جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

من إعداد الطالب : سايحي بلال

الموضوع

الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

تناقش يوم 2018/06/12 من طرف لجنة المناقشة :

باديجة سليم	الرتبة أستاذ محاضر "ب"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
السعيد محمد سعيد	الرتبة أستاذ محاضر "أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	ممتحنا
عمارة قرفي	الرتبة أستاذ محاضر"أ"	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

بسم الله الرحمن الرحيم

شكر و تقدير

"كن عالما فإن لم تستطع فكن متعلما فإن لم تستطع

فأحب العلماء فإن لم تستطع فلا تبغضهم"

بعد رحلة بحث و جهد و اجتهاد تكللت بإنجاز هذا البحث

نحمد الله عز وجل

على نعمه التي من بها عليا فهو العلي القدير

كما لا يسعني إلا أن نخص بأسمى عبارات الشكر و التقدير

للدكتور "عمارة قرفي" لما قدمه لي من جهد و نصح و معرفة لانجاز هذا البحث

كما أتقدم بالشكر الجزيل لكل أساتذتي الكرام الذين أشرفوا على تكوين دفعة

الرياضيات بكل تخصصاتها

و الأستاذة القائمين على عمادة و إدارة كلية الرياضيات

بجامعة قاصدي مرباح بورقلة

كما لا أنسى أن نأقدم بأرقى و أثمن عبارات الشكر و العرفان

إلى كل الزملاء والزميلات الذين كانوا رفقاء

لي في هذا الدرب و بالأخص

"هالم أسامة الدين"

الإهداء

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار

إلى من علمني العطاء بدون انتظار

إلى من أحمل أسمه بكل افتخار

والدي العزيز

إلى ملاكي في الحياة إلى معنى الحب و الحنان و إلى بسمة الحياة وسر الوجود

إلى من كان دعائها سر نجاحي

أمي الحبيبة

الى من بهم أكبر وعليهم أعتمد الى من بوجودهم أكتسب قوة ومحبة لاحدود لها

اخوتي وأخواتي

إلى من تحلو بالإخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء إلى ينابيع الصدق الصافي الى من برفقتهم سرت في دروب الحياة الحلوة والحزينة إلى من كانوا معي على طريق النجاح والخير

أصدقائي

المقدمة

يمكن القول دون تجاوز أو مبالغة أن المعادلات التفاضلية
تحتل المكانة المرموقة في كل فروع العلوم الهندسية والفيزيائية
حيث أن أغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات
مسألة فيزيائية أو هندسية تظهر على صورة معادلات تفاضلية
ولفهم هذه المسألة لا بد من حل هذه المعادلة التفاضلية أوعلى الأقل
معرفة كثير من خصائص هذا الحل وأن أستعصى الحصول عليه صراحة.
الحصول على الحل ليست دوما بالمسألة اليسيرة بل أن كثيرا من المعادلات التفاضلية
غير قابة للحل.

لقد أستحوذ هذا الامر على اهتمام الرياضيين منذ بداية علم التفاضل في القرن السابع عشر وحتى أيامنا
هذه سواء من ناحية دراسة وجود الحل أو من ناحية خصائصه وطبيعته أو من ناحية الحصول
عليه ، ولم يقف الرياضي طويلا أمام المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها على صورة
مغلقة بل تجاوز ذلك الى حلول أخرى .

عرضنا في الفصل الأول من هذا البحث كيفية تكوين معادلة تفاضلية وأهم التعريفات والمفاهيم
و ركزنا على المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التي هي محور الدراسة
,أما في الفصل الثاني فتطرقنا الى طريقة حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية
باستعمال سلسلة قوى (الحلول التحليلية)
و بالنسبة للفصل الثالث والأخير فهو دراسة لحالة خاصة
(معادلة ليجندر).

الفهـــــــــرس

الفهـــــــرس

الفصل الأول

المعادلات التفاضلية

1.1 عموميات حول المعادلات التفاضلية

1.1.1 المعادلة التفاضلية:

تعريف 1 : المعادلة التفاضلية هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن y وواحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية ... ,y', y'' أي أنها على الصورة العامة :

$$F(x, y, y', y'', ...) = 0 \tag{1.1}$$

المعادلة (1.1) تسمى معادلة تفاضلية عادية أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن على سبيل المثالx ,yمستقلان وكان $z(x, y)$ متغير تابع قابل للإشتقاق بالنسبة لكل من x و y جزئيا فإنه في هذه الحالة تسمى المعادلة المشتملة على المتغيرات المستقلة و المتغير التابع و مشتقاته الجزئية بالمعادلة التفاضلية الجزئية و هي على الصورة:

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, ...) = 0 \tag{2.1}$$

مثال 1 :
لتكن المعادلات التفاضلية التالية:

1. $(y''')^4 + xy' - 3y = x^2$

2. $(y')^2 + 2xy = e^{3x}$

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2x$

نلاحظ أن المعادلتين (1)و(2) كلا منهما معادلة تفاضلية عادية بينما المعادلة (3) معادلة تفاضلية جزئية .

تعريف 2 :

1. رتبة المعادلة: هي رتبة أعلى معامل تفاضلي في المعادلة.
2. درجة المعادلة :هي درجة (قوة) أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوة الكسرية.

مثال 2 : من خلال المعادلات التفاضلية الموجودة في (المثال 1) نجد أن المعادلة (1) من الرتبة الثالثة و الدرجة الرابعة ، بينما المعادلة (2) فهي من الرتبة الأولى و الدرجة الثانية، أما المعادلة (3) فهي تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية و الدرجة الأولى .

تعريف 3 : تسمى الدالة $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية (1.1):

$$F(x, y, y', y'', ...) = 0$$

إذا كانت:

1. قابلة للإشتقاق n مرة.
2. تحقق المعادلة التفاضلية أي $F(x, y(x), y'(x), ...) = 0$

2.1.1 الحل العام والحل الخاص:

الحل العام لمعادلة تفاضلية من المرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية .
أما الحل الخاص فهو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية لا يشمل على أي ثوابت إختيارية وقد نحصل عليه أحيانا بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة .

3.1.1 تكوين المعادلة التفاضلية (حذف الثوابت):

إذا أعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من المرتبة n نجد أن ذلك الحل يعتمد على n من الثوابت الإختيارية ويكون على الصورة :

$$F(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \tag{3.1}$$

حيث $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت إختيارية , وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى نجريn من المشتقات للمعادة (3.1) , فيكون لدينا $n + 1$ من المعادلات عبارة عن المعادلة (3.1) بالإضافة إلى n معادلة من العمليات التفاضلية , وبذلك يمكن حذف الثوابت الإختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة.

4.1.1 الشروط الإبتدائية و الشروط الحدية:

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية تعطى بعض الشروط التي يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية , وهذه الشروط هي التي تمكننا من تحديد الثوابت الإختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام.
ولو كان الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية (مثلا) يحتوي على ثابتين اختياريين , لذا يستلزم لتحديد الثابتين وجود شرطين إضافيين للمعادلة , وهذان الشرطان يأخذان صورا مختلفة ومنها :

1. إذا أعطيا هذان الشرطان عند نفس النقطة x_0

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الإبتدائية عند x_0 , وتسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الإبتدائية بمسألة القيم الإبتدائية .

2. إذا أعطيا الشرطان عند نقطتين مختلفتين x_1, x_2

$$y(x_1) = y_1 \quad y(x_2) = y_2$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الحدية وتسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية مسألة القيم الحدية .

5.1.1 المعادلة التفاضلية الخطية:

هي المعادلة الخطية في المتغير التابع ومشتقاته جميعا أي أن كل منها مرفوع للأس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركة فيما بينها ولا يهم أن تكون معاملاتها ثوابت أو دوال في x.
الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n هي :

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \tag{4.1}$$

أو

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x)y^i = q(x) \tag{5.1}$$

ملاحظة 1 : أذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فأنها معادلة تفاضلية لا خطية .

ملاحظة 2 : لا تؤثر اللاخطية على مرتبة المعادلة التفاضلية .

6.1.1 المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة :

إذا إنعدمت الدالة $q(x)$ من المعادلة التفاضلية الخطية (5.1) من أجل جميع قيم x قيل أنها معادلة تفاضلية خطية متجانسة وتكتب على الصورة التالية :

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x)y^i = 0 \tag{6.1}$$

ملاحظة 3 : اذا لم تكن المعادلة التفاضلية الخطية متجانسة قيل عنها غير متجانسة او كاملة .

7.1.1 طرق أيجاد حل المعادلة التفاضلية :

لقد أصبحت طرق إيجاد حلول عدد من المعادلات التفاضلية معروفة وشائعة ولا يزال هناك الكثير من المعادلات التي طرق حلها غير معروفة حتى الان ,أما المعادلات التي أصبحت طرق حلها معروفه فهي تلك المعادلات الي نستطيع إيجاد حلها (بدقة تامة) وكتابتها بدلالة التوابع المعروفة لدينا والمسماة بالتوابع الشهيرة , وهذه التوابع كما نعلم هي كثيرات الحدود والتوابع الأسية والتوابع المثلثية وكل تابع يعطى بدلالة هذه التوابع أو تركيباتها بعد أجراء بعض العمليات الحسابية عليها من جمع أو ضرب أو .... إلخ , ولكن هناك عدد كبير من التوابع التي لا يمكن التعبير عنها بدلالة التوابع الشهيرة لذلك تدعى بالتوابع الخاصة , وهذه التوابع معرفة بطرق مختلفة فمنها ما عرف من علاقة تكاملية ومنها ما عرف من علاقة تفاضلية ... الخ .
ويمكن القول أن المعادلات التفاضلية الي يعبر عن حلولها بالتوابع الشهيرة والخاصة هي معادلات ذات طرق معلومة , علما أن هناك الكثير من المعادلات التي لا تحل بذات الطرق , لذلك أوجدت طرق اخرى (وهي طرق عامة) تطبق عليها وعلى جميع المعادلات ولكنها طرق تقريبية ونذكر منها طرق الحل بواسطة سلاسل قوى المتحول أو سلاسل أسية أو جيبية او طرق التقريب المتتالي او التقريب المقارب أو طرق عددية أو بيانية وفي بحثنا هذا سنعرض طريقة أيجاد الحل بواسطة سلاسل القوى فقط (الحلول التحليلية) لأن الطرق الأخرى ليست موضوع هذا البحث .

8.1.1 مصادر المعادلات التفاضلية :

نحصل على المعادلات التفاضلية من ثلاث مصادر رئيسية وهي :

1. الفيزياء والعلوم التطبيقية : يزودونا بعدد هائل من المعادلات التفاضلية , لأن أي حادثة فيزيائية أو هندسية أو طبيعية تتغير نتيجة تأثير العوامل المحيطة بها ونتيجة تغير الزمان و المكان وينتج عن ربط هذه التغيرات بالمتغيرات معادلة تفاضلية .
2. التطبيقات الهندسية المتعلقة بالتابع ومماسه أو ناظمه وتقوسه تعطي معادلة تفاضلية .
3. قد يكون لدينا مجموعة من التوابع المعطاة بصيغة جبرية ما , ولمعرفة المعادلة التي تحققها هذه المجموعة نقوم بعملية أيجاد المعادلة التفاضلية ونسميها عملية تشكيل المعادلة .

2.1 المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية:

1.2.1 المعادلة الخطية :

الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية هي :

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{7.1}$$

هذا النوع من المعادلات يكون فى كثير من الأحيان صعب الحل و معقد الدراسة لذى سنركز فى هذا البحث على المعادلات التي يمكن حلها بالنسبة للمشتق الثاني أي التي يمكن كتابتها على الصورة :

$$y'' = F(x, y, y') \tag{8.1}$$

حل المعادلة (8.1) قد لا يكون من الممكن إيجاد صيغة تحليلية مناسبة له ما لم تكن $F(x, y, y')$ دالة بسيطة لذى سنميز بين المعادلات الخطية و غير الخطية .

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية هي :

$$G(x)y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{9.1}$$

حيث

P, Q, R, G دوال فى x معلومة.

لإيجاد حل المعادلة (9.1) هناك عدة طرق بالرغم من عدم وجود قاعدة عامة للحل , سوف نفترض في ما يلي أن الدوال R, Q, P, G مستمرة فى مجال مفتوح $(\alpha < x < \beta)$ بالإضافة إلى ذلك و بفرض أن G ليس صفريا فى هذا المجال فإنه بإمكاننا قسمة المعادلة (9.1) على $G(x)$ فنحصل على المعادلة التالية :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{10.1}$$

2.2.1 نظرية الوجود و الوحدانية للحل [1]:

إنه لمن المهم قبل البدء في عملية البحث على الحل للمعادلة التفاضلية التطرق إلى نظرية الوجود و الوحدانية لهذا الحل.

المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية تتضمن المشتقة الثانية لذلك وبصورة عامة نحتاج إلى إجراء عمليتي تكامل لإيجاد الحل فمن الطبيعي توقع إحتواء الحل على ثابتين عشوائيين .

وللحصول على حل وحيد من الضروري تعيين شرطين إبتدائيين , لذلك لتحديد منحنى تكاملي وحيد لمعادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ليس كافي تعيين نقطة يمر بها المنحنى و إنما تعيين ميل المنحنى عند تلك النقطة أيضا (نعطي قيمة الحل و قيمة مشتقة عند نقطة معينة x_0)

نظرية 1 : إذا كانت الدوال $f, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ مستمرة في مجال مفتوح وليكن R من الفضاء الثلاثي xyz وإذا كانت النقطة (x_0, y_0, z_0) في R

إذا في مجال حول x_0 يوجد حل وحيد $y = \Phi(x)$ للمعادلة التفاضلية (8.1):

$$y'' = f(x, y, y')$$

ويحقق هذا الحل الشرطين:

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = y'_0$$

نظرية 2 : إذا كانت العوامل $r(x), q(x), p(x)$ دوال مستمرة في مجال مفتوح $(\alpha < x < \beta)$ فإنه توجد دالة واحدة فقط $y = \Phi(x)$ حل للمعادلة التفاضلية (10.1):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

على كل المجال $(\alpha < x < \beta)$ وتحقق أيضا الشرطين :

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = y'_0$$

عند نقطة معينة x_0 من المجال $(\alpha < x < \beta)$.

[1] كتاب المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات .

3.2.1 المؤثر التفاضلي الخطي:

المؤثر الخطي مهم لدراسة المعادلات التفاضلية الخطية.
وبما أن الدوال $q(x), p(x)$ دوال مستمرة في المجال المفتوح $(\alpha < x < \beta)$
إذا كانت y دالة قابلة للإشتقاق مرتين على المجال $(\alpha < x < \beta)$ فيمكن أن نعرف المؤثر الخطي بالمعادلة:

$$L[y] = y'' + py' + qy \tag{11.1}$$

إذا أثر هذا المؤثر على دالة ما $f(x)$ فإن ناتج التأثير يكون المعامل التفاضلي لهذه الدالة أي مشتقتها $f'(x)$:

$$Df(x) = f'(x) = \frac{\partial}{\partial x}f(x)$$

مما يعني أنه :

$$D = \frac{\partial}{\partial x}$$

و

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

ومنه يمكن كتابة المؤثر الخطي L على الصورة :

$$L = D^2 + pD + q \tag{12.1}$$

ملاحظة 4 : يمكن كتابة المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية على الصورة الموجزة:

$$L[y] = r(x) \tag{13.1}$$

4.2.1 المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة:

المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية هي كل معادلة تأخذ الصورة الموجزة التالية:

$$L[y] = 0 \tag{14.1}$$

أي

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{15.1}$$

5.2.1 الحلول الأساسية للمعادلات التفاضليةالخطية المتجانسة [2] :

سندرس في هذه الفقرة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية
بإستعمال الخاصية التي تقول إذا كان u_1, u_2 دالتين قابلتين للإشتقاق فإن :

$$[c_1u_1(x) + c_2u_2(x)]' = c_1u_1' + c_2u_2'$$

حيث c_1, c_2 ثابتين إختياريين نستطيع إستخلاص النظرية التالية.

[2] كتاب المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات .

نظرية 3 : إذا كان $y = y_2(x), y = y_1(x)$ حلين للمعادلة التفاضلية (14.1) :

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

فإن المجموع الخطي $y = c_1y_1 + c_2y_2$ حيث c_1, c_2 ثابتين إختياريين أيضا حل للمعادلة .

البرهان 1 :
لإثبات أن $y = c_1y_1 + c_2y_2$ حل للمعادلة التفاضلية (14.1) يجب أن نبين أن :

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0 \tag{16.1}$$

علما أن $L[y_2] = 0 \ , \ L[y_1] = 0$

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

و هذا يثبت النظرية.

ملاحظة 5 :

1. إذا وضعنا $c_2 = 0$ في البرهان أعلاه نجد أن:
   إذا كان y_1 حلا للمعادلة التفاضلية (14.1):
   $$L[y] = 0$$
   فإن ناتج ضرب y_1 في أي ثابت إختياري يكون أيضا حلا للمعادلة.
2. أثبتنا من خلال البرهان بأنه من أجل أي دالتين y_1, y_2 مشتقتهما من المرتبة الثانية مستمرة ومن أجل أي ثابتين إختياريين c_1, c_1 لدينا :
   $$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$$
   وهو ما يعرف بالمؤثر الخطي.

تعريف 4 : إذا أعطينا دالتين y_1, y_2 قابلتين للإشتقاق على مجال مفتوح $(\alpha < x < \beta)$ فإن الدالة $y_1y_2' - y_1'y_1$ يقال لها الرونسكيان للدالتين y_1, y_2 أو محدد رونسكي و تكتب على الصورة :

$$W(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{bmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \tag{17.1}$$

وقيمة الرونسكيان للدالتين y_1, y_2 عند النقطة x يرمز لها بالرمز $W(y_1, y_2)(x)$ وورنسكيان فئة دوال هو عموما دالة للمتغير المطلق x وقد يكون ثابتا أو صفرا.

نظرية 4 : إذا كانت الدالتان $p(x), q(x)$ مستمرتين على المجال المفتوح $(\alpha < x < \beta)$ إذا كانت الدالتان y_1, y_2 حلين للمعادلة التفاضلية (14.1):

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

على المجال $(\alpha < x < \beta)$
وإذا كانت على الأقل نقطة واحدة في المجال $(\alpha < x < \beta)$ حيث $W(y_1, y_2)$ لا يساوي الصفر
إذن كل حل y للمعادلة (14.1) يمكن أن يوضع على الصورة:

$$y = Ay_1 + By_2$$

البرهان 2 :
الفرض: لتكن y_1, y_2, y_3 حلول المعادلة (14.1) و $W(y_1, y_2)$ لا يساوي الصفر على المجال $(\alpha < x < \beta)$. المطلوب إثبات أن

$$y_3 = Ay_1 + By_2$$

بما أن y_1, y_2, y_3 هي حلول المعادلة التفاضلية (14.1) إذن:

$$y_1'' + p(x)y_2' + q(x)y_1 = 0$$
$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$
$$y_3'' + p(x)y_3' + q(x)y_3 = 0$$

بضرب المعادلة الأولى في $-y_2$ والثانية في y_1 ثم تجمع المعاديلتين الناتجتين فنحصل على :

$$y_1''y_2 - y_2''y_1 + p(x)[y_1y_2' - y_2y_1'] = 0 \qquad (a)$$

بوضع

$$w_{12}(x) = W(y_1, y_1) = y_1y_2' - y_2y_1'$$

نلاحظ أن المعادلة (a) يمكن أن تكتب على الشكل :

$$w_{12}' + p(x)w_{12} = 0 \qquad (b)$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى قابلة للفصل وحلها يكون من الشكل :

$$w_{12}(x) = C_{12}e^{-\int p(x)dx} \qquad (c)$$

وتعرف هذه العلاقة بمطابقة ابل [3] حيث أن الدالة الأسية

$$e^{-\int pdx}$$

لا تنعدم أبدا إلا إذا كان $\int pdx = \infty$ وهذا لن يتوفر حدوثه لأن p دالة مستمرة فرضا.
إذا فلن ينعدم الرونسكيان إلا بإنعدام الثابت الإختياري فقط وفي هذه الحالة فقط الحلان y_2, y_1 متناسبان طرديا.
وبنفس الطريقة بإستعمال الثانية و الثالثة معا ثم الأولى و الثالثة معا فنحصل على :

$$w_{23}' + p(x)w_{23} = 0 \qquad (d)$$

[3] نيلز ابل (1802-1829) عالم رياضيات نرويجي

$$w'_{13} + p(x)w_{13} = 0 \qquad (e)$$

وهما معادلتان تفاضليتان من المرتبة الأولى قابلتين للفصل ومنه:

$$w_{23} = C_{23}e^{-\int p(x)dx} \qquad (f)$$

$$w_{13} = C_{13}e^{-\int p(x)dx} \qquad (g)$$

حيث C_{12}, C_{23}, C_{13} ثوابت إختيارية و خاصة $C_{12} \neq 0$ ولأن $w_{12} \neq 0$ فرضا.
بضرب المعادلة (f) في $(-y_1)$ و المعادلة (g) في (y_2) ثم بجمع المعادلتين نجد:

$$[y_1y'_2 - y'1y_2]y_3 = [C_{13}y_2 - C_{23}y_1]\, e^{-\int p(x)dx}$$

بإستخدام (c) وتعويضا في هذه المعادلة نجد:

$$y_3 = -\frac{C_{23}}{C_{12}}y_1 + \frac{C_{13}}{C_{12}}y_2 = Ay_1 + By_2$$

إذا y_3 هي عبارة عن مجموع خطي من y_1, y_2 و هو المطلوب.

ملاحظة 6 : يبقى أن نثبت أن للمعادلة التفاضلية (14.1) قاعدة حلول وهذا ما نثبته في النظرية التالية:

نظرية 5 : إذا كانت الدالتان $p(x), g(x)$ مستمرين على مجال ما مفتوح $(\alpha < x < \beta)$ إذا فإنه توجد قاعدة حلول للمعادلة التفاضلية (14.1):

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x) = 0$$

على المجال $(\alpha < x < \beta)$.

البرهان 3 :
لتكن c نقطة من المجال $(\alpha < x < \beta)$ وبناءا على نظرية التواجد و الأحادية فإنه يوجد حلان y_1, y_2 وحيدان لمسألتي القيم الحدية التاليتين على الترتيب :

$$y''_1 + p(x)y'_1 + q(x)y_1 = 0 \quad , \quad y_1(c) = 1 \quad , \quad y'_1(c) = 0$$

$$y''_2 + p(x)y'_2 + q(x)y_2 = 0 \quad , \quad y_2(c) = 0 \quad , \quad y'_2(c) = 1$$

على المجال $(\alpha < x < \beta)$.
وواضح أن $w(y_1, y_2) \neq 0$ عند النقطة c إذا من النظرية (4) ينتج أن y_1, y_2 هي قاعدة حلول للمعادلة التفاضلية (14.1).

6.2.1 الحلول الأساسية للمعادلات التفاضليةالخطية غير المتجانسة [4]:

لتكن المعادلة التفاضلية التالية :

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (18.1)$$

[4] دروس في المعادلات والجمل الخطية .

نظرية 6 : الحل العام للمعادلة التفاضلية (18.1) هو عبارة عن مجموع حل خاص لها وليكن $y_p(x)$ مع الحل العام للمعادلة التفاضلية (14.1):

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

وليكن $y_h(x)$

البرهان 4 :
بفرض أن

$$y_p(x)$$

حل خاص للمعادلة التفاضلية (18.1) و

$$y_h(x) = c_1 y_{h1}(x) + c_2 y_{h2}(x)$$

حل عام للمعادلة التفاضلية (14.1) نبرهن أن الدالة :

$$\phi(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

حل عام للمعادلة التفاضلية (18.1) .
1-نبرهن أن $\phi(x)$ حل للمعادلة التفاضلية (18.1)
نشتق $\phi(x)$ فنجد :

$$\phi'(x) = y_h'(x) + y_p'(x)$$
$$\phi''(x) = y_h''(x) + y_p''(x)$$

نعوض في المعادلة (14.1) فنحصل على :

$$\phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x) =$$

$$y_h''(x) + y_p''(x) + p(x)[y_h'(x) + y_p'(x)] + q(x)[y_h(x) + y_p(x)] =$$

$$y_h''(x) + p(x)y_h'(x) + q(x)y_h(x) + [y_p''(x) + p(x)y_p'(x) + q(x)y_p(x)] =$$

$$0 + r(x) =$$

$$r(x)$$

أي أن $\phi(x)$ حل للمعادلة التفاضلية (18.1) .
2- نبرهن أن أي حل خاص يستخرج من الحل $\phi(x)$
ليكن $y_p^1(x)$ حل خاص كيفي للمعادلة التفاضلية (18.1) .
نبرهن أن الفرق $y_p^1(x) - y_p(x)$ حل للمعادلة التفاضلية (14.1).

$$[(y_p^1(x))'' - (y_p(x))''] + p(x)[(y_p^1(x))' - (y_p(x))'] + q(x)[y_p^1(x) - y_p(x)] =$$

$$[(y_p^1(x))'' + p(x)(y_p^1(x))' + q(x)y_p^1(x)] - [(y_p(x))'' + p(x)(y_p(x))' + q(x)y_p(x)] =$$

$$r(x) - r(x) =$$

$$0$$

ومنه فهو حل خاص أي يوجد $c_1 = c_1^* \ , \ c_2 = c_2^*$ حيث :

$$y_p^1(x) - y_p(x) = c_1^* y_{p1}(x) + c_2^* y_{p2}(x)$$

أي أن :

$$y_p^1(x) = y_p(x) + c_1^* y_{p1}(x) + c_2^* y_{p2}(x)$$

هذا يعني أنه ينتج من عبارة $\phi(x)$, بوضع $c_1 = c_1^* \ , \ c_2 = c_2^*$

نظرية 7 : يمكن إيجاد الحل الخاص $y_p(x)$ للمعادلة (18.1) بإذا عرف الحل العام $y_h(x)$ للمعادلة (14.1) , وذلك بإستعمال طريقة تغيير الثوابت .

الفصل الثاني

الحلول التحليلية

قائمة المحتويـــــــات

1.2 مدخل :

أشرنا في الفصل الأول (الفقرة 7.1.1) إلى أنه هناك عدة طرق لإيجاد حل معادلات تفاضلية ما , في هذا الفصل سندرس طريقة الحل على هيئة سلسلة قوى , هذا النوع من الحلول لا يقتصر على المعادلات ذات المعاملات المتغيرة فقط بل يشمل أيضا المعادلات ذات المعاملات الثابتة كذلك يشمل المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة , و بالنسبة إلينا في هذا البحث سنقتصر الدراسة فقط على المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة .

2.2 مفهوم سلسلة قوى:

سلسلة القوى حول نقطة ما ولتكن $x = x_0$ هي سلسلة لانهائية في قوى $(x - x_0)$ الموجبة والتي تكتب على الصورة :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \tag{1.2}$$

حيث $\{C_n\}_0^\infty$ ثوابت تعرف بمعاملات السلسلة و $x = x_0$ نقطة ثابتة تسمى مركز السلسلة .
سلسلة القوى لا تحتوي على قوة سالبة أو كسرية للمتغير $(x - x_0)$.
يسمى المجموع

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n (x - x_0)^n \tag{2.2}$$

حيث $N \in \mathbb{N}$ بالمجموع الجزئي ويسمى مجموع الحدود المتبقي :

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \tag{3.2}$$

بالمتبقي , وواضح أن :

$$R_N(x) = S(x) - S_N(x) \tag{4.2}$$

3.2 تقارب السلاسل :

تعريف 5 : يقال على سلسلة القوى $S(x)$ بأنها متقاربة أو تقاربية عند النقطة x إذا كانت النهاية لما N تؤول الى ∞ للسلسلة $S_N(x)$ موجودة أي :

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} S_N(x) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\sum_{n=0}^{N} C_n(x-x_0)^n \tag{5.2}$$

موجودة , وواضح أن السلسلة متقاربة لما $x = x_0$ لأنه :

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} S_N(x_0) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\sum_{n=0}^{N} C_n(x_0-x_0)^n = \lim_{N\longrightarrow\infty} C_0 = C_0 \tag{6.2}$$

إذن النهاية موجودة .

تعريف 6 : يقال على سلسلة القوى $S(x)$ بأنها متقاربة مطلقا عند النقطة x إذا كانت السلسلة :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{N} |C_n(x-x_0)^n| \tag{7.2}$$

متقاربة والعكس غير صحيح .
لمعرفة التقارب المطلق يمكن أستعمال أختبار النسبة التالي :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{C_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{C_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0| \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = L$$

تكون السلسلة متقاربة مطلقا عند x إذا كانت $L < 1$ ومتباعدة إذا كانت $L > 1$, وإذا كانت $L = 1$ فالأختبار غير حاسم .

تعريف 7 : يعرف نصف قطر التقارب R_c بأنه المسافة بين المركز x_0 وأقرب نقطة منه تكون عندها السلسلة $S(x)$ متقاربة مطلقا من أجل

$$|x-x_0| < R_c$$

ومتباعدة من أجل

$$|x-x_0| > R_c$$

نتيجة 1 :

1. إذا لم تكن السلسلة متقاربة أي أن النهاية غير موجودة عند النقطة x قيل عنها متباعدة .

2. إذا كانت السلسلة $S(x)$ متقاربة عند النقطة $x = x_1$ فهي متقاربة مطلقا من أجل

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|$$

وإذا كانت متباعدة عند $x = x_1$ فهي متباعدة من أجل

$$|x - x_0| > |x_1 - x_0|$$

3. إذا تقاربت السلسلة $S(x)$ عند النقطة $x = x_0$ فقط يكون نصف قطر تقاربها معدوم و إذا تقاربت عند كل قيم x يكون نصف قطر تقاربها لانهائي .

4.2 عمليات على السلاسل:

في هذه الفقرة سنعرض بعض العمليات التي تجرى على السلاسل والتي تهمنا في حل المعادلات التفاضلية على هيئة سلسلة قوى .
إذا كانت

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n \tag{8.2}$$

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x - x_0)^n \tag{9.2}$$

سلسلتين متقاربتين على مجال التقارب

$$|x - x_0| < R_c$$

حيث $R_c > 0$ إذن لدينا ما يلي :

1. يمكن جمع وطرح السلسلتين $S_1(x)$ و $S_2(x)$ حدا حدا لنحصل على السلسلة المتقاربة التالية :

$$S_1(x) \pm S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \pm B_n)(x - x_0)^n \tag{10.2}$$

2. يمكن ضرب السلسلتين $S_1(x)$ و $S_2(x)$ لنحصل على :

$$S_1(x) \times S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \tag{11.2}$$

حيث $C_n = A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + ... + A_n B_0$

3. إذا كانت السلسلة $S_2(x)$ تختلف عن الصفر فيمكن قسمة السلسلتين قسمة عادية كالتالي :

$$\frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(x-x_0)^n \tag{12.2}$$

بالنسبة للمعاملات D_n قد يكون حسابها معقدا بعض الشيء بالإضافة إلى ذلك نصف قطر التقارب للسلسلة الناتجة عن عملية القسمة ربما يكون أقل من R_c

4. إذا كانت السلسلتين $S_1(x)$ و $S_2(x)$ متساويتين أي :

$$S_1(x) = S_2(x)$$

فإن $A_n = B_n$

5. يمكن الحصول على مشتقات السلسلة $S_1(x)$ من جميع الرتب وذلك بإشتقاق السلسلة حدا حدا ونتقارب كل من هذه السلاسل تقاربا مطلقا على مجال التقارب

$$|x-x_0|< R_c$$

5.2 سلسلة تايلور [1]:

تمثل أي دالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق ما لانهاية من المرات عند $x = x_0$ بسلسلة قوى حول $x = x_0$ تسمى سلسلة تايلور وهي على الصورة :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{13.2}$$

المعاملات هنا تمثل خصائص الدالة $f(x)$ عند مركز السلسلة $x = x_0$ وهذه الخصائص هي قيمة الدالة ومعدلات تغيرها .

إذا وضعنا $x_0 = 0$ في سلسلة تايلور فإننا نحصل على سلسلة ماكلورين [2] كما يلي :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n \tag{14.2}$$

ملاحظة 7 : لا يمكن تمثيل دالة بسلسلة تايلور حول نقطة تكون عندها الدالة أو أحدى مشتقاتها لا نهائية القيمة .

[1] بروك تايلور (1685-1731) عالم رياضيات انجلتري

[2] كولين ماكولين (1698-1746) عالم رياضيات وفيزياء اسكتلندي

6.2 الدالة التحليلية:

الدالة f التي يمكن تمثيلها في مجال مفتوح $(\alpha < x < \beta)$ بسلسلة قوى متقاربة أي :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \tag{15.2}$$

يقال أنها تحليلية عند $x = x_0$, تكون الدالة تحليلية على مجال مفتوح إذا وفقط إذا كانت تحليلية عند كل نقطة x من هذا المجال.

نتيجة 2 :

1. كل الدوال الأولية والمعرفة على مجال مفتوح $(\alpha < x < \beta)$ هي دوال تحليلية على هذا المجال .
2. من خلال النتائج السابقة التي تحصلنا عليها في (الفقرة 4.2) نستنتج أنه إذا كانت الدالتين f و g دوال تحليلية عند نقطة ما $x = x_0$ فإنه كل من $f \pm g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$ حيث $g \neq 0$, دوال تحليلية عند هذه النقطة .

7.2 النقطة العادية والنقطة الشاذة:

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية التالية :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{16.2}$$

تعريف 8 : نقول عن النقطة $x = x_0$ بانها نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (16.2) إذا كانت كل من $p(x)$ و $q(x)$ دالتان تحليليتان عند هذه النقطة .

تعريف 9 : نقول عن النقطة $x = x_0$ بأنها نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية (16.2) إذا كانت أحدى او كلتا الدالتين $p(x)$ و $q(x)$ غير تحليلية عند هذه النقطة .

تعريف 10 : تنقول عن النقطة $x = x_0$ بأنها نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية (16.2) إذا كانت النقطة نقطة شاذة وكانت الدالتين

$$(x - x_0)p(x) \quad , \quad (x - x_0)^2 q(x)$$

تحليليتين عند هذه النقطة .

8.2 حل المعادلة التفاضلية باستعمال سلسلة تايلور:

في هذه الفقرة سنقدم عرض لكيفية إستخدام سلسلة تايلور لحل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية وذلك من خلال التعبير عن y على صورة سلسلة لا نهائية ثم التعويض بالدالة ومشتقاتها $y, y', y'', y''', ...$ في سلسلة تايلور لنحصل على حل المعادلة التفاضلية
سلسلة تايلور و كما سبق أن ذكرنا في (الفقرة 5.2) للدالة $y(x)$ بالقرب من $x = x_0$ هي على الصورة :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{17.2}$$

ولحل المعادلة التفاضلية (16.2) نقوم بحساب المقادير .... $y''(x_0), y'''(x_0),$ بدلالة الشروطين الإبتدائيين $y'(x_0)$, $y(x_0)$ ذلك بالاشتقاق المتتالي والتعويض عن $x = x_0$, وبإستخدام سلسلة تايلور (17.2) نحصل على $y(x)$ التي هي حل المعادلة التفاضلية المعطاة .
المثال التالي يوضح الطريقة

مثال 3 :
أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y'' + 9y' = 0 \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 3$$

الحل :
لإيجاد حل المعادلة التفاضلية السابقة بإستخدام سلسلة تايلور من الضروري حساب المشتقات للدالة , ولذا سنقوم بإعادة كتابة العادلة التفاضلية على الشكل

$$y'' = -9y' \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 3$$

ومنه نحصل على

$$y'' = -9y' \implies y''(0) = 0$$

$$y''' = -9y'' \implies y'''(0) = y'(0) = -27$$

$$y^{(4)} = -9y''' \implies y^{(4)}(0) = 2y''(0) = 0$$

$$y^{(5)} = -9y^{(4)} \implies y^{(5)}(0) = 3y'''(0) = 3.1 = 243$$

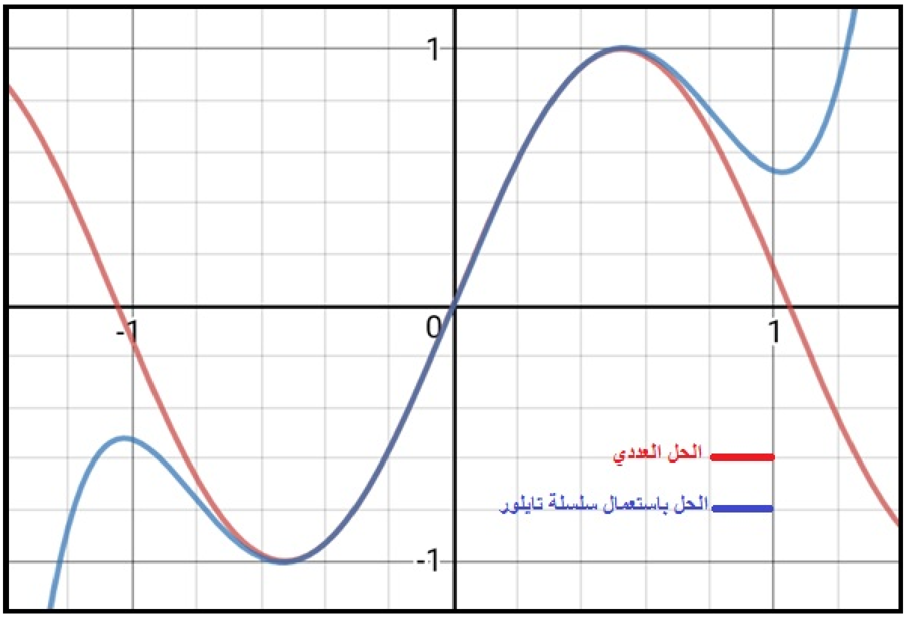
وهكذا .....
وبالتعيض عن قيم كل من $y(0), y'(0), y''(0), ...$ في السلسلة (17.2) نحصل على حل المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة التالية :

$$y(x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5 + ...$$

المعادلة التفاضلية المعطاة حلها بالطرق العددية يكون على الصورة :

$$y = \sin(3x)$$

والشكل التالي يوضح العلاقة بين الحل بالطرق العددية والحل بإستخدام سلسلة تايلور حيث نلاحظ أن الحلين متطابقين على الأقل بجوار النقطة $x = 0$:



شكل 1.2: العلاقة بين الحل بالطرق العددية والحل بإستخدام سلسلة تايلور

9.2 حل المعادلة التفاضلية بجوار النقطة العادية:

سندرس في هذه الفقرة حل المعادلة التفاضلية (16.2) على صورة سلسلة قوى في حالة ما إذا كانت النقطة $x = x_0$ نقطة عادية لهذه المعادلة أي أن الدالتين $p(x)$ ، $q(x)$ دالتان تحليليتان وذلك من خلال النظرية التالية :

نظرية 8 : إذا كانت $x = x_0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (16.2):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

فإن الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n = A_0 y_1(x) + A_1 y_2(x)$$

حيث A_0, A_1 ثابتان إختياريان و $y_1(x), y_2(x)$ سلسلتان تحليليتان عند $x = x_0$ ومستقلتان خطيا , ونصف قطر تقارب كل منهما أقل من أصغر نصفي قطر تقارب سلسلة $p(x)$ و $q(x)$

البرهان 5 [3] :

النقطة x_0 نقطة عادية وهذا من الفرض ومنه الدالتان $p(x)$ و $q(x)$ تحليليتان أي :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n$$

والسلسلتين متقاربتين على المجال $|x - x_0| < R_c$ حيث R_c موجب وهو أصغر نصف قطر تقارب .
لنفرض أن حل المعادلة (16.2) يكتب على الصورة التالية :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x - x_0)^n$$

بالمفاضلة نجد :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} nA_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}$$

وبتعويض عبارات كل من y, y', y'', p, q في المعادلة التفاضلية (16.2) نجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} nA_n(x - x_0)^{n-1}\right]$$
$$+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x - x_0)^n\right] = 0$$

بمساواة معاملات $(x - x_0)^n$ نجد العلاقات التالية :

$$-2A_2 = A_1p_0 + A_0q_1$$

$$-6A_3 = 2A_2p_0 + A_1p_1 + A_1q_0 + A_0q_1$$

[3] كتاب المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات .

وبصيرة عامة :

$$-(n-1)nA_n = (n-1)A_{n-1}p_0 + (n-2)A_{n-2}p_1 + ... +$$

$$A_1p_{n-2} + A_{n-2}q_0 + A_{n-3}q_1 + ... + A_1q(n-3) + A_0q_1$$

وهي علاقات خطية وبالتالي تعين لنا كل المعاملات بصورة وحيدة بدلالة أثنين أختياريين منها وهي A_0, A_1
ومنه يوجد حل على الصورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_0)^n$$

الأن يكفي أن نبرهن أن السلسلة الناتجة متقاربة ليكون الحل قابل للنشر .
لقد وجدنا ان الدالتين يمكن كتابتهما على الصورة :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$$

بضرب السلسلة الثانية في $(x-x_0)$ وبأخذ القيمة المطلقة لحدود السلسلتين نجد :

$$|p| \leq |p_0| + |p_1||x-x_0| + ... + |p_n||x-x_0|^n + ...$$

$$|x-x_0||q| \leq |q_0||x-x_0| + |q_1||x-x_0|^2 + ... + |q_n||x-x_0|^{n+1} + ...$$

ومن أجل

$$|x-x_0| = r \quad , \quad r < R_c$$

فإن لكل من الدالتين $|p|, |x-x_0||q|$ قيمة محدودة وذلك لأنهما سلسلتين متقاربتين في المجال $|x-x_0| < R_c$
لتكن k أكبر هاتين القيمتين , فعندها نكتب :

$$\leq |p_0| + |p_1||x-x_0| + ... + |p_n||x-x_0|^n + ... \leq k$$

$$\leq |q_0||x-x_0| + |q_1||x-x_0|^2 + ... + |q_n||x-x_0|^{n+1} + ... \leq k$$

ومنه نجد :

$$p_n \leq \frac{k}{r^n} \quad , \quad q_n \leq \frac{k}{r^{n+1}}$$

وإذا سمينا b_0, b_1 من أجل $|A_0|, |A_1|$ تصبح العلاقة بين المعاملات على الصورة :

$$2|A_2| \leq b_1|p_0| + b_0|q_0| \leq b_1 k + b_0\frac{k}{r} \leq 2b_1 k + b_0\frac{k}{r}$$

ومنه نجد :

$$|A_2| \leq \frac{1}{2}(2b_1 + \frac{b_0}{r})k = b_2$$

وبصورة مشابهة نجد :

$$\begin{aligned} 6|A_3| &\leq 2|A_2||p_0| + b_1|p_1| + b_1|q_0| + b_0|q_1| \\ &\leq (2b_2 + 2\frac{b_1}{r} + \frac{b_0}{r^2})k \\ &\leq (3b_2 + 2\frac{b_1}{r} + \frac{b_0}{r^2})k \end{aligned}$$

ومنه نجد :

$$|A_3| \leq \frac{1}{6}(3b_2 + 2\frac{b_1}{r} + \frac{b_0}{r^2})k = b_3$$

وإذا تابعنا بصور مشابها نجد :

$$|A_n| \leq \frac{1}{(n-1)n}\left[nb_{n-1} + \frac{(n-1)b_{n-2}}{r} + ... + \frac{b_0}{r^{n+1}}\right]k = b_n$$

من العلاقة الأخيرة نجد :

$$\frac{1}{(n-1)(n-2)}\left[(n-1)b_{n-2} + \frac{(n-2)b_{n-3}}{r} + ... + \frac{b_0}{r^n}\right]k = b_{n-1}$$

وبضرب هذه العلاقة ب $-\frac{1}{r}$ وجمعها مع العلاقة التي قبلها نجد العلاقة التكرارية التالية :

$$(n-1)nb_n - \frac{(n-2)(n-1)b_{n-1}}{r} = nb_{n-1}k$$

وهذا يعطينا العلاقة التالية :

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n-2}{nr} + \frac{k}{n-1}$$

من هذه العلاقة ولما $n \to \infty$ نجد :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{r}$$

وبذلك نكون قد برهنا ان السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

متقاربة , ونصف قطر تقاربها r
لكن وبما أن :

$$|A_n| \leq b_n$$

فان السلسلة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n||x - x_0|^n$$

متقاربة لأن معاملاتها أصغر من سلسلة متقاربة , وبما ان السلسلة المطلقة متقاربة فالسلسلة الأصلية متقاربة ونصف قطر تقاربها على الأقل r.
ومنها نقول أنه يوجد حل وحيد يمكن أن يوضع على شكل سلسلة قوى في جوار النقطة العادية $x = x_0$.

الخطوات المتبعة لأيجاد الحل بجوار النقطة العادية :

لتبسيط الخطوات الجبرية نفرض أن $x_0 = 0$,أما إذا كانت $x_0 \neq 0$, فإنه يكن إستخدام التعويض $z = x - x_0$ لنقل نقطة الأصل إلى النقطة $x = x_0$.

1. نفرض حلا حول النقطة العادية $x = x_0$ على صورة سلسلة قوى :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

2. نشتق سلسلة القوى حدا حدا مرتين للحصول على :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} nA_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2}$$

3. نعبر عن كل من الدالتين المعاملتين $p(x)$ و $q(x)$ التحليليتين عند النقطة العادية على صورة سلسلة قوى حول هذه النقطة على الصورة التالية :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

ويوفر من هذه الخطوة كونهما عادة على صورة كثير حدود .

4. نعوض كل من الخطوات 3,2,1 في المعادلة التفاضلية ثم نجمع قوى x المتشابهه فنحل على سلسلة من الشكل :

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + ... + \lambda_n x^n + ... = 0$$

حيث $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ دوال خطية للثوابت $A_0, A_1, ..., A_n$ وبالمطابقة نجد العلاقات :

$$\lambda_0 = 0 \quad , \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad ... \quad , \quad \lambda_n = 0$$

وهي $n+1$ علاقة بين الثوابت تعين لنا الثوابت بدلالة أثنين منها .

5. نعوض الناتج في حل السلسلة ثم نعيد كتابة الحل بحيث نجمع الحدود التي تحوي على A_0 لنحصل على $A_0 y_1(x)$ ونجمع الحدود التي تحتوي على A_1 لنحصل على $A_1 y_2(x)$

المثال التالي يوضح الطريقة

مثال 4 :

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

الحل :

النقطة $x = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية السابقة لأن الدالتان

$$p(x) = x \quad , \quad q(x) = 2$$

كلتاهما تحليليتان عند هذه القطة .

بفرض الحل على الصورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

فإن

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1}$$

و

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحل على

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0$$

حتى نستطيع تجميع الحدود (لجعلها جميعا تحتوي على x^n) نستبدل n ب $n+2$ في السلسة الأولى فنجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$2(a_2+a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+2)a_n]x^n=0$$

ومنه وبمساوات قوى x المختلفة بالصفر نجد :

$$\begin{cases}2(a_2+a_0)=0\Rightarrow a_2=-a_0\\ (n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+2)a_n=0\Rightarrow a_{n+2}=-\dfrac{1}{n+1}a_n \quad ,n\geq 1 \quad ....(*)\end{cases}$$

بإعطاء قيم معينة ل n في العلاقة التكرارية (*) نجد :

$$\begin{cases}* \quad n=1\Rightarrow a_3=-\frac{1}{2^1 1!}a_1\\ * \quad n=2\Rightarrow a_4=-\frac{1}{3}a_2=\frac{1}{1.3}a_0\\ * \quad n=3\Rightarrow a_5=-\frac{1}{4}a_3=\frac{1}{4.2}a_1=\frac{1}{2^2.2!}a_1\\ * \quad n=4\Rightarrow a_6=-\frac{1}{5}a_4=-\frac{1}{1.3.5}a_0\\ * \quad n=5\Rightarrow a_7=-\frac{1}{6}a_5=-\frac{1}{6.4.2}a_1=-\frac{1}{2^3.3!}a_1\\ * \quad n=6\Rightarrow a_8=-\frac{1}{7}a_6=\frac{1}{1.3.5.7}a_0\end{cases}$$

وهكذا نجد أن :

$$\begin{cases}a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{2^k.k!}a_1 \quad , \quad k\geq 1\\ a_{2k}=\frac{(-1)^4}{1.3.5....(2k-1)}a_0 \quad , \quad k\geq 1\end{cases}$$

لدينا :

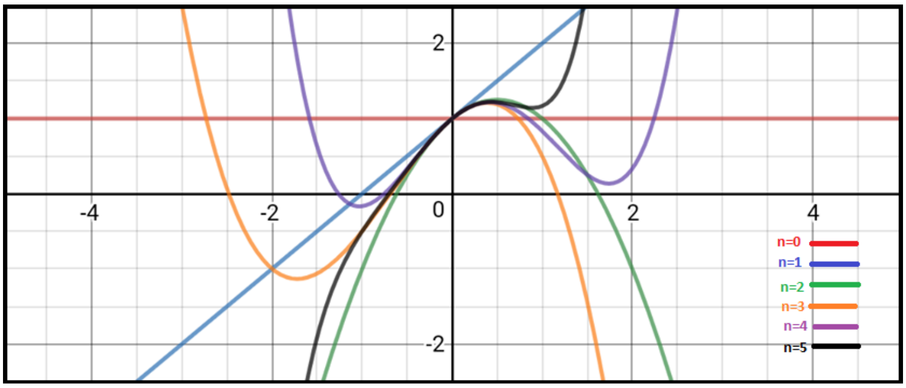
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}$$

$$\Rightarrow y = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$$

ومنه وبتعويض قيم المعاملات a_{2k}, a_{2k+1} في عبارة الحل العام نجد :

$$y = a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1.3.5....(2k-1)}x^{2k}\right) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k.k!}x^{2k+1}\right)$$

بفرض أن $a_0 = 1, a_1 = 1$ وبإعطاء قيم مختلفة ل n في الحل نحصل على التمثيل البياني التالي :



شكل 2.2: التمثيل البياني للحدود الاولى للحل التحليلي للمعادلة المعطاة

10.2 حل المعادلة التفاضلية بجوار النقطة الشاذة المنتظمة (طريقة فروبينيس [4]):

درسنا في الفقرة السابقة حل المعادلة التفاضلية في صورة سلسلة قوى في حالة ما إذا كانت $x = x_0$ نقطة عادية , والآن ندرس الحل في حالة ما إذا كانت هذه النقطة نقطة شاذة منتظمة أي أن أحدى أو كلتا الدالتين $p(x), q(x)$ غير تحليلية والدالتان $(x-x_0)p(x), (x-x_0)^2q(x)$ تحليليتان .

في هذه الحالة نفرض أن الحل يكتب على الصورة :

$$y = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^{n+r} \qquad (18.2)$$

أما إذا كانت النقطة الشاذة المنتظمة هي $x_0 = 0$ فإن الحل يكون على الصورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \qquad (19.2)$$

[4] فريدينارد جورج فروبينيس (1849-1917) هوعالم تحليل وجبر ألماني .

حيث r عدد حقيقي.

حساب المعاملات يكون عن طريق تعويض الدالة ومشتقاتها y, y', y'' في المعادلة التفاضلية (16.2) ومساوات قوى x المختلفة بالصفر.

تعريف 11 : المعادلة المرافقة لقوى x الصغرى تسمى المعادلة الدليلية وهي معادلة من الدرجة الثانية بدلالة المتغير r وهي تكتب على الصورة :

$$r(r-1) + rp_0 + q_0 = 0 \tag{20.2}$$

أو

$$r^2 - (1-p_0)r + q_0 = 0 \tag{21.2}$$

عند حل المعادلة الدليلية (21.2) نميز ثلاث حالات لجذري المعادلة r_1, r_2 , بفرض $r_1 \geq r_2$ كما يلي :

1. الجذران r_1, r_2 مختلفان والفرق بينهما ليس عددا صحيحا.
2. الجذران r_1, r_2 متساويان.
3. الجذران r_1, r_2 مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح.

والان نقدم طريقة الحل في كل حالة من الحالات السابقة وذلك من خلال النظريات التالية :

نظرية 9 : إذا كانت $x = x_0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية (16.2) :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

فإنه يوجد على الأقل حل واحد يمكن كتابته على الصورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^{n+r}$$

إذا كان جذري المعادلة الدليلية مختلفان والفرق بينهما عدد غير صحيح فإنه يوجد حلان مستقلان على الصورة :

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^{n+r_1} \tag{22.2}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^{n+r_2} \tag{23.2}$$

حيث أن r_1, r_2 هما جذرا المعادلة الدليلية عند النقطة $x = x_0$.

نظرية 10 : إذا كانت $x = x_0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية (16،2) :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

إذا كان جذري المعادلة الدليلية متساويان نفرض الحل على الصورة :

$$y(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^{n+r} \qquad (24.2)$$

أي أن :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x} + p(x)\frac{\partial y}{\partial x} + q(x)y = 0 \qquad (25.2)$$

وبتفاضلها جزئيا بالنسبة للمتغير r نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial^2 y}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial r}(p(x)\frac{\partial y}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial r}(q(x)y) = 0 \qquad (26.2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial r}) + p(x)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial r}) + q(x)(\frac{\partial y}{\partial r}) = 0 \qquad (27.2)$$

وعليه فإن $\frac{\partial y}{\partial r}$ يمثل أيضا حلا للمعادلة التفاضلية وعليه فإن الحلان يكونا على الصورة

$$y_1(x) = y(x, r_1) \qquad (28.2)$$

$$y_2(x) = \frac{\partial y(x,r)}{\partial r}|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial r}\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^{n+r}|_{r=r_1}$$

$$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} C'_n (x-x_0)^{n+r_1} \qquad (29.2)$$

نلاحظ أن الحل $y_2(x)$ يحتوي على حد لوغارتمي , وبهذا يكون مستقل خطيا مع $y_1(x)$.

نظرية 11 : إذا كانت $x = x_0$ نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية (16،2) :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

إذا كان جذري المعادلة الدليلية r_1, r_2 مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح مع $r_1 > r_2$
في هذه الحالة يكون للمعادلة التفاضلية حل أو حلين على الصورة :

$$y(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^{n+r} \qquad (30.2)$$

ويكون الحل الأول $y_1(x)$ على الصورة :

$$y(x,r_1)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^{n+r_1} \tag{31.2}$$

ويكون الحل الثاني $y_2(x)$ له ثلاث حالات على النحو التالي :

1. قيمة r_1 تجعل معاملات السلسلة بالنسبة إلى y تؤول إلى ما لانهاية في هذه الحالة نفرض أن :

$$y^*(x,r)=(r-r_2)y(x,r)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{n+r} \tag{32.2}$$

ويكون الحل الثاني على الصورة

$$y_2(x)=\frac{\partial y^*(x,r)}{\partial r}|_{r=r_1}=\frac{\partial}{\partial r}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{n+r}|_{r=r_2}$$

$$\Rightarrow y_2(x)=y_1(x)\ln(x)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{'}(x-x_0)^{n+r_2} \tag{33.2}$$

2. قيمة r_2 تجعل إحدى معاملات السلسلة $y(x,r)$ غير معرفة وفي هذه الحالة نقوم بفرض هذا المعامل إختياري وبهذا فإن الحل $y(x,r_2)$ يحتوي على ثابتين إختياريين وبهذا يعتبر $y(x,r_2)$ هو الحل العام للعادلة التفاضلية.

3. إذا لم يتحقق الاول والثاني في هذه الحالة نفرض أن $y_2(x)=y(x,r_2)$.

البرهان 6 :

لبرهان النظريات (9),(10),(11) أنظر المرجع [1] (الصفحة296-308).

ملاحظة 8 : في حالة ما إذا كانت النقطة x نقطة شاذة غير منتظمة , نبحث عن الحل عندما تكون النقطة x كبيرة جدا , نفرض أن $z=\frac{1}{x}$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية (16.2).
ونحل المعادلة الناتجة بالطرق السابقة .

لتوضيح الطريقة أكثر و بالإستعانة بالنظريات (9),(10),(11) نقدم الأمثلة التالية :

مثال 5 :

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$2x^2y''+xy'-xy=0$$

الحل :
بقسمة المعادلة التفاضلية السابقة على $2x^2$ نحصل على :

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{2x}y = 0$$

ومنه :

$$p(x) = \frac{1}{2x} \;\; , \;\; q(x) = -\frac{1}{2x}$$

واضح أن $p(x)$ و $q(x)$ كلتاهما دالتان غير تحليليتان عند النقطة $x = 0$ ومنه هذه النقطة تعتبر نقطة شاذة , والأن لنعرف الدوال :

$$xp(x) = \frac{1}{2} \;\; , \;\; x^2q(x) = -\frac{1}{2}x$$

الدالتان السابقتان $x^2q(x)$, $xp(x)$ هما دالتان تحليليتان عند النقطة $x = 0$ وبهذا فإن النقطة $x = 0$ تكون نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية المعطات .
نفرض الحل على الصورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

ومنه تكون y', y'' على النحو التالي :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

و بتعويض كل من y, y', y'' في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

حتى نستطيع تجميع الحدود (لجعلها جميعا تحتوي على x^{n+r}) نستبدل n ب $n-1$ في السلسلة الثالثة فنجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0$$

ومنه نجد :

$$[2r(r-1)+r]a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[[(n+r)(2n+2r-1)a_n - a_{n-1}]x^{n+r} = 0$$

بمساوات معاملات قوى x الصغرى (بمعنى معاملات x^r) بالصفر , نحصل على المعادلة الدليلية :

$$[2r(r-1)+r]a_0=0$$

بفرض $a_0 \neq 0$ نجد :

$$2r(r-1)+r=r(2r-1)=0 \Rightarrow r_1=\frac{1}{2} \ \ , \ \ r_2=0$$

نلاحظ أن r_1-r_2 عددا غير صحيحا وهي الحالة الأولى

بمساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر , نحصل على العلاقة التكراية التالية :

$$(n+r)(2n+2r-1)a_n-a_{n-1}=0$$

حيث

ومنه نجد العلاقة التكرارية التالية:

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{(n+r)(2n+2r-1)} \ \ , \ \ n \geq 1$$

1. من أجل : $r=r_1=\frac{1}{2}$, تتحول العلاقة التكرارية الى :

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{n(2n+1)} \ \ , \ \ n \geq 1$$

ومنه :

$$n=1 \Rightarrow a_1=\frac{a_0}{1.3}=\frac{1}{3}a_0$$
$$n=2 \Rightarrow a_2=\frac{a_1}{2.5}=\frac{a_0}{2.3.5}=\frac{1}{30}a_0$$
$$n=3 \Rightarrow a_3=\frac{a_2}{3.7}=\frac{a_0}{2.(3)^2.5.7}=\frac{1}{360}a_0$$

وهكذا ....

ومنه الحل الأول يكون على الصورة :

$$y_1(x)=a_0x^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{360}x^3+...)$$

2. من أجل : $r = r_2 = 0$, تحول العلاقة التكرارية الى :

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \quad , \quad n \geq 1$$

ومنه :

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = a_0$$
$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2.3} = \frac{1}{6}a_1$$
$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3.5} = \frac{a_1}{2.(3)^2.5} = \frac{1}{90}a_1$$

وهكذا ....

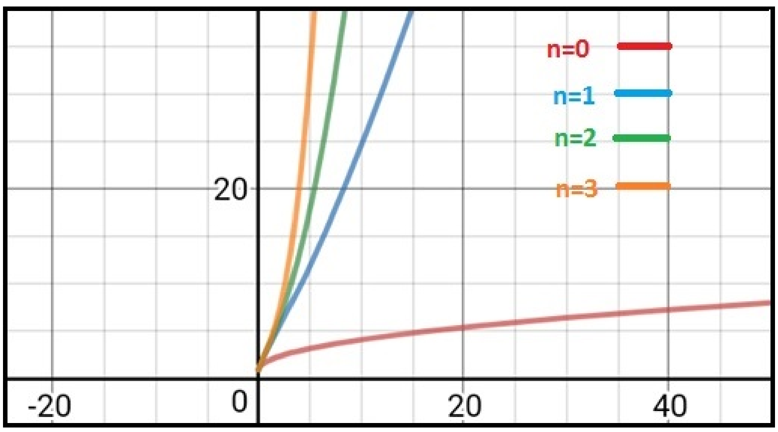
ومنه الحل الثاني يكون على الصورة :

$$y_2(x) = a_1(1 + x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{90}x^3 + ...)$$

إذا من عبارة $y_1(x)$ و $y_2(x)$ نجد عبارة الحد العام على الصورة :

$$y(x) = a_0x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{360}x^3 + ...) + a_1(1 + x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{90}x^3 + ...)$$

بفرض أن $a_0 = 1, a_1 = 1$ وبإعطاء قيم مختلفة ل n في الحل نحصل على التمثيل البياني التالي :



شكل 3.2: التمثيل البياني للحدود الاولى للحل التحليلي للمعادلة المعطاة

مثال 6 :

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' + y' + y = 0$$

الحل :

بقسمة المعادلة التفاضلية السابقة على x نحصل على :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$$

ومنه :

$$p(x) = \frac{1}{x} \ \ , \ \ q(x) = \frac{1}{x}$$

واضح أن $p(x)$ و $q(x)$ كلتاهما دالتان غير تحليليتان عند النقطة $x = 0$ ومنه هذه النقطة تعتبر نقطة شاذة , والأن لنعرف الدوال :

$$xp(x) = 1 \ \ , \ \ x^2q(x) = x$$

الدالتان السابقتان $x^2q(x)$, $xp(x)$ هما دالتان تحليليتان عند النقطة $x = 0$ وبهذا فإن النقطة $x = 0$ تكون نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية المعطات .

نفرض الحل على الصورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

ومنه تكون y', y'' على النحو التالي :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

و بتعويض كل من y, y', y'' في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

حتى نستطيع تجميع الحدود (لجعلها جميعا تحتوي على x^{n+r}) نستبدل n ب $n+1$ في السلسلتين الأولى والثانية فنجد :

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)a_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)a_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

ومنه نجد :

$$r(r-1)a_0x^{r-1}+ra_0x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[[(n+r+1)(n+r)+(n+r+1)]a_{n+1}+a_n]x^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow r^2a_0x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r+1)^2a_{n+1}+a_n]x^{n+r}=0$$

بمساوات معاملات قوى x الصغرى (بمعنى معاملات x^{r-1}) بالصفر , نحصل على المعادلة الدليلية

$$r^2a_0=0$$

بفرض $a_0\neq 0$ نجد :

$$r^2=0\Rightarrow r_1=r_2=0$$

نلاحظ أن جذري المعادلة الدليلية متساويان وهي الحالة الثانية.
بمساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر , نحصل على العلاقة التكرارية التالية :

$$a_{n+1}=-\frac{a_n}{(n+r+1)^2}\quad ,\ n\geq 0\quad ,\ (*)$$

من أجل $r=0$ نجد :

$$\begin{cases} n=0\Rightarrow a_1=-a_0\\ n=1\Rightarrow a_2=-\frac{a_1}{(2)^2}=\frac{a_0}{(1)^2(2)^2}\\ n=2\Rightarrow a_3=-\frac{a_2}{(3)^2}=-\frac{a_0}{(1)^2(2)^2(3)^2}\\ .\\ .\\ .\\ n=n-1\Rightarrow a_n=\frac{(-1)^n}{[(n)!]^2}a_0 \end{cases}$$

ومنه بتعويض قيمة r و a_n في عبارة الحل المعطى نجد الحل الأول على الصورة :

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[(n)!]^2}x^n$$

لدينا حسب النظرية (10) الحل الثاني يكون على الصورة :

$$y_2(x) = y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n$$

لإيجاد عبارة a'_n نتبع الخطوات التالية:
من العلاقة التكرارية (*) نجد :

$$\begin{cases} n = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{a_0}{(r+1)^2} \\ n = 1 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{(r+2)^2} = \frac{a_0}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ n = 2 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_2}{(r+3)^2} = -\frac{a_0}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2} \\ . \\ . \\ . \\ n = n-1 \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n a_0}{[(r+n)!]^2} \quad , \quad .....(**) \end{cases}$$

ندخل اللوغاريتم على العلاقة التكرارية (**) فنجد :

$$\ln a_n = \ln(-1)^n a_0 - 2[\ln(1+r) + \ln(2+r) + ... + \ln(n+r)] \quad , \quad .....(***)$$

نشتق (***) بالنسبة ل r فنجد :

$$\frac{a'_n}{a_n} = -2(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{2+r} + \frac{1}{3+r} + ... + \frac{1}{n+r})$$

بوضع $r = 0$ نجد :

$$a'_n = -2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n})a_n = -2S_n a_n$$

ومنه :

$$a'_n = -2S_n \frac{(-1)^n}{[(n)!]^2} a_0$$

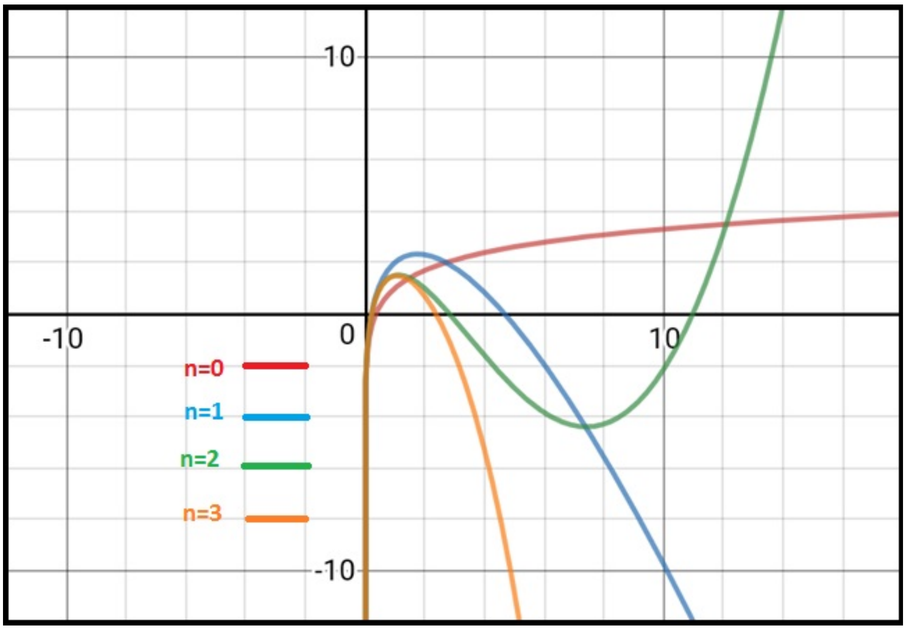
ومنه y_2 يكون على الصورة :

$$y_2(x) = y_1 \ln x - 2a_0 \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{(-1)^n}{[(n)!]^2} x^n$$

ومنه الحل العام يكون على الصورة :

$$y = a_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(n)!]^2} x^n (1 + \ln x) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{(-1)^n}{[(n)!]^2} x^n \right]$$

بفرض أن $a_0 = 1, a_1 = 1$ وبإعطاء قيم مختلفة ل n في الحل نحصل على التمثيل البياني التالي :



شكل 4.2: التمثيل البياني للحدود الاولى للحل التحليلي للمعادلة المعطاة

مثال 7 :

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + (x^2 - 2)y = 0$$

الحل :

بقسمة المعادلة التفاضلية السابقة على x^2 نحصل على :

$$y'' + (1 - \frac{2}{x^2})y = 0$$

ومنه :

$$p(x) = 0 \quad , \quad q(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

واضح أن $q(x)$ غير تحليلية عند النقطة $x = 0$ ومنه هذه النقطة تعتبر نقطة شاذة , والأن لنعرف الدوال

$$xp(x) = 0 \quad , \quad x^2 q(x) = x^2 - 2$$

الدالتان السابقتان $x^2q(x)$, $xp(x)$ كلتاهما دالتان تحليليتان عند النقطة $x=0$ وبهذا فإن النقطة $x=0$ تكون نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية المعطات .

نفرض الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

ومنه تكون y',y'' على النحو التالي :

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

و بتعويض كل من y,y,y'' في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+r}=0$$

حتى نستطيع تجميع الحدود (لجعلها جميعا تحتوي على x^{n+r}) نستبدل n ب $n-2$ في السلسلة الثانية فنجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+r}=0$$

ومنه نجد :

$$[r(r-1)-2]a_0x^r+[r(r+1)-2]a_1x^{1+r}+\sum_{n=0}^{\infty}[[(n+r)(n+r-1)-2]a_n+a_{n-2}]x^{n+r}=0$$

بمساوات معاملات قوى x الصغرى (بمعنى معاملات x^r) بالصفر , نحصل على المعادلة الدليلية

$$[r(r-1)-2]a_0=0$$

بفرض $a_0\neq 0$ نجد :

$$r(r-1)-2=0\Rightarrow r_1=2,r_2=-1$$

نلاحظ أن r_1-r_2 عددا صحيحا وهي الحالة الثالثة , بمساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر , نحصل على :

$$\begin{cases}a_1=0\\ a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)(n+r-1)-2}\quad,\quad n\geq 2\quad,\quad ....(*)\end{cases}$$

1. من أجل : $r = r_1 = 2$, تتحول العلاقة التكرارية (*) الى :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+3)} \quad , \quad n \geq 2$$

ومنه نجد :

$$a_3 = -\frac{1}{3.6}a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = a_3 = a_5 = ... = a_{2n+1} = 0$$

و

$$a_2 = -\frac{1}{10}a_0 \ , \ a_4 = -\frac{1}{24}a_2 = \frac{1}{240}a_0 \ , \ a_6 = -\frac{1}{54} = -\frac{1}{12960}a_0 \ , \ .....$$

عبارة الحل الأول تكون على الصورة :

$$y_1(x) = y(x, r_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + ...$$

ومنه :

$$y_1(x) = a_0x^2 - \frac{1}{10}a_0x^4 + \frac{1}{240}a_0x^6 - \frac{1}{12960}a_0x^8 + ...$$

$$\Rightarrow y_1(x) = a_0x^2(1 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{240}x^4 - \frac{1}{12960}x^6 + ...)$$

2. من أجل : $r = r_2 = -1$, تتحول العلاقة التكرارية (*) الى :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-3)} \quad , \quad n \geq 2 \quad ...(**)$$

لدينا قيمة a_3 غير معينة لأنه بوضع $n = 3$ في العلاقة التكرارية (**) نجد أن $(a_3 = \frac{0}{0})$ ومنه حسب (النظرية 11) نفرض أنه a_3 ثابت إختياري ومنه نجد :

$$a_2 = -\frac{1}{2.(-1)}a_0 = \frac{1}{2}a_0$$

$$a_3 = a_3$$

$$a_4 = -\frac{1}{4.1}a_2 = -\frac{1}{4.2}a_0 = -\frac{1}{8}a_0$$

$$a_5 = -\frac{1}{5.2}a_3 = -\frac{1}{10}a_3$$

$$a_6 = -\frac{1}{6.3}a_4 = -\frac{1}{8.6.3}a_0 = \frac{1}{144}a_0$$

$$a_7 = -\frac{1}{7.4}a_5 = \frac{1}{10.7.4}a_3 = \frac{1}{280}a_3$$

$$a_8 = -\frac{1}{8.5}a_6 = -\frac{1}{144.8.5}a_0 = -\frac{1}{5760}a_0$$
$$a_9 = -\frac{1}{9.6}a_7 = -\frac{1}{280.9.6}a_3 = -\frac{1}{15120}a_3$$

وهكذا....

ومنه عبارة الحل العام تكون على الصورة :

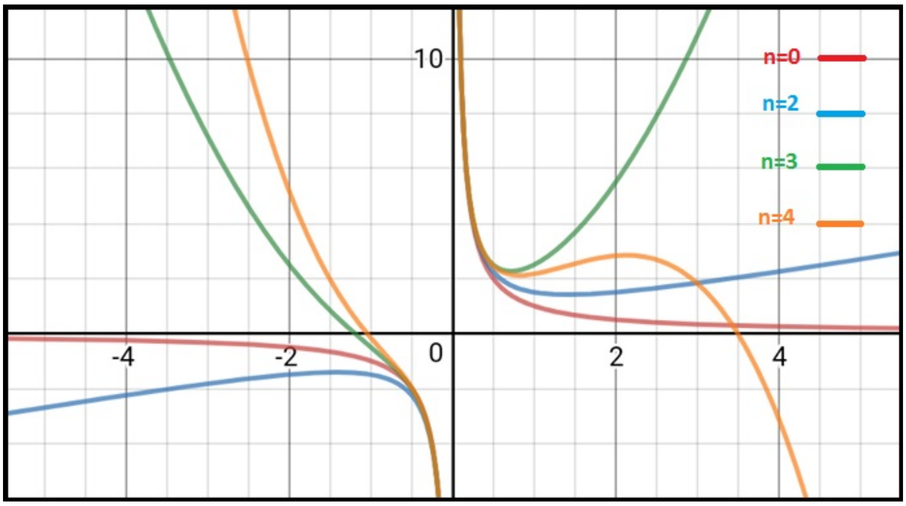
$$y(x) = y_2(x) = y(x, r_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

ومنه :

$$y(x) = a_0 \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{1}{5760}x^8 + ...\right)$$
$$+ a_3 x^3 \left(1 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{280}x^4 - \frac{1}{15120}x^6 + ...\right)$$

بفرض أن

$a_0 = 1, a_1 = 1$ وبإعطاء قيم مختلفة ل n في الحل نتحصل على التمثيل البياني التالي :



شكل 5.2: التمثيل البياني للحدود الاولى للحل التحليلي للمعادلة المعطاة

الفصل الثالث

دراسة حالة خاصة (معادلة ليجندر [1])

قائمة المحتويـــــــــات

[1] أدريان ماري ليجاندر (1752-1833) عالم رياضيات فرنسي

معادلة ليجندر التفاضلية هي معادلة من الصورة :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + k(k+1)y = 0 \qquad (1.3)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2.3)$$

حيث k ثابت و

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \quad , \quad q(x) = \frac{k(k+1)}{1-x^2}$$

واضح أن كل من $p(x)$ و $q(x)$ غير معرفة عند $x = \pm 1$, ولكن $(x \pm 1)p(x)$ و $(x \pm 1)^2 q(x)$ تحليليتان عند هاتين النقطتين , ولهذا فإن هاتين النقطتين هما نقطتان شاذتان منتظمتان .
أما النقطة $x = 0$ فهي نقطة عادية للمعادلة , والمسافة بين هذه النقطة العادية وأقرب نقطة منفردة هي 1 , إذا فنصف قطر تقارب سلسلة الحل بجوار النقطة العادية هو $R_c = 1$, أي أن السلسلة متقاربة من أجل $|x| < 1$.
ويجب أعتبار $k \geq -1$ لأنه إذا كانت $k \leq -1$ فإنه يمكن كتابتها على الصورة $k = -(1+\delta)$ حيث $\delta > 0$ وبالتعويض في المعادلة التفاضلية (1.3) نجد :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \delta(\delta+1)y = 0 \qquad (3.3)$$

وهي نفس معادلة ليجندر

1.3 حل المعادلة :

لحل المعادلة وبما أن النقطة $x = 0$ نقطة عادية لمعادلة ليجندر التفاضلية ومن خلال (النظرية 8) نجد :
بفرض الحل على الصورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

يكون لدينا

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

وبالتعويض في المعادلة (1.3) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} k(k+1)a_n x^n = 0$$

وبمساوات مجموع معاملات x^{n-2} بالصفر نحصل على العلاقة التكرارية التالية :

$$a_n = \frac{(k-n+2)(k+n-1)}{n(n+1)} a_{n-2} \quad n \geq 2$$

من هذه العلاقة وبإعتبار $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$ إختياريين يمكن حساب جميع المعاملات بدلالة كل من a_0 , a_1 كما يلي :

$$a_2 = -\frac{k(k+1)}{2!} a_0$$

$$a_3 = -\frac{(k-1)(k+2)}{3!} a_1$$

$$a_4 = -\frac{(k-2)k(k+1)(k+3)}{4!} a_0$$

$$a_5 = -\frac{(k-3)(k+1)(k+2)(k+4)}{5!} a_1$$

$$a_6 = -\frac{(k-4)(k-2)k(k+1)(k+3)(k+5)}{6!} a_0$$

$$a_7 = -\frac{(k-5)(k-3)(k-1)k(k+2)(k+4)k+6}{7!} a_1$$

وهكذا ...

واضح أن المعاملات ذات الدليل الزوجي تعطى بدلالة المعامل a_0 , والمعاملات ذات الدليل الفردي تعطى بدلالة المعامل a_0

الحل العام يكون على الصورة :

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

حيث

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k(k-2)(k-4)...(k-2n+2)(k+1)(k+3)...(k+2n-1)}{(2n)!} x^{2n}$$

$$= 1 - \frac{k(k+1)}{2!} x^2 + \frac{(k-2)k(k+1)(k+3)}{4!} x^4 - \frac{(k-4)(k-2)k(k+1)(k+3)(k+5)}{6!} x^6 + ...$$

و

$$y_2 = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(k-1)(k-3)...(k-2n+1)(k+2)(k+4)...(k+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$= x - \frac{(k-1)(k+2)}{3!}x^3 + \frac{(k-3)(k+1)(k+2)(k+4)}{5!}x^5 - \frac{(k-5)(k-3)(k-1)k(k+2)(k+4)k+6}{7!}x^7 + ...$$

ملاحظة 9 :

1. إذا كان $k = 2m$ (عدد صحيح زوجي موجب) , نلاحظ من عبارة $y_1(x)$ أن الحدود تصبح معدومة من أجل $n \geq m+1$ وتكتب في هذه الحالة على الصورة :

$$y_1 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{k(k-2)(k-4)...(k-2n+2)(k+1)(k+3)...(k+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}$$

وهي عبارة عن كثير حدود من الدرجة $2m$ ويحتوي على القوى الزوجية فقط ل x.
وعلى سبيل المثال
من أجل $k = 2$ فإن $n \leq 1$ ولدينا :

$$y_1(x) = 1 - 3x^2$$

ومن أجل $k = 4$ فإن $n \leq 2$ ولدينا :

$$y_1(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$$

2. إذا كان $k = 2m+1$ (عدد صحيح فردي موجب) , نلاحظ من عبارة $y_2(x)$ أن الحدود تصبح معدومة من أجل $n \geq m+1$ وتكتب في هذه الحالة على الصورة :

$$y_2 = x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(k-1)(k-3)...(k-2n+1)(k+2)(k+4)...(k+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

وهي عبارة عن كثير حدود من الدرجة $2m+1$ ويحتوي على القوى الفردية فقط ل x.
وعلى سبيل المثال
من أجل $k = 1$ لدينا :

$$y_2(x) = x$$

ومن أجل $k = 3$ لدينا :

$$y_2(x) = x - \frac{5}{3}x^3$$

2.3 كثير حدود ليجندر :

نعرف كثير حدود ليجندر $P_k(x)$ بإنه هو حل على صورة كثير حدود لعادلة ليجندر والذي يحقق الشرط :

$$P_k(1) = 1$$

أي أنه لا يحتوي السلسلة المتباعدة عند $x = 1$ أي :

* من أجل k عدد زوجي صحيح لدينا

$$P_k(x) = a_0 y_1(x)$$

* من أجل k عدد فردي صحيح لدينا

$$P_k(x) = a_1 y_2(x)$$

حيث y_1, y_2 هما عبارة عن كثير حدود كما رأينا في (الملاحظة 9).

العلاقة العامة لكثير حدود ليجندر تعطى على الصورة :

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{(2k-2n)!}{2^k n!(k-n)!(k-2n)!} x^{k-2n} \tag{4.3}$$

حيث $N = \dfrac{k}{2}$ من أجل k عدد زوجي , و $N = \dfrac{k-1}{2}$ من أجل k عدد فردي .

من خلال العلاقة (4.3) نجد :

$$P_0(x) = 1$$

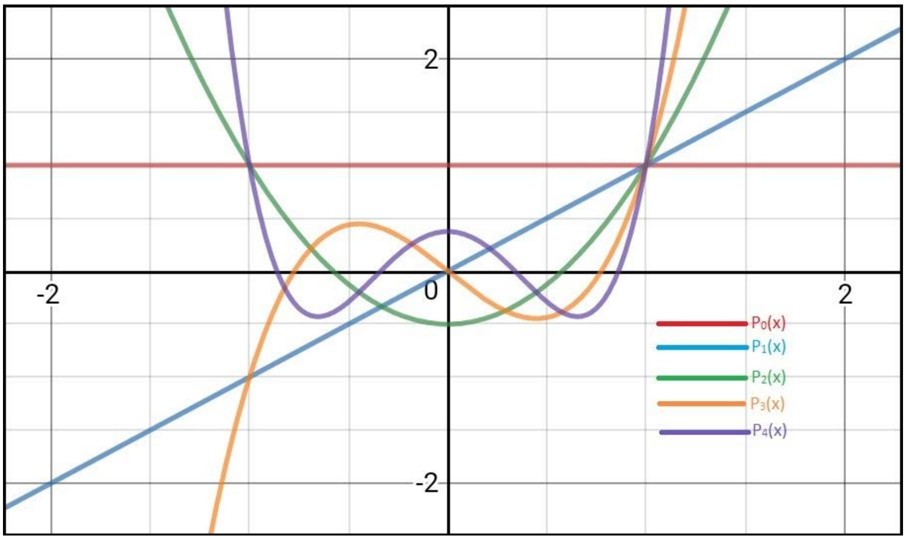
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

الشكل الموالي يوضح التمثيل البياني لكثيرات حدود ليجندر السابقة :



شكل 1.3: بعض كثيرات حدود ليجندر

3.3 صيغة رودريج [2] لكثير حدود ليجندر :

بفرض أن :

$$\varphi = (x^2 - 1)^k \tag{5.3}$$

نشتق (5.3) فنحصل على :

$$\varphi'(x^2 - 1) - 2kx\varphi = 0 \tag{6.3}$$

نشتق مرة ثانية فنحصل على :

$$(1 - x^2)\varphi'' + 2(k-1)x\varphi' + 2k\varphi = 0 \tag{7.3}$$

نشتق (7.3) n مرة وذلك من خلال إستخدام صيغة ليبنز [3] للإشتقاق النوني التالية :

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \frac{d^n u}{dx^n}v + n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}u}\frac{dv}{dx} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + u\frac{d^n v}{dx^n}$$

نحصل على :

$$(1 - x^2)\varphi^{(n+2)} + 2(k-n-1)x\varphi^{(n+1)} + (2k-n)(n+1)\varphi^{(n)} = 0 \tag{8.3}$$

نضع

$$\varphi_n = \varphi^{(n)} = \frac{d^n\varphi}{dx^n}$$

[2] بن يامين أليند رودريج (1795-1851) عالم رياضيات فرنسي

[3] غوتفريد ليبنز(1646-1716) فيلسوف وعالم رياضيات ودبلوماسي ومكتبي ومحامي ألماني

في (8.3) نجد :

$$(1-x^2)\varphi_n'' + 2(k-n-1)x\varphi_n' + (2k-n)(n+1)\varphi_n = 0 \tag{9.3}$$

عندما $n = k$ نجد :

$$(1-x^2)\varphi_n'' - 2x\varphi_n' + k(k+1)\varphi_n = 0 \tag{10.3}$$

المعادلة (10.3) تعبر عن معادلة ليجندر ولكن مع :

$$\varphi_k = \frac{d^k\varphi}{dx^k} \tag{11.3}$$

العلاقة (11.3) تعبر عن كثير حدود من الرتبة k ووفقا لكثير الحدود هذا فإن معادلة ليجندر لها حل وحيد يتبع كثير الحدود هذا .

بضرب العلاقة (11.3) بثابت c نجد :

$$P_k(x) = c\varphi_k = c\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k \tag{12.3}$$

عندما $n = 0$ في العلاقة (4.3) نجد :

$$P_k(x) = \frac{(2k)!}{2^k(k^2)!}x^k \tag{13.3}$$

وبأخذ العلاقة (12.3) بأكبر أس نجد بالمساواة مع (13.3) مايلي :

$$\begin{aligned} P_k(x) = c\varphi_k = c\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k &\approx c\frac{d^k}{dx^k}(x^{2k}) \\ \Rightarrow \frac{(2k)!}{2^k(k^2)!}x^k \approx c\frac{d^k}{dx^k}(x^{2k}) &= c\frac{(2k)!}{k!}x^k \\ \Rightarrow c &= \frac{1}{2^k k!} \end{aligned}$$

بتعويض قيمة c في (12.3) نجد مايلي :

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k \tag{14.3}$$

العلاقة (14.3) تمثل صيغة رودريج لكثير حدود ليجندر وهي حل لمعادلة ليجندر

ومنه ومن خلال صيقة رودريج (14.3) نجد :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

وهي نفس النتائج المتحصل عليها من العلاقة (4.3)

4.3 الدالة المولدة لكثير حدود ليجندر :

الدالة المولدة لكثير حدود ليجندر تعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xv+v^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n v^n$$

ولإثبات ذلك نتبع مايلي :

بنشر المقام في الحد الأول من المساوات السابقة وفق نظرية ثنائي الحد لنيوتن [4] نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xv+v^2}} = [1-2xv+v^2]^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}v(2x-v)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})}{2!}v^2(2x-v)^2+...$$
$$= 1 + xv + \frac{1}{2}(3x^2-1)v^2 + ...$$
$$P_0(x) + P_1(x)v + P_2(x)v^2 + ...$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n v^n$$

5.3 الخواص الأساسية لكثير حدود ليجندر [5]:

1. $P_n(1) = 1$
2. $P_n(-1) = (-1)^n$
3. $P_n(0) = 0$ من أجل n فردي , و $P_n(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$ من أجل n زوجي $n = 2m$

البرهان 7 :

[4] إسحاق نيوتن (1642-1727) عالم رياضيات وفيزياء إنجليزي

[5] [7] كتاب المعادلات التفاضلية الجزء الثاني .

1. من أجل $x = 1$ في الدالة المولدة نجد :

$$(1-2v+v^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)v^n$$

$$\Rightarrow (1-v)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)v^n$$

$$\Rightarrow 1+v+v^2+v^3+... = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)v^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} v^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)v^n$$

$$\Rightarrow 1 = P_n(1)$$

2. من أجل $x = -1$ في الدالة المولدة نجد :

$$(1+2v+v^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)v^n$$

$$\Rightarrow (1+v)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)v^n$$

$$\Rightarrow 1-v+v^2-v^3+...+(-1)^n v^n+... = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)v^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n v^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)v^n$$

$$\Rightarrow (-1)^n = P_n(-1)$$

3. من أجل $x = 0$ في الدالة المولدة نجد :

$$(1+v^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)v^n$$

$$\Rightarrow 1+(-\frac{1}{2})v^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})}{2!}v^4+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}v^6+... = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)v^n$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}v^2+(-1)^2\frac{(1)(3)}{2^2 2!}v^4+(-1)^3\frac{(1)(3)(5)}{2^3 2!}v^6+... = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)v^n$$

من الواضح أنه إذا كانت n فردية فإن $P_n(0)=0$, أما إذا كانت $n=2m$ زوجية فإن :

$$(-1)^m\frac{(1)(3)(5)...(2m-1)}{2^m m!}=P_n(0)$$

$$\Rightarrow (-1)^m\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}=P_n(0)$$

6.3 العلاقات التكرارية لكثير حدود ليجندر [6]:

1. $P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$
2. $P_n(x)+2xP_n'(x)=P_{n+1}'(x)+P_{n-1}'(x)$
3. $P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$
4. $xP_n'(x)=P_{n-1}'(x)+nP_n(x)$

البرهان 8 :

1. بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى v نجد :

$$-\frac{1}{2}(1-2xv+v^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2v)=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)v^{n-1}$$

$$\Rightarrow (x-v)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)v^n=(1-2xv+v^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)v^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)v^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)v^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)v^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2xnP_n(x)v^n+\sum_{n=0}^{\infty}xP_n(x)v^{n+1}$$

بمساواة معامل v^n في الطرفين نحصل على :

$$xP_n(x)-P_{n-1}(x)=(n-1)xP_{n+1}(x)-2nP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow (n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

[6] [7] كتاب المعادلات التفاضلية الجزء الثاني .

2. بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى v نجد :

$$-\frac{1}{2}(1-2xv+v^2)^{-\frac{3}{2}}(-2v)=\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(x)v^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)v^n=(1-2xv+v^2)\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(x)v^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)v^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(x)v^n-\sum_{n=0}^{\infty}2xP'_n(x)v^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(x)v^{n+2}$$

بمساوات معامل v^{n+1} في الطرفين نحصل على :

$$P_n(x)=P'_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x)$$

$$P_n(x)+2xP'_n(x)=P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)$$

3. بتفاضل طرفي العلاقة (1) بالنسبة إلى x نجد :

$$P'_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}[xP'_n(x)+P'_n(x)]-\frac{n}{n+1}P'_{n-1}(x)$$

من العلاقة (2) والتعويض عن :

$$xP'_n(x)=\frac{1}{2}[P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)-P_n(x)]$$

نجد :

$$P'_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}[\frac{1}{2}(P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)-P_n(x))+P'_n(x)]-\frac{n}{n+1}P'_{n-1}(x)$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{1}{2(n+1)}P'_n(x)=\frac{1}{2(n+1)}P_{n-1}(x)+\frac{2n+1}{2(n+1)}P_n(x)$$

$$\Rightarrow P'_{n+1}(x)=P'_{n-1}(x)+(2n+1)P_n(x)$$

$$\Rightarrow P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$$

4. بجمع العلاقتين (2),(3) نجد:

$$P_n(x)+2xP'_n(x)+P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)+(2n+1)P_n(x)$$

$$\Rightarrow 2xP'_n(x)=2P'_{n-1}(x)+2nP_n(x)$$

$$\Rightarrow xP'_n(x)=P'_{n-1}(x)+nP_n(x)$$

الخاتمة

بفضل من الله وتوفيقه أتممت إعداد هذه المذكرة

والتي بعنوان :

(الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية)

قمت فيها بدراسة أحدى الطرق المعتمدة لحل المعادلات التفاضلية

الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة وذلك من خلال

التعبير عن الحل بسلسلة قوى ثم البحث عن هذا الحل عند نقطة معينة

في حالة ما إذا كانت هذه النقطة نقطة عادية أو نقطة شاذة وأتمنى من الله عز

وجل أن تكون قد نالت إعجابكم ، فقد جمعت لكم فيها مجموعة من المعلومات المهمة

بعد مشوار طويل من البحث والاطلاع وتجميع لهذه المعلومات من مصادرها القيمة

هذه المذكرة لا أستطيع أن أقول عنها بأنها شاملة وتتصف بالكمال ، لأن كل شيء ناقص

ويحتاج إلى المزيد ، وإن كان الله تعالى قد وفقني في كتابة هذه المذكرة فإنني أعتبر ذلك

مكافأة منه لي تعويضًا لما بذلته من جهد وتفكير ، وإن لم يوفقي الله تعالى به فإن

لي شرف المحاولة وجزاء نشر العلم، وأخيرًا بعد أن أنتهيت من هذا المذكرة

أتمنى من الله عز وجل أن أكون قد وفقت في ذلك

وصلى الله تعالى وسلم على أشرف الخلق والمرسلين

سيدنا محمد وعلى اله وصحبه أجمعين

.

المراجع العلمية

[1] د.عايش الهنادوة-د.إسماعيل بوقفة (كتاب المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات)- جامعة العلوم والتكنولوجيا اليمنية.

[2] د.بخيت نفيع المطرفي -د.عبدالله عبدالله موسى (كتاب المعادلات التفاضلية النظرية والتطبيق) -جامعة الطائف بالمملكة العربية السعودية - الطبعة الأولى 1433ه-2012م.

[3] د.وليم بويس - د.ريتشارد دبريما *ترجمة* د.أحمد علاونة - د.حسن العزة(مبادئ في المعادلات التفاضلية)- قسم الرياضيات الجامعة الأردنية -ديوان المطبوعات الجامعية -الجزائر 1983.

[4] د.زيد الأمير (كتاب المعادلات التفاضلية)- ديوان المطبوعات الجامعية -الجزائر 1979.

[5] د.زيد الأمير-د.معروف بسوت لليش -د.محمد كردي (كتاب المعادلات التفاضلية الجزء الأول)- كلية العلوم جامعة حلب - 1424ه-2003م.

[6] د.حسن مصطفى العوضي-د.عبدالوهاب عباس رجب-د.سناء علي زارع (كتاب المعادلات التفاضلية - الجزء الأول)- كلية التربية للبنات بالرياض -دار الرشد 2005.

[7] د.حسن مصطفى العوضي-د.عبدالوهاب عباس رجب-د.سناء علي زارع (كتاب المعادلات التفاضلية - الجزء الثاني) -كلية التربية للبنات بالرياض - دار الرشد 2005.

[8] د.مصطفى عسيلة - دروس في المعادلات والجمل التفاضلية-جامعة قاصدي مرباح ورقلة .

[9] سلسلة محاضرات الجلالي في الفيزياء -2011/12/07

الملخص

في هذه المذكرة قمنا بتقديم طريقة تحليلية لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات العوامل المتغيرة التي يصعب حلها بالطرق العادية وذلك بإستخدام السلاسل و هذا بالإعتماد على عدة نظريات ونتائج مع إدراج بعض الأمثلة لتسهيل عملية الفهم.

Résumé

Dans cette mémoire nous présentons une méthode analytique pour résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre avec des coefficients variables qui sont difficiles à résoudre par les méthodes classique en utilisant les séries entier et ceci est basé sur plusieurs théories et résultats avec quelques exemples pour faciliter la compréhension.

Abstract

In this work , we purpose the analytical method for solving the second order linear differential equations with variable coefficients ,using the whole series and this is based on several theories and results with some examples to facilitate comprehension.