérance mathématique ainsi que la variance et les covariances dépendent de t .

La non stationnarité de ce processus est de nature mixte : stochastique et déterministe.

Les différences premières :

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = u_t - u_{t-1} = \epsilon_t$$

Constituent un processus stationnaire. [6]

⁶Nelson C.R. et C.I. Plosser "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series : Some Evidence and Implications." Journal of Monetary Economics-1982-page139-162

MÉTHODOLOGIES DE TEST DE LA STATIONNARITÉ

2.1 INTRODUCTION

On a vu dans le chapitre précédent l'intérêt des tests de la stationnarité encore appelés tests de la racine unité comme outil de détection de la non stationnarité .

Dans ce chapitre nous proposons un review des différents tests de la racine unité.

Nous considérons la série temporelle $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de la forme générale suivante :

$$X_t = d_t + Y_t$$

avec d_t la tendance déterministe et Y_t la composante aléatoire .

La tendance déterministe peut avoir trois formes :

1. $d_t = 0$, la série n'admet pas de tendance purement déterministe , ce qui correspond au modèle sans intercept (moyenne nulle).

2. $d_t = \beta$, La tendance déterministe se résume à une constante, ce qui correspond au modèle avec intercept (moyenne non nulle).

3. $d_t = \beta + \alpha t$, la tendance est une fonction linéaire du temps.

La composante aléatoire est un processus $ARMA(p, q)$ inversible :

Si $q = 0$, Y_t est un processus autorégressif pur $AR(p)$

Si $p = 0$, Y_t est un processus moyenne mobile $MA(q)$

Si $p = q = 0$, Y_t est un bruit blanc.

2.2 TESTS AVEC H_0 LA NON STATIONNARITÉ

dans la littérature, il y'a beaucoup de tests qui traitent la non stationnarité dans l'hypothèse nulle. Nous optons dans ce travail d' aborder le test de Dickey-Fuller (DF) et le test de Dickey Feller augmenté (ADF).

La composante déterministe suit une tendance linéaire :

2.2.1 Test de Dickey-Fuller :

[¹] Un test de non stationnarité largement utilisé et répandu est le test de racine unitaire proposé par Dickey et Fuller en 1979 L'hypothèse nulle du test est la présence de racine unitaire , soit la non stationnarité de type stochastique . Le test consiste à tester :

$$H_0 : \phi = 1$$

contre

$$H_1 : \phi < 1$$

¹Dickey, D.A. et W.A. Fuller (1979) " Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root." Journal of the American Statistical Association, p 427-431.

dans le modèle

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$$

avec ϵ_t bruit blanc $N(0, \sigma^2)$. L'hypothèse alternative correspond au cas d'un modèle $AR(1)$ stationnaire.

Pour mener ce test, on calcule la statistique de Student, mais attention, cette statistique ne suit plus sous l'hypothèse nulle une loi de Student, puisque, sous l'hypothèse nulle, le processus est non stationnaire de type DS et les propriétés asymptotiques ne sont plus standards. Ainsi, la différence avec un test standard repose sur les valeurs critiques à utiliser pour conclure sur le test. On ne peut plus utiliser 1.64 comme valeur critique pour un test unilatéral à 5. Il faut utiliser les valeurs critiques, qui ont été retabulées par Dickey et Fuller.

2.2.2 test de Dickey-Fuller augmenté :

[²] Dickey et Fuller (1981) étendent les tests de DF (1979) à des séries chronologiques suivant un processus autorégressifs d'ordre p , $p \geq 2$. Ces auteurs traitent le test pour les modèles suivants :

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \alpha + \beta t + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \alpha + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t \quad (2.2)$$

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t \quad (2.3)$$

avec p le nombre de retards Le test de racine unitaire consiste alors à tester :

$$H_0 : \rho = 0$$

²Dickey, D.A. et W.A. Fuller (1981) " Likelihood Ratio Tests for Autoregressive Time Series with a Unit Root. " *Econometrica*, p1057-1072

contre

$$H_0 : \rho < 0$$

dans les modèles (2.1), (2.2) et (2.3) :

- Dans le modèle (2.1) :

ΔY_t est $I(0) + T$ (il a une tendance déterministe et l'écart à cette tendance déterministe suit un modèle $AR(p)$ stationnaire) sous H_0 , c'est-à-dire que Y_t est $I(1) + T^2$.

Sous H_1 , Y_t a une tendance déterministe et l'écart à cette tendance déterministe suit un modèle AR stationnaire, on note $I(0) + T$, soit un processus TS.

- Dans le modèle (2.2) :

ΔY_t est $I(0) + C$ (il suit un modèle $AR(p)$ stationnaire non centré) sous H_0 , c'est-à-dire que Y_t est $I(1) + T$

Sous H_1 , Y_t suit un modèle AR stationnaire non centré, on note $I(0) + C$.

- Dans le modèle (2.3) :

ΔY_t est $I(0)$ (il suit un modèle $AR(p)$ stationnaire centré) sous H_0 , c'est-à-dire que Y_t est $I(1)$. Sous H_1 , Y_t suit un modèle AR stationnaire, on note $Y_t \sim I(0)$.

Les valeurs critiques du test de racine unitaire dépendent de la présence ou non d'une constante ou d'une tendance. Ainsi, il faut comparer la statistique de student à la valeur critique pertinente. Soit, au seuil de 0.05, on doit considérer comme valeur critique, non pas -1.64 comme dans le cas standard, mais -3.45 dans le modèle (2.3), -2.89 dans le modèle (2.2) et -1.95 dans le modèle (2.1).

Une stratégie de test de racine unitaire

(i) On choisit le nombre de retards p à introduire dans la régression : on peut, pour cela, choisir l'ordre p de l' $AR(p)$ pour la variable $(1 - L)Y_t$, sur la base des autocorrélations partielles de $(1 - L)Y_t$ et sur la base de la significativité du dernier retard de l' AR , introduit dans la régression,

tout en vérifiant que le résidu est bien un bruit blanc.

(ii) On teste la racine unitaire $H_0 : \rho = 0$ dans le modèle le plus général (2.3) :

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \alpha + \beta t + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$$

- Si on accepte H_0 (la racine unitaire), alors on va tester :

$$H_{01} : \rho = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0$$

par un test de Fisher (dont les valeurs critiques ne sont pas standards) afin de s'assurer que le test de racine unitaire a été mené dans le bon modèle.

- * Si on accepte H_{01} , alors on passe à l'étape (iii)
- * Si on rejette H_{01} , on conclut que le processus est $I(1) + T^2$ (tout en sachant que cette conclusion est peu crédible économiquement, et qu'elle cache peut être le cas d'une tendance déterministe plus complexe que linéaire)
- Si on rejette H_0 (rejet de la racine unitaire), alors le processus est stationnaire, mais on doit aller tester la pertinence d'avoir testé la racine unitaire dans un modèle avec tendance en testant la significativité de la tendance dans le modèle suivant :

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \alpha + \beta t + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$$

- * Si on accepte $H_0 : \beta = 0$, alors il est recommandé de passer à l'étape (iii)
- * Si on rejette $H_0 : \beta = 0$, on conclut que le processus est $I(0) + T$
- (iii) On teste la racine unitaire $H_0 : \rho = 0$ dans le modèle (2.2) :

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \alpha + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$$

- Si on accepte H_0 (la racine unitaire), alors on va tester :

$$H_{02} : \rho = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0$$

par un test de Fisher (dont les valeurs critiques ne sont pas tandard) afin de s'assurer que le test de racine unitaire a été mené dans le bon modèle.

- * Si on accepte H_{02} , alors on passe à l'étape (iv)
- * Si on rejette H_{02} , on conclut que le processus est $I(1) + T$ (marche aléatoire avec dérive).
- Si on rejette H_0 (rejet de la racine unitaire), alors le processus est stationnaire, mais on doit aller tester la pertinence d'avoir tester la racine unitaire dans un modèle avec constante en testant la significativité de la constante dans le modèle suivant :

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \alpha + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$$

- * Si on accepte $H_0 : \alpha = 0$, alors il est recommandé de passer à l'étape (iv)
- * Si on rejette $H_0 : \alpha = 0$, on conclut que le processus est $I(0) + C$
- (iv) On teste la racine unitaire $H_0 : \rho = 0$ dans le modèle (2.3) :

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$$

- Si on accepte H_0 (la racine unitaire), alors le processus est $I(1)$
 - Si on rejette H_0 (rejet de la racine unitaire), alors le processus est stationnaire centré $I(0)$
-

2.3 TESTS AVEC H_0 LA STATIONNARITÉ

2.3.1 Test KPSS

Ce test de stationnarité a été proposé par Kwiatkowski, Phillips, Schmidt et Shin (1992). Ce test, KPSS, du multiplicateur de Lagrange utilise la stationnarité comme hypothèse nulle. Plus spécifiquement, il s'agit de tester l'hypothèse que la variance de la composante non stationnaire d'une série est nulle.

Les équations

$$\begin{cases} Y_t = w_t + \lambda t + u_t & u_t \sim i.i.d.(0, \sigma_u^2) \\ w_t = w_{t-1} + v_t & v_t \sim i.i.d.(0, \sigma_v^2) \end{cases}$$

On test l'hypothèse nulle $\sigma_v^2 = 0$, sous l'hypothèse de stationnarité des u_t , assure la stationnarité de Y_t autour d'une tendance (ou autour d'une constante s'il est possible d'établir que λ est non significativement différent de 0).

La statistique du test

$$LM_{KPSS} = \frac{1}{\hat{\sigma}_u^2} \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{i=1}^t \hat{u}_i \right\}^2 = \frac{1}{\sigma_u} \text{trace} \left\{ \text{diag} \left(\hat{u}_1^2, (\hat{u}_1 + \hat{u}_2)^2, \dots, \left(\sum_{i=1}^T \hat{u}_i \right)^2 \right) \right\}$$

Les auteurs ont aussi proposé une correction non paramétrique de l'éventuelle autocorrélation des termes d'erreur, analogue à celle introduite dans Phillips et Perron (1988).

APPLICATION DU TEST DE DICKEY-FULLER AUGMENTÉ AU DONNÉES "ONAX"

Nous nous intéressons dans ce chapitre à appliquer la méthode de Dickey-Fuller augmentée pour le test de la racine unitaire pour des données réelles notées (ONAX) qui présentent la quantité d'eau usée en m^3 reçue par la centrale de l'épurateur de Sidi-Khouiled . Les données considérées sont journalières, et la période retenue pour l'étude est du 01/02/2018 au 10/04/2018.

L'objectif étant de tester la stationnarité de notre série.

puis de la stationnariser dans le cas où H_0 est accepté . Ceci dans le but de la préparer à une éventuelle prévision

3.1 PRÉSENTATION DES DONNÉES UTILISÉES

Le tableau indique les débits journaliers entrant à la station d'épuration de Sidi Khouiled du

01 – 02 – 2018 *au* 10 – 04 – 2018

| Description | Valeur Total | Valeur Journaliere | Unités | Jour |
|----------------------------------|--------------|-----------------------|--------|---------------------|
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2528067,00 | 1 030,00 | m3 | 01-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2529097,00 | 1 030,00 | m3 | 02-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2530265,00 | 1 168,00 | m3 | 03-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2531433,00 | 1 168,00 | m3 | 04-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2532601,00 | 1 168,00 | m3 | 05-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2533769,00 | 1 168,00 | m3 | 06-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2534937,00 | 1 168,00 | m3 | 07-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2536105,00 | 1 168,00 | m3 | 08-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2537273,50 | 1 126,50 | m3 | 09-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2538358,00 | 1 126,50 | m3 | 10-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2539547,00 | 1 189,00 | m3 | 11-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2540395,00 | 848,00 | m3 | 12-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2540716,00 | 321,00 | m3 | 13-02-2018 00:00:01 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2541017,00 | 301,00 | m3 | 14-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2541326,00 | 309,00 | m3 | 15-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2541721,00 | 395,00 | m3 | 16-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2542606,00 | 885,00 | m3 | 17-02-2018 00:00:00 |

| | | | | |
|----------------------------------|------------|----------|----|---------------------|
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2543910,00 | 1 304,00 | m3 | 18-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2544911,00 | 1 001,00 | m3 | 19-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2546246,00 | 1 335,00 | m3 | 20-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2547581,00 | 1 335,00 | m3 | 21-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2548916,00 | 1 335,00 | m3 | 22-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2550398,00 | 1 482,00 | m3 | 23-02-2018 00:00:01 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2551849,50 | 1 451,50 | m3 | 24-02-2018 00:00:01 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2553301,00 | 1 451,50 | m3 | 25-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2554650,00 | 1 349,00 | m3 | 26-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2555974,67 | 1 324,67 | m3 | 27-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2557299,33 | 1 324,67 | m3 | 28-02-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2558624,00 | 1 324,67 | m3 | 01-03-2018 00:00:01 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2560154,00 | 1 530,00 | m3 | 02-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2561753,00 | 1 599,00 | m3 | 03-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2563255,00 | 1 502,00 | m3 | 04-03-2018 00:00:01 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2564714,00 | 1 459,00 | m3 | 05-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2566132,00 | 1 418,00 | m3 | 06-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2567576,00 | 1 444,00 | m3 | 07-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2569087,00 | 1 511,00 | m3 | 08-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2570681,00 | 1 594,00 | m3 | 09-03-2018 00:00:01 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2572188,00 | 1 507,00 | m3 | 10-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2573685,00 | 1 497,00 | m3 | 11-03-2018 00:00:01 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2575030,00 | 1 345,00 | m3 | 12-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2576399,00 | 1 369,00 | m3 | 13-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2577845,00 | 1 446,00 | m3 | 14-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2579306,00 | 1 461,00 | m3 | 15-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2580695,00 | 1 389,00 | m3 | 16-03-2018 00:00:00 |

| | | | | |
|----------------------------------|------------|----------|----|---------------------|
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2582084,00 | 1 389,00 | m3 | 17-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2583473,00 | 1 389,00 | m3 | 18-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2584882,00 | 1 409,00 | m3 | 19-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2586401,00 | 1 519,00 | m3 | 20-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2587770,00 | 1 369,00 | m3 | 21-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2589123,00 | 1 353,00 | m3 | 22-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2590545,00 | 1 422,00 | m3 | 23-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2591969,00 | 1 424,00 | m3 | 24-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2593437,63 | 1 468,63 | m3 | 25-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2594906,25 | 1 468,63 | m3 | 26-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2596374,88 | 1 468,63 | m3 | 27-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2597843,50 | 1 468,63 | m3 | 28-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2599312,13 | 1 468,63 | m3 | 29-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2600780,75 | 1 468,63 | m3 | 30-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2602249,38 | 1 468,63 | m3 | 31-03-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2603718,00 | 1 468,63 | m3 | 01-04-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2605294,00 | 1 576,00 | m3 | 02-04-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2606870,00 | 1 576,00 | m3 | 03-04-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2608456,00 | 1 586,00 | m3 | 04-04-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2610025,00 | 1 569,00 | m3 | 05-04-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2611644,00 | 1 619,00 | m3 | 06-04-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2613332,00 | 1 688,00 | m3 | 07-04-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2614953,00 | 1 621,00 | m3 | 08-04-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2616574,00 | 1 621,00 | m3 | 09-04-2018 00:00:00 |
| Débitmètre Total Volume par Jour | 2617992,00 | 1 418,00 | m3 | 10-04-2018 00:00:00 |

Table 1 : Quantités d'eau reçues par.

3.2 ÉTUDE DE LA STATIONARITÉ DE LA SÉRIÉ :

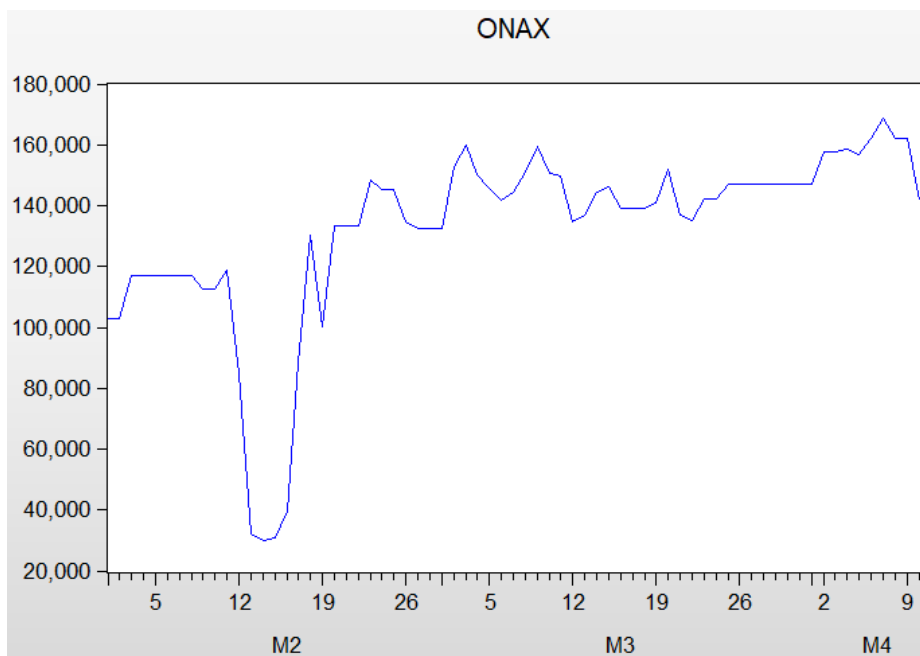


Figure 1 : Représentation graphique de la série

L'examen visuel de ce graphique permet de constater le fait que cette série est non stationnaire .
ou utilise le test de la racine unitaire de Dicky-Fuller augmentée par confirmer la non stationnarité.

3.2.1 le test de Dickey-Fuller augmentée

Le tableau suivant présente :Test (ADF)

Null Hypothesis: ONAX has a unit root

Exogenous: Constant, Linear Trend

Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -2.427923 | 0.3623 |
| Test critical values: | | |
| 1% level | -4.098741 | |
| 5% level | -3.477275 | |
| 10% level | -3.166190 | |

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(ONAX)

Method: Least Squares

Date: 06/05/18 Time: 00:18

Sample (adjusted): 2/02/2018 4/10/2018

Included observations: 68 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---------------------|-------------|-----------------------|-------------|----------|
| ONAX(-1) | -0.173704 | 0.071544 | -2.427923 | 0.0180 |
| C | 18255.24 | 7684.068 | 2.375726 | 0.0205 |
| @TREND("2/01/2018") | 150.3568 | 110.3987 | 1.361944 | 0.1779 |
| R-squared | 0.084287 | Mean dependent var | | 570.5882 |
| Adjusted R-squared | 0.056111 | S.D. dependent var | | 13921.33 |
| S.E. of regression | 13525.12 | Akaike info criterion | | 21.90560 |
| Sum squared resid | 1.19E+10 | Schwarz criterion | | 22.00352 |
| Log likelihood | -741.7904 | Hannan-Quinn criter. | | 21.94440 |
| F-statistic | 2.991475 | Durbin-Watson stat | | 1.560545 |
| Prob(F-statistic) | 0.057171 | | | |

D'après le tableau on observe : $Proba(TREND) > 0.05$ donc on accepte H_0

Alors on passe à l'étape suivante :

ESTIMATION DU MODÈLE (2) :

Null Hypothesis: ONAX has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -2.018731 | 0.2783 |
| Test critical values: | | |
| 1% level | -3.530030 | |
| 5% level | -2.904848 | |
| 10% level | -2.589907 | |

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(ONAX)
Method: Least Squares
Date: 06/05/18 Time: 00:22
Sample (adjusted): 2/02/2018 4/10/2018
Included observations: 68 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|----------|
| ONAX(-1) | -0.110027 | 0.054503 | -2.018731 | 0.0476 |
| C | 15058.07 | 7363.934 | 2.044840 | 0.0449 |
| R-squared | 0.058156 | Mean dependent var | | 570.5882 |
| Adjusted R-squared | 0.043885 | S.D. dependent var | | 13921.33 |
| S.E. of regression | 13612.43 | Akaike info criterion | | 21.90432 |
| Sum squared resid | 1.22E+10 | Schwarz criterion | | 21.96960 |
| Log likelihood | -742.7470 | Hannan-Quinn criter. | | 21.93019 |
| F-statistic | 4.075274 | Durbin-Watson stat | | 1.610175 |
| Prob(F-statistic) | 0.047581 | | | |

D'après les données de tableau on observe : $0.04 < 0.05$ on concluons que la constante n'est pas nulle

$\alpha < Prob = 0.27$ donc on acceptée H_0 alor il y a une racine unitaire et la série non stationnaire.

3.3 ÉLIMINATION DE NON STATIONNARITÉ DE LA SÉRIE :

pour éliminer la non stationnarité de la série originale on fait la différence de premier degré on résulte l'équation (*DONAX*) suivante

$$DONAX = ONAX - ONAX(-1)$$

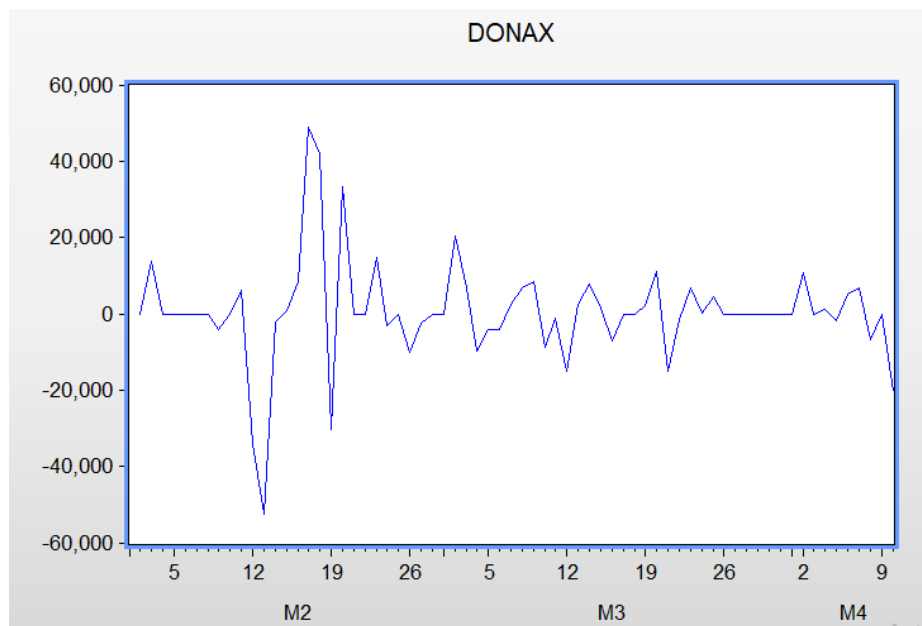


Figure 4 : Représentation graphique de la série

D'après la représentation graphique de la série modifiée (*DONAX*) on observe qu'elle est parallèle à l'axe d'abscisses, elle est centrée sur 0, sans augmentation en fonction du temps, c'est-à-dire absence de la tendance de la série modifiée.

TESTE E LA RACINE UNITAIRE DE LA SÉRIE MODIFIER

Null Hypothesis: DONAX has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -6.798077 | 0.0000 |
| Test critical values: | | |
| 1% level | -4.100935 | |
| 5% level | -3.478305 | |
| 10% level | -3.166788 | |

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DONAX)
 Method: Least Squares
 Date: 06/05/18 Time: 00:30
 Sample (adjusted): 2/03/2018 4/10/2018
 Included observations: 67 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---------------------|-------------|------------|-------------|--------|
| DONAX(-1) | -0.855197 | 0.125800 | -6.798077 | 0.0000 |
| C | 1398.307 | 3560.393 | 0.392740 | 0.6958 |
| @TREND("2/01/2018") | -27.05519 | 89.00269 | -0.303982 | 0.7621 |

| | | | |
|--------------------|-----------|-----------------------|-----------|
| R-squared | 0.419873 | Mean dependent var | -302.9851 |
| Adjusted R-squared | 0.401744 | S.D. dependent var | 18215.05 |
| S.E. of regression | 14088.80 | Akaike info criterion | 21.98789 |
| Sum squared resid | 1.27E+10 | Schwarz criterion | 22.08661 |
| Log likelihood | -733.5943 | Hannan-Quinn criter. | 22.02695 |
| F-statistic | 23.16035 | Durbin-Watson stat | 1.939967 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | |

Figure 5 :estimation du modèle 03 de test Dickey-Fuller pour la série (*DONAX*)

D'après le tableau on observe : $Proba(TREND) > 0.05$ donc on accepte H_0
 alors on passe à l'étape suivante :

ESTIMATION DU MODÈLE (2) :

Null Hypothesis: DONAX has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -6.847110 | 0.0000 |
| Test critical values: | | |
| 1% level | -3.531592 | |
| 5% level | -2.905519 | |
| 10% level | -2.590262 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DONAX)
 Method: Least Squares
 Date: 06/05/18 Time: 00:32
 Sample (adjusted): 2/03/2018 4/10/2018
 Included observations: 67 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|-----------|-------------|------------|-------------|--------|
| DONAX(-1) | -0.855326 | 0.124918 | -6.847110 | 0.0000 |
| C | 451.4887 | 1712.710 | 0.263611 | 0.7929 |

| | | | |
|--------------------|-----------|-----------------------|-----------|
| R-squared | 0.419036 | Mean dependent var | -302.9851 |
| Adjusted R-squared | 0.410098 | S.D. dependent var | 18215.05 |
| S.E. of regression | 13990.09 | Akaike info criterion | 21.95948 |
| Sum squared resid | 1.27E+10 | Schwarz criterion | 22.02529 |
| Log likelihood | -733.6426 | Hannan-Quinn criter. | 21.98552 |
| F-statistic | 46.88291 | Durbin-Watson stat | 1.937075 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | |

Figure 5 :estimation du modèle 02 de test Dickey-Fuller pour la série (*DONAX*)

D'après les données de tableau on observe : $0.79 > 0.05$ on conclut que la constante est nulle alors on passe à l'étape suivante :

ESTIMATION DU MODÈLE (01) :

Null Hypothesis: DONAX has a unit root
 Exogenous: None
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -6.893094 | 0.0000 |
| Test critical values: | | |
| 1% level | -2.599934 | |
| 5% level | -1.945745 | |
| 10% level | -1.613633 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DONAX)
 Method: Least Squares
 Date: 06/05/18 Time: 08:16
 Sample (adjusted): 2/03/2018 4/10/2018
 Included observations: 67 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| DONAX(-1) | -0.853207 | 0.123777 | -6.893094 | 0.0000 |
| R-squared | 0.418414 | Mean dependent var | | -302.9851 |
| Adjusted R-squared | 0.418414 | S.D. dependent var | | 18215.05 |
| S.E. of regression | 13891.12 | Akaike info criterion | | 21.93070 |
| Sum squared resid | 1.27E+10 | Schwarz criterion | | 21.96361 |
| Log likelihood | -733.6784 | Hannan-Quinn criter. | | 21.94372 |
| Durbin-Watson stat | 1.938900 | | | |

Figure 5 :estimation du modèle (01) de test Dickey-Fuller pour la série (*DONAX*)

D'après les données de tableau on observe : $0.00 < 0.05$ donc on rejette l'hypothèse H_0 s'il y a pas de racine unitaire alors la série est stationnaire.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail nous avons présenté les tests de stationnarité des séries chronologiques encore appelés tests de la racine unité. Nous avons fait une application du test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF) sur des données réelles, Pour cela nous avons fait recours au logiciel "Eviews 9", Nous avons établi la non stationnarité de notre série. Nous avons par la suite procédé à la stationnarisation de notre série toujours en utilisant le "Eviews 9".

De ce fait nous avons préparé notre série pour des études plus poussées. En d'autres termes notre série est prête pour faire l'objet d'une étude de modélisation et(ou) de prévision.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Peter J. Brockwell et Richard A. Davis : Time Series : Theory and Methods. Springer, 2009.
- [2] E. Slutsky : The summation of random causes as the source of cyclic processes. *Econometrica*, 5 :105–146, 1927.
- [3] H. Wold : A study in the Analysis of Stationary Time Series. Almqvist and Wiksell, 1938.
- [4] G. Box et G. Jenkins : Time series analysis : Forecasting and Control. Holden Day, 1970.
- [5] Dickey, D.A. (1984) " Powers of Unit Root tests." in Proceedings of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association, p. 489-493.
- [6] Dickey, D.A. et W.A. Fuller (1981) " Likelihood Ratio Tests for Autoregressive Time Series with a Unit Root. " *Econometrica*, 49, p. 1057-1072.
- [7] Dickey, D.A., W.R. Bell et R.B. Miller (1986) "Unit Roots in Time Series Models : Tests and Implications." *The American Statistician*, 40, p. 12-26.
- [8] Phillips, P.C.B. et P. Perron (1988) " Testing for a Unit Root in Time Series Regression." *Biometrika*, 75, p.347-353.
- [9] Dickey, D.A. (1976) Estimation and Hypothesis Testing for Non Stationary Time Series. Ph.D. Thesis, Iowa State University, Ames.

-
- [10] Dickey, D.A. et W.A. Fuller (1979) " Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root." *Journal of the American Statistical Association*, 74, p. 427-431.
- [11] Fuller W.A. (1976) *Time Series*. John Wiley, New-York.
- [12] Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., and Shin, Y. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root : How sure are we that economic time series have a unit root *J. Econometrics*. 54 (1992), 159–178.
- [13] M. A. Arcones : The large deviation principle for stochastic processes I. *Theor. Probab. Appl.*, 47 :567–583, 2003.
- [14] M. A. Arcones : The large deviation principle for stochastic processes II. *Theor. Probab. Appl.*, 48 :19–44, 2003.
- [15] J. G. MacKinnon, "Numerical Distribution Functions for Unit Root and Cointegration Tests", *J.A.E.*, (1996)
- [16] Phillips, P. C. B. Time series regression with a unit root. *Econometrica*. 55 (1987), 277–302.
- [17] Phillips, P.C.B. (1987) "Time Series Regression with a Unit Root." *Econometrica*, 55, p.277-301
- [18] U. Yule : On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 226, 1927.
- [19] A. Schuster : On the Periodicity of Sun-spots. *Royal Society of London*, 1906.
- [20] Nelson C.R. et C.I. Plosser (1982) "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Soies : Some Evidence and Implications." *Journal of Monetary Economics*, 10, p.139-162.
-