جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلّية الرياضيات و علوم المادّة

قسم الرّياضيّات

الميدان: رياضيات و إعلام آلي

الشّعبة: رياضيات

التخصّص: تحليل دالّي

تحت عنوان

بعض خواص المؤثرات الخطية في الفضاءات النظيمية

من إعداد الطالب :

- فريد بن عامر

تحت إشراف الأستاذ :

- عبد الكريم بن الشّيخ

نوقشت يوم 09 جوان 2018 من طرف أعضاء اللّجنة :

الأستاذ :محمّد معمري	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
الأستاذ :حسين عبّاسي	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
الأستاذ :عبد الكريم بن الشّيخ	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

السّنة الجامعية 2017-2018

شكــر وعرفــان

إنّ الحمد لله وحده والصّلاة والسّلام على من لا نبيّ بعده

أمّا بعد:

لكلّ عمل فضل يبسط يديه للّذين بذلوا شاقّ الجهد ويسّروا العسير بقدرة الصّمد القدير، وإنّا لنجد برهانا على ذلك في ظلّ أستاذنا المشرف على مذكّرتنا "عبد الكريم بن الشّيخ" الّذي أمدّنا بما أجادت قريحته العلمية والمعرفية والتّربوية مدّ السّماء بغيثها بإذن الحيّ القيّوم على نبات حديقة العلم المنبثقة من جامعة قاصدي مرباح -ورقلة-، وما زادها نضارة وزهوا أساتذة تخصّص التحليل الدّالّي الّذين جعلوا أمامهم احتراما وتقديرا، وقوف المطيع للمطاع، دون أن نغضّ الطّرف بالشّكر والثّناء عن إخواننا الطّلبة المقرّبين بصلة العلم في فيحاء الأخوة والسّند والصّبر، وإنّنا نشهر الشّكر الممزوج بأطياف الملازمة لكلّ طلبة التخرج دفعة 2018 راجين من المولى العليّ القدير كلّ التوفيق والفلاح.

- شكر خاصّ للزّميلين والصّديقين المقرّبين زانو مراد و قّولي نور الدّين ، و شكر حارّ أيضا أخصّ به إداريي قسم الرّياضيّات

إهــداء

في هذا اليّوم قرّرت تقديم أسمى عبارات الشّكر بدل تلك الإهداءات فبك أبدأ يا قرةّ عيني ، يا خيوط الذّهب الأصيل، يا نبضي في الحياة ومعشوقتي حتّ المات إليك يا أمّي، أتمّعن النّظر في عينيك فلا أجد غير صديقي مختبأ، صديق كان في الضّرّاء قبل السّرّاء، وليّ أمري مهما إزداد وزني، أسد في ملامحه مندفع وعطف في قلبه مختبأ،أبي العزيز، ذكرت العطف والحنان فكيف لي أن أنساك يا أمّ النصائح يا رفعة الرّأس يا قلبا لم يضق بي بل اتّسع إلى جميع أخوتي و أخواتي، فأرجو أن يطيل الله أعماركم في عبادته و طاعته.

كما أهدي ثمرة الجهد خاصّتي إلى جميع تلاميذي، أصدقائي و زملاء الدّراسة و كلّ معلّمينا و أساتذتنا طول مشوارنا الدّراسي

أختم إهدائي بمن يحيا في القلب لا على الأرض بكما جدّي وجدّتي، آخر الكلمات وآخر حروفي دائما أنتما، أسكنكما الله فسيح جنّاته.

فريد بن عامر

الفهرس

مقدّمة 1

الفصل 1
عموميات ومفاهيم أساسية 2

1.1 الفضاء المتري 3
2.1 النّظيم 4
1.2.1 نصف النّظيم 4
2.2.1 النّظيم 4
3.2.1 الفضاءات النّظيمية الجزئية 5
4.2.1 النّظيمات الأساسية 6
5.2.1 فضاء الجداء 6
6.2.1 الكرة و السّطح 7
7.2.1 النّظيمات المتكافئة 7
8.2.1 الفضاءات ذات البعد المنتهي 8
9.2.1 الجزء المحدود 9
10.2.1 طبولوجيا الفضاء النّظيمي 9
3.1 الفضاء البّناخي 11
4.1 التّراصّ في الفضاءات النّظيميّة 12

الفصل 2
المؤثّرات الخطّيّة في الفضاءات النّظيميّة 14

1.2 المؤثّرات الخطّيّة 16
1.1.2 المؤثّر 16
2.1.2 المؤثّر الخطّي 16
3.1.2 نظيم المؤثّر 16
4.1.2 العمليات على المؤثّرات 17
5.1.2 بيان مؤثّر 18
6.1.2 نواة مؤثّر 18
7.1.2 تطابق مؤثّرين 19
8.1.2 تمديد مؤثّر 19
9.1.2 تقايس مؤثّر 20
2.2 المؤثّرات الخطّيّة المحدودة 20
3.2 المؤثّرات الخطّيّة المستمرّة 23
1.3.2 العلاقة بين المؤثّرات الخطّيّة المحدودة و المستمرّة 25
2.3.2 الشّكل الخطّي 26
4.2 المؤثّر القابل للقلب 27
1.4.2 نظرية وجود واستمرار المؤثّر المقلوب 28
5.2 المؤثّر القرين 29
1.5.2 مفهوم القرين في الفضاء النّظيمي 29
2.5.2 خصائص المؤثّرات القرينة 32
6.2 المؤثّر النّظامي 33
7.2 تقارب متتالية المؤثّرات الخطّيّة 33
1.7.2 التّقارب بالنّظيم 33
2.7.2 التّقارب البّسيط 34
3.7.2 التّقارب الضّعيف 34
8.2 المؤثّرات المتراصّة 35
1.8.2 الخواصّ الأساسية للمؤثّرات المتراصّة 36
9.2 المؤثّرات المغلقة 37
1.9.2 بعض خواصّ المؤثّرات المغلقة في الفضاء البناخي 38
2.9.2 المؤثّرات القابلة للغلق 41

الفصل 3

الدّراسة الطّيفية

1.3 القيم الذّاتيّة 43
2.3 الاشعّة الذّاتية 44
3.3 القيم النّظامية 45
4.3 طيف المؤثّر الخطّي 46
5.3 أقسام الطّيف 48
1.5.3 الطّيف النّقطي 48
2.5.3 الطّيف المستمرّ 48
3.5.3 الطّيف البّاقي 49
6.3 نصف قطر الطّيف 50
7.3 نظرية صورة الطّيف 50
8.3 طيف المؤثّر المتراصّ 52
1.8.3 النّظرية الطّيفية للمؤثّرات المتراصّة 52
خــاتمة 54

مقدّمــــــة

يمثّل التّحليل الدّالّي فرعا هامّا من التّحليل الرّياضياتي، فرغم حداثته إلاّ أنه نال إهتمام كثير من النّاشطين في مجال الرّياضيّات، و من أهمّ مواضيعه **المؤثّر ونظرية الأطياف** وهذا ما تطرّقنا إليه في مذكّرتنا، ولكن بشكل خاصّ في **الفضاء النّظيمي (والفضاء البناخي)** فقد سلّطنا الضّوء على مفهوم المؤثّرات وبعض أنواعها، أهم مبرهناتها وكذا نظرية الأطياف، وهذا تمّ على ثلاث مراحل:

تناولنا في الفصل الأوَل عموميات حول الفضاء النّظيمي والبناخي، وأهمّ خصائصهما بإعتبارهما فضاء العمل

و في الفصل الثّاني تطرّقنا إلى مفهوم المؤثّرات الخطّيّة وأنواعها وبعض خواصّها في الفضاء النّظيمي

في الفصل الأخير حاولنا أن نعطي فيه تعريفا للنّظرية الطّيفية، وما تشتمله من مفاهيم.

الفصل

1

عموميات ومفاهيم أساسية

1.1 الفضاء المتري 3
2.1 النّظيم 4
1.2.1 نصف النّظيم 4
2.2.1 النّظيم 4
3.2.1 الفضاءات النّظيمية الجزئية 5
4.2.1 النّظيمات الأساسية 6
5.2.1 فضاء الجداء 6
6.2.1 الكرة و السّطح 7
7.2.1 النّظيمات المتكافئة 7
8.2.1 الفضاءات ذات البعد المنتهي 8
9.2.1 الجزء المحدود 9
10.2.1 طبولوجيا الفضاء النّظيمي 9
3.1 الفضاء البّناخي 11
4.1 التّراصّ في الفضاءات النّظيميّة 12

1.1 الفضاء المتري

تعريف

لتكن X مجموعة كيفية غير خالية

نسمّي مسافة على X كلّ تطبيق d معرّف من $X \times X$ نحو $\mathbb{R}^+$، ويحقّق الشّروط التّالية:

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall x, y, z \in X, \quad d(x,y) + d(y,z) \leqslant d(x,z)$

❑ يدعى الزّوج (X,d) فضاءا متريا، و نقول اختصارا X فضاء متري

مثال

مجموعة الأعداد الحقيقية المزوّدة بالمسافة الإعتيادية والمعرّفة على النّحو التّالي:

$$d(x,y) = \mid x - y \mid$$

هي فضاء متري.

المتتالية الكوشية

تعريف

نسمّي متتالية كوشية من فضاء متري (X,d) كلّ متتالية $(x_n)_n$ تتمتّع بالخاصّيّة التّالية:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$$

قضية 1.1.1

تكون متتالية $(x_n)_n$ من فضاء متري (X,d) كوشية إذا وفقط إذا حقّقت أحد الشّرطين التّاليين:

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_k, x_{n_k}) \leqslant \varepsilon$
2. $\lim\limits_{k \to \infty} \delta(A_k) = 0$

$\delta(A_k)$ يرمز لقطر المجموعة، حيث: $\delta(A_k) = \sup\limits_{x,y \in A_k} d(x,y)$

الفضاء المتري التّام

تعريف

نقول عن فضاء متري (X,d) إنّه تامّ إذا و فقط إذا كانت كلّ متتالية كوشية منه متقاربة فيه.

2.1 النّظيم

1.2.1 نصف النّظيم

تعريف

ليكن X فضاء شعاعيا على $\mathbb{K}$
نقول عن تطبيق N معرّف من X نحو $\mathbb{R}$ إنّه نصف نظيم على X إذا و فقط إذا حقّق الشّروط الثّلاث الآتية:

1) - $\forall x \in X, \quad N(x) \geqslant 0$

2) - $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \quad N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$

3) - $\forall x \in X, \forall y \in X, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

ملاحظة 2.1.1

يدعى [ش1] شرط الإيجاب، أمّا [ش2] فيدعى بشرط التّجانس
نسمّي [ش3] شرط متباينة المثلّث أو المتباينة المثلّثيّة.

مثال

القيمة المطلقة في $\mathbb{R}$ والطّويلة في $\mathbb{C}$ تعرّفان نصف نظيم.

2.2.1 النّظيم

تعريف

نسمّي نظيما على فضاء شعاعي X، كلّ تطبيق N من X نحو $\mathbb{R}$ يحقّق علاوة على الشّروط الثّلاثة

([ش1]، [ش2]و[ش3]) المذكورة أعلاه الشّرط الرّابع التّالي:

$$N(x)=0 \Longrightarrow x=0$$

نقول عن هذا الشّرط إنّه شرط الفصل.

ترميز

يرمز للنّظيم N بالرّمز $\|\cdot\|$.

ملاحظة 2.2.1

يسمّى الزّوج (X,N) فضاءا شعاعيا نظيميا، ونكتب اختصارا ف.ش.ن.

مثال

القيمة المطلقة في $\mathbb{R}$ والطّويلة في $\mathbb{C}$ تعرّفان نظيم.

مثال

في الفضاء $\mathbb{C}^n$، التّطبيق $\|\cdot\|_p\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث $1\leqslant p\leqslant\infty$، المعرّف بـ :

$$\|x\|_p=\begin{cases} \underset{1\leqslant i\leqslant n}{Sup}|\xi_i| & ;p=\infty \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & ;1\leqslant p<\infty \end{cases}$$

نظيم على $\mathbb{C}^n$، حيث $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$

3.2.1 الفضاءات النّظيمية الجزئية

تعريف

يكون الفضاء الشّعاعي الجزئي Y فضاء نظيميا جزئيا من X إذا مازوّد بمقصور نظيم X عليه، إنّ هذا المقصور يعرّف نظيما على Y.

قضية 1.2.1

الفضاء الشّعاعي النّظيمي $(X,\|\cdot\|)$ يكون فضاء متريا إذا زوّد بالمسافة التّالية:

$$d(x,y)=\| x-y \|, \forall x,y\in X$$

عندها نكتب :

$$\forall x,y\in X,\forall\lambda\in\mathbb{K}; d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda| d(x,y)$$

نتيجة

كلّ فضاء شعاعي نظيمي هو فضاء متري.

4.2.1 النّظيمات الأساسية

النّظيمات الأساسية على $\mathbb{R}^n$

إذا كان x عنصرا من $\mathbb{R}^n$، مركّباته $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ وضعنا

1. $\| x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$
2. $\| x\|_2 = (\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2)^{\frac{1}{2}}$
3. $\| x\|_3 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$

يدعى النّظيم $\| \cdot \|_2$ بالنّظيم الإقليدي، بينمايدعى النّظيم $\| \cdot \|_\infty$ بنظيم التّقارب المنتظم.
يمكننا أن نلحق بهذه الطّائفة نظيم هولدر الموالي

4. $\| x\|_p = (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ (حيث $1 \leqslant p < +\infty$)

النّظيمات الأساسية على $C([a,b],\mathbb{R})$

من أجل كلّ عنصر f من $C([a,b],\mathbb{R})$ نضع

1. $\| f\|_1 = \int\limits_a^b |f(t)|dt$
2. $\| f \|_2 = (\int\limits_a^b (f(t))^2 dt)^{\frac{1}{2}}$
3. $\| f\|_\infty = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t)|$
4. $\| f\|_p = (\int\limits_a^b (f(t))^p dt)^{\frac{1}{p}}$ (حيث $1 \leqslant p < +\infty$)

5.2.1 فضاء الجداء

تعريف

لتكن $(X_i, \| \cdot \|_i)$ حيث $i = 1, 2, ..., n$، فضاءات شعاعية نظيمية على نفس الحقل $\mathbb{K}$.
معلوم أنّ الجداء $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.
من الواضح أنّ التّطبيقات المعرّفة من X في $\mathbb{R}$ كالتّالي:

1. $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|_i$

2. $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \|x\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

3. $\|x\|_\infty = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{sup} \left(\|x_i\|_i\right)$

حيث

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)\,; x_i \in X_i$$

تعرّف نظيمات على X.

6.2.1 الكرة و السّطح

تعريف

نزوّد $\mathbb{R}^n$ بنظيم $\|\cdot\|$ وليكن $r > 0$ و$a \in \mathbb{R}$ نسمّي المجموعة (الجزئية من $\mathbb{R}^n$):

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x - a \| < r\}$$

الكرة المفتوحة ذات المركز a ونصف القطر r (بالنّسبة للنّظيم $\|\cdot\|$).
نسمّي المجموعة (الجزئية من $\mathbb{R}^n$):

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x - a \| \leqslant r\}$$

الكرة المغلقة ذات المركز a ونصف القطر r (بالنّسبة للنّظيم $\|\cdot\|$).
نسمّي المجموعة (الجزئية من $\mathbb{R}^n$):

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x - a \| = r\}$$

سطح الكرة ذات المركز a ونصف القطر r (بالنّسبة للنّظيم $\|\cdot\|$).

مثال

الكرة $B(0,1)$ في $\mathbb{R}$ هي المجال $]-1,1[$.

7.2.1 النّظيمات المتكافئة

تعريف

إذا كان N_1 وN_2 نظيمين معرّفين على فضاءشعاعي X فإنّهما يكونان متكافئان إذا وفقط إذا وجد

عددان موجبان α وβ بحيث $\alpha < \beta$ وَ كان لدينا:

$$\forall x \in X, \quad \alpha N_1(x) < N_2(x) < \beta N_1(x)$$

مثال

النّظيمات الأساسية في $\mathbb{R}^n$ متكافئة، حيث :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \| x\|_\infty \leqslant \| x\|_1 \leqslant n \| x\|_\infty$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \| x\|_\infty \leqslant \| x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \| x\|_\infty$$

نتيجة

لكي يكون نظيمان N_1 وN_2 متكافئين على فضاء X، يلزم ويكفي أن يكون المقدار $\frac{N_1(x)}{N_2(x)}$ (أو $\frac{N_2(x)}{N_1(x)}$) محدودا من الأعلى ومن الأدنى بأعداد موجبة تماما (من أجل x غير معدوم).

8.2.1 الفضاءات ذات البعد المنتهي

ليكن $(X, \| \cdot \|)$ ف . ش. ن. على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف

نقول إنّ بعد الفضاء X منته إذا وجدت فيه عناصر $x_1, x_2, ..., x_n$ مستقلّة خطيا وتولّده، هذه العناصر تسمّى أساسا، أيّ

$$\forall x \in X, \exists \lambda \in R^n; \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

مبرهنة 1.2.1

(التمهيدية لريس)

إذا كان X فضاء شعاعيا نظيميا وX_0 فضاء شعاعيا جزئيا مغلقا منه حيث $X \neq X_0$ عندئذ فإنّه من أجل كلّ ε حيث $(0 < \varepsilon < 1)$ يوجد عنصر x_ε حيث $(\| x_\varepsilon \| = 1)$يحقّق المتباينة الآتية :

$$\underset{x \in X_0}{Inf} \|x - x_\varepsilon\| > 1 - \varepsilon$$

9.2.1 الجزء المحدود

تعريف

A جزء محدود من الفضاء الشّعاعي النّظيمي $(X, \|\cdot\|)$ إذا وفقط إذا كانت مجموعة النّظيمات $\{\| x \|, x \in A\}$ محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}^+$.

خواص

- كلّ جزء محتوى في جزء محدود محدود.
- إتّحاد عائلة منتهية من الأجزاء المحدودة محدود.
- كلّ كرة محدودة.
- يكون الجزء محدودا إذا وفقط إذا كان محتوى في كرة.

القطر

تعريف

إذا كان A جزء محدود غير خال من $(X, \|\cdot\|)$، نعرّف قطر A بـ:

$$\delta(A) = Sup\{\| x - y \|; x, y \in A\}$$

10.2.1 طبولوجيا الفضاء النّظيمي

مفتوحات الفضاء النّظيمي

تعريف

O جزء من الفضاء النّظيمي $(X, \|\cdot\|)$ مفتوح إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0; B(x, \varepsilon) \subset O.$$

خواص

- X و$\varnothing$ مفتوحان من X .
- إتّحاد عائلة مفتوحات من X مفتوح في X.
- تقاطع عائلة منتهية من المفتوحات من X مفتوح في X.

قضية 2.2.1

- كلّ كرة مفتوحة من X مفتوح .
- الجزء غير الخال من X مفتوح إذا وفقط إذا كان إتّحاد عائلة من الكرات المفتوحة .

المفتوح الأوّلي

تعريف

نضع جداءالفضاءات النّظيمية $(X,N) = \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant p} (X_i,N_i)$

نسمّي مفتوح أوّلي من X كلّ جزء من X يكتب على الشّكل الآتي:

$$O = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_p$$

حيث O_i مفتوح من X_i .

مغلقات الفضاء النّظيمي

تعريف

B جزء من الفضاء النّظيمي $(X, \|\cdot\|)$مغلق إذا وفقط إذا كانت متمّمته $B^c = X - B$ جزء مفتوح من X.

خواص

- X و$\varnothing$ مغلقان من X .
- إتحاد عائلة منتهية من مغلقات من X مغلق في X.
- تقاطع عائلة من المغلقات من X مغلق في X.

الملاصقة

ملاصقة نقطة

تعريف

إذا كان $A \subset (X, \|\cdot\|)$ و x نقطة من X

نقول إنّ x ملاصقة لـ A إذا وفقط إذا كانت :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x); V \cap A \neq \varnothing$$

ملاصقة جزء

تعريف

إذا كان A جزء من $(X, \|\cdot\|)$

. نسمّي ملاصقة A ونرمز لها بـ $\overline{A}$ مجموعة النّقاط الملاصقة لـ A.

نتائج

1. إذا كان O مفتوح من X، فإنّ:

$$O \cap A \neq \varnothing \Longleftrightarrow O \cap \overline{A} \neq \varnothing$$

2. A جزء مغلق من X إذا وفقط إذا كان :

$$A = \overline{A}$$

3.1 الفضاء البّناخي

تعريف

نقول عن فضاء نظيمي X إنّه بناخي إذا كانت كلّ متتالية كوشية منه متقاربة فيه.

نتيجة

كلّ فضاء نظيمي ذي بعد منته بناخي .

نتيجة

كلّ فضاء بناخي هو فضاء متري تامّ .

4.1 التّراصّ في الفضاءات النّظيميّة

تعريف

نقول عن فضاء متري X إنّه متراصّ إذا حوت كلّ متتالية $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ في X متتالية جزئية متقاربة $\{x_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$.

نتيجة

صورة كلّ متراصّ وفق تطبيق مستمرّ تكون متراصّة.

تعريف

في الفضاء المتري (X, d)، نقول إنّ المجموعة M من X شبه متراصّة، إذا كانت ملاصقتها(أيّ المجموعة $\overline{M}$) متراصّة.

نتيجة

تكون المجموعة M متراصّة إذا كانت شبه متراصّة ومغلقة.

البعدالمنتهي

مبرهنة 1.4.1

ليكن X فضاء نظيمي، إذا كانت كرة الوحدة المغلقة $\overline{B} = \{x; \| x \| \leqslant 1\}$ متراصّة فيه فإنّ X منتهي البعد.

قضية 1.4.1

ليكن X فضاءا شعاعيا نظيميا منتهي البعد، المجموعة جزئية M من X متراصّة إذا وفقط إذاكانت مغلقة ومحدودة.

إثبات

❖ لزوم الشّرط:

واضح لأنّ في فضاء ذي بعد منته كل محدود ومغلق يكون متراصّ.

❖ كفاية الشّرط:

نفرض إنّ كرة الوحدة المغلقة $(\overline{B}(0,1) = \{x \in X / \|x\| \leqslant 1\})$ متراصّة.

لتكن x_1 من $\overline{B}(0,1)$ حيث $\|x_1\| \leqslant 1$.

نرمز للغلاف الخطّي للمجموعة $\{x_1\}$ بالرّمز M_1،واضح أن M_1 فضاء جزئي مغلق من X.

حسب مبرهنة التّمهيدية لريس نستنتج:

$$\exists x_2 \in X / \parallel x_2 \parallel = 1, \parallel x_2 - x \parallel > \frac{1}{2}, \forall x \in M_1$$

نرمز للغلاف الخطّي للمجموعة $\{x_1, x_2\}$ بالرّمز M_2، واضح أنّ M_2 فضاء جزئي مغلق من X . حسب مبرهنة التّمهيدية لريس نستنتج أنّ:

$$\exists x_3 \in X / \parallel x_3 \parallel = 1, \parallel x_3 - x \parallel > \frac{1}{2}, \forall x \in M_2$$

نلاحظ أنّه إذا كان $dimX = \infty$، فإنّ العملية تتواصل حتى تحصّل على متتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ من $\overline{B}\,(0,1)$ وتحقّق:

$$\parallel x_n - x_m \parallel > \frac{1}{2}, \forall x_n, x_m \geqslant 1/n \neq m$$

من الصّيغة الأخيرة نستنتج أنّه لا يمكن إستخراج من المتتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية متقاربة وهذا مناف لكون كرة الوحدة المغلقة متراصّة. ■

قضية 2.4.1

(فريدريك ريس)

يكون فضاء نظيمي X متراصّا محلّيا، إذا وفقط إذا كان بعده منتهيا.

الفصل

2

المؤثّرات الخطّيّة في الفضاءات النّظيميّة

1.2 المؤثّرات الخطّيّة 16
1.1.2 المؤثّر 16
2.1.2 المؤثّر الخطّي 16
3.1.2 نظيم المؤثّر 16
4.1.2 العمليات على المؤثّرات 17
5.1.2 بيان مؤثّر 18
6.1.2 نواة مؤثّر 18
7.1.2 تطابق مؤثّرين 19
8.1.2 تمديد مؤثّر 19
9.1.2 تقايس مؤثّر 20
2.2 المؤثّرات الخطّيّة المحدودة 20
3.2 المؤثّرات الخطّيّة المستمرّة 23
1.3.2 العلاقة بين المؤثّرات الخطّيّة المحدودة و المستمرّة 25
2.3.2 الشّكل الخطّي 26
4.2 المؤثّر القابل للقلب 27
1.4.2 نظرية وجود واستمرار المؤثّر المقلوب 28
5.2 المؤثّر القرين 29
1.5.2 مفهوم القرين في الفضاء النّظيمي 29
2.5.2 خصائص المؤثّرات القرينة 32
6.2 المؤثّر النّظامي 33
7.2 تقارب متتالية المؤثّرات الخطّيّة 33
1.7.2 التّقارب بالنّظيم 33
2.7.2 التّقارب البّسيط 34
3.7.2 التّقارب الضّعيف 34
8.2 المؤثّرات المتراصّة 35
1.8.2 الخواصّ الأساسية للمؤثّرات المتراصّة 36
9.2 المؤثّرات المغلقة 37
1.9.2 بعض خواصّ المؤثّرات المغلقة في الفضاء البناخي 38
2.9.2 المؤثّرات القابلة للغلق 41

1.2 المؤثّرات الخطّيّة

نعتبر $(X, \|\,.\,\|_X)$ و$(Y, \|\,.\,\|_Y)$ ف.ش.ن، على نفس الحقل ولتكن D مجموعة غير خالية من X.

1.1.2 المؤثّر

تعريف

إذا أرفقنا بكلّ عنصر x من D عنصرا وحيدا y من Y، نقول إنّنا قد عرّفنا مؤثّرا من X في Y، نرمز له بالرّمز F، ونكتب:

$$y = F(x) \text{ أو } y = Fx$$

ترميز

1. نرمز لمجموعة تعريف المؤثّر F بالرّمز $D(F)$ وتسمّى كذلك بساحة تعريفه أو نطاق تعريفه.
2. نرمز لمجموعة قيم المؤثّر F بالرّمز $X(F)$، ونكتب:

$$X(F) = \{y \in Y, y = Fx, x \in D(F)\}$$

2.1.2 المؤثّر الخطّي

تعريف

نقول عن مؤثّر F من X إنّه خطّي، إذا تحقّق مايلي:

1. المجموعة $D(F)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء X.
2. $F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in D(F), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

ترميز

نرمز لمجموعة المؤثّرات الخطّيّة من X في Y بالرّمز $L(X, Y)$.

3.1.2 نظيم المؤثّر

تعريف

يعرّف نظيم F من $L(X, Y)$ بالصّيغة التّالية :

$$\| F \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| Fx \|$$

لكن نشير هنا على أن الحدّ الأعلى قد يكون، في بعض الحالات، غير منته، أيّ $\|F\| = +\infty$

وعليه إذا زوّد الفضاء $L(X,Y)$ بالنّظيم المعرّف أعلاه حيث يكون فضاءا شعاعيا نظيميا غير عادي.

قضية 1.1.2

هناك نظيمات أخرى تعرّف نظيم المؤثّر F، منها:

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} \|Fx\| \quad , \quad \|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|}{\|x\|}$$

4.1.2 العمليات على المؤثّرات

تعريف

من أجل كل مؤثّرين كيفين F_1 وF_2 من $L(X,Y)$ نعرّف:

1. جمع المؤثرين F_1 وF_2، كالتّالي:

$$F = (F_1 + F_2)x = F_1x + F_2x \qquad ; x \in D(F_1) \cap D(F_2)$$

2. ضرب المؤثّر F_1 بعدد λ من $\mathbb{K}$، كالتّالي:

$$T = (\lambda F_1)x = \lambda F_1 x \qquad ; x \in D(F_1), \lambda \in \mathbb{K}$$

نتيجة

المؤثّران F وT حيث $F = F_1 + F_2$ و$T = \lambda F_1$ يكونا من $L(X,Y)$.

تعريف

ليكن X، Y وZ ف.ش. ن. على نفس الحقل $\mathbb{K}$، F وT مؤثّرين من $L(X,Y)$ و$L(Y,Z)$ على التّوالي، عندئذ فإنّ جداء (تركيب) المؤثّرين F وT يعرّف كالتّالي $T \circ F = TF$، أيّ أنّ :

$$(TF)x = T(Fx) \qquad ; x \in D(F), F(x) \in D(T)$$

تنبيه

- الجداء في الحالة العامّة غير معرّف.
- إذا كان $X \equiv Y \equiv Z$ والمؤثّران F وT معرّفين على كل الفضاء، فإنّ الجداء يكون معرّفا .

ملاحظة 1.1.2

جداء مؤثّرين ليس دوما تبديليا، أيّ $TF \neq FT$ حتى في حالة كان الجداء معرّفا.

5.1.2 بيان مؤثّر

تعريف

نسمّي بيان مؤثّر F مجموعة الأزواج (x, Fx) من فضاء الجداء $X \times Y$ حيث $x \in D(F)$، ونكتب:

$$\Gamma_F = \{(x, Fx)/x \in D(F)\} \subset X \times Y$$

ترميز

يرمز لبيان المؤثّر F بالرّمز Γ_F.

6.1.2 نواة مؤثّر

تعريف

مجموعة أصفار المؤثّر F تسمّى نواة المؤثّر F ويرمز لها بالرّمز $KerF$، ونكتب:

$$KerF = \{x \in D(F)/Fx = 0\}$$

صعود مؤثّر

ليكن المؤثر F من $L(X)$.

تعريف

يعرّف صعود المؤثّر F ويرمز له بالرّمز $ascent(F)$ بأنّه أصغر الأعداد الطّبيعية p الّتي من أجلها يكون:

$$KerF^p = KerF^{p+1}$$

نتيجة

نقول إنّ المؤثّر F يملك صعودا غير منته، أيّ $ascent(F) = +\infty$، إذا كانت:

$$n \geqslant 1, \quad KerF^n \neq KerF^{n+1}$$

إنحدار مؤثر

ليكن F من $L(X)$.

تعريف

يعرّف إنحدار المؤثّر F ويرمز له بالرّمز $discent\,(F)$، بأنه أصغر الأعداد الطّبيعية p الّتي من أجلها يكون:

$$X\left(F^{p}\right)=X\left(F^{p+1}\right)$$

نتيجة

نقول إنّ المؤثّر F يملك إنحدارا غير منته، أي $discent\,(F)=+\infty$ ، إذا كانت:

$$n\geqslant 1, X\left(F^{n}\right)\neq X\left(F^{n+1}\right)$$

مبرهنة 1.1.2

إذا كان المؤثّر F من $L(X)$ ، فإنّ القضايا التّالية متكافئة:

- $\forall n\geqslant k \qquad ascent\,(F)=k\Longrightarrow KerF^{k}=KerF^{n}$
- $\forall n\geqslant k \qquad discent\,(F)=k\Longrightarrow X\left(F^{k}\right)=X\left(F^{n}\right)$

7.1.2 تطابق مؤثّرين

تعريف

ليكن F و T مؤثّرين من X في Y، نقول إنّ المؤثّرين F و T منطبقان، إذا تحقّق مايلي:

1. $D(F)=D(T)=D$
2. $\forall x\in D; F(x)=T(x)$

8.1.2 تمديد مؤثّر

تعريف

ليكن F و T مؤثّرين من X في Y، نقول إنّ المؤثّر T تمديد (توسيع) للمؤثّر F، إذا تحقّق مايلي:

1. $D(F)\subset D(T)$

.2 $\forall x \in D(F) : F(x) = T(x)$

وكذلك يمكن القول إنّ المؤثّر F إقتصار للمؤثّر T، ونكتب:

$$F = T\mid_{D(F)}$$

9.1.2 تقايس مؤثّر

المؤثّر F من $L(X,Y)$ يسمّى تقايسا، إذا تحقّقت الخاصّية الآتية :

$$\| Fx \|_Y = \| x \|_X \quad ; \forall x \in X$$

عندها نقول إنّ الفضاءان X و Y متقايسان.

2.2 المؤثّرات الخطّيّة المحدودة

ليكن المؤثّر F من $L(X,Y)$ حيث X و Y ف.ش.ن، على نفس الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف

نقول عن F من $L(X,Y)$ إنّه محدود إذا وفقط إذا كان :

$$\exists k > 0, \| Fx \|_Y \leqslant k \| x \|_X \qquad ; \forall x \in X$$

تعريف

إذا كان الحدّ الأعلى في التّعريف (3.1.2) منتهيا، أيّ $\| F \| < \infty$، نقول إنّ المؤثّر F محدود.

ترميز

نرمز لمجموعة المؤثّرات الخطّيّة المحدودة بـ $\mathcal{L}(X,Y)$.

مثال

.1 المؤثّر المطابق $I : X \longrightarrow X$ على فضاء نظيمي $X \neq \{0\}$ محدود وَ نظيمه:

$$\| I \| = 1$$

.2 المؤثّر الصّفري $0 : X \longrightarrow Y$ على فضاء نظيمي X محدود ونظيمه:

$$\| 0 \| = 0$$

ملاحظة 2.1.2

- $\mathcal{L}(X,Y) \subset L(X,Y)$
- إذا زوّد $\mathcal{L}(X,Y)$ بأحد النّظيمات فإنّه يعرّف فضاءا شعاعيا.
- إذا كان الفضاء Y بناخي فإن $\mathcal{L}(X,Y)$ يكون بناخيا أيضا.

حالات خاصّة

- في حالة $K \equiv Y$ الفضاء $\mathcal{L}(X,Y)$ يسمّى الثّنوي الطّبولوجي ويرمز له بالرّمز X'.
- في حالة $X \equiv Y$ الفضاء $\mathcal{L}(X,X)$ إختصارا يكتب كالتّالي $\mathcal{L}(X)$.

ملاحظة 2.2.2

بالإضافة إلى النّظيم المعرّف سابقا في الفضاء $\mathcal{L}(X,Y)$ يمكن تعريف النّظيم التّالي :

$$\| Fx \| = min\{ M : \| Fx \| \leqslant M \| x \|, x \in X\}$$

خواص

i) جمع مؤثّرين خطّيين محدودين هو مؤثر خطّي محدود.

ii) جداء مؤثّر خطّي محدود بعدد حقيقي هو مؤثّر خطّي محدود.

iii) جداء مؤثّرين خطّيّين محدودين هو مؤثّر خطّي محدود.

إثبات

❖

i) ليكن F و T خطّيّين محدودين من فضاء شعاعي نظيمي X في فضاء شعاعي نظيمي Y.
لدينا من أجل كلّ $1 \geqslant \| x \|$ فإنّ

$$\begin{aligned} \| (F+T)x \| &= \| Fx + Tx \| \\ &\leqslant \| Fx \| + \| Tx \| \\ &\leqslant \|F\| + \|T\| \end{aligned}$$

ii) ليكن F مؤثّر خطّي محدود من فضاء شعاعي نظيمي X في فضاء شعاعي نظيمي Y

لدينا من أجلّ كلّ α حقيقي ،و من أجل كلّ $1 \leqslant \| x \|$ فإنّ

$$\begin{aligned} \| \alpha F x \| &= |\alpha| \, \| F x \| \\ &\leqslant |\alpha| \, \|F\| \end{aligned}$$

زيادة على ذلك تبيّن العلاقات السّابقة أنّ:

$$\begin{aligned} \|F+T\| &= \sup_{|x| \leqslant 1} |(F+T)\, x| \\ &\leqslant \| F \| + \| T \| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| \alpha F \| &= \sup_{|x| \leqslant 1} |\alpha F x| \\ &= |\alpha| \sup_{|x| \leqslant 1} |F x| \\ &= |\alpha| \, \|F\| \end{aligned}$$

يمكن القول إذن أنّ الفضاء $\mathcal{L}(X,Y)$ المؤلّف من المؤثّرات الخطّيّة المحدودة من X في Y فضاءا نظيميا عند تزويده بالنّظيم:

$$\|F\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |F x|$$

$iii)$ ليكن T مؤثّرا خطّيا محدودا من فضاء نظيمي X في فضاء نظيمي Y وF مؤثّرا خطّيّا محدودا من Y في فضاء نظيمي Z
عندئذ يكون المؤثّر $S = FT$ معرّفا من X في Z
لنثبت الآن أنّ S محدود هو الآخر.
لدينا من أجل كلّ $x \in X$ فإنّ

$$\begin{aligned} \| F T x \| &\leqslant \|F\| \, \| T x \| \\ &\leqslant \|F\| \, \|T\| \, \| x \| \end{aligned}$$

ومنه ينتج أنّ $S = FT$ محدود وأنّ:

$$\|FT\| \leqslant \|F\| \, \|T\|$$

■

مبرهنة البعد المنتهي

مبرهنة 1.2.2

إذا كان الفضاء النّظيمي X منتهي البعد، فإنّ كلّ مؤثّر خطّي على X محدود.

إثبات

❖ لنفرض أنّ $dimX = n$ وأنّ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ أساس لـ X.
لنأخذ أيّ عنصر $x = \sum \xi_i e_i$ من X ولنضربه في أيّ مؤثّر خطّي F على X .
لمّا كان F خطّيا، فإنّ :

$$\begin{aligned} \|Fx\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i F e_i\right\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \, \|Fe_i\| \\ &\leqslant \max_k \|Fe_k\| \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \end{aligned}$$

ولدينا

$$\begin{aligned} \sum |\xi_i| &\leqslant \frac{1}{c} \left\|\sum \xi_i e_i\right\| \\ &= \frac{1}{c} \|x\| \end{aligned}$$

نستنتج ممّا سبق أنّ

$$\|Fx\| \leqslant M \|x\| \quad \text{حيث} \quad M = \frac{1}{c} \max_k \|Fe_k\|$$

ومنه المؤثّر F محدود. ■

مبرهنة 2.2.2

القضايا التالية متكافئة

- $F \in \mathcal{L}(X, Y)$.
- F محدود على كرة الوحدة المغلقة.
- F محدود على سطح كرة الوحدة المغلقة.

3.2 المؤثّرات الخطيّة المستمرّة

ليكن $(X,\|\cdot\|_1)$ و $(Y,\|\cdot\|_2)$ ف.ش.ن، على نفس الحقل $\mathbb{K}$ وF من $L(X,Y)$.

تعريف

نقول إنّ المؤثّر الخطّي F مستمرّ عند x_0 من X إذا كان من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ حيث :

$$\|x - x_0\|_1 < \delta \Longrightarrow \|Fx - Fx_0\|_2 < \varepsilon$$

نتيجة

كل مؤثّر خطّي مستمرّ على الأقلّ عند نقطة من الفضاء X فهو مؤثّر مستمرّ عند كل نقطة من هذا الفضاء.

مبرهنة 1.3.2

ليكن F مؤثّرا خطّيا من X نحو Y القضايا التّالية متكافئة:

i) F مستمرّ.

ii) F مستمرّ عند الصّفر.

iii) $\exists C > 0; \|Fx\|_2 \leqslant C\|x\|_1; \forall x \in X$

إثبات

❖ $(i) \Longrightarrow (ii)$

واضح، لأنّ الإستمرارية من أجل كلّ x من X تؤدّي للإستمرارية من أجل $x = 0$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$

ليكن F مستمرّ عند الصّفر $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X; \|x\|_1 < \delta \Longrightarrow \|Fx\|_2 < \varepsilon$

ولدينا $\left\|\frac{\delta x}{\|x\|_1}\right\|_1$ بتعويض $x = \frac{\delta x}{\|x\|_1}$ نجد:

$$\begin{aligned}
\|F(x)\|_2 &= \left\|F\left(\frac{\delta x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 \\
&= \left\|\frac{\delta F}{\|x\|_1}(x)\right\|_2 \\
&= \frac{\delta}{\|x\|_1}\|Fx\|_2
\end{aligned}$$

ولدينا

$$\|F(\frac{\delta x}{\|x\|_1})\|_2 \leqslant \varepsilon = 1 \Longleftrightarrow \|Fx\|_2 \leqslant \frac{\|x\|_1}{\delta}$$

بوضع $C = \delta^{-1}$ نجد المطلوب.

$(iii) \Longrightarrow (i)$

ليكن F مؤثّرا محدودا، لدينا من أجل كلّ x من X

$$\begin{aligned}\|Fx - Fx_0\|_2 &= \|F(x - x_0)\|_2 \\ &\leqslant C\|x - x_0\|_1\end{aligned}$$

بوضع $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ إذن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C}; \|x - x_0\|_1 < \delta \Longrightarrow \|Fx - Fx_0\|_2 < \varepsilon$$

F مستمرّ عند x_0 كيفي من X ومنه F مستمر من أجل كلّ x من X. ■

1.3.2 العلاقة بين المؤثّرات الخطّيّة المحدودة و المستمرّة

قضية 1.3.2

المؤثّر F من $L(X,Y)$ يكون محدودا إذا وفقط إذا كان مستمرّاً.

إثبات

❖

$(\Longleftarrow$

نفرض أنّ المؤثّر F محدود، أيّ

$$\exists k > 0; \quad \|Fx\|_2 \leqslant k\|x\|_1 \qquad ; \forall x \in X$$

وبالتّالي من أجل كلّ متتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ من الفضاء X حيث $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ يكون:

$$\|Fx_n\|_2 \leqslant k\|x_n\|_1 \qquad ; \forall n \geqslant 1$$

من الصّيغة الأخيرة نستنتج أنّ :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \|Fx_n\|_2 = 0$$

هذا يعني أنّ المؤثّر F مستمرّ عند الصّفر و بالتّالي يكون F مستمراً .

$(\Longrightarrow$

نفرض أنّ المؤثّر F مستمرّ .

من تعريف الإستمرار نستنتج وجود δ_1، $(\delta_1 > 0)$ من أجلها يتحقّق مايلي:

$$\|x\|_1 < \delta_1 \Longrightarrow \|Fx\|_2 < 1$$

نلاحظ من أجل كلّ y، $(y \neq 0)$ من الفضاء X وبإعتبار الصّيغة السّابقة يكون:

$$\begin{aligned} \|Fy\|_2 &= \left\| F \frac{\delta_1}{\|y\|_1} \frac{\|y\|_1}{\delta_1} y \right\|_2 \\ &= \frac{\|y\|_1}{\delta_1} \left\| F \frac{\delta_1}{\|y\|_1} y \right\|_2 \\ &\leqslant \frac{\|y\|_1}{\delta_1} \end{aligned}$$

أيّ أنّ:

$$\|Fy\|_2 \leqslant \tfrac{1}{\delta_1} \|y\|_1$$

نلاحظ أنّ الصّيغة الأخيرة صحيحة في حالة $y = 0$ وعليه يكون:

$$\exists k = \tfrac{1}{\delta_1} > 0, \|Fy\|_2 \leqslant k\|y\|_1 \quad , \forall y \in X$$

هذا يعني أنّ المؤثّر F محدود. ■

2.3.2 الشّكل الخطّي

تعريف

نسمّي شكلا خطّيا على فضاء شعاعي X على $\mathbb{K}$ كلّ مؤثّر خطّي من X نحو $\mathbb{K}$.

ترميز

نرمز لمجموعة الأشكال الخطّيّة المعرّفة على X بـ $L(X,K) = X^\star$ ونسمّيها بثنوي X الجبري.

ملاحظة 3.1.2

تؤلّف الأشكال الخطّيّة المستمّرة على X مجموعة نرمز لها بـ $\mathcal{L}(X,K) = X'$ وتدعى بثنوي X الطّبولوجي.

4.2 المؤثّر القابل للقلب

ليكن المؤثّر F من $L(X,Y)$ حيث X و Y ف .ش. ن على نفس الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف

نقول إنّ المؤثّر F من $L(X,Y)$ قابل للقلب (عكسي)، إذا وجد حلّ وحيد للمعادلة $y = Fx$ من أجل كلّ y من $X(F)$.

نتيجة

المؤثّر F من $L(X,Y)$ يكون قابلا للقلب من $D(F)$ على $X(F)$ ، إذا تحقّق أحد الشّرطين التّاليين:

1. $\forall y \in X(F), \exists! x_y \in D(F)$
2. $KerF = 0$

مثال

إذا كان X فضاء نظيميا كان التّطبيق المطابق Id_X عندئذ قابلا للقلب.

ترميز

يرمز للمؤثّر العكسي للمؤثّر F بالرمز F^{-1}، ونكتب:

$$F^{-1}y = x_y$$

نتيجة

المؤثّر العكسي للمؤثّر الخطّي يكون خطّيا أيضا.

تعريف

ليكن F مؤثّرا من $L(X,Y)$ نقول إنّ:

1. المؤثّر T من $L(Y,X)$ عكسي يميني للمؤثّر F،إذا كان $FT = I_Y$.
   حيث I_Y المؤثّر الحيادي على Y.
2. المؤثّر S من $L(Y,X)$ عكسي يساري للمؤثّر F، إذا كان $SF = I_X$.
   حيث I_X المؤثّر الحيادي على X.

عندها يرمز للمؤثّر T بالرّمز F_r^{-1} وللمؤثّر S بالرّمز F_l^{-1}.

نتيجة

1. إذا وجد المؤثّر F_r^{-1}، فإنّ المعادلة $y = Fx$ تقبل حلّ هو $x = F_r^{-1}$.
2. إذا وجد المؤثّر F_l^{-1}، فإنّ المعادلة $y = Fx$ لا تملك أكثر من حلّ.
3. إذا وجد كل من المؤثّرين F_r^{-1} وF_l^{-1}، فإنّه يوجد F^{-1} يحقّق:

$$F^{-1} = F_r^{-1} = F_l^{-1}$$

1.4.2 نظرية وجود واستمرار المؤثّر المقلوب

ليكن F من $\mathcal{L}(X,Y)$، المؤثّر المقلوب F^{-1} موجود ومستمر على $FX \subset Y$ إذا وفقط إذا وجد عدد $0 < k$ حيث:

$$k \parallel x \parallel_1 \leqslant \parallel Fx \parallel_2 \quad , \forall x \in X..............(\star)$$

إثبات

❖ إذا كان $X = \{0\}$، واضح.

نفرض أنّ $X \neq \{0\}$

1. ليكن F^{-1} من $L(FX, X)$ بالتأكيد $F^{-1} \neq 0$ من أجل كلّ y من FX، لدينا :

$$\parallel F^{-1}y \parallel_1 \leqslant \parallel F^{-1} \parallel \parallel y \parallel_2$$

إذن، نضع $y = Fx$. ومنه نحصّل على :

$$\parallel x \parallel_1 \leqslant \parallel F^{-1} \parallel \parallel Fx \parallel_2$$

لأنّ $0 < \parallel F^{-1} \parallel$،العلاقة $(\star)$ محقّقة من أجل $\frac{1}{\parallel F^{-1} \parallel}$.

2. نفرض أنّه لدينا $(\star)$، ومنه:

$$KerF = \{x; Fx = 0\} = \{0\}$$

إذن F^{-1} موجود على FX وF^{-1} خطّي.

نبيّن أنّ F^{-1} مستمر، من أجل كلّ x من X

$$k \parallel x \parallel_1 \leqslant \parallel Fx \parallel_2$$

ليكن $x = F^{-1}y$ حيث $y = Fx$، ومنه:

$$k \parallel F^{-1}y \parallel_1 \leqslant \parallel y \parallel_2$$

وبالتّالي :

$$\parallel F^{-1}y \parallel_1 \leqslant \frac{1}{k} \parallel y \parallel_2$$

من أجل كلّ $y \in Fx$ ومنه F^{-1} مستمرّ.

5.2 المؤثّر القرين

ليكن X و Y ف. ش. ن، على نفس الحقل $\mathbb{K}$.

1.5.2 مفهوم القرين في الفضاء النّظيمي

ليكن المؤثّر F من $L(X,Y)$ حيث $\overline{D(F)} = X$ و f ثابت من Y' من أجل كلّ x من $D(F)$ معلوم أنّ العبارة $f(Fx)$ تعرّف شكلا خطّيا g،أيّ g من $X^{\star}$، عندئذ نكتب:

$$f(Fx) = g(x)$$

لتكن $D^{\star}$ مجموعة جزئية من Y' بحيث من أجل كلّ f ثابت من $D^{\star}$ الشّكل الخطّي g يكون من X'.
ونكتب:

$$f(Fx) = g(x) \qquad ; f \in D^{\star} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

قضية 1.5.2

الشّرط $\overline{D(F)} = X$ شرط كاف ولازم لوحدانية g من X'.

إثبات

❖ نفرض أنّ $\overline{D(F)} \neq X$ ومنه:

$$\exists g_0 \neq 0, \forall x \in D(F); \quad g_0(x) = 0$$

ومنه حسب الصّيغة (1) يكون

$$\begin{aligned} x \in D(F), \quad f(Fx) &= g(x) + g_0(x) \\ &= (g + g_0)(x) \end{aligned}$$

هذا يعني أنّ $(g + g_0)$ من X' ويحقق الصّيغة (1) وهذا مناف لوحدانية g من X'.

$\Longleftarrow)$

لدينا $\overline{D(F)} \neq X$

نفرض وجود g_1 وg_2 من X'، حيث

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f(Fx) \\ &= g_2(x) \end{aligned}$$

هذا يعني أنّ

$$(g_2 - g_1)(x) = 0, \quad x \in D(F)$$

بما أنّ $\overline{D(F)} = X$ فإنّه:

$$g_1 - g_2 = 0$$

أيّ

$$g_1 \equiv g_2$$

■

نتيجة

الصّيغة (1) من أجل كلّ f من $D^\star$ تعرّف شكلا خطّيّا محدودا ووحيدا معرّفا في X ، أي $(\exists ! g \in X')$.

نتيجة

من النتيجة السّابقة يمكن تعريف مؤثّر من Y' في X' نرمز له بالرّمز $F^\star$ معرّف على $D^\star$ كالتّالي:

$$F^\star f = g / D(F^\star) \equiv D^\star$$

واضح أنّ $F^\star$ وحيد من $L(Y', X')$.

تعريف

المؤثّر $F^\star$ المعرّف في النّتيجة أعلاه يسمّى المؤثّر القرين للمؤثّر F، ونكتب:

$$f(Fx) = (F^\star f)x$$

الكتابة السّابقة تكتب أيضا كالتّالي :

$$< Fx, f > = < x, F^\star f > \quad ; f \in D(F^\star)$$

مبرهنة 1.5.2

إذا كان المؤثّر F من $\mathcal{L}(X, Y)$ فإنه يوجد مؤثّر قرين وحيد $F^\star$، يكون من $\mathcal{L}(Y', X')$، ويحقّق:

$$\| F \| = \| F^\star \|$$

إثبات

- من النّتيجة (2.5.2) واضح أنّ

$$\exists ! F^\star \in \mathcal{L}(Y', X') : F^\star f = g, (F^\star f)x = f(Fx)$$

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} \| F^\star f \| &= \| g \| \\ &= \sup_{\|x\| \leqslant 1} | g(x) | \\ &= \sup_{\|x\| \leqslant 1} | f(Fx) | \\ &\leqslant \| F \| \| f \| \end{aligned}$$

ومنه يكون لدينا $F^\star \in \mathcal{L}(Y', X')$، ويحقّق

$$\| F^{\star} \| \leqslant \| F \| \ ....(1)$$

ولدينا

$$\begin{aligned} \| Fx \| &= \sup_{f \in Y', \|f\|=1} \| f(Fx) \| \\ &\leqslant \sup_{f \in Y', \|f\|=1} \| (F^{\star} f)x \| \\ &\leqslant \sup_{f \in Y', \|f\|=1} \| (F^{\star} f) \| \| x \| \\ &= \| F^{\star} \| \| x \| \end{aligned}$$

هذا يعني أنّ

$$\| F \| \leqslant \| F^{\star} \| \ ....(2)$$

من الصّيغة (1) و(2)، نستنتج أنّ

$$\| F \| = \| F^{\star} \|$$

2.5.2 خصائص المؤثّرات القرينة

ليكن X، Y وZ ف. ش. ن على نفس الحقل $\mathbb{K}$
الخصائص التّالية للمؤثّرات الخطّيّة هي نتائج مستنبطة مباشرة من التّعريف:

1. $\forall F_1, F_2 \in L(X,Y), \lambda \in \mathbb{K}; (F_1 + F_2)^{\star} = F_1^{\star} + F_2^{\star}$
و$(\lambda F_1)^{\star} = \lambda F_1^{\star}$

2. $(F_1 \circ F_2)^{\star} = F_2^{\star} \circ F_1^{\star}$
حيث: $F_1 \in L(X,Y)$ و $F_2 \in L(Y,Z)$

3. إذا كان $X = Y$ وX إنعكاسي، فإنّ $(F^{\star})^{\star} = F$

4. إذا كان $F \in L(X,Y)$ و$F^{-1} \in L(Y,X)$، فإنّ

$$(F^{-1})^{\star} = (F^{\star})^{-1}$$

6.2 المؤثّر النّظامي

تعريف

ليكن X و Y ف .ش. ن، المؤثّر $F \in L(X,Y)$ نظامي، إذا كان

1. $F(X)=Y$
2. F^{-1} موجود ومستمّر على Y و $F^{-1} \in \mathcal{L}(X,Y)$

7.2 تقارب متتالية المؤثّرات الخطيّة

ليكن $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ من $\mathcal{L}(X,Y)$ و F من $\mathcal{L}(X,Y)$

1.7.2 التّقارب بالنّظيم

نقول إن $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ متقاربة بالنّظيم، أو بإنتظام نحو F إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} \| F_n - F \| = 0$$

ونكتب

$$F_n \xrightarrow{\|\cdot\|} F$$

2.7.2 التّقارب البّسيط

نقول إنّ $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ متقاربة ببساطة نحو F إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} F_n x = Fx \qquad ; \forall x \in X$$

ونكتب

$$F_n \xrightarrow{S} F$$

3.7.2 التّقارب الضّعيف

نقول إن $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ تتقارب تقاربا ضعيفا نحو F إذا كانت:

$$x'(F_n x) \to x'(Fx) \qquad , \forall x \in X, \forall x' \in X'$$

ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{W} F$$

مبرهنة 1.7.2

لدينا

$(F_n \xrightarrow{\|\cdot\|} F) \Longleftrightarrow (F_n x \to Fx$ بإنتظام على المجموعة $X \supset \{x; \| x \| \leqslant 1\})$.

إثبات

❖

$(\Leftarrow$

نفرض أنّ $F_n \xrightarrow{\|\cdot\|} F$ ومنه لدينا من أجل $x \in \overline{B(0,1)}$

$$\| F_n x - Fx \|_2 \leqslant \| F_n - F \| \| x \|_1 \longrightarrow 0$$

ممّا يبيّن التّقارب بإنتظام لـ $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ على $x \in \overline{B(0,1)}$.

$(\Longrightarrow$

نفرض أنّ $\{F_n x; n \in \mathbb{N}\}$ متقاربة بإنتظام نحو Fx على $x \in \overline{B(0,1)}$ ، لأن:

$$\| F_n - F \| = \sup\{\|(F_n - F)x\|_2; \|x\|_1 \leqslant 1\}$$

إذن، المتتالية $\{F_n x; n \in \mathbb{N}\}$ متقاربة بالنّظيم نحو F.

■

مبرهنة 2.7.2

1) $F_n \xrightarrow{\|\cdot\|} F \Longrightarrow F_n \xrightarrow{S} F$

2) $F_n \xrightarrow{S} F \Longrightarrow F_n \xrightarrow{W} F$

إثبات

❖

1) لدينا من أجل كلّ x من X:

$$\begin{aligned}\| F_n x - Fx \|_2 &= \| (F_n - F)x \|_2 \\ &\leqslant \| F_n - F \| \, \|x\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

2) من أجل كلّ x' من Y' ومن أجل كلّ x مثبت من X، لدينا

$$\begin{aligned}| x'(F_n x) - x'(Fx) | &= | x'((F_n - F)x) | \\ &\leqslant \| x' \| \, \|F_n x - Fx\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

■

ملاحظة 7.1.2

الإستلزام العكسي في (1) و(2) ليس صحيح دوما.

8.2 المؤثّرات المتراصّة

تعريف

نسمّي مؤثّرا F على فضاء بناخي X في نفسه (أو في فضاءآخر Y لبناخ)مؤثّرا متراصّا أو مستمرّا تماما، إذا حوّل كلّ مجموعة محدودة إلى مجموعة شبه متراصّة.

ملاحظة 8.1.2

كلّ مؤثّر خطّي مؤثّر متراصّ في فضاء نظيمي بعده منتهي.

لأنّه يحوّل كلّ مجموعة محدودة إلى مجموعة محدودة ونعلم أنّ كلّ مجموعة محدودة شبه متراصّة في فضاء ذي بعد منته.

ترميز

نرمز لمجموعة المؤثّرات المتراصّة من X نحو Y بالرّمز $\mathcal{K}(X,Y)$.

ملاحظة 8.2.2

المجموعة $\mathcal{K}(X,Y)$ فضاء شعاعي جزئي مغلق من الفضاء الشّعاعي $\mathcal{L}(X,Y)$.

قضية 1.8.2

إذا كان F من $L(X,Y)$، فإن القضيّتين التّاليتين متكافئتين:

1. $F \in \mathcal{K}(X,Y)$.
2. من أجل كلّ متتاليةمحدودة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ في X، المتتالية $(Fx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تقبل متتالية جزئية متقاربة في Y.

1.8.2 الخواصّ الأساسية للمؤثّرات المتراصّة

مبرهنة 1.8.2

إذا كانت $\{F_n\}$ متتالية مؤثّرات متراصّة في فضاء X لبناخ، ومتقاربة بالنّظيم نحو مؤثّر F، فإنّ المؤثّر F متراصّ أيضا.

مبرهنة 2.8.2

إذا كان F مؤثّرا متراصّا وT مؤثّرا محدودا فإنّ المؤثّرين FT وTF متراصّين.

إثبات

❖ إذا كانت المجموعة $X \subset M$ محدودة فإنّ المجموعة TM محدودة أيضا. وبالتّالي فإنّ المجموعة FTM شبه متراصّة، وهذا يعني أنّ المؤثّر FTمتراصّ.

كما أنه إذا كانت M محدودة فإنّ FM شبه متراصّة، ومنه يأتي، بفضل استمرار T، أنّ الجموعة TFM متراصّة أيضا وهذا يعني تراصّ المؤثّر TF. ■

مبرهنة 3.8.2

إنّ المؤثّر القرين لمؤثّر متراصّ متراصّ.

قضية 2.8.2

كلّ مؤثّر خطّي متراصّ فهو مستمرّ.

9.2 المؤثّرات المغلقة

تعريف

ليكن X وY فضاءين نظيميين، وليكن F من $L(X,Y)$ ميدان تعريفه $D(F)$.
نقول إنّ F مؤثّر مغلق، إذا كان من أجل كلّ متتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $D(F)$ متقاربة نحو φ في X والمتتالية $(F\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو ψ من Y فإنّ φ من $D(F)$ و$\psi = F\varphi$.

مبرهنة 1.9.2

ليكن $F : D(F) \subseteq X \longrightarrow Y$ مؤثّرا مغلقا إذا كان $T \in \mathcal{L}(X,Y)$، فإنّ $F+T$ مغلق.

إثبات

❖ لتكن $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $D(F+T)$ (واضح أنّ $D(F+T) = D(F)$)
بحيث تحقّق لمّا n يؤول إلى ∞

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \ , \ F\varphi_n + T\varphi_n \longrightarrow \psi$$

بما أنّ T محدود، لدينا

$$F\varphi_n \longrightarrow \psi - T\varphi$$

إذن

$$\varphi \in D(F), \psi - T\varphi = F\varphi$$

ومنه

$$\varphi \in D(F+T), \psi = (F+T)\varphi$$

وهذا يعني أنّ $F+T$ مغلق. ■

مبرهنة 2.9.2

ليكن F مؤثّرا مغلقا من X في Y عندئذ تكون نواته $kerF$ جزءا مغلقا.

إثبات

❖ ليكن متتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $kerF$ متقاربة في X نحو φ أيّ أنّ

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \ , \ F\varphi_n = 0$$

بما أنّ F مغلق، لدينا

$$\varphi \in D(F), F\varphi = 0$$

إذن $kerF$ مغلق . ■

قضية 1.9.2

ليكن $F : D(F) \longrightarrow Y$ مؤثّرا خطّيّا محدودا ساحة تعريفه $D(F)$ جزء من X ، حيث X وY فضاءان نظيميان. عندئذ نجد مايلي:
إذا كانت $D(F)$ مجموعة جزئية مغلقة في X فإنّ F مغلق.

إثبات

❖ إذا كانت (x_n) متتالية في $D(F)$ ومتقاربة نحو x، وبحيث تكون المتتالية (Tx_n) متقاربة كذلك، فإنّ $D(F) = \overline{D(F)} \ni x$ ذلك أنّ $D(F)$ مغلقة، كاأنّ $Fx_n \longrightarrow Fx$ لكون F مستمرا، وبالتّالي F مغلق.. ■

1.9.2 بعض خواصّ المؤثّرات المغلقة في الفضاء البناخي

فيما يلي نقدّم بعض خواصّ المؤثّر المغلق عندما يكون X وY فضاءين بناخيين وليكن F من $L(X,Y)$ ميدان تعريفه $D(F)$.

مبرهنة 3.9.2

القضايا التّالية متكافئة:

i) المؤثّر F مغلق.

ii) البّيان $G(F)$ جزء مغلق في $X{\times}Y$.

iii) الفضاء الجزئي $D(F)$ تامّ، لما يزوّد بنظيم البّيان المعرّف بـ:

$$\| x \|_{D(F)}=\| x \|_X + \| Fx \|_Y \qquad \forall x \in D(F)$$

إثبات

❖ $(i) \Longrightarrow (ii)$

نفرض أنّ F مؤثّر مغلق

لتكن المتتالية $((\varphi_n, \psi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ من $G(F)$.متقاربة في $X\times Y$ نحو (φ, ψ). بما أنّ المتتالية من $G(F)$، فإنّ

$$\psi_n = F\varphi_n \qquad , \forall n \in \mathbb{N}$$

وهذا يلزم التّقارب للمتتاليتين (φ_n) و$(F\varphi_n)$ نحو النّهايتين φ وψ على التّرتيب. بما أنّ F مغلق فإنّ φ من $D(F)$

و$\psi = F\varphi$ ما يعني أنّ $(\varphi, \psi) \in G(F)$. ومنه $G(F)$ مغلق.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$

نفرض أنّ البيّان $G(F)$ مغلق.

لتكن (φ_n) متتالية كوشية في $D(F)$. لدينا

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{D(F)} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

من تعريف النّظيم نجد

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_X \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_Y \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

وبالتّالي $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشية في X البناخي. إذن فهي تتقارب في X ولتكن نهايتها φ. والمتتالية $(F\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشية أيضا في الفضاء البناخي Y. إذن فهي تتقارب في Y نحو النّهاية ψ.

بما أنّ المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $D(F)$ فإنّ المتتالية $((\varphi_n, F\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ من $G(F)$ وهي تتقارب نحو (φ, ψ) في الفضاء $X\times Y$. وبما أنّ $G(F)$ مغلق فإنّ (φ, ψ) من $G(F)$:

$$\varphi \in D(F) \text{ و } \psi = F\varphi$$

ولدينا

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{D(F)} &= \lim_{n,m\to\infty} \{\|\varphi_n - \varphi\|_X + \|F\varphi_n - F\varphi\|_Y\} \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_X + \lim_{n,m\to\infty} \|F\varphi_n - F\varphi\|_Y \\
&= 0
\end{aligned}$$

إذن كلّ متتالية كوشية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة في الفضاء $D(F)$ المزوّد بنظيم البيّان. ومنه $D(F)$ فضاء تامّ.

$(iii) \Longrightarrow (i)$

نفرض أنّ الفضاء $D(F)$ تامّ.

لتكن المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $D(F)$ متقاربة في X نحو φ و$(F\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة في Y نحو ψ، فهما إذن كوشيتان.

حسب تعريف النّظيم على الفضاء التّامّ $D(F)$ فإنّ المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشية فيه.

$$\exists \phi \in D(F), \quad \lim_{n\to\infty} \| \varphi_n - \phi \|_{D(F)} = 0$$

وهذا يستلزم تقارب $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نحو φ في $D(F)$ (لأنّه تامّ). أيّ أنّ المتتاليتين $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و$(F\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتان نحو ϕ ، $F\phi$ على التّرتيب. إذن $\phi = \varphi$ و $\psi = F\varphi$.

ومنه F مؤثّر مغلق. ■

مبرهنة 4.9.2

إذا كان F متباين فإنّه مغلق إذا وفقط إذا كان تطبيقه العكسي F^{-1} مغلقا(ميدان تعريفه $(Im(F)$

إثبات

❖ بما أنّ F متباين، فإنّ

$$\begin{aligned} G(F) &= D(F)\times Im(F) \\ &= Im(F)^{-1}\times D(F^{-1}) \\ &= G^s(F^{-1}) \end{aligned}$$

إذن $G(F)$ جزء مغلق إذا وفقط إذا كان $G(F^{-1})$ جزءا مغلقا، وبالاستناد على المبرهنة (1.9.2) نحصّل على المطلوب. ■

مبرهنة 5.9.2

ليكن F مؤثّرا مغلقا، إذا كان $D(F)$ مطابقا لـ X فإنّه محدود.

نتائج

1. المؤثّرات المغلقة هي التي بيانها جزء مغلق في $X\times Y$.
2. كل مؤثّر F محدود هو مؤثّر مغلق، والعكس غير صحيح دوما.

2.9.2 المؤثّرات القابلة للغلق

تعريف

ليكن X و Y ف.ش. ن، نقول عن F من $L(X,Y)$ ذي الميدان $D(F)$ أنه قابل للغلق إذا وجد T مؤثّر مغلق يطابق F على $D(F)$. (حيث $D(F) \subset D(T)$)

مبرهنة 6.9.2

F قابل للغلق إذا وفقط إذا كانت كلّ متتالية $\varphi_n \subset D(F)$ تحقّق:

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ , \ F\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi \Longrightarrow \psi = 0$$

ملاحظة 9.1.2

ليكن T تمديدا مغلقا للمؤثّر F، عندئذ البّيان $G(T)$ يحوي $G(F)$ إذن فهو يحوي $\overline{G(F)}$. نضع $D_0(T)$ مسقط $\overline{G(F)}$ على X فيضحى $\overline{G(F)}$ بيان إقتصار المؤثّر T على $D_0(T)$، وبالتّالي F مؤثّر قابل للغلق إذا وفقط إذا كان $\overline{G(F)}$ بيان لمؤثّر مغلق.

الفصل

3

الدّراسة الطّيفية

1.3 القيم الذّاتيّة 43
2.3 الاشعّة الذّاتية 44
3.3 القيم النّظامية 45
4.3 طيف المؤثّر الخطّي 46
5.3 أقسام الطّيف 48
1.5.3 الطّيف النّقطي 48
2.5.3 الطّيف المستمرّ 48
3.5.3 الطّيف الباّقي 49
6.3 نصف قطر الطّيف 50
7.3 نظرية صورة الطّيف 50
8.3 طيف المؤثّر المتراصّ 52
1.8.3 النّظرية الطّيفية للمؤثّرات المتراصّة 52
خـــاتمة 54

1.3 القيم الذّاتيّة

تعريف

ليكن X فضاء شعاعيا نظيميا منتهي البعد، وليكن F مؤثّرا خطّيا منتهي البعد من $\mathcal{L}(X)$، نقول عن λ من $\mathbb{C}$ إنّه قيمة ذاتية لـ F إذا قبلت المعادلة $F(x) = \lambda x$ حلولا غير معدومة.

ترميز

نرمز لمجموعة القيم الذّاتية بـ $\sigma_p(F)$.

مثال

للمؤثّر المطابق Id_E من $\mathcal{L}(X, Y)$ قيمة ذاتية وحيدة $\lambda = 1$، وبالفعل فالمعادلة $Id_E(x) = x$ تقبل حلولا غير معدومة.

مبرهنة 1.1.3

$\lambda \in \sigma_p(F)$ إذا وفقط إذا كان $(F - \lambda I)$ ليس متباينا على X.

إثبات

- إذا كان $\lambda \in \sigma_p(F)$ فإنّه يوجد $x \in X$ و$x \neq 0$، حيث

$$(F - \lambda I)x = (F - \lambda I)0 = 0$$

ومنه $(F - \lambda I)$ ليس متباين.

من جهة لأخرى، إذا كان $(F - \lambda I)$ ليس متباينا، فإنّه يوجد $x_1, x_2 \in X$ و$x_1 \neq x_2$، حيث

$$(F - \lambda I)x_1 = (F - \lambda I)x_2$$

$$Fx_1 - \lambda x_1 = Fx_2 - \lambda x_2$$

$$Fx_1 - Fx_2 = \lambda x_1 - \lambda x_2$$

$$F(x_1 - x_2) = \lambda(x_1 - x_2)$$

بوضع $y = x_1 - x_2$ فإنّ $F(y) = \lambda y$

ومنه $\lambda \in \sigma_p(F)$. ■

مبرهنة 2.1.3

القيم الذّاتية لـ F موجودة داخل الكرة المغلقة $\overline{B}(0,\|F\|)$ حيث

$$\sigma_P(F) \subset \{\lambda, |\lambda| \leqslant \|F\|\}, \lambda \in \mathbb{C}$$

إثبات

❖ لتكن λ قيمة ذاتية لـ F، وليكن $x \neq 0$ شعاع ذاتي $Fx = \lambda x$، ومنه

$$\begin{aligned} |\lambda| \|x\| &= \|Fx\| \\ &\leqslant \|F\| \|x\| \end{aligned}$$

إذن $|\lambda| \leqslant \|F\|$ ■

2.3 الاشعّة الذّاتية

تعريف

لتكن المجموعة التّالية:

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \{x \in X; F(x) = x\} \\ &= \{x \in X; (F-\lambda I)(x) = 0\} \\ &= Ker(F-\lambda I) \end{aligned}$$

يسمّى كل عنصر من S_λ شعاعا ذاتيا مرفقا بـ λ، ويسمي S_λ الفضاء الشّعاعي الجزئي الذّاتي المرفق بـ λ

مبرهنة 1.2.3

ليكن $F \in L(x)$، وليكن $\lambda_{1,\dots\dots,}\lambda_n \in \sigma_p(F)$ مختلفة مثنى مثنى حيث $\lambda_i \neq \lambda_j 0$ و $i \neq j$ مع $i, j = 1, \dots, n$ وليكن $x_k \in E_{\lambda_k}$ ، $x_k \neq 0$ مع $k = 1, \dots., n$ ومنه الأشعّة الذّاتية $x_1, \dots\dots, x_n$ مستقلّة خطيّا.

3.3 القيم النّظامية

تعريف

تسمّى القيم الّتي لا تتمّع من أجلها المعادلة $F(x)=\lambda x$ بأيّ حلول غير معدومة بالقيم النّظامية للمؤثّر F، وبعبارة أخرى، تكون λ قيمة نظامية إذا كان المؤثّر $(F-\lambda I)$ قابلا للقلب، وهو ما يجعل المؤثّر المقلوب $(F-\lambda I)^{-1}$ معرّفا ومستمرّا على X كلّه.

مجموعة القيم النّظامية تسمّى حالة F.

ترميز

نرمز لمجموعة القيم النّظامية بـ $\rho(F)$.

نتائج

1. إذا كان F من $\mathcal{L}(X,Y)$، حيث بعد X منته، وكانت λ قيمة ذاتية لـ F، فإنّ المؤثّر $(F-\lambda I)$لايقبل القلب.
2. إذا كان $(F-\lambda I)$ موجودا ومعرّفا على X كلّه، فإنّ λ قيمة نظامية، إذن كل قيمة λ تكون إمّا ذاتية و إمّا نظامية بالنّسبة لـ F.
   إنّ الأمر خلاف ما تقدّم في حالة كون بعد X غير منته.
   إلى جانب الحالتين الموجودتين يوجد هناك إحتمال ثالث وهو:
3. المؤثّر المقلوب $(F-\lambda I)^{-1}$ موجود (أيّ أنّ المعادلة $F(x)=\lambda$ لا تتمّع بحلّ غير معدوم) لكنّه غير معرّف على X كلّه (وقد لا يكون مستمرّا).

مبرهنة 1.3.3

ليكن X فضاءا بناخيا و F مؤثرا من $\mathcal{L}(X,Y)$، إذا كان $|\lambda|>\|F\|$ فإنّ λ قيمة نظامية لـ F..

إثبات

❖ من الواضح أنّ

$$F-\lambda I=-\lambda\left(I-\tfrac{1}{\lambda}F\right)$$

وعليه

$$\begin{aligned}(F-\lambda I)^{-1}&=-\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{1}{\lambda}F\right)^{-1}\\&=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda^k}F^k\end{aligned}$$

بما أنّ $|\lambda| >\| F \|$، فإنّ السّلسلة $(-\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda^k}F^k)$ تكون متقاربة في $\mathcal{L}(X,Y)$ وتعرّف مؤثّرا مستمرّا على X بأكمله، إذن $(F-\lambda I)$ قابل للقلب أيّ أنّ λ قيمة نظامية. ■

4.3 طيف المؤثّر الخطّي

تعريف

لتكن λ عددا من $\mathbb{C}$، إذا كان المؤثّر $(F-\lambda I)$ غير قابل للقلب، نقول عن λ عندئذ إنّه قيمة طيفية، ونرمز لمجموعة القيم الطّيفية بـ $\sigma(F)$.

نسمّي $\sigma(F)$ بطيف F.

مبرهنة 1.4.3

كلّ قيمة ذاتية هي قيمة طيفية أيّ $\sigma_p(F)\subseteq\sigma(F)$، وفي البعد المنتهي يصبح الإحتواء مساواة.

إثبات

- نفرض أنّ λ قيمة ذاتية، إذن يوجد $y\neq 0$ يحقّق $(F-\lambda I)(y)=0$، وبما أنّ F خطي

فإنّ $(F-\lambda I)(0)=0$

إذن المؤثّر $(F-\lambda I)$ غير متباين، فليس قابل للقلب.

ومنه

$$\lambda\in\sigma(F)$$

إذن

$$\sigma_p(F)\subseteq\sigma(F)$$

وإذا كان X منتهي البعد و $F:X\to Y$ مؤثّرا خطّيّا.

لتكن $\lambda\in\sigma(F)$، أيّ أنّ $(F-\lambda I)$ غير قابل للقلب أيّ أنّ:

1. $(F-\lambda I)$ ليس تقابليا وبما أنّه خطّي أيّ

$$dimX = dimker(F-\lambda I) + dimIm(F-\lambda I)$$

فإنّ

$$dimker(F-\lambda I)>1$$

ومنه

$$(F-\lambda I)(x) \;=\; 0$$

تقبل حلول غير معدومة إذن $\lambda \in \sigma_p(F)$.

2. $(F-\lambda I)$ تقابليا لكن $(F-\lambda I)^{-1}$ ليس مستمرّا.

■

مبرهنة 2.4.3

ليكن F من $\mathcal{L}(X)$، لدينا:

1. $\rho(F)$ مفتوح غير خال من $\mathbb{K}$.
2. $\sigma(F)$ متراصّ في $\mathbb{K}$.
3. $\overline{\sigma_p(F)} \subset \sigma(F)$

إثبات

❖

1. لدينا $\rho(F) \neq \varnothing$، وليكن φ تطبيق معرّف من $\mathbb{K}$ نحو $\mathcal{L}(X)$ بالشّكل التّالي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \;\; \varphi(\lambda) = \lambda\, I - F$$

ومنه

$$\rho(F) \;\; = \varphi^{-1}(G\mathcal{L}(X))$$

وأكثر من ذلك $\forall \lambda, \;\; \mu \in \mathbb{K}$ لدينا

$$\begin{aligned} ||\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)|| &= ||(\lambda-\mu)I|| \\ &\leqslant \;|\lambda - \mu| \end{aligned}$$

إذن φ مستمرّ من أجل

$(G\mathcal{L}(X))$ مفتوح من $\mathcal{L}(X)$، وهذا مايجعل

$$\rho(F) \;\; = \varphi^{-1}(G\mathcal{L}(X))$$

مفتوح من $\mathbb{K}$.

2. من (1) لدينا $\sigma(F) \;\; = \mathbb{K} \backslash \rho(F)$ مغلق، حيثما يكون محدودا إذن هو متراصّ.

3. لدينا $\sigma_p(F) \subset \sigma(F)$، وهو مغلق، إذن $\overline{\sigma_p(F)} \subset \sigma(F)$.

ملاحظة 4.1.3

في بعد غير منته، إذا كان مؤثّر لا يمتّع بأيّ قيمة ذاتية، فلا يعني ذلك أنّ طيفه خال كما يوضّح المثال التّالي:

مثال

لنعتبر في $\mathcal{L}(X,Y)$ المؤثّر F المعرّف على هذا النّحو:

$$F\left(x\right) = \left(0, x_1, ..., x_n, ...\right) \quad ; x = \left(x_1, x_2, ..., x_n, ..\right)$$

من الواضح أنّه مهما يكن λ من $\mathbb{C}$، ومهما يكن $x \neq 0$ لدينا:

$$F\left(x\right) = \left(0, x_1, ..., x_n, ...\right) \neq \lambda \left(x_1, x_2, ..., x_n, ..\right)$$

وعليه فهذا المؤثّر لا يمتّع بأيّ قيمة ذاتية، ومع ذلك فإنّ طيفه غير خال، إذن توجد عناصر λ التّي من أجلها لا يكون المؤثّر $F - \lambda I$ قابلا للقلب.

5.3 أقسام الطّيف

1.5.3 الطّيف النّقطي

تعريف

هو مجموعة الاعداد $\lambda \in \mathbb{C}$ التّي من أجلها المؤثّر $(F - \lambda I)$ لا يقبل مؤثّرا عكسيا($F - \lambda I$ ليس تقابل).

يرمز لها بـ $P_\sigma\left(F\right)$

2.5.3 الطّيف المستمرّ

تعريف

هو مجموعة الأعداد $\lambda \in \mathbb{C}$ التّي يوجد من أجلها المؤثر $(F - \lambda I)^{-1}$ ، وهو غير معرّف على X بأكمله.

ملاحظة 5.1.3

إنّ إمتلاك مؤثّر لطيف مستمرّ هي الّتي تجعل نظرية المؤثّرات في فضاء ذي بعد غير منته تختلف في مجملها عن مثليتها في فضاء ذي بعد منته، ففي هذه الأخيرة تتطابق مجموعة القيم الذّاتية مع الطّيف المستمرّ أيّ أنّ نقطة λ تكون إمّا قيمة نظامية وإمّا قيمة ذاتية.

مبرهنة 1.5.3

ليكن $F \in L(X)$ وليكن $D \subset \mathbb{C}$ حيث $\sigma(F) \subset D$ فإنّه يوجد $\delta > 0$ حيث $\sigma_P(F+S) \subset D$ من أجل كلّ $S \in L(X)$ تحقّق $\|S\| < \delta$.

إثبات

❖ لأنّ $g(\lambda) = (F - \lambda I)^{-1}$ تحليلي على $\overline{\mathbb{C}}/\sigma(F)$ ، $g(\infty) = 0$ ، $\sigma(F) \subset D$ و g محدود على $\mathbb{C}/D$

ولدينا

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}/D : \left\|(F - \lambda I)^{-1}\right\| \leqslant M < \infty$$

إذا كان $\delta = \frac{1}{M} \geqslant \|S\|$ نحصل من أجل كلّ $\lambda \in \mathbb{C}/D$:

$$((F+S) - \lambda I) = (F - \lambda I) \circ \left((F - \lambda I)^{-1} \circ S + I\right)$$

القيمتان على اليّمين قيمتان نظاميتان لأنّ

$$\left\|(F - \lambda I)^{-1} \circ S\right\| < 1$$

إذن $\lambda \in \rho(F+S)$. ■

3.5.3 الطّيف البّاقي

تعريف

هو مجموعة الأعداد $\lambda \in \mathbb{C}$ الّتي من أجلها المؤثّر $(F - \lambda I)$ يقبل مؤثّرا عكسيا، ميدان تعريفه $D(F - \lambda I)$ غير كثيف في X، ويرمز لها بـ $R_\sigma(F)$.

إستنتاج

هكذا تكون كلّ نقطة λ من $\mathbb{C}$، إمّا قيمة نظامية وإمّا قيمة ذاتية وإمّا نقطة من طيف مستمرّ.

6.3 نصف قطر الطّيف

تعريف

ليكن F من $\mathcal{L}(X,Y)$، نعرّف نصف قطر الطّيف $r(F)$ بـ:

$$r(F) = \sup_{\lambda\in\sigma(F)} |\lambda|$$

إذا كان $\sigma(F) = \varnothing$ ، إصطلاحا نضع $r(F) = 0$.

7.3 نظرية صورة الطّيف

مبرهنة 1.7.3

ليكن F من $\mathcal{L}(X,Y)$ و$P \in \mathbb{K}[X]$ ، نعرّف المؤثّر $P(F)$ من $\mathcal{L}(X,Y)$، بالطّريقة التّالية:

$$P(F) = \sum_{k=0}^{n} a_k F^k$$

أو

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

مع $n \in \mathbb{N}$ و$a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ومن أجل كلّ $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$ وP, S من $\mathbb{K}[X]$ لدينا

$$\begin{aligned} PQ(F) &= P(F)Q(F) \\ &= Q(F)P(F) \end{aligned}$$

و

$$(\lambda P + \mu Q)(F) = \lambda P(F) + \mu Q(F)$$

مبرهنة 2.7.3

إذا كان F من $\mathcal{L}(X,Y)$ وP من $\mathbb{K}[X]$ فإن $P(\sigma(F)) \subset \sigma(P(F))$

وفي حالة $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ يصبح الإحتواء مساواة.

إثبات

❖ ليكن $\lambda \in \mathbb{K}$ إذن λ جذر لـ $P(\lambda) - P$ ومنه يوجد $Q \in \mathbb{K}[X]$

حيث $\quad P(\lambda) - P(X) = (\lambda - X)Q(X)$

بحيث

$$\begin{aligned} P(\lambda)I - P(F) &= (\lambda I - F)Q(F) \\ &= Q(F)(\lambda\, I - F) \end{aligned}$$

نفرض أنّ

$$P(\lambda) \notin \sigma(P(F))$$

وبوضع

$$S = \ (P(\lambda)I - P(F))^{-1}$$

نحصّل على

$$(\lambda I - F)Q(F)S = I = SQ(F)(\lambda I - F)$$

بحيث $\lambda I - F$ قابل للقلب ومقلوبه $SQ(F) \ = Q(F)S$ ، نستخلص أنّ $\lambda \notin \sigma(F)$.
بصيغة أخرى إذا كان $\lambda \in \sigma(F)$ فإنّ $P(\lambda) \in \sigma(P(F))$
وهوالمطلوب.
نبرهن المساواة، نفرض $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ و $\deg(P) \geqslant 1$
إذا كان $\mu \in \sigma(P(F))$ و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ جذور مركّبة لكثير الحدود $(P - \mu)$.
لدينا $c \neq 0$, $P(X) - \mu = c(X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_n)$
إذن نحصل على

$$P(F) - \mu\, I = c(F - \lambda_1 I)\ldots(F - \lambda_n I)$$

لأنّ $\mu \in \sigma(P(F))$ و $(P(F) - \mu\, I)$ غير قابل للقلب، ومنه يوجد $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$
حيث $(F - \lambda_{i_0} I)$ غير قابل للقلب، بحيث $\lambda_{i_0} \in \sigma(F)$
بالإضافة لذلك، لدينا $P(\lambda_{i_0}) \ = \mu$ ،إذن

$$\mu \in P(\sigma(F))$$

■

8.3 طيف المؤثّر المتراصّ

1.8.3 النّظرية الطّيفية للمؤثّرات المتراصّة

مبرهنة 1.8.3

ليكن $F \in \mathcal{K}(X)$

1. إذا كان X غير منته البعد فإنّ $0 \in \sigma(F)$.
2. $\sigma_p(F)\setminus\{0\} = \sigma(F)\setminus\{0\}$ ومن أجل كل $\lambda \in \sigma(F)\setminus\{0\}$ الفضاء الذّاتي الجزئي المرفق بـ $Ker(\lambda I - F)$ منتهي البعد.
3. الطّيف $\sigma(F)$ لـ F غير قابل للعدّ، بالإضافة لذلك إذا كان غير منته، فإنّ عناصر $\sigma(F)\setminus\{0\}$ تشكّل متتالية $(\lambda_n)_{n\in N}$ من $\mathbb{K}$ حيث

$$\forall n \in N, |\lambda_n + 1| \leqslant |\lambda_n|$$

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$$

إثبات

❖

1. إذا كان $0 \notin \sigma(F)$ فإنّ F قابل للقلب على $\mathcal{L}(X)$ و$I = F^{-1}F \in \mathcal{K}(X)$ ومنه حسب خواصّ المؤثّر المتراصّ فإنّ المؤثّر المعرّف على X متراصّ إذا كان X منتهي البعد.
2. لدينا $\lambda \in \sigma(F)\setminus\{0\}$ إذا وفقط إذا كان

$\lambda \neq 0$ و$(\lambda I - F)$ غير قابل للقلب على $\mathcal{L}(X)$ مما يتطلّب أيضا أن يكون $\lambda \neq 0$ و$(I - \lambda^{-1}F)$ غير قابل للقلب على $\mathcal{L}(X)$، ولدينا $(I - \lambda^{-1}F)$ غير قابل للقلب إذا وفقط إذا كان ليس متباينا، إذن $\lambda \in \sigma(F)\setminus\{0\}$ إذا وفقط إذا كان $\lambda \neq 0$ و$\lambda \in \sigma_p(F)$ وأكثر من ذلك $Ker(I - \lambda^{-1}F)$ ذو بعد منته.

إذن $Ker(\lambda I - F)$ ذو بعد منته.

3. لدينا

$$\forall \varepsilon > 0; \quad \{\lambda \in \sigma(F) | \ |\lambda| \geqslant \varepsilon\}$$

مجموعة منتهية

ليكن $n \in N^\star$ مثبت إذن المجموعة $\{\lambda \in \sigma(F)|\ |\lambda|\ \geqslant \frac{1}{n}\}$ منتهية.
وليكن $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n_0}$ مجموعة عناصر مرتّبة كما يلي:

$$|\lambda_0| \geqslant \cdot \cdot \cdot \geqslant |\lambda_{n_0}| \geqslant \frac{1}{n}$$

وبالمثل المجموعة

$$\Lambda_n = \left\{\lambda \in \sigma(F)\ \left|\frac{1}{n+1} \leqslant |\lambda| < \frac{1}{n}\right.\right\}$$

منتهية، وبوضع $\Lambda_n = \{\lambda_{n_0+1}, \ldots, \lambda_{n_1}\}$ حيث العناصر λ_i مرتّبة بالطّريقة التّالية:

$$\frac{1}{n+1} \leqslant |\lambda_{n_1}| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_{n_0+1}| < \frac{1}{n} \leqslant |\lambda_{n_0}| \leqslant \cdot \cdot \cdot \leqslant |\lambda_0|$$

ونواصل العملية بالتدرّج، نستطيع جمع عناصر $\sigma(F)\backslash \{0\}$ إلى متتالية $(\lambda_n)_{\in N}$ تتقارب بالقياس نحو الصفر.

■

ملاحظة 8.1.3

ليكن $F \in \mathcal{K}(X)$ و $\varepsilon > 0$ إذن المجموعة $\{\lambda \in \sigma_p(F)/|\lambda| \geqslant \varepsilon\}$ منتهية.

خـــــاتمة

تمّ بعون الله تناول بحثنا هذا المتواضع والمتمثّل في بعض خواصّ المؤثّرات الخطّيّة في الفضاءات النّظيميّة إذ يعتبر هذا الموضوع من المواضيع الهامّـــة والشّائكة. لقد حـاولنـا إستعراض تعاريف المؤثّرات الخطّيّة وخواصّهمـا ومجمل المفاهيم المتعلقة بهما وركّزنا في الأخير على العلاقة القائمة بهمـا.

وقد ساعدنا هذا البحث على توسيع معلوماتنا و أعطانا أجوبة لكثير من تساؤلاتنا. نتمنىّ أنّنا لخصّنا أهمّ خصائص المؤثّرات الخطّيّة في الفضاءات النّظيميّة ووضعناها في وثيقة يمكن الاستفادة منهـا مستقبلاً.

إنّ من طبيعة الأعمـال، لا سيما العلمية منها لدى البشر، ألاّ ترقى إلى الكمال، مهما اشتدّ الحرص على اتقانها واجتمعت كلّ الأسبـاب دونها وحـازت على النّصيب الأوفر من عزائم أصحابهـا. إنّها تظلّ ناقصة تستدعي جوانب منهـا على الدّوام تدقيقا وتنويرا لذا نوجّه دعوتنـا إلى كلّ الأسـاتذة والزّملاء الكرام للإهتمام بهذا البحث المتواضع وتنقيحه قدرالإمكان شاكرين لهم صنيعهم سلفـا. و خير الختام الحمد لله حمدا كثيرا.

قائمة المراجع

[1] م.حازي، الدّروس الوافية في الفضاءات المترية، ديوان المطبوعات الجامعية،2013، الجزائر.

[2] م.حازي،المقعدّ المجليّ في التحّليل الدآليّ، ديوان المطبوعات الجامعية، 2013، الجزائر .

[3] ج.شيلوف،التحّليل الريّاضي التّوابع ذات متغيّر واحد"الجزء الثّاني"،-تعريب أبو بكر خالد سعد الله، ديوان المطبوعات الجامعية، 1983، الجزائر.

[4] إ. كريزيك،مدخل إلى التّحليل الدآليّ و تطبيقاته، -تعريب د.خضر حامد الأحمد، 1 مارس 1985، دمشق.

[5] أ. كولموغورف- س.فومين،مبادئ في نظرية التوّابع و في التحّليل التاّبعي، -تعريب أبو بكر خالد سعد الله، ديوان المطبوعات الجامعية، ديسمبر 1973، الجزائر.

[6] V.Ehrlacher- G.Stoltz; *Analyse Spectrale, 20 Juin .2015*

[7] W.Hengartner- M.Lambert- C.Reischer; *Introduction à L'analyse Fonctionnelle, Les Presses de l'Univercite du Quebec, 1981.*

[8] S.Maigot- D.Manceau; *Thèorie Spectrale.*

[9] J.Voedts; *Cour de Mathèmatiques MP-MP*, Ellipses edition marketing S.A, Paris cedex, 2002.*

ملخص

تمّ تقسيم هذه المذكّرة إلى ثلاث فصول:

نسرد في الفصل الأوّل بعض التّعاريف الهامّة والمفاهيم الأساسية حول الفضاءات المتريّة و النّظيميّة، كما تطرّقنا إلى مفهوم الفضاء البّناخي، و مفهوم التّراصّ في الفضاءات النّظيميّة .

أمّا بالنّسبة للفصل الثّاني فقد قدّمنا مفهوم المؤثّرات الخطّيّة وذلك بسرد بعض التّعاريف والمبرهنات والوقوف على بعض خواصّ البّعض منها، كما عرّجنا على الأشكال الخطّيّة .

وفيما يخصّ الفصل الأخير فقد أدرجنا فيه الدّراسة الطّيفيّة وبعض أقسام الطّيف، ختاما بطيف المؤثّر المتراصّ، و النّظريّة الطّيفيّة للمؤثّرات المتراصّة.

Resumé

This note is divided into three chapters,we discussed the first chapter the definitions and the essential on the metric and normed spaces and concepts of Banach space and the compact in normed space,second chapter we presented concept of linear operators,and some deffinitions and theoremes,and linear formsnthird chapter we have dealt the types of spectrumnfinally the spectrum of the compact operator and the spectrl theory with the compact operators

Abstract

This note is divided into three chapters,we discussed the first chapter the definitions and the essential on the metric and normed spaces and concepts of Banach space and the compact in normed space,second chapter we presented concept of linear operators,and some deffinitions and theoremes,and linear formsnthird chapter we have dealt the types of spectrumnfinally the spectrum of the compact operator and the spectrl theory with the compact operators